Politechnika Wrocławska

Inteligencja Obliczeniowa i jej zastosowania

Ćwiczenie 1
Metody redukcji wymiarowości
Analiza składowych głównych

Autorzy:
Paweł Andziul 200648
Robert Chojnacki 200685
Marcin Słowiński 200638

Prowadzący:
dr hab. inż. Rafał Zdunek

7 czerwca 2017

Spis treści

1 Zadanie 1

Dla danych:

$$X = [2.50.52.21.93.12.3211.51.1; 2.40.72.92.232.71.61.11.60.9];$$

a. Zaimplementować metodę PCA w Matlabie. Do wyznaczenia par własnych macierzy kowariancji można zastosować wbudowaną funkcję eig(.) lub eigs(.).

b. Wyznaczyć składowe główne i wektory cech.

c. Pokazać na rysunku punkty obserwacji oraz wyznaczone wielkości.

1.1 Opis metody

Metoda PCA (ang. *Principal Component Analysis*) jest jedną ze statystycznych metod analizy czynnikowej, która pozwala na odnajdywanie pewnych struktur w zbiorze zmiennych losowych. Analiza składowych głównych oparta jest na wykorzystaniu pojęć ze statystyki, jakimi są m.in. korelacja i wariancja. Wielowymiarowe dane z reguły nie są równomiernie rozrzucone wzdłuż wszystkich kierunków układu współrzędnych, ale koncentrują się w pewnych podprzestrzeniach oryginalnej przestrzeni. Celem PCA jest znalezienie tych podprzestrzeni w postaci składowych głównych, tzn. kierunków przy których wartość wariancji (lub korelacji) jest zmaksymalizowana. Analiza może być oparta albo na macierzy korelacji, albo macierzy kowariancji utworzonych ze zbioru wejściowego.

Metoda PCA jest zazwyczaj używana do redukcji rozmiaru danych poprzez odrzucenie ostatnich czynników, tzn. takich, których wariancja jest najniższa. Oznacza to, że n-wymiarowy zbiór danych możemy ograniczyć wyznaczając n-wektorów własnych, z których wybieramy tylko k-wektorów, tak aby $k \leqslant n$. Zrzutowanie danych na przestrzeń rozpiętą przez k-wybranych wektorów pozwala zredukować wymiarowość danych.

1.2 Algorytm

Jako dane wejściowe podawana jest macierz zawierająca kolejne obserwacje, na podstawie których będą wyznaczane główne składowe. Algorytm PCA składa się z następujących kroków:

1. Wyznaczenie wartości średnich dla wierszy
2. Odjęcie od macierzy wejściowej wyliczonych poprzednio średnich
3. Wyznaczenie macierzy kowariancji
4. Wyznaczenie składowych głównych
5. Wybór najlepszych składowych
6. Rzutowanie na wektory własne

Na początku należy przeprowadzić normalizację. W ten sposób zapewniamy, że cechy szerzej rozłożone nie zdominują cech mocniej skoncentrowanych. Normalizacja polega na wyznaczeniu średnich wartości kolejnych cech dla wszystkich obserwacji. Następnie od macierzy wejściowej odejmujemy wcześniej wyliczone średnie - od każdego elementu macierzy odejmujemy średnią dla wiersza, w którym się znajduje. Dla tak uzyskanych danych należy policzyć macierz kowariancji.

Kolejnym krokiem jest wyznaczenie wektorów i wartości własnych. Wylicza się k-ortonormalnych wektorów, które tworzą bazę dla unormowanych danych wejściowych. Są to wektory jednostkowe, wskazujące w kierunku prostopadłym do pozostałych wektorów z utworzonej bazy. Liczba wektorów własnych jest związana z wymiarem rozpatrywanych danych, a wartości własne określają długość wektora.

Następnie porządkujemy wartości własne w kolejności malejącej. Redukcja opiera się na wyborze wektorów własnych z największą wartością własną. Można powiedzieć, że maksymalizujemy zmienność danych wraz z jednoczesną minimalizacją ubytku informacji spowodowanej ich redukcją. Redukcja dokonuje się poprzez mnożenie macierzy wybranych wektorów przez n-wymiarową macierz danych.

Jeżeli wybierzemy mniejszą liczbę wektorów własnych (k z n) otrzymujemy zredukowaną przestrzeń danych. Prowadzi to do utraty części oryginalnej informacji, a rozmiar straty zależy od doboru wektorów. Jeżeli wybierzemy wszystkie wektory własne, uzyskujemy jedynie obrót macierzy danych wejściowych, bez utraty żadnych informacji.

1.3 Realizacja

Opracowano skrypt w środowisku Matlab realizujący metodę PCA zgodnie z algorytmem opisanym wcześniej. Wykorzystano wbudowane funkcję do obliczenia i odjęcia wartości średnich (mean(.), bsxfun(.)) oraz do wyznaczenia macierzy kowariancji (cov(.)). W celu obliczenia par własnych macierzy kowariancji zastosowana została metoda eigs(.), w której pierwszym argumentem jest macierz kowariancji, a drugim ilość wektorów własnych.

