高等代数

宋浩版

作者：wali-robot
组织：B 站大学
时间：2021

目录

第一章 行列式

1.1 二阶行列式

中国的甭管是《高等代数》还是《线性代数》一般都是从行列式开始讲的，但是老外的课本一般都是从矩阵或者方程组开始讲的。所以很多人说我们中国人课本不讲道理，莫名其妙就来了个行列式，首先第一个问题：为什么要引入行列式这么一个概念？这就得从方程组开始说起。假设我们解一个二元一次方程组

$$\begin{cases} 3x+4y=5 & ① \\ 7x+9y=11 & ② \end{cases}$$

这是一个二元一次线性方程组，大家会的就是消元法，所以我们就开始消元。首先消去 y，将①×9；②×4，于是得到了

$$\begin{cases} 3\times 9x+4\times 9y=5\times 9 & ③ \\ 7\times 4x+9\times 4y=11\times 4 & ④ \end{cases}$$

然后我们用③−④，就能将 y 消去，得到了

$$(3\times 9-7\times 4)x=5\times 9-11\times 4$$

所以，经过移项可得

$$x=\frac{5\times 9-11\times 4}{3\times 9-7\times 4}$$

这样就得到了 x。同样的，也可以采用类似的方法消去 x 而得到 y，这里我 (宋老师) 就不写一遍了。如果将 x 消去，那么就可以得出

$$y=\frac{3\times 11-5\times 7}{3\times 9-7\times 4}$$

如果我们就这样把结果计算出来是可以的，但是我们看下最终结果的这个形式它是有规律的。甭管它的分子还是分母都是两个数相乘减两个数相乘的形式。这时候我们就把这种形式给它定义成一个新的符号，形式如下：

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}}$$

这就相当于我们定义了一个新的运算，与我们初中、高中的“新定义”题型类似。也就是说可以写出如下这种两行两列，两边加上两根竖线的形式。并且定义其运算规则为：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc.$$

这样我们就引入了一个新的运算，就将原来的分子分母变成了新的形式。我们引入这种新的运算的目的就是为了更方面的表达形如 $5\times 9-11\times 4$ 这种形式的数。

那为什么要搞成两根竖线的形式呢？为什么不能是如图 1.1这样的形式呢？(抱歉，各位，宋老师那个很骚的带花边的我实在无能为力.) 行啊，当然可以，只不过最早发明这个定义的人采用了前面所示的方法来表示的，并且这个符号也比较简洁。所以，就引出了这样一个行列式，所以行列式就是这么来的。

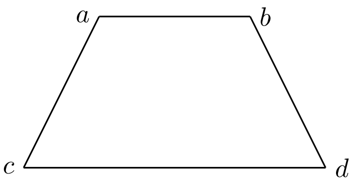

图 1.1

接下来，我们就可以给出二阶行列式的定义了。

定义 1.1 (二阶行列式)

我们将形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

的式子叫做**二阶行列式**，它表示 2 行 2 列 4 个元素具有

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

这样的关系。♣

通过二阶行列式的定义的可以看出，它的最终结果是一个数。所以，你记着，甭管它是二阶行列式还是三阶行列式、四阶行列式，任何一个行列式的最终结果是一个数。它的样子看起来挺吓人，但经过计算的最终结果一定是一个数。

定义中的 a_{ij} 的写法中的 i 表示它的行标、j 表示它的列标。比如：a_{22} 表示它是第 2 行第 2 列的元素。这里下标不能读作“二十二”，应该读作“一一、一二、二一、二二”。如果是一个 n 阶的，比如 a_{39} 表示第 3 行，第 9 列的元素，这就是行标和列标的概念。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

行列式中从左上角到右下角 [如红色箭头所示] 叫做**主对角线**，从左下角到右上角 [如蓝色箭头所示] 叫做**副对角线** (也叫次对角线)。二阶行列式比较简单，就是主对角线的两个元素相乘减去副对角线的两个元素相乘。

例题 1.1 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

解 根据二阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 - 2 \times (-3) = 5 + 6 = 11$$

通过例1.1可以看出，任何一个行列式经过计算，其结果都是一个数。我们一定要明白其本质，比如矩阵，它就是一个矩阵，但是行列式其实是一个数。

例题 1.2 已知 $\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 3 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = 0$，求 λ。

解 由行列式定义可知：

$$(\lambda - 1)(\lambda + 4) - 2 \times 3 = 0,$$

化简可得：$\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$，解得 $\lambda = -5$ 或 $\lambda = 2$。

例题 1.3 解方程组 $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x+4y=-2 \end{cases}$

解 这里使用初中的消元法可以得出结果，但是我们已经学过行列式了。肯定得换个玩法，这是 2 个 2 元线性方程组，它有什么特点呢？它有两未知数 x 和 y 且有两方程，这个是我们以后要讲的 (克莱姆法则 Cramer)。那这个东西怎么做呢？这里其实是一个公式，记住就行。首先将未知数 x, y 的系数写作

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\times 4 - 3\times 3 = 8-9 = -1$$

然后用方程右边的数 $(1, -2)$ 去替换 D 中的第 1 列，并记为

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 4 - (-2)\times 3 = 4+6 = 10$$

再然后用方程右边的数 $(1, -2)$ 去替换 D 中的第 2 列，并记为

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2\times(-2) - 3\times 1 = -4-3 = -7$$

接着使用公式：

$$x = \frac{D_1}{D} = -10, \qquad y = \frac{D_2}{D} = 7.$$

注 D 是未知数的系数组成的行列式所得到的结果，并且永远在分母上. 求 x 则将方程右边的数去替换 x 的系数 (第一列) 所得行列式 D_1 写在分子上，然后得出 x 的值；y 同理，用方程右边的数去替换 y 的系数 (第二列) 所得行列式 D_2 写在分子上，然后得出 y 的值.

本节介绍了二阶行列式从何而来，以及二阶行列式的定义。既然有二阶，就会有三阶，那么下一节就将介绍三阶行列式。

1.2 三阶行列式