



高等代数

宋浩版

作者：wali-robot

组织：B 站大学

时间：2021

目录

1	行列式	1
1.1	二阶行列式	1

第一章 行列式

1.1 二阶行列式

中国的甬管是《高等代数》还是《线性代数》一般都是从行列式开始讲的，但是老外的课本一般都是从矩阵或者方程组开始讲的。所以很多人说我们中国人课本不讲道理，莫名其妙就来了个行列式，首先第一个问题：为什么要引入行列式这么一个概念？这就得从方程组开始说起。假设我们解一个二元一次方程组

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5 & \textcircled{1} \\ 7x + 9y = 11 & \textcircled{2} \end{cases}$$

这是一个二元一次线性方程组，大家会的就是消元法，所以我们就开始消元。首先消去 y ，将 $\textcircled{1} \times 9$ ； $\textcircled{2} \times 4$ ，于是得到了

$$\begin{cases} 3 \times 9x + 4 \times 9y = 5 \times 9 & \textcircled{3} \\ 7 \times 4x + 9 \times 4y = 11 \times 4 & \textcircled{4} \end{cases}$$

然后我们用 $\textcircled{3} - \textcircled{4}$ ，就能将 y 消去，得到了

$$(3 \times 9 - 7 \times 4)x = 5 \times 9 - 11 \times 4$$

所以，经过移项可得

$$x = \frac{5 \times 9 - 11 \times 4}{3 \times 9 - 7 \times 4}$$

这样就得到了 x 。同样的，也可以采用类似的方法消去 x 而得到 y ，这里我(宋老师)就不写一遍了。如果将 x 消去，那么就可以得出

$$y = \frac{3 \times 11 - 5 \times 7}{3 \times 9 - 7 \times 4}$$

如果我们就这样把结果计算出来是可以的，但是我们看下最终结果的这个形式它是有规律的。甬管它的分子还是分母都是两个数相乘减两个数相乘的形式。这时候我们就把这种形式给它定义成一个新的符号，形式如下：

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}}$$

这就相当于我们定义了一个新的运算，与我们初中、高中的“新定义”题型类似。也就是说可以写出如下这种两行两列，两边加上两根竖线的形式。并且定义其运算规则为：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

这样我们就引入了一个新的运算，就将原来的分子分母变成了新的形式。我们引入这种新的运算的目的就是为了更方面的表达形如 $5 \times 9 - 11 \times 4$ 这种形式的数。

那为什么要搞成两根竖线的形式呢？为什么不能是如图 1.1 这样的形式呢？(抱歉,各位,宋老师那个很骚的带花边的我实在无能为力.) 行啊,当然可以,只不过最早发明这个定义的人采用了前面所示的方法来表示的,并且这个符号也比较简洁。所以,就引出了这样一个行列式,所以行列式就是这么来的。

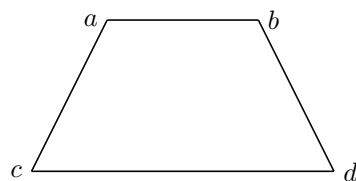


图 1.1

定义 1.1 (二阶行列式)

我们将形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (1.1)$$

的式子叫做二阶行列式,它表示 2 行 2 列 4 个元素具有

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

这样的关系。



通过二阶行列式的定义可以看出,它的最终结果是一个数。所以,你记着,甭管它是二阶行列式还是三阶行列式、四阶行列式,任何一个行列式的最终结果是一个数。它的样子看起来挺吓人,但经过计算的最终结果一定是一个数。

定义中的 a_{ij} 的写法中的 i 表示它的行标、 j 表示它的列标。比如: a_{22} 表示它是第 2 行第 2 列的元素。这里下标不能读作“二十二”,应该读作“一一、一二、二一、二二”。如果是一个 n 阶的,比如 a_{39} 表示第 3 行,第 9 列的元素,这就是行标和列标的概念。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

行列式中从左上角到右下角 [如红色箭头所示] 叫做**主对角线**,从左下角到右上角 [如蓝色箭头所示] 叫做**副对角线** (也叫次对角线)。二阶行列式比较简单,就是主对角线的两个元素相乘减去副对角线的两个元素相乘。

例题 1.1 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

解 根据二阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 - 2 \times (-3) = 5 + 6 = 11$$

通过例 1.1 可以看出,任何一个行列式经过计算,其结果都是一个数。我们一定要明白其本质,比如矩阵,它就是一个矩阵,但是行列式其实是一个数。

例题 1.2 已知 $\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 3 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = 0$, 求 λ 。

解 由行列式定义可知:

$$(\lambda - 1)(\lambda + 4) - 2 \times 3 = 0,$$

化简可得: $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$, 解得 $\lambda = -5$ 或 $\lambda = 2$ 。

例题 1.3 解方程组
$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 4y = -2 \end{cases}$$

解 这里使用初中的消元法可以得出结果，但是我们已经学过行列式了。肯定得换个玩法，这是 2 个 2 元线性方程组，它有什么特点呢？它有两未知数 x 和 y 且有两方程，这个是我们以后要讲的（克莱姆法则 Cramer）。那这个东西怎么做呢？这里其实是一个公式，记住就行。首先将未知数 x, y 的系数写作

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 3 \times 3 = 8 - 9 = -1$$

然后用方程右边的数 $(1, -2)$ 去替换 D 中的第 1 列，并记为

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - (-2) \times 3 = 4 + 6 = 10$$

再然后用方程右边的数 $(1, -2)$ 去替换 D 中的第 2 列，并记为

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 3 \times 1 = -4 - 3 = -7$$

接着使用公式：

$$x = \frac{D_1}{D} = -10, \quad y = \frac{D_2}{D} = 7.$$

注 D 是未知数的系数组成的行列式所得到的结果，并且永远在分母上。求 x 则将方程右边的数去替换 x 的系数（第一列）所得行列式 D_1 写在分子上，然后得出 x 的值； y 同理，用方程右边的数去替换 y 的系数（第二列）所得行列式 D_2 写在分子上，然后得出 y 的值。

本节介绍了二阶行列式从何而来，以及二阶行列式的定义。既然有二阶，就会有三阶，那么下一节就将介绍三阶行列式。

1.2 三阶行列式