

Лекции
По математическому анализу

Т.П. Лукашенко

Часть III

Лекции третьего семестра

Глава 1

Определение 1.1. Пусть $\{a_k\}_{k=n}^{\infty}$ - последовательность, занумерованная целыми числами начиная с n и далее по возрастанию.

Тогда выражение вида $a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots = \sum_{k=m}^{\infty} a_k$ называется бесконечным рядом.

Изменением нумерации общий случай можно свести к случаю $n = 1$ или $n = 0$. Также можно получить при $n > 1$ добавлением нулевых членов или заменой начальных членов их суммой в случае $n < 0$.

Определение 1.2. $S_N = \sum_{k=m}^N a_k$ - частичная сумма с номером N .
 $S_N = 0$, если $N < m$.

Если существует предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_N = S$$

то его называют суммой ряда S . Если a_k - действительные числа, то S действительное число или $\pm\infty$. Ряд называется сходящимся, если его сумма конечна. Если это не так, то ряд называют расходящимся.

Утверждение 1.1. *Критерий Коши.*

Числовой ряд сходится тогда и только тогда, когда:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m > N \quad \forall p \in \mathbb{N} : |S_{m+p} - S_m| < \epsilon$$

Утверждение 1.2. *Необходимое условие сходимости.*

$$\text{Если ряд } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится, то } a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Определение 1.3. Если ряд сходится и S - его сумма, то $r_n = S - S_n$ называется остатком ряда с номером n .

Определение 1.4. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называют абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Теорема 1.1. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство. По критерию Коши, $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m > N \quad \forall p \in \mathbb{N} : |S_{m+p} - S_m| < \epsilon$ Так как $|S_{m+p} - S_m| \leq \sum_{k=m+1}^{m+p} |a_k|$, то выполняется критерий Коши для исходного ряда, и он сходится. \square

Определение 1.5. Если ряд сходится, но не сходится абсолютно, то его называют сходящимся условно.

Свойства

1. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится (сходится абсолютно) и S – его сумма, то для любого числа α ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k$ сходится.

Доказательство.

$$\sum_{k=1}^n \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^n a_k = \alpha S_n$$

Если существует предел частичных сумм исходного ряда равный S , то $S_\alpha = \alpha S$ \square

2. Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся (абсолютно сходятся) и S_a и S_b – их суммы, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ сходится (сходится абсолютно) и его сумма – $S_a + S_b$

Доказательство.

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S_a + S_b$$

Так как

$$\sum_{k=1}^n |a_k + b_k| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| + \sum_{k=1}^n |b_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|, \text{ то } \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|$$

– монотонная ограниченная последовательность и, следовательно, сходится. \square

3. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится (абсолютно сходится) и \mathcal{S} его сумма, n_k – строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} a_j \right)$, где $n_0 = 0$, сходится (сходится абсолютно) и \mathcal{S} – его сумма.

Доказательство. Последовательность частичных сумм сгруппированного ряда – это подпоследовательность S_{n_k} последовательности частичных сумм начального ряда.

$$\sum_{k=1}^N \left| \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} a_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n_N} |a_j|$$

– Ограниченная последовательность, тогда первая сумма – монотонная ограниченная последовательность, которая сходится. \square

4. Если члены ряда $a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, n_k – строго возрастающая последовательность натуральных чисел и $\sup_k (n_k - n_{k-1}) < \infty$, сгруппированный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} a_j \right)$, где $n_0 = 0$, сходится \mathcal{S} – его, сумма то начальный ряд также сходится и \mathcal{S} – его сумма.

Доказательство. Для любого $m \in \mathbb{N}$ найдем такое натуральное r , что $n_{r-1} < m \leq n_r$. Тогда:

$$|S_{n_r} - S_m| \leq \sum_{k=m+1}^{n_r} |a_k| \leq \sum_{k=n_{r-1}+1}^{n_r} |a_k| \leq \sum_{k=n_r-l}^{n_r} |a_k|,$$

где $\sup_k (n_k - n_{k-1}) \leq l$. Последняя сумма – конечная сумма $\bar{o}(1)$, значит, $\bar{O}(1)$. Следовательно, если $S_{n_r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \mathcal{S}$, то $S_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathcal{S}$ \square

Глава 2

Признаки сходимости рядов неотрицательных чисел

TODO: Вставить замечания

1. Если дан ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, то ряд сходится тогда и только тогда, когда последовательность частичных сумм \mathcal{S}_n ограничена.
2. (Признак сравнения) Если даны ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $0 \leq a_k \leq b_k$, $k > \mathbf{K}$, то из сходимости второго ряда следует сходимость первого, а из расходимости первого расходимость второго.

Доказательство.

$$\sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^K + \sum_{k=K+1} a_k \leq \sum_{k=1}^K + \sum_{k=K+1} b_k \leq \sum_{k=1}^K + \sum_{k=1} b_k \leq$$

Из сходимости второго ряда следует ограниченность частичных сумм первого, а значит и сходимость первого.

