

Лекции  
По математическому анализу

Т.П. Лукашенко

## Часть III

# Лекции третьего семестра

# Глава 1

**Определение 1.1.** Пусть  $\{a_k\}_{k=n}^{\infty}$  - последовательность, занумерованная целыми числами начиная с  $n$  и далее по возрастанию. Тогда выражение вида  $a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots = \sum_{k=m}^{\infty} a_k$  называется бесконечным рядом.

Изменением нумерации общий случай можно свести к случаю  $n = 1$  или  $n = 0$ . Также можно получить при  $n > 1$  добавлением нулевых членов или заменой начальных членов их суммой в случае  $n < 0$ .

**Определение 1.2.**  $S_N = \sum_{k=m}^N$  - частичная сумма с номером  $N$ .  
 $S_N = 0$ , если  $N < m$ .

Если существует предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_N = S$$

то его называют суммой ряда  $S$ . Если  $a_k$  - действительные числа, то  $S$  действительное число или  $\pm\infty$ . Ряд называется сходящимся, если его сумма конечна. Если это не так, то ряд называют расходящимся.

**Утверждение 1.1.** Критерий Коши.

Числовой ряд сходится тогда и только тогда, когда:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m > N \quad \forall p \in \mathbb{N} : |S_{m+p} - S_m| < \epsilon$$

**Утверждение 1.2.** Необходимое условие сходимости.

$$\text{Если ряд } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится, то } a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

**Определение 1.3.** Если ряд сходится и  $S$  - его сумма, то  $r_n = S - S_n$  называется остатком ряда с номером  $n$ .

**Определение 1.4.** Ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  называют абсолютно сходящимся, если сходится ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ .

**Теорема 1.1.** Если ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  абсолютно сходится, то он сходится.

*Доказательство.* По критерию Коши,  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m > N \quad \forall p \in \mathbb{N} : |S_{m+p} - S_m| < \epsilon$   
Так как  $|S_{m+p} - S_m| \leq \sum_{k=m+1}^{m+p} |a_k|$ , то выполняется критерий Коши для исходного ряда, и он сходится.  $\square$

**Определение 1.5.** Если ряд сходится, но не сходится абсолютно, то его называют сходящимся условно.

## Свойства

1. Если ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится (сходится абсолютно) и  $S$  – его сумма, то для любого числа  $\alpha$  ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k$  сходится.

*Доказательство.*

$$\sum_{k=1}^n \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^n a_k = \alpha S_n$$

Если существует предел частичных сумм исходного ряда равный  $S$ , то  $S_\alpha = \alpha S$   $\square$

2. Если ряды  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  сходятся (абсолютно сходятся) и  $S_a$  и  $S_b$  – их суммы, то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$  сходится (сходится абсолютно) и его сумма –  $S_a + S_b$

*Доказательство.*

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S_a + S_b$$

Так как

$$\sum_{k=1}^n |a_k + b_k| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| + \sum_{k=1}^n |b_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|, \text{ то } \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|$$

– монотонная ограниченная последовательность и, следовательно, сходится.  $\square$

3. Если ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится (абсолютно сходится) и  $S$  его сумма,  $n_k$  – строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} a_j \right)$ , где  $n_0 = 0$ , сходится (сходится абсолютно) и  $S$  – его сумма.

*Доказательство.* Последовательность частичных сумм сгруппированного ряда – это подпоследовательность  $S_{n_k}$  последовательности частичных сумм начального ряда. Последовательность:

$$\sum_{k=1}^N \left| \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} a_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n_N} |a_j|$$

ограничена, тогда первая сумма – монотонная ограниченная последовательность, которая сходится.  $\square$

4. Если члены ряда  $a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ ,  $n_k$  – строго возрастающая последовательность натуральных чисел и  $\sup_k (n_k - n_{k-1}) < \infty$ , сгруппированный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} a_j \right)$ , где  $n_0 = 0$ , сходится  $S$  – его, сумма то начальный ряд также сходится и  $S$  – его сумма.

