Лабораторная работа №1-2. Итерационные методы. Решения нелинейных уравнений.

Бадрутдинов Айрат 4302 Буравкин Никита 4302

СОДЕРЖАНИЕ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

Научиться решать нелинейные уравнения методом простых итераций, методом Ньютона и модифицированным методом Ньютона с помощью ЭВМ.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ:

1. Изучить метод простых итераций, метод Ньютона и модифицированный метод Ньютона для решения нелинейных уравнений.
2. На конкретном примере усвоить порядок решения нелинейных уравнений с помощью ЭВМ указанными методами.
3. Составить программу (программы) на любом языке программирования и с ее помощью решить уравнение с точностью $\varepsilon = 0.001$ и $\delta = 0.01$. Сделать вывод о скорости сходимости всех трех методов.
4. Изменить $\varepsilon = \varepsilon/10, \delta = \delta/10$ и снова решить задачу. Сделать выводы о: скорости сходимости рассматриваемых методов; влиянии точности на скорость сходимости; влиянии выбора начального приближения в методе простых итераций на скорость сходимости.

ЗАДАНИЕ (ВАРИАНТ №14)

1. Доказать графическим и аналитическим методами существование единственного корня нелинейного уравнения

$$f(x) = 3\cos(2x) - x + 0.25 \tag{1}$$

на отрезке $[3.2, 3.5]$.

2. Построить рабочие формулы метода простых итераций, метода Ньютона и модифицированного метода Ньютона, реализующие процесс поиска корня нелинейного уравнения (1) на указанном отрезке.
3. Составить программу (программы) на любом языке программирования, реализующие построенные итерационные процессы.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ РАБОТЫ

1. Докажем **графическим** методом единственность корня нелинейного уравнения (1). Из графика функции $f(x) = 3\cos(2x) - x + 0.25 = 0$ на Рис.1 видно, что функция $f(x)$ пересекает ось в одной точке, являющейся приближенным значением корня нелинейного уравнения (1). Но так как данная функция имеет сложный аналитический вид, то преобразуем уравнение (1) к виду $\cos(2x) = x - 0.25$ и построим два графика $y = \cos(2x)$ и $y = x - 0.25$, имеющих более простой аналитический вид (Рис.2). Абсцисса точки пересечения графиков является приближенным значением корня. Заметим, что графический метод показывает

количество корней исходного уравнения, но не доказывает единственность корня на отрезке.

Рисунок 1

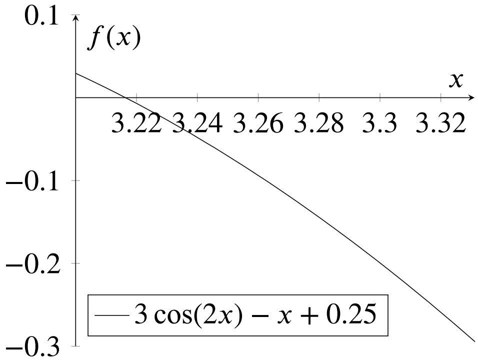
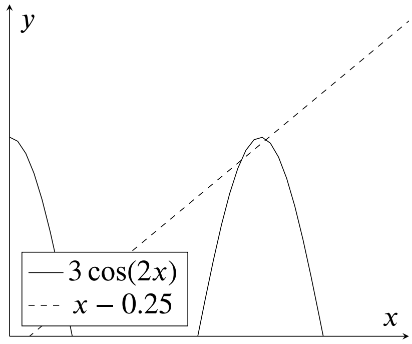


Рисунок 2



Аналитический метод. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[3.2,\ 3.5]$, имеет на концах отрезка разные знаки ($f(3.2) = 0.029555; f(3.5) = -0.98829$), а производная функции $f(x)$ не меняет знак на отрезке ($f'(x) = -6\sin(2x) - 1) > 0, \forall x \in [3.2, 3.5]$). Следовательно, нелинейное уравнение (1) имеет на указанном отрезке единственный корень.

