TRAITEMENT DU SIGNAL

Signaux Aléatoires

Travaux Pratiques

3° année

Effets de la quantification uniforme
Méthodes d'amélioration

Introduction à l'étude proposée

Dans les applications pratiques de traitement de signal, de plus en plus les signaux analogiques sont transformés en signaux numériques. En effet, avec les progrès des processeurs, notamment en terme de puissance de calcul, les traitements numériques sont devenus souvent plus efficaces et plus facilement mis en œuvre.

Le passage du domaine continu au domaine numérique est alors réalisé par deux opérations :

- l'échantillonnage, qui consiste à prélever des échantillons d'un signal à des instants donnés (discrétisation en temps) ;

- la quantification, qui consiste à attribuer à chaque échantillon, un nombre appartenant à un ensemble déterminé (discrétisation en amplitude).

Cette dernière opération, la quantification, amène donc à commettre des erreurs entre l'amplitude réelle et la valeur de l'amplitude attribuée.

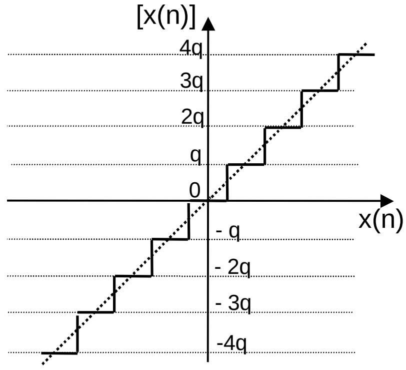
L'objet de ce TP est d'étudier les effets néfastes liés à la quantification et de présenter une méthode permettant de les corriger.

Présentation théorique

La quantification par arrondi

La représentation d'une grandeur analogique par un nombre binaire de longueur finie entraîne une erreur appelée erreur de quantification dont la valeur est fonction de l'approximation faite (arrondi (seule prise en compte ici) ou troncature). Par exemple, une quantification sur N bits revient à considérer $M = 2^N$ niveaux (valeurs possibles).

En notant x(n), la valeur réelle et [x(n)] la valeur quantifiée, la représentation ci-contre illustre le principe de la quantification par arrondi. q est appelé le pas de quantification.



Erreur de quantification

La valeur quantifiée est notée [x(n)] = x(n) + e(n), où e(n) représente l'écart entre la valeur réelle et la valeur attribuée par la quantification, c'est-à-dire l'erreur de quantification commise.

Modèle statistique de l'erreur de quantification

Dans la pratique, les signaux étant généralement aléatoires, une description statistique de la quantification permet de déterminer un modèle statistique de l'erreur de quantification dans les études.

L'erreur de quantification, e(n), n'étant pas prévisible, elle est considèrée comme une variable aléatoire avec une densité de probabilité uniforme sur l'intervalle des erreurs possibles, avec les hypothèses suivantes :

- e(n) est non corrélé ;
- e(n) est à densité spectrale uniforme (e(n) est donc un bruit blanc) ;
- e(n) est stationnaire, ergodique et réel.

Rapport signal sur bruit lors d'une quantification

Le rapport signal sur bruit de quantification est défini par :

$$\left.\frac{S}{B}\right|_{dB} = 10 \log\left(\frac{S}{B}\right)$$

où S est la puissance du signal et B la puissance de l'erreur commise.

Exercice 1 : Etude de la quantification

Partie théorique

1. Déterminer un encadrement de l'erreur commise lors d'une telle quantification.

2. Représenter, la densité de probabilité $p_e(e)$ de l'erreur de quantification. En déduire sa moyenne statistique et sa variance.

Pour une application pratique, quelle condition impose le fait que l'on considère une densité de probabilité répartie uniformément ?

3. Dans le cas où x(n) est une variable aléatoire centrée, de variance σ^2, supposons que la plage de valeurs est telle que $2A = 2F.\sigma$ où F est appelée facteur de forme.

Déterminer alors le pas de quantification en fonction de F, σ et N, avec N le nombre de bits de la quantification.

Remarque : si x est une gaussienne, en adoptant la règle des « 3 sigma », on choisit un facteur de forme égal à trois. Pour un signal de parole, l'hypothèse gaussienne est assez mal vérifiée et on préfère prendre une valeur du facteur de forme égale à quatre.

4. Montrer que le rapport signal sur bruit peut se mettre sous la forme suivante :

$$\left.\frac{S}{B}\right|_{dB} = 6N + 10.\log\left(\frac{3}{F^2}\right)$$

Quelle est l'amélioration apportée par bit de codage supplémentaire ?