*Доказательство.* Для любого  $m \in \mathbb{N}$  найдем такое натуральное  $r$ , что  $n_{r-1} < m \leq n_r$ . Тогда:

$$|\mathcal{S}_{n_r} - \mathcal{S}_m| \leq \sum_{k=m+1}^{n_r} |a_k| \leq \sum_{k=n_{r-1}+1}^{n_r} |a_k| \leq \sum_{k=n_r-l}^{n_r} |a_k|,$$

где  $\sup_k (n_k - n_{k-1}) \leq l$ . Последняя сумма – конечная сумма  $\bar{o}(1)$ , значит,  $\bar{O}(1)$ . Следовательно, если  $\mathcal{S}_{n_r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \mathcal{S}$ , то  $\mathcal{S}_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathcal{S}$   $\square$

## Глава 2

# Ряды неотрицательных чисел

### Признаки сходимости рядов неотрицательных чисел

TODO: Вставить замечания

1. Если дан ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , то ряд сходится тогда и только тогда, когда последовательность частичных сумм  $S_n$  ограничена.
2. (Признак сравнения) Если даны ряды  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ,  $0 \leq a_k \leq b_k$ ,  $k > K$ , то из сходимости второго ряда следует сходимость первого, а из расходимости первого расходимость второго.

*Доказательство.*

$$\sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^K a_k + \sum_{k=K+1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^K a_k + \sum_{k=K+1}^n b_k \leq \sum_{k=1}^K a_k + \sum_{k=1}^n b_k \leq \sum_{k=1}^K a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Из сходимости второго ряда следует ограниченность частичных сумм первого, а значит и сходимость первого.

Если  $n > K$ ,  $p \geq 0$ , то  $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k$ , поэтому из выполнения критерия Коши для второго ряда следует выполнение критерия Коши для первого.  $\square$

3. (Сравнения) Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  – числовые ряды с неотрицательными членами. Если

$$0 < \alpha \leq \frac{a_k}{b_k} \leq \beta < \infty, \forall k > K,$$

то числовые ряды одновременно сходятся или одновременно расходятся.

*Доказательство.*  $0 \leq a_k \leq \beta b_k$ , поэтому, если ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  сходится, то сходится  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

Так как  $0 \leq b_k \leq \frac{a_k}{\alpha}$ , То если ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится, то сходится и второй.  $\square$

4. (Сравнения) Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  – числовые ряды со строго положительными членами. Если

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}, \forall k \geq K,$$

то из сходимости ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  следует сходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

*Доказательство.*

$$\prod_{k+K}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \prod_{k+K}^{n-1} \frac{b_{k+1}}{b_k}, \text{ т.е. } \frac{a_n}{a_K} \leq \frac{b_n}{b_K}, n > K$$

Значит,  $a_n \leq \frac{a_K}{b_K} b_n, n > K$ , поэтому из сходимости ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  следует сходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$   $\square$

5. (Д’Алабера) Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  – ряд с неотрицательными членами. Если

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1 \text{ при } n \geq K$$

то ряд сходится. Если

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \text{ при } n \geq K$$

То члены ряда не стремятся к нулю, и ряд расходится

*Доказательство.* Возьмём  $b_k = q^k$  – геометрическую прогрессию, ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$  сходится. Далее используем признак сравнение. Другой случай очевиден.  $\square$

6. (Коши) Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  – ряд с неотрицательными членами. Если  $\sqrt[n]{a_k} \leq q < 1$  при  $k \geq K$ , то ряд сходится, а если  $\sqrt[n]{a_k} \geq 1$  для бесконечного числа номеров, то члены ряда не стремятся к нулю и ряд расходится.

*Доказательство.* Если  $\sqrt[n]{a_k} \leq q < 1$ , то повторому признаку ряд сходится.  $\square$

7. (Интегральный Маклорена-Коши) Пусть  $f(x)$  – неотрицательная невозрастающая функция на  $[1, +\infty]$ . Тогда

$$0 \leq \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(x) dx \leq f(1)$$

Ряд и интеграл одновременно сходятся или одновременно расходятся.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{k=1}^n \left( f(k) - \int_k^{k+1} f(x) dx \right) = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(x) dx = \\ &= f(1) + \sum_{k=2}^n \left( f(k) - \int_{k-1}^k f(x) dx \right) - \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(1) \end{aligned}$$

Тогда частичные интегралы и суммы ограничены одновременно.  $\square$

8. (Признак Куммера) Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  — ряд со строго положительными членами,  $b_k$  — последовательность строго положительных чисел,

$$v_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} b_k - b_{k+1}$$

Если  $v_k \geq l > 0$  при  $k \geq K$ , то ряд сходится. Если  $v_k \leq 0$  при  $k \geq K$  и ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k)^{-1}$  расходится, то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  также расходится.