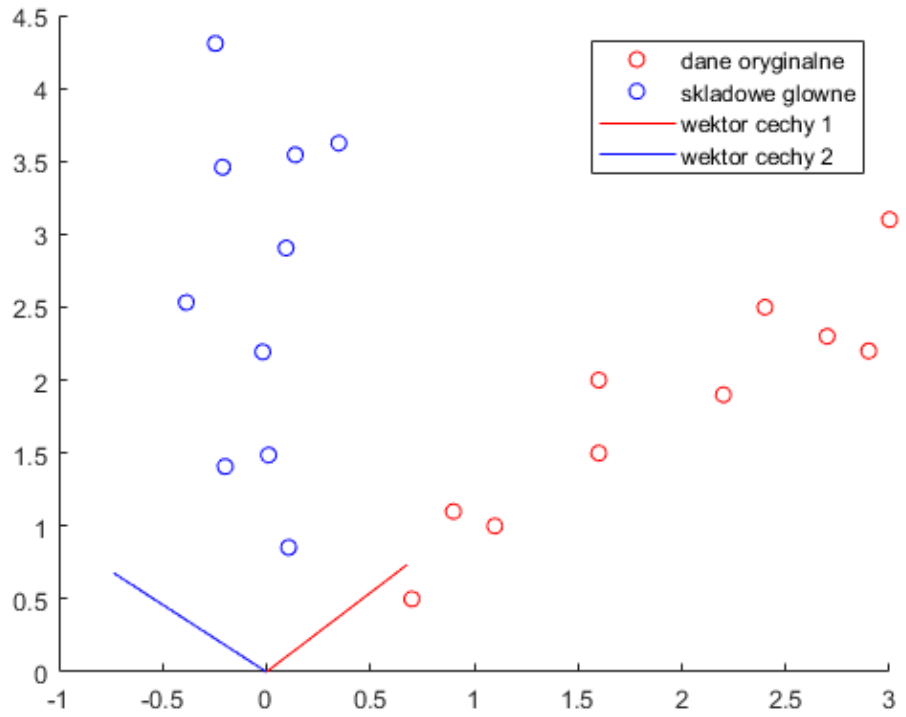
Listing 1: Wyznaczanie wartości własnych i wektorów własnych

```
% dane wejsciowe
x = [2.5 0.5 2.2 1.9 3.1 2.3 2 1 1.5 1.1;
    2.4 0.7 2.9 2.2 3 2.7 1.6 1.1 1.6 0.9];
% obliczenie wartosci srednich
% odjecie ich od macierzy
x_norm = bsxfun(@minus, x, mean(x, 2));
% wyznaczenie macierzy kowariancji
s = cov(x_norm');
% wyznaczenie wartosci i wektorow wlasnych
[eigenvectors, eigenvalues] = eigs(s, 2);
% porzadkujemy wartosci wlasne w kolejnosci malejacej
[eigenvalues order] = sort(diag(eigenvalues), 'descend');
eigenvectors = eigenvectors(:,order);
% rzutowanie
pcs = eigenvectors' * x;

figure;
hold on
plot(x(2,:), x(1,:), 'or', pcs(2,:), pcs(1,:), 'ob')
plotv(eigenvectors(:,1), '-r');
plotv(eigenvectors(:,2), '-b');
legend('dane oryginalne','skladowe glowne','wektor cechy 1','wektor cechy
    2','Location','northeast','Orientation','vertical')
hold off
```

Pozostałe funkcje służą do wykreślenia wykresu zawierającego kolejno: dane wejściowe, składowe główne oraz wyznaczone wektory własne.

1.4 Wyniki

Dane wejściowe, składowe główne oraz wektory własne przedstawiono na rysunku 1. Wyznaczone wektory i wartości własne przedstawiono w tabelach 1 oraz 2. Można zauważyć, że zgodnie z założeniami metody PCA, wektory własne są ortogonalne. Jeden z wektorów pokazuje kierunek, w którym wariancja jest największa.



Rysunek 1: Ilustracja punktów obserwacji i składowych głównych

Tabela 1: Wyznaczone wektory własne.

	x	y
wektor cechy 1	0.7352	0.6779
wektor cechy 2	0.6779	-0.7352

Tabela 2: Wyznaczone wartości własne.

wektor cechy 1	1.2840
wektor cechy 2	0.0491

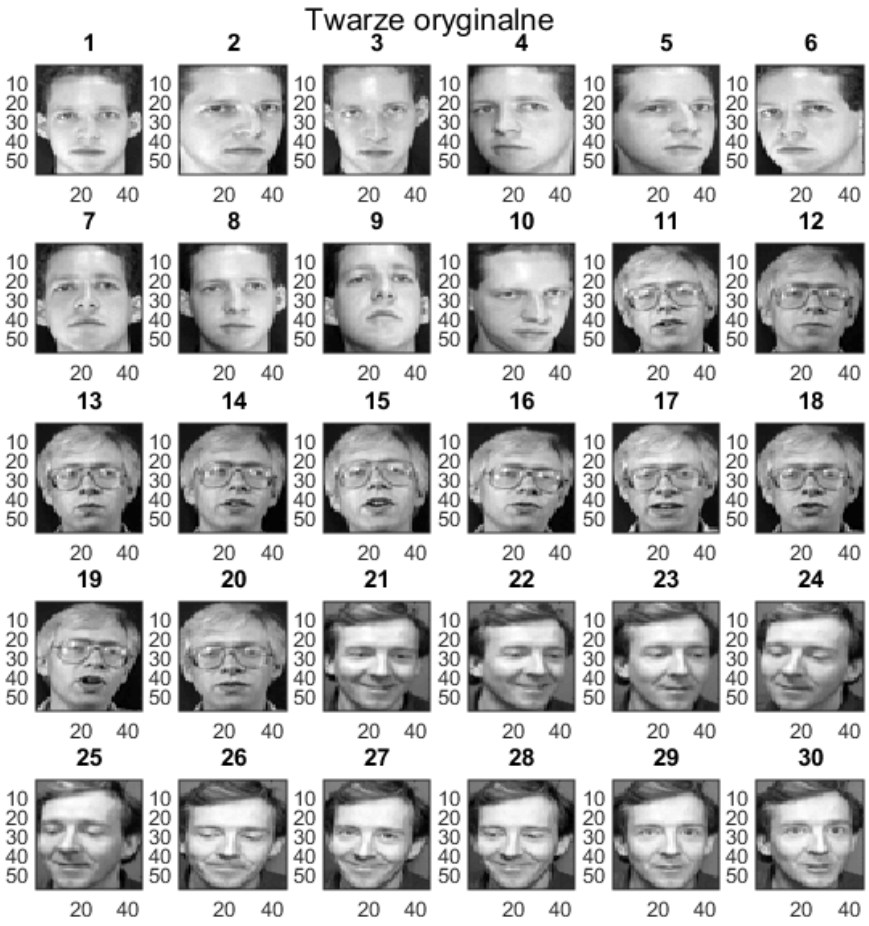
Na wykresie można zauważyć poprawne działanie funkcji PCA. Dane rozkładają się wzdłuż oznaczonych wektorów.