5. Partie simulation (programme donné en annexe)

51. Générer un signal aléatoire de 2000 échantillons et d'écart-type égal à un, en utilisant la fonction « randn ». Prélever, à partir de l'aide de Matlab, les caractéristiques du signal ainsi généré. Déterminer sa puissance moyenne.

52. Quantifier (par arrondi) le signal aléatoire généré précédemment pour un nombre de bits allant de 1 à 7. La fonction « floor » ou ses semblables pourra être utilisée.

53. Dans chaque cas (nombre de bits allant de 1 à 7), calculer et tracer l'histogramme de l'erreur commise lors de la quantification. Cette erreur est définie comme la différence entre le signal aléatoire généré et celui quantifié. L'histogramme pourra être représenté en utilisant la fonction « hist ». Vérifier l'hypothèse d'équirépartition du bruit de quantification.

54. Toujours dans chaque cas, déterminer le rapport signal sur bruit en utilisant d'une part, le calcul direct à partir du signal généré et de l'erreur commise lors de la quantification, et d'autre part, la relation déterminée théoriquement. Pour la comparaison, représenter sur un même graphique ces rapports signal sur bruit en fonction du nombre de bits.

Remarque : pour déterminer le facteur de forme, il faut utiliser la relation $A = F.\sigma$, dans laquelle σ^2 représente la puissance du signal.

Exercice 2 : Mise en forme spectrale du bruit de quantification

1. Génération de signaux

Soit trois sinusoïdes d'amplitude [1,2 3,2 2,7] et de fréquence [437 Hz 504 Hz 1367 Hz] respectivement.

Simulation

Générer et représenter les deux suites d'échantillons, SE1 et SE4, correspondant à la somme de ces sinusoïdes aux fréquences d'échantillonnage f_{e1} = 44,1 kHz et $f_{e2} = 4f_{e1}$ respectivement.

SE1 : séquence représentant la somme des trois sinusoïdes échantillonnée à la fréquence f_{e1} ;

SE4 : séquence représentant la somme des trois sinusoïdes échantillonnée à la fréquence f_{e2}.

2. Interpolation

Dans la suite de l'étude, la fréquence d'échantillonnage utilisée est f_{e1}.

Afin de « voir « les erreurs dues à la quantification, il est nécessaire que celles-ci soient nettement supérieures aux erreurs introduites lors du calcul des opérations d'interpolation. Dans cette question, l'objectif est de comparer la séquence obtenue par interpolation (approximation de l'échantillonnage à la fréquence fe_2) à la séquence SE4, de façon à justifier les choix ultérieurs pour les nombres de bits de codage afin de pouvoir effectuer une simulation qui met en évidence les propriétés de la quantification.

Simulation

21. A l'aide de la fonction d'interpolation de Matlab (« interp »), calculer la séquence SE4int correspondant à la fréquence f_{e2}.

22. Comparer cette séquence à la séquence exacte SE4 en calculant le rapport signal (SE4) sur bruit (écart SE4-SE4int). Effectuer, si nécessaire, le calcul sur une plage réduite de façon à limiter les effets de bord liés à l'interpolation et exprimer le résultat en décibels.

23. Quel est le nombre de bits maximum nécessaires pour obtenir un même ordre de grandeur du rapport signal sur bruit lors d'une quantification ? Pour la suite, le nombre de bits est limité au maximum à 8. Ce choix est-il convenable ?

3. Rapport signal sur bruit de la quantification

Simulation

31. Quantifier sur N_1 = 8 bits les échantillons prélevés à la fréquence f_{e1} = 44,1 kHz. On note SE1Q8 la séquence obtenue.

32. Calculer alors le rapport signal sur bruit de la quantification et comparer à la formule théorique.

33. Reprendre la question avec N_2 = 6 bits, en notant SE1Q6 la séquence obtenue.

34. La différence entre les deux rapports signal sur bruit obtenu est-elle également en accord avec la théorie ?

4. Sur-échantillonnage

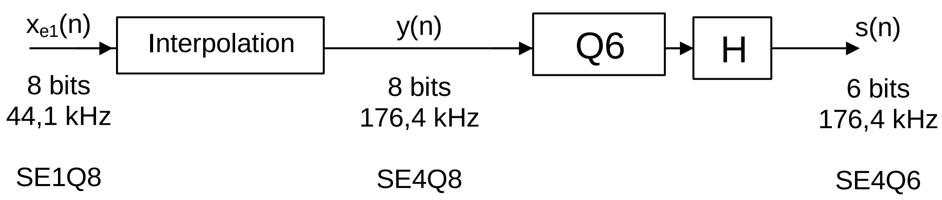
41. Théorie

Considérons la séquence échantillonnée à f_{e1} et quantifiée sur 8 bits, SE1Q8. Cette séquence est sur-échantillonnée (à la fréquence f_{e2}) , puis quantifiée sur 6 bits.

