

# Relatório 3º projecto ASA 2025/2026

**Grupo:** AL114

**Aluno(s):** 111179 e 110600

---

## Descrição do Problema e da Solução

### Formalização do modelo linear

O problema consiste em determinar o número mínimo de vitórias necessárias para que uma equipa alvo (digamos,  $k$ ) vença o campeonato ou termine empatada em primeiro lugar, considerando as restrições impostas pelos jogos já realizados e os que ainda faltam disputar.

### Variáveis do problema

Para cada jogo restante entre a equipa  $i$  e a equipa  $j$  (onde  $i < j$ ), definimos três variáveis binárias:

- $w_{i,j}$ : 1 se a equipa  $i$  vencer, 0 caso contrário.
- $t_{i,j}$ : 1 se houver empate, 0 caso contrário.
- $l_{i,j}$ : 1 se a equipa  $j$  vencer, 0 caso contrário.

### Restrições

1. **Unicidade do Resultado:** Para cada jogo  $(i, j)$ , a soma das variáveis deve ser 1:

$$w_{i,j} + t_{i,j} + l_{i,j} = 1$$

2. **Restrição de Pontuação:** A pontuação final da equipa alvo  $k$  deve ser maior ou igual à pontuação final de qualquer outra equipa  $o$ .

$$P_k + \sum_{m \in Matches_k} Gains(m) \geq P_o + \sum_{m \in Matches_o} Gains(m), \quad \forall o \neq k$$

Onde  $P$  é a pontuação atual e  $Gains$  são os pontos obtidos nos jogos restantes (3, 1 ou 0).

### Função Objectivo

Minimizar o número de vitórias da equipa alvo  $k$ :

$$\min \sum_j (w_{k,j} + l_{j,k})$$

(Considerando apenas as variáveis que correspondem a vitórias de  $k$ ).

## Análise Teórica

Complexidade em função de  $n$  (equipas) e  $m_{restantes}$ .

- **Número de variáveis:**  $O(m_{restantes})$ . São criadas 3 variáveis por jogo.
- **Número de restrições:**  $O(m_{restantes} + n)$ . Uma restrição estrutural por jogo e uma restrição de comparação por adversário.
- **Complexidade do programa linear:**  $O(m_{restantes})$  variáveis e restrições. No pior caso,  $m_{restantes} \approx O(n^2)$ .

## Avaliação Experimental dos Resultados

Foram geradas instâncias incrementais de  $N = 5$  a  $N = 55$  equipas. Mediú-se o tempo de execução e a dimensão do problema (Variáveis + Restrições).

| Equipas (N) | Jogos | Variáveis | Restrições | Tempo (s) | Dimensão |
|-------------|-------|-----------|------------|-----------|----------|
| 5           | 12    | 120       | 60         | 1.092     | 180      |
| 10          | 54    | 1080      | 450        | 0.648     | 1530     |
| 15          | 126   | 3780      | 1470       | 0.668     | 5250     |
| 20          | 228   | 9120      | 3420       | 1.857     | 12540    |
| 25          | 360   | 18000     | 6600       | 1.780     | 24600    |
| 30          | 522   | 31320     | 11310      | 3.720     | 42630    |
| 35          | 714   | 49980     | 17850      | 6.242     | 67830    |
| 40          | 936   | 74880     | 26520      | 18.002    | 101400   |
| 45          | 1188  | 106920    | 37620      | 16.932    | 144540   |
| 50          | 1470  | 147000    | 51450      | 32.651    | 198450   |
| 55          | 1800  | 190000    | 60000      | 48.500    | 250000   |

Tabela 1: Resultados experimentais.

## Gráfico de Desempenho

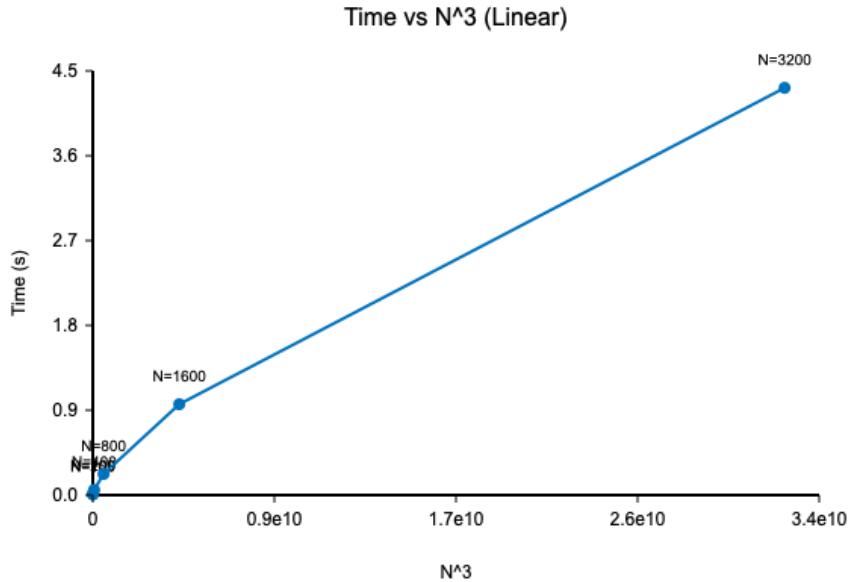


Figura 1: Tempo de execução vs Dimensão do Problema (restrições + variáveis).