2 Zadanie 2

Dla obrazów twarzy z bazy ORL (lub podobnej) wyznaczyć cechy holistyczne (twarze własne) dla różnej liczby estymowanych komponentów głównych ($J = 4, 10, 20, 30$). Pogrupować obrazy stosując metodę k-średnich, do obrazów oryginalnych oraz redukowanych. Badania przeprowadzić dla różnej liczby grup. Porównać dokładność i czas grupowania. Następnie dokonać klasyfikacji obrazów w obu przestrzeniach (oryginalnej i zredukowanej) za pomocą klasyfikatora k-NN. Porównać efekty klasyfikacji z efektami grupowania.

2.1 Wczytanie obrazów twarzy

Na ilustracji 2 zamieszczono wykorzystane dane twarzy 3 różnych osób. Oryginalne twarze pochodzą ze strony [6]. Zdjęcia twarzy są już znormalizowane.



Rysunek 2: Obrazy twarzy wykorzystane do obliczeń

Listing 2: Wczytywanie danych twarzy do macierzy

```
clc;
clear;
```

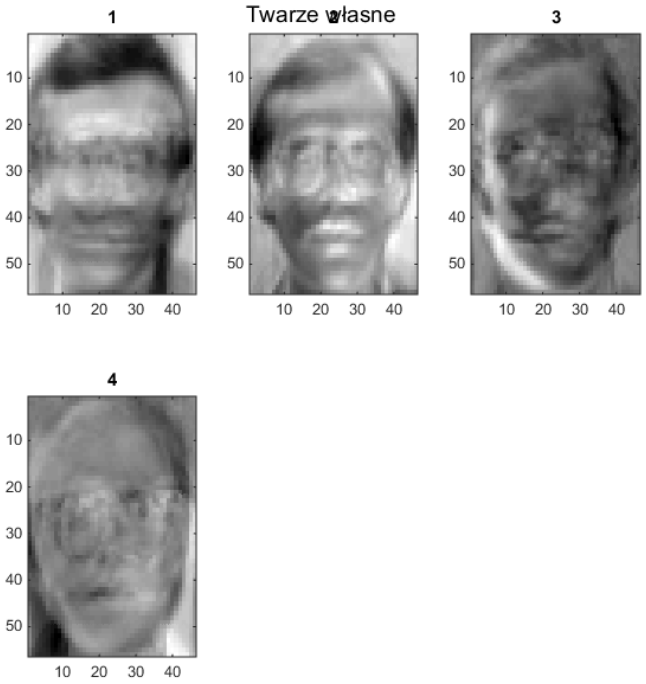
```
close all;

load('FaceData_56_46.mat');

Persons = 3;
ImagesPerPerson = 10;

%wczytywanie danych
Group = [];
M = [];
for p=(1:Persons)
    for i=(1:ImagesPerPerson)
        x = FaceData(p, i).Image;
        [irow, icol] = size(x);
        x = double(x);
        temp = reshape(x', irow * icol, 1);
        M = [M temp];
        Group = [Group p];
    end
end

figure;
suptitle('Twarze oryginalne');
```

2.2 Wyznaczenie cech holistycznych (twarzy własnych)

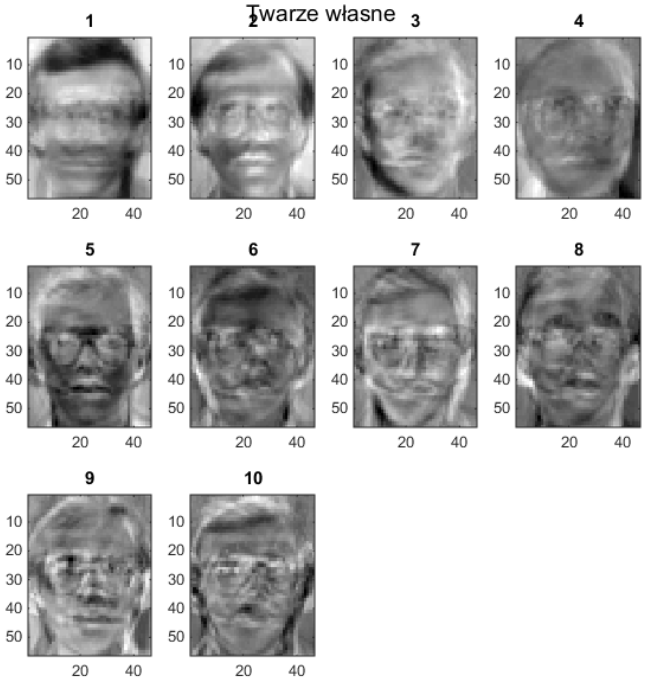
Do wyznaczania twarzy własnych zastosowano podobnie jak w zadaniu poprzednim metodę PCA. Na listingu 3 fragment odpowiedzialny za ten etap.