Le fait d'effectuer l'opération de quantification sur le signal sur-échantillonné permet de répartir la puissance totale du signal du bruit de quantification dans la bande [$-f_{e2}/2$, $f_{e2}/2$].

En revenant dans la bande [$- f_{e1}/2$, $f_{e1}/2$] par filtrage, la puissance du bruit de quantification est divisée par 4 sans changer celle du signal utile. Le gain est donc de 6 dB.

Ces opérations peuvent être schématisées sous la forme suivante :



Q6 symbolise un quantificateur qui passe de 8 à 6 bits et H le filtrage.

Justifier les affirmations énoncées ci-dessus en vous appuyant sur des schémas ou calculs simples.

<u>Remarque</u> : Cette quantification du signal sur-échantillonné ne peut être poursuivie à l'extrême car le résultat obtenu dépend de l'hypothèse de blancheur du bruit de quantification dans l'ensemble de la bande. Dans le cas où cela n'est pas vérifié le gain peut être très inférieur à 6 dB.

42. Application et simulation

421. Sur-échantillonner à la fréquence f_{e2} la séquence SE1Q8 en utilisant la fonction d'interpolation, la séquence obtenue est notée SE4Q8.

422. Quantifier le résultat sur 6 bits pour obtenir SE4Q6.

423. La séquence SE4Q6 contenant du bruit de quantification hors de la bande de fréquence du signal SE1, il est utile de la filtrer avant de comparer les séquences. Pour cela un filtre passe-bas RIF de fréquence de coupure $f_{e1}/2$ est utilisé. Justifier le choix de cette fréquence de coupure.

En utilisant la fonction donnée ci-dessous, déterminer la réponse impulsionnelle du filtre RIF, et en déduire sa réponse en fréquence. Représenter le module en décibels de la réponse en fréquence.

424. Observer les différents signaux : SE4, SE4Q6 avant filtrage et SE4Q6 après filtrage. Ajuster le problème de décalage lié au filtrage.

425. Calculer le rapport signal sur bruit dans les deux cas, avant et après filtrage. En déduire le gain obtenu. Comparer par rapport à l'étude qui précède.

```
function h=rif(N,f0)
% Filtre RIF synthétisé par la méthode de la fenêtre
% USAGE :   h  = rif(N,f0)
%           N  = longueur du filtre
%           f0 = fréquence de coupure normalisée

P=fix(N/2);

ham=0.54-0.46*cos(2*pi*(0:P-1)/(N-1)); % Fenêtre de Hamming

if (rem(N,2)==0)         % Cas où N est pair
   d=((-P:-1)+0.5)*pi;  % Calcul sur une moitié
   h=sin(2*d*f0)./d;    % Réponse impulsionnelle de la fenêtre rectangle
   h=h.*ham;            % Apodisation
   h=[h h(P:-1:1)];     % Symétrie

else                     % Cas où N est impair
   d=(-P:-1)*pi;        % Cacul sur une moitié
   h=sin(2*d*f0)./d;    % Réponse impulsionnelle de la fenêtre rectangle
   h=h.*ham;            % Apodisation
   h=[h 2*f0 h(P:-1:1)];% Symétrie et l'échantillon central
end
```

Remarques

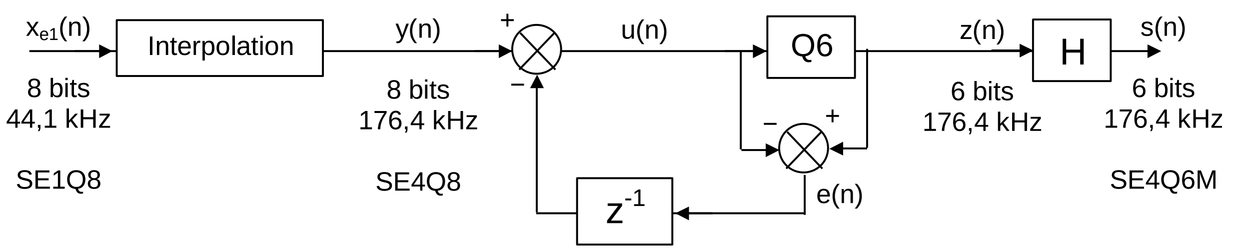
1) La fréquence f_0 est une fréquence normalisée par rapport à la fréquence d'échantillonnage ; elle est donc égale à la fréquence de coupure du filtre divisée par la fréquence d'échantillonnage.