Если $n > K, p \geq 0$, то $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k$, поэтому из выполнения критерия Коши для второго ряда следует выполнение критерия Коши для первого. \square

3. (Сравнения) Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ – числовые ряды с неотрицательными членами. Если

$$0 < \alpha \leq \frac{a_k}{b_k} \leq \beta < \infty, \forall k > K,$$

то числовые ряды одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Доказательство. $0 \leq a_k \leq \beta b_k$, поэтому, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то сходится $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Так как $0 \leq b_k \leq \frac{a_k}{\alpha}$, То если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то сходится и второй. \square

4. (Сравнения) Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ – числовые ряды со строго положительными членами. Если

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}, \forall k \geq K,$$

то из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Доказательство.

$$\prod_{k+K}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \prod_{k+K}^{n-1} \frac{b_{k+1}}{b_k}, \text{ т.е. } \frac{a_n}{a_K} \leq \frac{b_n}{b_K}, n > K$$

Значит, $a_n \leq \frac{a_K}{b_K} b_n, n > K$, поэтому из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ \square

5. (Д'Алабера) Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ – ряд с неотрицательными членами. Если

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1 \text{ при } n \geq K$$

то ряд сходится. Если

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1 \text{ при } n \geq K$$

То члены ряда не стремятся к нулю, и ряд расходится

Доказательство. Возьмём $b_k = q^k$ – геометрическую прогрессию, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится. Далее используем признак сравнение. Другой случай очевиден. \square

6. (Коши) Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ – ряд с неотрицательными членами. Если $\sqrt[k]{a_k} \leq q < 1$ при $k \geq K$, то ряд сходится, а если $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ для бесконечного числа номеров, то члены ряда не стремятся к нулю и ряд расходится.

Доказательство. Если $\sqrt[k]{a_k} \leq q < 1$, то повторому признаку ряд сходится. \square

7. (Интегральный Маклорена-Коши) Пусть $f(x)$ – неотрицательная невозрастающая функция на $[1, +\infty]$. Тогда

$$0 \leq \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(x)dx \leq f(1)$$

Ряд и интеграл одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Доказательство.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{k=1}^n \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx \right) = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(x)dx = \\ &= f(1) + \sum_{k=2}^n \left(f(k) - \int_{k-1}^k f(x)dx \right) - \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(1) \end{aligned}$$

Тогда частичные интегралы и суммы ограничены одновременно. \square

8. (Признак Куммера) Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ – ряд со строго положительными членами, b_k – последовательность строго положительных чисел,

$$v_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} b_k - b_{k+1}$$

Если $v_k \geq l > 0$ при $k \geq K$, то ряд сходится. Если $v_k \leq 0$ при $k \geq K$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k)^{-1}$ расходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ также расходится.

Доказательство.

$$v_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} b_k - b_{k+1} \geq l \geq l > 0, k \geq K$$

$$a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1} \geq l a_{k+1}, k \geq K$$

$$\sum_{k=K}^{n-1} (a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1}) = a_K b_K - a_n b_n \geq l \sum_{k=K}^{n-1} a_{k+1} = l \sum_{j=K+1}^n a_j$$

Так как $a_K b_K \geq l \sum_{j=K+1}^{\infty} a_j$, то частичные суммы ряда $\sum_{j=K+1}^{\infty} a_j$ ограничены и, значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Итак,

$$v_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} b_k - b_{k+1} \leq 0 \text{ при } k \geq K,$$

т.е. $a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1} \leq 0$. Значит,

$$\sum_{k=K}^{n-1} (a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1}) = a_K b_K - a_n b_n \leq 0, n > K$$

отсюда: $a_N \geq a_K b_K - (b_n)^{-1}$. Из расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ \square

9. (Признак Раабе) Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ – ряд со строго положительными членами. Если

$$k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) > q > 1, k \geq K,$$

то ряд сходится. Если

$$k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) \leq 1, k \geq K,$$

то ряд расходится.

Доказательство. Возьмем $b_k = k$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k)^{-1}$ расходится.

$$v_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} k - (k+1) = k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} \right) - 1$$

И пользуемся признаком Куммера. \square

10. (Признак Гаусса) Пусть

$$(\forall k \in \mathbb{N}) a_k > 0, \frac{a_k}{a_{k+1}} = \alpha + \frac{\beta}{k} + \frac{\gamma_k}{k^{1+\epsilon}},$$

где $\alpha, \beta, \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, \gamma_k$ – ограниченная числовая последовательность. Тогда при $\alpha > 1$ или $\alpha = 1, \beta > 1$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а при $\alpha < 1$ или $\alpha = 1, \beta \leq 1$ – расходится.

Доказательство.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \alpha, \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{\alpha} (\alpha \neq 0)$$

Тогда по признаку Даламбера ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha < 1$

При $\alpha = 1$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) = \beta$$

тогда по признаку Раабе ряд сходится при $\beta > 1$ и расходится при ≤ 1

При $\alpha = 1, \beta = 1$ воспользуемся признаком Куммера с $b_k = k \ln k, k \geq 2$.

Ряд обратных к b расходится по интегральному признаку, так как расходится соответствующий интеграл

$$\begin{aligned} v_k &= \frac{a_k}{a_{k+1}} b_k - b_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{\gamma_k}{k^{1+\epsilon}} \right) k \ln k - (k+1) \ln(k+1) = (k+1) \ln k + \frac{\gamma_k}{k^\epsilon} \ln k - (k+1) \ln(k+1) \\ &= \frac{\gamma_k \ln k}{k^{\epsilon}} - \ln \left(\frac{k+1}{k} \right)^{k+1} \\ &\quad \frac{\gamma_k \ln k}{k^{\epsilon}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \\ &\quad \ln \left(\frac{k+1}{k} \right)^{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1 \\ &\quad \frac{\gamma_k \ln k}{k^{\epsilon}} - \ln \left(\frac{k+1}{k} \right)^{k+1} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

□

Теорема 2.1. Если выполнено условие сходимости Д'Аламбера, то выполнено условие сходимости ряда Коши.

Доказательство.

$$a_n = a_K \prod_{k=K}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq a_K q^{n-K}, \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{a_K} q^{1-\frac{K}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 * q < 1$$

Если взять $p, q < p < 1$, то, начиная с некоторого номера $\sqrt[n]{a_n} < p < 1$ □