Listing 3: Wyznaczanie twarzy własnych

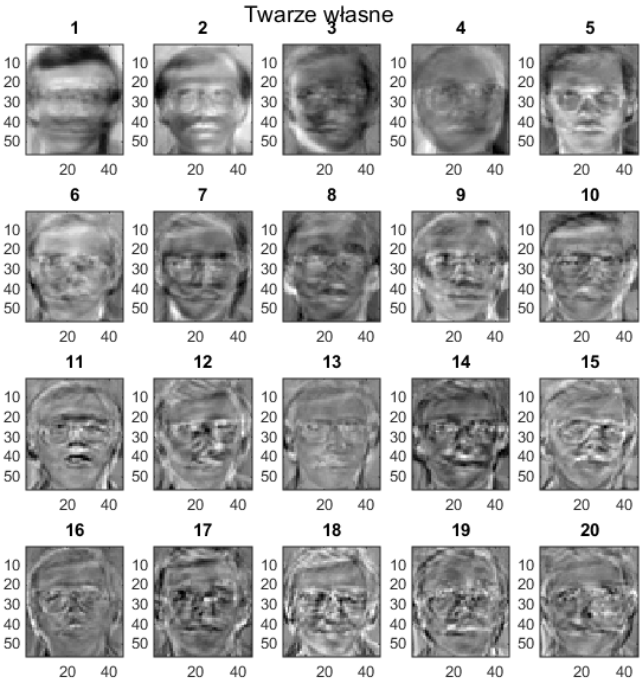
```
suptitle('Twarze oryginalne');
nOfImages = Persons*ImagesPerPerson;
for i=(1:nOfImages)
    C = M(:,i);
    CC = reshape(C, [46, 56]);
    subplot(round(sqrt(nOfImages)), round(sqrt(nOfImages)) + 1, i);
    imagesc(CC');
    title(i)
    colormap gray;
end

for group_size=(1:3)
    tic;

    % ksrednich dla obrazow oryginalnych
    kmeans_result_orig = kmeans(M', group_size);
```



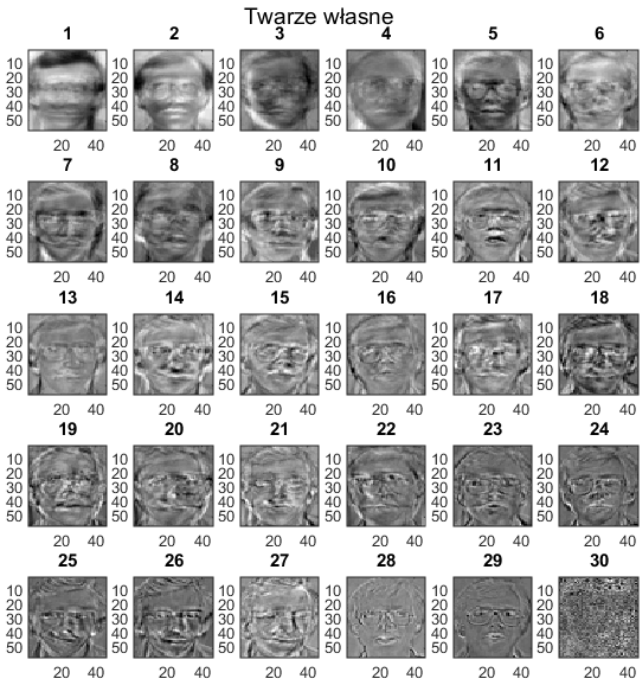
Rysunek 3: Wyznaczone twarze własne dla J=4



Rysunek 4: Wyznaczone twarze własne dla J=10



Rysunek 5: Wyznaczone twarze własne dla J=20



Rysunek 6: Wyznaczone twarze własne dla J=30

2.3 Grupowanie metodą k-średnich

Listing 4: Grupowanie twarzy oryginalnych i własnych

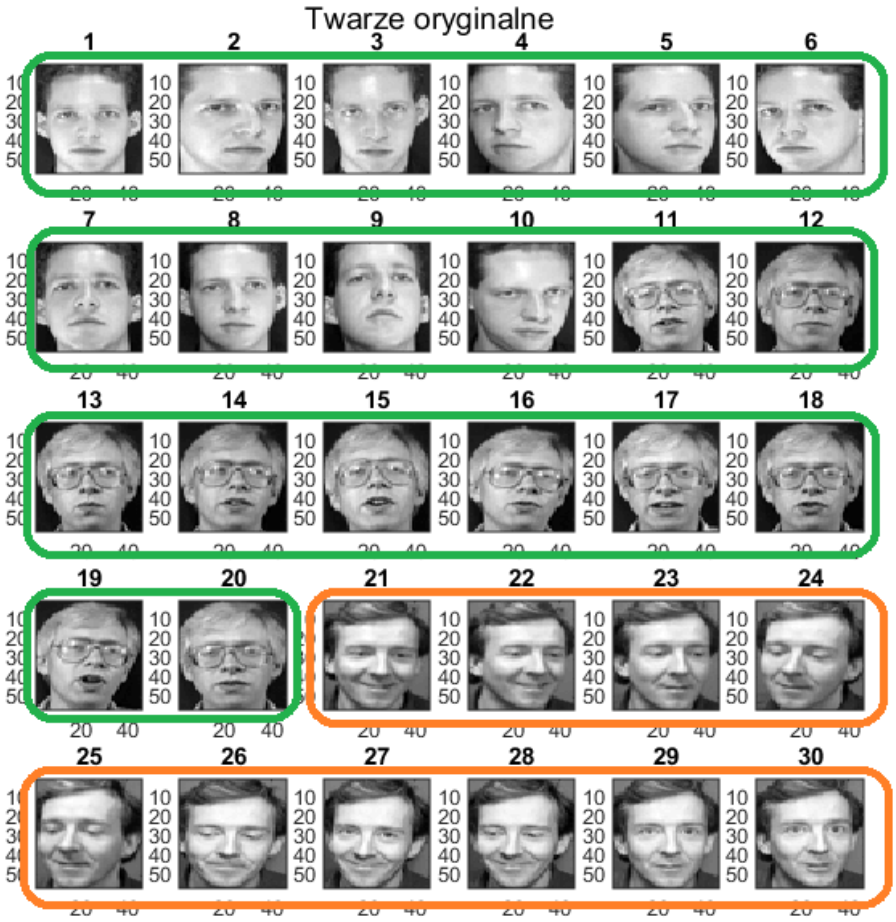
```
        CC = reshape(C, [46, 56]);
        subplot(round(sqrt(J)), round(sqrt(J)) + 1, i);
        imagesc(CC');
        title(i)
        colormap gray;
    end

    known_groups = ones(1,J);

    tic;

    % ksrednich dla obrazow redukowanych
    kmeans_result_eigen = kmeans(Z', Persons);
    [acc_eigen, rand_index_eigen, match_eigen] = AccMeasure(known_groups,
        kmeans_result_eigen');

    disp(sprintf('Czas grupowania dla obrazow redukowanych J=%d: %2.3fs',J, toc))
    disp(sprintf('Dokladnosc grupowania dla obrazow redukowanych J=%d: %2.2f',J,
        acc_eigen))
```