*Доказательство.*

$$v_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} b_k - b_{k+1} \geq l \geq l > 0, k \geq K$$

$$a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1} \geq l a_{k+1}, k \geq K$$

$$\sum_{k=K}^{n-1} (a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1}) = a_K b_K - a_n b_n \geq l \sum_{k=K}^{n-1} a_{k+1} = l \sum_{j=K+1}^n a_j$$

Так как  $a_K b_K \geq l \sum_{j=K+1}^{\infty} a_j$ , то частичные суммы ряда  $\sum_{j=K+1}^{\infty} a_j$  ограничены и, значит, ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится. Итак,

$$v_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} b_k - b_{k+1} \leq 0 \text{ при } k \geq K,$$

т.е.  $a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1} \leq 0, k \geq K$ . Значит,

$$\sum_{k=K}^{n-1} (a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1}) = a_K b_K - a_n b_n \leq 0, n > K$$

отсюда:  $a_n \geq a_K b_K - (b_n)^{-1}$ . Из расходимости ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  следует расходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$   $\square$

9. (Признак Раабе) Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  — ряд со строго положительными членами. Если

$$k \left( \frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) > q > 1, k \geq K,$$

то ряд сходится. Если

$$k \left( \frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) \leq 1, k \geq K,$$

то ряд расходится.



*Доказательство.* Возьмем  $b_k = k$ , ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k)^{-1}$  расходится.

$$v_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} k - (k+1) = k \left( \frac{a_k}{a_{k+1}} \right) - 1$$

И пользуемся признаком Куммера. □

10. (Признак Гаусса) Пусть

$$(\forall k \in \mathbb{N}) a_k > 0, \frac{a_k}{a_{k+1}} = \alpha + \frac{\beta}{k} + \frac{\gamma_k}{k^{1+\epsilon}},$$

где  $\alpha, \beta, \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, \gamma_k$  — ограниченная числовая последовательность. Тогда при  $\alpha > 1$  или  $\alpha = 1, \beta > 1$ , ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится, а при  $\alpha < 1$  или  $\alpha = 1, \beta \leq 1$  — расходится.

*Доказательство.*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \alpha, \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{\alpha} (\alpha \neq 0)$$

Тогда по признаку Даламбера ряд сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha < 1$

При  $\alpha = 1$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \left( \frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) = \beta$$

тогда по признаку Раабе ряд сходится при  $\beta > 1$  и расходится при  $\leq 1$ .  
При  $\alpha = 1, \beta = 1$  воспользуемся признаком Куммера с  $b_k = k \ln k, k \geq 2$ .

Ряд обратных к  $b$  расходится по интегральному признаку, так как расходится соответствующий интеграл

$$\begin{aligned} v_k &= \frac{a_k}{a_{k+1}} b_k - b_{k+1} = \\ &= \left( 1 + \frac{1}{k} + \frac{\gamma_k}{k^{1+\epsilon}} \right) k \ln k - (k+1) \ln(k+1) = \\ &= (k+1) \ln k + \frac{\gamma_k}{k^\epsilon} \ln k - (k+1) \ln(k+1) = \frac{\gamma_k \ln k}{k^\epsilon} - \ln \left( \frac{k+1}{k} \right)^{k+1} \\ &\quad \frac{\gamma_k \ln k}{k^\epsilon} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \\ &\quad \ln \left( \frac{k+1}{k} \right)^{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1 \\ &\quad \frac{\gamma_k \ln k}{k^\epsilon} - \ln \left( \frac{k+1}{k} \right)^{k+1} \rightarrow -1 \end{aligned}$$

□

**Теорема 2.1.** Если выполнено условие сходимости Д’Аламбера, то выполнено условие сходимости ряда Коши.

*Доказательство.*

$$a_n = a_K \prod_{k=K}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq a_K q^{n-K}, \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{a_K} q^{1-\frac{K}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 * q < 1$$

Если взять  $p, q < p < 1$ , то, начиная с некоторого номера  $\sqrt[n]{a_n} < p < 1$   $\square$

## Глава 3

# Ряды с членами разных знаков или с членами — комплексными числами.

**Теорема 3.1. (Признак Лейбница)** Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  — ряд со знакопередающимися членами, которые по модулю монотонно стремятся к нулю. Тогда ряд сходится и остаток  $|r_n| \geq |a_{n+1}| \geq |a_n|$ .

