Лекции
По математическому анализу

Т.П. Лукашенко

Часть III

Лекции третьего семестра

Глава 1

Определение 1.1. Пусть $\{a_k\}_{k=n}^{\infty}$ - последовательность, занумерованная целыми числами начиная с n и далее по возростанию.
Тогда выражение вида $a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots = \sum_{k=m}^{\infty} a_k$ называется бесконечным рядом.

Изменением нумерации общий случай можно свести к случаю $n = 1$ или $n = 0$. Тоже можно получить при $n > 1$ добавлением нулевых членов или заменой начальных членов их суммой в случае $n < 0$.

Определение 1.2. $\mathcal{S}_N = \sum_{k=m}^{N}$ – частичная сумма с номером N.
$\mathcal{S}_N = 0$, если $N < m$.
Если существует предел:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{S}_N = \mathcal{S}$$

то его называют суммой ряда $\mathcal{S}$. Если a_k - действительные числа, то $\mathcal{S}$ действительное число или $\pm\infty$. Ряд называется сходящимся, если его сумма конечна. Если это не так, то ряд называют расходящимся.

Утверждение 1.1. *Критерий Коши.*
Числовой ряд сходится тогда и только тогда, когда:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m > N \quad \forall p \in \mathbb{N} : |\mathcal{S}_{m+p} - \mathcal{S}_m| < \epsilon$$

Утверждение 1.2. *Необходимое условие сходимости.*

$$\textit{Если ряд } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \textit{ сходится, то } a_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Определение 1.3. Если ряд сходится и $\mathcal{S}$ – его сумма, то $r_n = \mathcal{S} - \mathcal{S}_n$ называется остатком ряда с номером n.

Определение 1.4. Ряд $\sum_{\text{k=1}}^{\infty} a_k$ называют абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{\text{k=1}}^{\infty} |a_k|$.

Теорема 1.1. *Если ряд $\sum_{\text{k=1}}^{\infty} a_k$ абсолюно сходится, то он сходится.*

Доказательство. По критерию Коши, $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m > N \quad \forall p \in \mathbb{N}$: $|\mathcal{S}_{m+p} - \mathcal{S}_m| < \epsilon$ Так как $|\mathcal{S}_{m+p} - \mathcal{S}_m| \leq \sum_{k=m+1}^{m+p} |a_k|$, то выполняется критерий Коши для исходного ряда, и он сходится. □

Определение 1.5. Если ряд сходится, но не сходится абсолютно, то его называют сходящимся условно.

Свойства

1. Если ряд $\sum_{\text{k=1}}^{\infty}$ сходится (сходится абсолютно) и $\mathcal{S}$ – его сумма, то для любого числа α ряд $\sum_{\text{k=1}}^{\infty} \alpha a_k$ сходится.

   Доказательство.

   $$\sum_{\text{k=1}}^{\text{n}} \alpha a_k = \alpha \sum_{\text{k=1}}^{\text{n}} a_k = \alpha\, \mathcal{S}_n$$

   Если сущестует предел частичных сумм исходного ряда равный $\mathcal{S}$, то $\mathcal{S}_\alpha = \alpha\, \mathcal{S}$ □

2. Если ряды $\sum_{\text{k=1}}^{\infty} a_k$ и $\sum_{\text{k=1}}^{\infty} b_k$ сходятся(абсолютно сходятся) и $\mathcal{S}_a$ и $\mathcal{S}_b$ – их суммы, то ряд $\sum_{\text{k=1}}^{\infty}(a_k + b_k)$ сходится (сходится абсолютно) и его сумма – $\mathcal{S}_a + \mathcal{S}_b$

   Доказательство.

   $$\sum_{\text{k=1}}^{\text{n}}(a_k + b_k) = \sum_{\text{k=1}}^{\text{n}} a_k + \sum_{\text{k=1}}^{\infty} b_k \xrightarrow{n \to \infty} \mathcal{S}_a + \mathcal{S}_b$$

   Так как

   $$\sum_{\text{k=1}}^{\text{n}} |a_k + b_k| \leq \sum_{\text{k=1}}^{\text{n}} |a_k| + \sum_{\text{k=1}}^{\text{n}} |b_k| \leq \sum_{\text{k=1}}^{\infty} |a_k| + \sum_{\text{k=1}}^{\infty} |b_k|, \text{ то } \sum_{\text{k=1}}^{\text{n}} |a_k + b_k|$$