Wyniki grupowania dla obrazów oryginalnych dla różnych rozmiarów grup przedstawiono w tabeli 3.

Tabela 3: Jakość grupowania dla różnych wielkości grup (n) dla obrazów oryginalnych

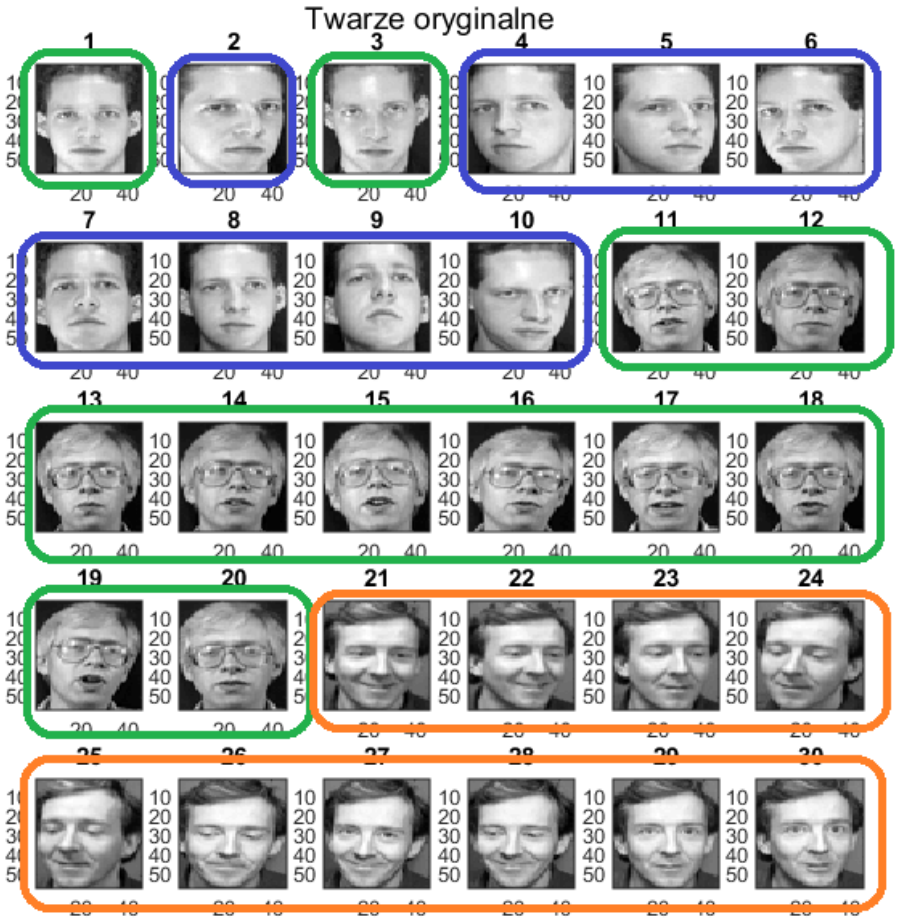
n	AccMeasure	Czas przetwarzania [s]
1	31.03	0.011
2	77.01	0.045
3	91.72	0.140

Poniżej przedstawiono ilustrację przypisania poszczególnych zdjęć do grup przez algorytm dla 2 oraz 3 grup.



Rysunek 7: Przydzielone grupy dla poszczególnych twarzy dla zdjęć oryginalnych przy 2 grupach

W tym przypadku algorytm poradził sobie najlepiej jak potrafił. Poprawnie przyporządkował dwie pierwsze osoby do pierwszej grupy i trzecią do grupy drugiej. Nierówne przyporządkowanie zdjęć do innych osób oznaczałoby popełnienie błędu.



Rysunek 8: Przydzielone grupy dla poszczególnych twarzy dla zdjęć oryginalnych przy 3 grupach

Jak widać na powyższej ilustracji8 algorytm nie poradził sobie w pełni z rozpoznaniem twarzy pierwszej osoby. Zdjęcia 1 i 3 włączone zostały do grupy osoby drugiej.