2) Le filtre entraîne un déphasage qu'il faudra compenser par la suite pour réaliser les comparaisons des signaux.

5. Mise en forme spectrale du bruit

Aspect théorique

De façon à améliorer encore le rapport signal sur bruit lors de la quantification, la quantification est réalisée conjointement à une mise en forme spectrale du bruit, comme indiquée par le dispositif suivant :



51. e(n) peut être assimilé à un bruit blanc, de densité spectrale de puissance égale à $q^2/12$ dans la bande.

Montrer que z(n) = y(n) + [e(n) – e(n – 1)]. Cette expression illustre le fait que tout se passe comme si on ajoutait un bruit $\varepsilon(n)$ = e(n) – e(n – 1) à y(n).

52. Montrer que le passage de e(n) à $\varepsilon(n)$ est un filtrage linéaire. En déduire sa réponse impulsionnelle. Déterminer la nature du filtre (passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande ?) en calculant le module de sa réponse en fréquence.

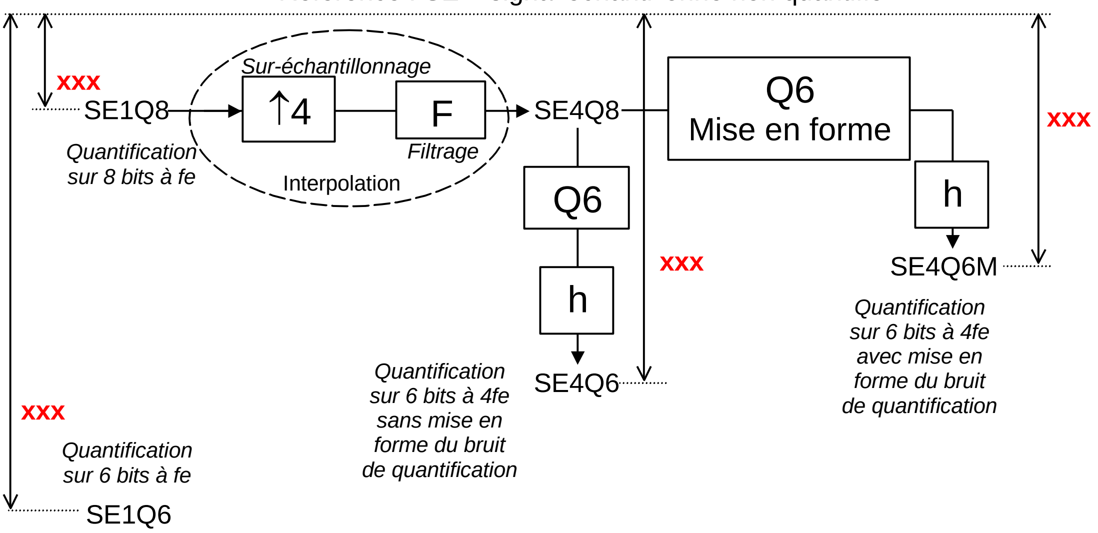
53. Montrer que le rapport signal sur bruit est amélioré d'environ 6 dB par rapport à un système qui quantifierait directement y(n).

54. Simulation

Mettre en œuvre la mise en forme spectrale du bruit et déterminer le rapport signal sur bruit à partir du traitement proposé (mise en forme spectrale puis filtrage). Quel est le gain obtenu ?

6. Récapitulatif

A partir de l'ensemble des études précédentes, compléter le schéma de synthèse suivant en indiquant dans chaque cas les valeurs du rapport signal sur bruit obtenues selon les traitements. Conclure.



7. Conclusion

Le traitement avec mise en forme du bruit de quantification a été utilisé dans les premières platines CD (disque compact) avec N_1 = 16 et N_2 = 14. La raison en était que les convertisseurs numérique/analogique 16 bits coûtaient beaucoup plus chers que les convertisseurs 14 bits ; On préférait alors implanter ce système de mise en forme du bruit de quantification pour rattraper la perte de performances.

On retrouve aujourd'hui un tel procédé dans les platines CD grand public dites one-bit stream. Leur principal avantage est l'utilisation de convertisseurs 1 bit. Evidemment cela nécessite un facteur de sur-échantillonnage très grand. En pratique, on rencontre les valeurs suivantes : avec F_e = 44,1 kHz et un facteur de sur-échantillonnage de 64, on a un débit de 44100 x 64 = 2 882 400 bits/s. Pour un signal de bande 22,1 kHz, les systèmes actuels fournissent une dynamique de l'ordre de 18 à 20 bits.