*Доказательство.* Пусть  $a_1 > 0$ . Тогда  $\mathcal{S}_{2n} = \sum_{k=1}^n (a_{2k-1} + a_{2k})$  — неубывающая последовательность,  $\mathcal{S}_{2n+1} = a_1 + \sum_{k=1}^n (a_{2k} + a_{2k+1})$  — невозрастающая последовательность,  $\mathcal{S}_{2n} \leq \mathcal{S}_{2n+1} = a_1 + \sum_{k=1}^n (a_{2k} + a_{2k+1}) \leq 0$  — невозрастающая последовательность,  $\mathcal{S}_{2n} \leq \mathcal{S}_{2n+1}$ .

Значит,  $\mathcal{S}_{2n}$  — неубывающая, ограниченная сверху последовательность.  $\mathcal{S}_{2n+1}$  — невозрастающая, ограниченная снизу последовательность. Они сходятся и, так как  $\mathcal{S}_{2n+1} - \mathcal{S}_{2n} = a_{2n+1} = o(1)$ , то имеют общий предел  $\mathcal{S}$ .

$$r_{2n+1} = \sum_{k=2n+2}^{\infty} a_k = \underbrace{a_{2n+2}}_{\leq 0} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \underbrace{(a_{2k-1} + a_{2k})}_{\geq 0} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \underbrace{(a_{2k} + a_{2k+1})}_{\leq 0}$$

Следовательно,

$$a_{2n+2} \leq r_{2n+1} \leq 0, |r_{2n+1}| \leq |a_{2n+2}| \leq |a_{2n+1}|$$

$$r_{2n} = \sum_{k=2n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=n}^{\infty} \underbrace{(a_{2k+1} + a_{2k+2})}_{\geq 0} = \underbrace{a_{2n+1}}_{\geq 0} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \underbrace{(a_{2k-1} + a_{2k})}_{\leq 0}$$

Следовательно  $0 \leq r_{2n} \leq a_{2n+1} \leq |a_{2n}|$

□

## Преобразование Абеля

$$\sum_{k=m}^n u_k v_k = \sum_{s=m-1}^{n-1} U_s (v_s - v_{s+1}) + U_n v_n - U_{m-1} v_{m-1} =$$

$$= \sum_{k=m}^n U_k(v_k - v_{k+1}) + U_n v_n - U_{m-1} u_m,$$

$$\text{где } U_n = \sum_{k=1}^n u_k, U_0 = 0, v_0 = 0$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n u_k v_k &= \sum_{k=m}^n (U_k - U_{k-1}) v_k = \sum_{k=m}^n U_k v_k - \sum_{k=m}^n U_{k-1} v_k = \\ &= \sum_{k=m}^n U_k v_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} U_k v_{k+1} = \sum_{k=m-1}^{n-1} U_k (v_k - v_{k+1}) + U_n v_n - U_{m-1} v_{m-1} = \\ &= \sum_{k=m}^{n-1} U_k (v_k - v_{k+1}) + U_n v_n - U_{m-1} v_m \end{aligned}$$

□

### Последовательность ограниченной вариации.

**Определение 3.1.** Последовательность  $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$  называется последовательностью ограниченной вариации, если сходится ряд модулей разниц между соседними членами

**Теорема 3.2.** *Последовательность действительных чисел является последовательностью ограниченной вариации тогда и только тогда, когда её можно представить как разность двух неубывающих (невозрастающих) сходящихся последовательностей*

*Доказательство.* Достаточность. Монотонная сходящаяся последовательность  $v_k$  является последовательностью ограниченной вариации. Действительно, если  $v_k$  – невозрастающая последовательность, то  $\sum_{k=1}^n |v_k - v_{k+1}| = \sum_{k=1}^n (v_k - v_{k+1}) = v_1 - v_{n+1}$  – имеет предел при  $n \rightarrow \infty$ , следовательно, последовательность имеет ограниченную вариацию.

□

Сумма, разность последовательностей ограниченной вариации являются последовательностями ограниченной вариации. Для любого числа  $\alpha$  и VB-последовательности  $v_k \alpha v_k$  ограничена.

*Доказательство.* Необходимость. Последовательность  $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} |v_k - v_{k+1}|$  – неубывающая,  $G_n = \sum_{k=1}^{n-1} |v_k - v_k + 1| + (v_k - v_{k+1})$  – неубывающая последовательность,  $v_n = v_1 - \sum_{k=1}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) = S_n + v_1 - G_n = S_n - (-v_1 + G_n)$ . Домножением на минус единицу можно получить разность двух невозрастающей последовательностей.

□

**Теорема 3.3.** *Если  $v_n$  – последовательность ограниченной вариации, то она сходится*

*Доказательство.*  $v_n = v_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$ , ряд  $\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$  сходится абсолютно.

□