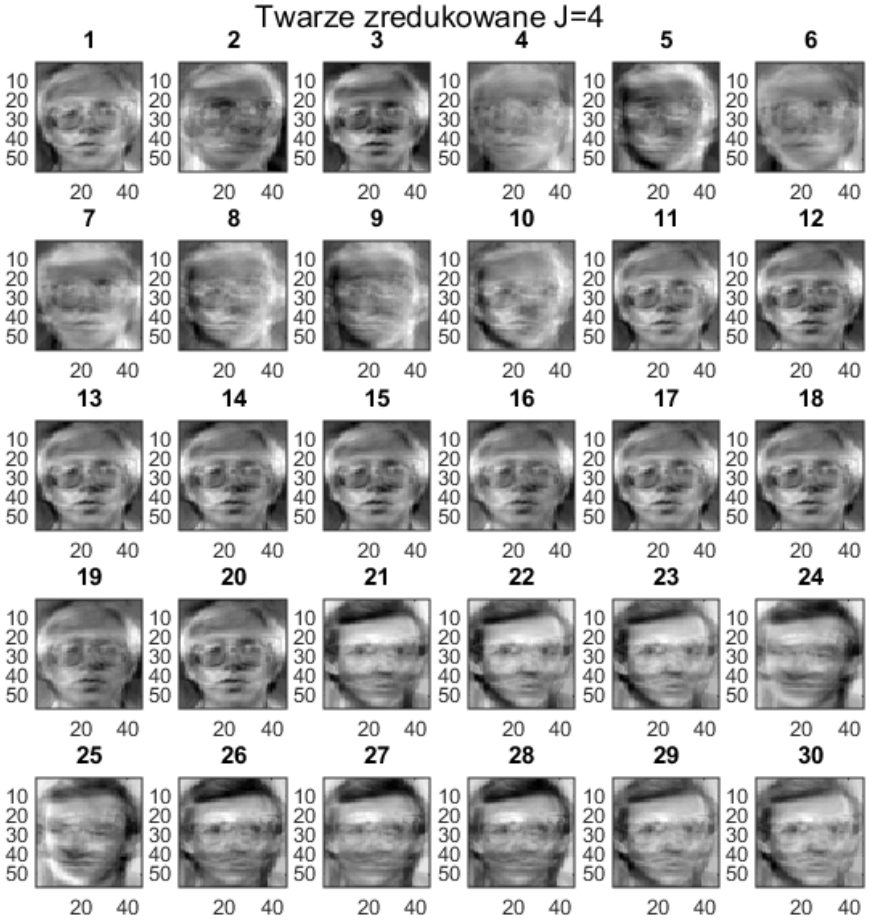
Wyniki te odpowiadają skutecznościom zamieszczonym w tabeli3.

Wyniki grupowania dla twarzy własnych dla różnych wartości J przedstawiono w tabeli4.

Tabela 4: Jakość grupowania dla różnych wartości J dla twarzy własnych

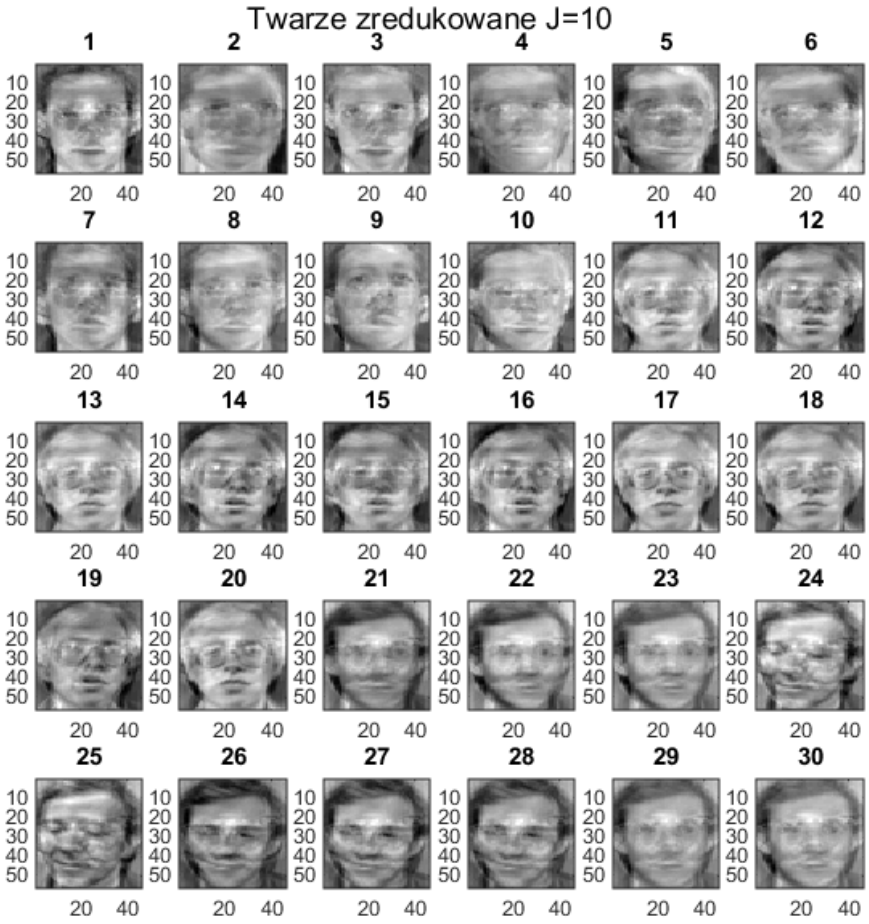
J	AccMeasure	Czas przetwarzania [s]
3	16.67	0.057
10	40.00	0.048
20	58.42	0.062
30	60.23	0.020