A noter que les opérations de mise en forme du bruit sont utilisées en acquisition et en restitution.

Quelques chiffres

CD-audio : fréquence d'échantillonnage 44,1 kHz et quantification sur 16 bits (débit de 706 kbps et RSB d'environ 96 dB)

DVD-audio : fréquence d'échantillonnage jusqu'à 192 kHz et quantification jusqu'à 24 bits (débit de 4,6 Mbps et RSB d'environ 144 dB)

ANNEXE

```
% 1. Etude de la quantification
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% REMARQUE
% ---> SI le signal est à ddp uniforme :OK
% ---> SI le signal est à ddp gaussienne : il faudrait F=2,3
%      or théoriquement on trouve F=3
%      avec un décalage théorie - simulation de 5 dB
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Initialisation
clear all ; close all ; clc

% Génération d'un signal aléatoire blanc gaussien
N=2000;              % Nombre d'échantillons
sigma=1/3;           % Par définition pour obtenir un signal compris entre -1 et
+1
x=sigma*randn(1,N); % Coefficient permettant d'obtenir une amplitude à un dans
l'intervalle + ou - 3 sigma
% x=2*rand(1,N)-1;  % Loi uniforme : OK avec F2 sans saturation
A=3*sigma;           % Amplitude du signal
F1=A/sigma;          % Facteur de forme sans tenir compte de la saturation

% Effet de saturation
eps=0.0001;
for ii=1:N
    if x(ii)>A
        x(ii)=A-eps;
    end
    if x(ii)<-A
        x(ii)=-A;
    end
end

% Calcul de la puissance et du facteur de forme
Ps=x*x'/length(x);
Ps2=var(x);                 % Remarque : 2° calcul de la puissance du signal
F2=max(x)/sqrt(Ps);         % Remarque : 2° calcul du facteur de forme en tenant
compte de la saturation
```

```
% Calcul du pas de quantification
Nbit=[1 2 3 4 5 6 7];
NbNiveau=2.^Nbit;
q=2*A./(NbNiveau');

% Quantification
for ii=1:length(Nbit)
    xQ(ii,:)=q(ii)*floor(x/q(ii))+q(ii)/2;
end

% % Quantification par arrondi
% for ii=1:length(Nbit)
%     x1(ii,:)=x*NbNiveau(ii)/2;
%     x2(ii,:)=floor(x1(ii,:))+0.5;
%     xQ(ii,:)=x2(ii,:)*q(ii);
% end

% Quantification par troncature
% for ii=1:length(Nbit)
%     x1(ii,:)=x.*NbNiveau(ii)/2;
%     x2(ii,:)=floor(x1(ii,:)); % ou fonction ceil
%     xQ(ii,:)=x2(ii,:)*q(ii);
% end

% Affichage des signaux quantifiés
figure(1)
subplot(221);plot(xQ(1,:));hold on;plot(xQ(1,:),'rx');grid
subplot(222);plot(xQ(3,:));hold on;plot(xQ(3,:),'rx');grid
subplot(223);plot(xQ(4,:));hold on;plot(xQ(4,:),'rx');grid
subplot(224);plot(xQ(7,:));hold on;plot(xQ(7,:),'rx');grid

% Calcul de l'erreur de quantification
xM=zeros(length(Nbit),N);
for ii=1:length(Nbit)
    xM(ii,:)=x;
end
b=xM-xQ;

% Affichage des histogrammes des erreurs
figure(2)
subplot(221);hist(b(1,:),10);grid
subplot(222);hist(b(2,:),10);grid
subplot(223);hist(b(3,:),10);grid
subplot(224);hist(b(4,:),10);grid

% Calcul du RSB
for ii=1:length(Nbit)
    % F3(ii)=max(xQ(ii,:))/sqrt(xQ(ii,:)*xQ(ii,:)'/length(xQ(ii,:))); % Facteur
de forme à partir du signal quantifié
    Pb(ii)=b(ii,:)*b(ii,:)'/length(b(ii,:));
    Pb2(ii)=q(ii).^2/12;    % Remarque : 2° calcul de la puissance du bruit
    Pb3(ii)=var(b(ii,:));   % Remarque : 3° calcul de la puissance du bruit
    RSBexp(ii)=10*log10(Ps/Pb(ii));
    Fcarre=F2^2;
    RSBthe(ii)=6*ii+10*log10(3/Fcarre);
end

% Affichage du RSB
figure(3)
plot(RSBthe,'b')
hold on
plot(RSBthe,'bx')
plot(RSBexp,'r')
plot(RSBexp,'rx')
grid
```