   – монотонная ограниченная последовательность и, следовательно, сходится. □

3. Если ряд $\sum_{\text{k=1}}^{\infty} a_k$ сходится (абсолютно сходится) и $\mathcal{S}$ его сумма, n_k – строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то ряд $\sum_{\text{k=1}}^{\infty}\left(\sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} a_j\right)$, где $n_0 = 0$, сходится (сходится абсолютно) и $\mathcal{S}$ – его сумма.

   Доказательство. Последовательность частичных сумм сгруппированного ряда – это подпоследовательность S_{n_k} последовательности частичных сумм начального ряда.

$$\sum_{k=1}^{N}\left|\sum_{j=n_{k-1}}^{n_N}\right| \leq \sum_{j=1}^{n_N}|a_j|$$

   – Ограниченная последовательность , тогда первая сумма – монотонная ограниченная последовательность, которая сходится. □

4. Если члены ряда $a_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$, n_k – строго возрастающая последовательность натуральных чисел и $\sup_k(n_k - n_{k-1} < \infty)$, сгруппированный ряд $\sum_{\text{k=1}}^{\infty}\left(\sum\limits_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} a_j\right)$, где $n_0 = 0$, сходится $\mathcal{S}$ – его, сумма то начальный ряд также сходится и $\mathcal{S}$ – его сумма.

   Доказательство. Для любого $m \in \mathbb{N}$ найдем такое натуральное r, что $n_{r-1<m\leq n_r}$. Тогда:

$$|\mathcal{S}_{n_r} - \mathcal{S}_m| \leq \sum_{k=m+1}^{n_r}|a_k| \leq \sum_{k=n_{r-1}+1}^{n_r}|a_k| \leq \sum_{k=n_r-l}^{n_r}|a_k|,$$

   где $sup_k(n_k - n_{k-1}) \leq l$. Последняя сумма – конечная сумма $\overset{=}{o}(1)$, значит, $\overset{=}{O}(1)$. Следовательно, если $\mathcal{S}_{n_r} \xrightarrow{r\to\infty} \mathcal{S}$, то $\mathcal{S}_m \xrightarrow{m\to\infty} \mathcal{S}$ □

Глава 2

Признаки сходимости рядов неотрицательных числел

TODO: Вставить замечания

1. Если дан ряд $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} a_k$, то ряд сходится тогда и только тогда, когда последовательность частичных сумм $\mathcal{S}_n$ ограничена.

2. (Признак сравнения) Если даны ряды $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} a_k$ и $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} b_k, 0 \leq a_k \leq b_k, k > \mathbf{K}$, то из сходимости второго ряда следует сходимость первого, а из расходимости первого расходимость второго.

   Доказательство.

   $$\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} a_k \leq \sum_{k=1}^{K} + \sum_{k=K+1} a_k \leq \sum_{k=1}^{K} + \sum_{k=K+1} b_k \leq \sum_{k=1}^{K} + \sum_{k=1} b_k \leq$$

   Из сходимости второго ряда следует ограниченность частиных сумм первого, а значит и сходимость первого.
   Если $n > K, p \geq 0$, то $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k$, поэтому из выполнения критерия Коши для второго ряда следует выполнение критерия Коши для превого. □

3. (Сравннения) Пусть $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} a_k$ и $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} b_k$ – числовые ряды с неотрицательными членами. Если

   $$0 < \alpha \leq \frac{a_k}{b_k} \leq \beta < \infty, \forall k > K,$$

   то числовые ряды одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Доказательство. $0 \leq a_k \leq \beta b_k$, поэтому, если ряд $\sum_{\text{k=1}}^{\infty} b_k$ сходится, то сходится $\sum_{\text{k=1}}^{\infty} a_k$.
Так как $0 \leq b_k \leq \frac{a_k}{\alpha}$, То если ряд $\sum_{\text{k=1}}^{\infty} a_k$ сходится, то сходится и второй. □