2.3.1 Rezultaty grupowania dla obrazów zredukowanych



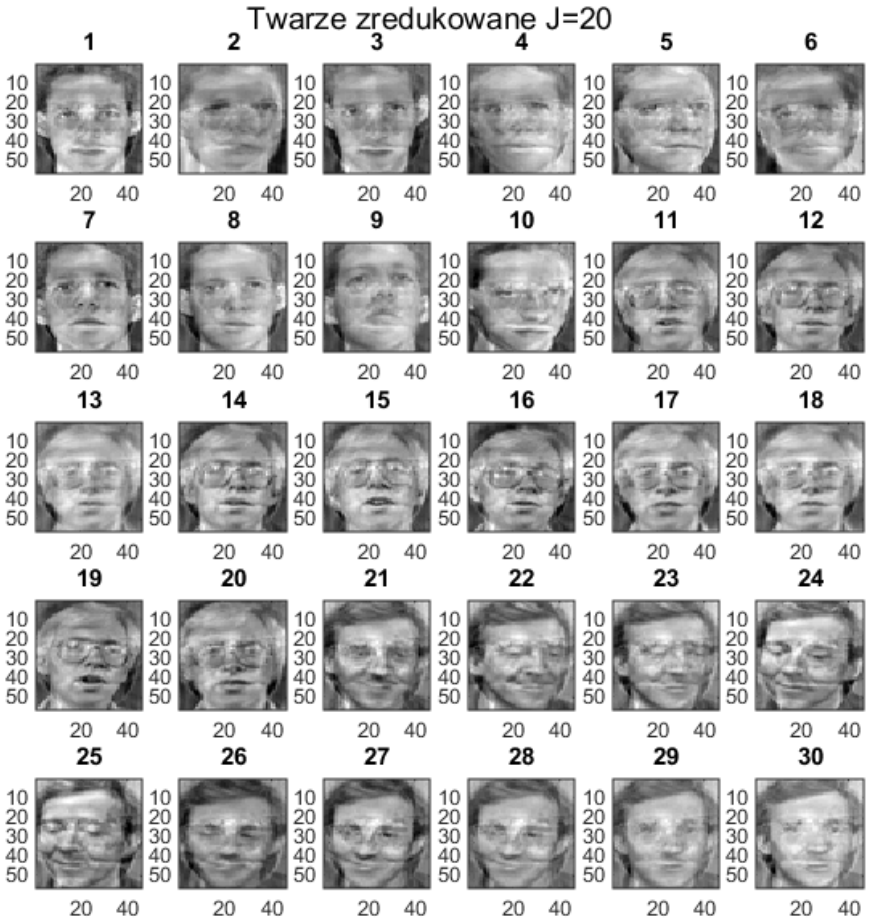
Rysunek 9: Twarze zredukowane J=4

W tym przypadku algorytm musiał przypisać 4 zdjęcia 3 osób do 3 grup, co udało mu się wykonać bardzo dobrze.



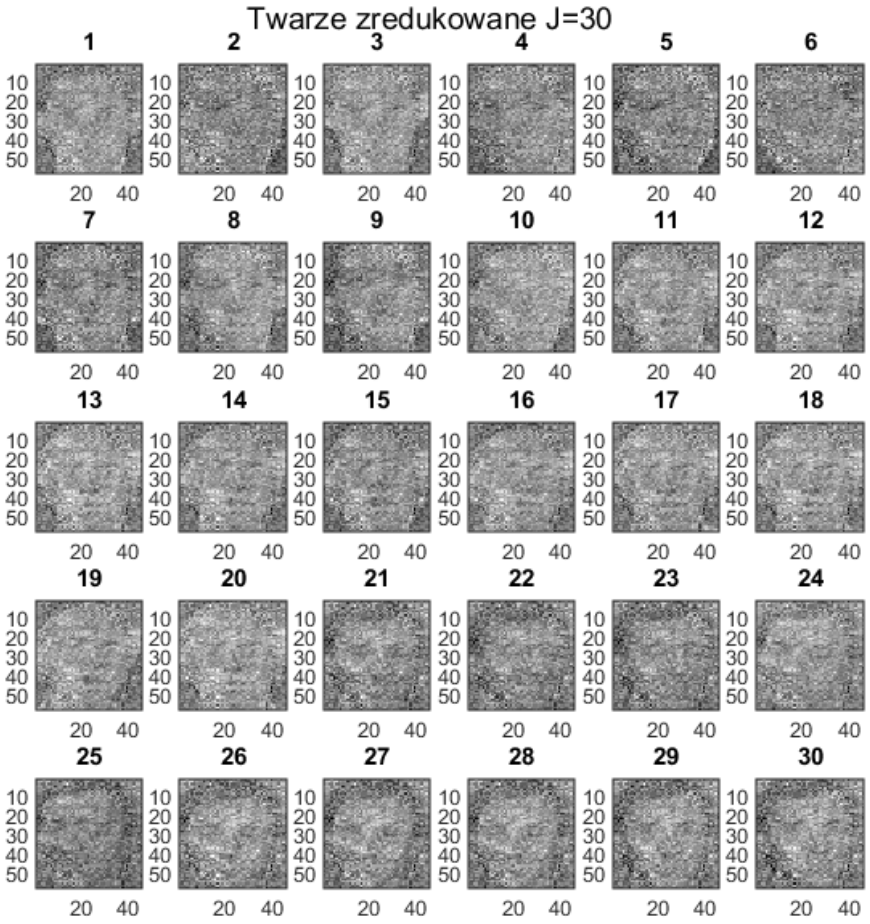
Rysunek 10: Twarze zredukowane J=10

Dla J=10 algorytm się pogubił, nie potrafił dokładnie określić, które zdjęcia należą do odpowiedniej osoby.



Rysunek 11: Twarze zredukowane J=20

W przypadku J=20 większość zdjęć została zamazana zostawiając tylko kontur twarzy. Algorytm wykorzystał ten kontur by podporządkować te zdjęcia w jedną grupę. Druga i trzecia grupa została przypisana do zdjęć, w których twarz jest lepiej określona.



Rysunek 12: Twarze zredukowane J=30

Tak samo jak w przypadku wcześniej, algorytm pogrupował twarze według jakości zdjęcia. Zdjęcia, które w wyniku obróbki utraciły jakość zostały przyporządkowane do jednej grupy, co zaznaczone zostało kolorem niebieskim.