2. **Метод простых итераций.** Построим функцию $\phi(x) = x + cf(x)$. Константа c выбирается из достаточного условия сходимости

$$\left|\phi'(x)\right| < 1, \forall x \in [a, b] \tag{2}$$

Если производная $f'(x) > 0, \forall x \in [a, b]$, то значение c выбирается из интервала $\frac{-2}{f'(x)} < c < 0$, если производная $f'(x) < 0, \forall x \in [a, b]$, то – из интервала $0 < c < \frac{-2}{f'(x)}$. Так как для рассматриваемого примера $0 < c < \frac{-2}{f'(x)}$ всюду отрицательна на отрезке $[3.2, 3.5]$, то придавая переменной x различные значения из интервала $[3.2, 3.5]$ и выбирая наименьший интервал $\frac{-2}{f'(x)} < c < 0$, получим $0 < c < 0.4047$. Выбираем произвольное значение c из этого интервала. Пусть $c = 0.2$. Тогда рабочая формула метода простых итераций будет иметь вид:

$$x_{n+1} = x_n + 0.2 \times (3\cos(2x_n) - x_n + 0.25), n = 0, 1, 2, ... \qquad (3)$$

Итерационный процесс (3) можно начать, задав произвольное начальное приближение $x_0 = [3.2, 3.5]$. Итерационный процесс (3) заканчивается при одновременном выполнении двух условий:

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| \leq \varepsilon \text{ и } \left|f(x_n + 1) \leq \delta\right| \qquad (4)$$

В этом случае значение является приближенным значением корня нелинейного уравнения (1) на отрезке $[3.2, 3.5]$.

Метод Ньютона. В качестве начального приближения x_0 здесь выбирается правый или левый конец отрезка, в зависимости от того, в котором выполняется достаточное условие сходимости метода Ньютона вида:

$$f(x_0)f''(x_0) > 0 \qquad (5)$$

Заметим, что в точке $x = 3.2$ условие (5) не выполняется, а в точке $x = 3.5$ – выполняется. Следовательно, в качестве начального приближения выбирается точка $x_0 = 3.5$. Рабочая формула метода Ньютона $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, 2, ...$ для данного уравнения запишется так:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{3\cos(2x) - x + 0.25}{-6\sin(2x) - 1)}, n = 0, 1, 2, ... \tag{6}$$

Условия выхода итерационного процесса (6) аналогичны условиям (4) метода простых итераций.

Модифицированный метод Ньютона. Начальное приближение выбирается аналогично методу Ньютона, т.е. $x_0 = 0$. Рабочая формула модифицированного метода Ньютона для данного примера запишется так:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{3\cos(2x) - x + 0.25}{-6\sin(2x) - 1)}, n = 0, 1, 2, ... \tag{7}$$

Условия выхода итерационного процесса (7) аналогичны условиям (4) метода простых итераций.

Замечание: для того, чтобы сделать вывод о скорости сходимости методов, необходимо в каждом методе выбирать одинаковое начальное приближение.

3. **Блок-схема метода простых итераций**, метода Ньютона и модифицированного метода Ньютона приведена на рисунке 3.

Рисунок 3

ПРОГРАММА НА ЯЗЫКЕ ПРОГРАММИРОВАНИЯ С

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int main() {
    int n = 0;
    double c = 0.2, eps = 0.001, sigma = 0.01;
    double a, b, z, x, x0, y;
    x = x0 = 3.3;
    do {
        y = x + c * (3 * cos(2 * x) - x + 0.25);
        z = x;
        printf("%d\t%.4f\t%.4f\t%.4f\t%.4f\n", n++, x, y, fabs(y - x),
                fabs(3 * cos(2 * y) - y + 0.25));
```

```
        x = y;
        a = fabs(z - x);
        b = fabs(3 * cos(2 * y) - y + 0.25);
    } while (a > eps && b > sigma);
    printf("res:\t%.4f\n", x);
    return (0);
}
```

Результаты программы

```
0   3.3000  3.2601  0.0399  0.0941
1   3.2601  3.2413  0.0188  0.0508
2   3.2413  3.2312  0.0102  0.0292
3   3.2312  3.2253  0.0058  0.0173
4   3.2253  3.2219  0.0035  0.0105
5   3.2219  3.2198  0.0021  0.0064
res:    3.2198
```

ВЫВОДЫ

Я научился решать нелинейные уравнения методом простых итераций, методом Ньютона и модифицированным методом Ньютона с помощью ЭВМ.