Pozostałe zdjęcia przypisane zostały niemal losowo, wyniki to z faktu utraty zbyt dużej ilości danych by rozpoznać osobę i jednocześnie zbyt małej by wpisać zdjęcie do wcześniejszej wspomnianej grupy.

2.4 Klasyfikacja za pomocą klasyfikatora k-NN

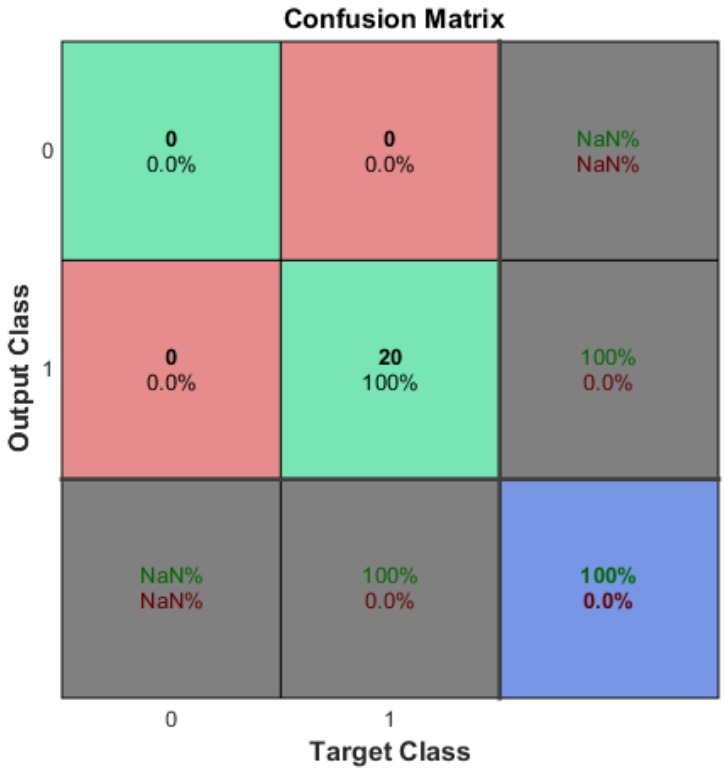
Zgodnie z dokumentacją metody knnclassify [3] umożliwia ona klasyfikację pewnej próbki danych na podstawie danych dla których klasyfikacja jest znana.

$$Class = knnclassify(Sample, Training, Group) \tag{1}$$

, parametry $Training$ oraz $Group$ zawierają informację o podziale danych na grupy natomiast $Sample$ jest zbiorem którego klasyfikację pragniemy przeprowadzić. Wynikiem jest $Class$ będący tego samego typu co $Group$ tzn. dziedzina klasyfikacji jest taka sama.
Poniżej (listing **??**) zamieszczono implementację klasyfikacji.

Listing 5: Fragment skryptu w Matlabie obejmujący klasyfikację k-NN

```
1
2
3       Class = knnclassify(V', M', Group);
4       [acc_classify, rand_index_classify, match_classify] =
            AccMeasure(known_groups, Class');
5
6       figure;
7       plotconfusion(known_groups, Class')
8
9   end
```



Rysunek 13: Confusion matrix dla J=20

3 Zadanie 3

Wyznaczyć pary własne macierzy kowariancji za pomocą algorytmów: Powera oraz Lanczosa. Zaimplementować algorytmy i zastosować je do rozwiązania powyższych zadań. Porównać wyniki.

3.1 Algorytm Powera

Listing 6: Fragment skryptu w Matlabie

```
1   function [new_result] = Power_f(X, tolerance)
```

```
2
3       n = size(X);
4       n = n(1);
5
6       new_result = ones(n,1);
7       m = 0;
8
9       while(1)
10          m_old = m;
11          old_result = new_result;
12          new_result = X * new_result;
13
14          m = max(new_result);
15          new_result = new_result/m;
16
17          if abs(m-m_old) < tolerance && norm(new_result-old_result,2) < tolerance
18              break;
19          end
20      end
21  end
```

Algorytm Powera polega na kolejnym przemnażaniu macierzy wejściowej przez wektor wynikowy do momentu, gdy wektor uzyskany w wyniku działania nie różni się bardziej od wynikowego o więcej niż założona wartość tolerancji.

Powyższe założenie wynika z faktu, że kolejne wektory dążą do pewnej zwielokrotnionej wartości. Ważnym jest by tę wartość wychwycić nie wykonując nadmiarowych obliczeń.

W zaimplementowanej funkcji przechowywane są dwa wektory - stary i nowy. Wektory te odejmowane są od siebie i normalizowane. Jeżeli różnica między nimi jest mniejsza niż założona tolerancja zwracany jest wektor nowszy jako bliższy idealnemu rozwiązaniu.

3.2 Algorytm Lanczosa

3.3 Wyniki

4 Podsumowanie

Podczas zajęć laboratoryjnych zapoznano się z metodą PCA. Poznano również podstawy grupowania i klasyfikacji danych z wykorzystaniem pakietu Matlab.

Literatura

[1] https://www.mathworks.com/help/nnet/ref/plotconfusion.html

[2] https://www.mathworks.com/help/stats/confusionmat.html

[3] https://www.mathworks.com/help/bioinfo/ref/knnclassify.html

[4] http://www.kmg.zut.edu.pl/opt/wyklad/bezgrad/powell.html

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Lanczos_algorithm

[6] http://www.cl.cam.ac.uk/research/dtg/attarchive/facedatabase.html

[7] Berk Gokberk, „Assignment 2: Face Recognition using PCA", http://www2.cmpe.boun.edu.tr/courses/cmpe58Z/spring2010/files/assignment2_new.pdf