4. (Сравнения) Пусть $\sum_{\text{k=1}}^{\infty} a_k$ и $\sum_{\text{k=1}}^{\infty} b_k$ – числовые ряды со строго положительными членами. Если

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}, \forall k \geq K,$$

то из сходимости ряда $\sum_{\text{k=1}}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum_{\text{k=1}}^{\infty} a_k$

Доказательство.

$$\prod_{k+K}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \prod_{k+K}^{n-1} \frac{b_{k+1}}{b_k}, \text{ т.е. } \frac{a_n}{a_K} \leq \frac{b_n}{b_K}, n > K$$

Значит, $a_n \leq \frac{a_K}{b_K} b_n, n > K$, поэтому из сходимости ряда $\sum_{\text{k=1}}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum_{\text{k=1}}^{\infty} a_k$ □

5. (Д‘Алабера) Пусть $\sum_{\text{k=1}}^{\infty} a_k$ – ряд с неотрицательными членами. Если

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1 \text{при} n \geq K$$

то ряд сходится. Если

$$\frac{a_{k+!}}{a_k} \text{при} n \geq K$$

То члены ряда не стремятся к нулю, и ряд расходится

Доказательство. Возьмём $b_k = q^k$ – геометрическую прогрессию, ряд $\sum_{\text{k=1}}^{\infty} q^k$ сходится. Далее используем признак сравнение. Другой случай очевиден. □

6. (Коши) Пусть $\sum_{\text{k=1}}^{\infty} a_k$ – ряд с неотрицательными членами. Если $\sqrt[n]{a_k} \leq q < 1$ при $k \geq K$, то ряд сходится, а если $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ для бесконечного числа номеров, то члены ряда не стремятся к нулю и ряд расходится.

Доказательство. Если $\sqrt[n]{a_k} \leq q < 1$, то повторому признаку ряд расходится. □

7. (Интегральный Маклорена-Коши) Пусть $f(x)$ – неотрицательная невозрастающая функция на $[1, +\infty]$. Тогда

$$0 \leq \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} f(k) - \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \leq f(1)$$

Ряд и интеграл одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Доказательство.

$$0 \leq \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \left(f(k) - \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \right) = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} f(k) - \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx =$$

$$= f(1) + \sum_{k=2}^{n} \left(f(k) - \int\limits_{k-1}^{k} f(x)dx \right) - \int\limits_{n}^{n+1} f(x)dx \leq f(1)$$

Тогда частичные интегралы и суммы ограниченны одновременно. □

8. (Признак Куммера) Пусть $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} a_k$ – ряд со строго положительными членами, b_k – последовательность строго положительных чисел,

$$v_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} b_k - b_{k+1}$$

Если $v_k \geq l.0$ при $k \geq K$, то ряд сходится. Если $v_l \leq 0$ при $k \geq K$ и ряд $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} (b_k)^{-1}$ расходится, то ряд $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} a_k$ также расходится.

Доказательство.

$$v_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} b_k - b_{k+1} \geq l \geq l > 0, k \geq K$$

$$a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1} \geq l a_{k+1}, k \geq K$$

$$\sum_{k=K}^{n-1} \left(a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1} \right) = a_K b_K - a_n b_n \geq l \sum_{k=K}^{n-1} a_{k+1} = l \sum_{j=K+1}^{n} a_j$$

Так как $a_K b_K \geq l \sum_{j=K+1} n$, то частичные суммы ряда $\sum_{j=K+1} \infty$ ограничены и, значит, ряд $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} a_k$ сходится. Итак,

$$v_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} b_k - b_{k+1} \leq 0 \text{ при } k \geq K,$$

т.е. $a_k b_k - a_{k+!} b_{k+1} \leq 0 k \geq$. Значит,

$$\sum_{k=K}^{n-1} \left(a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1} \right) = a_K b_K - a_n b_n \leq 0, n > K$$

отсюда: $a_N \geq a_K b_K - (b_n)^{-1}$. Из расходимости ряда $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} b_k$ следует расходимость ряда $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} a_k$ □

9. (Признак Раабе) Пусть $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} a_k$ – ряд со строго положительными членами. Если
$$k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) > q > 1, k \geq K,$$
то ряд сходится. Если
$$k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) \leq 1, k \geq K,$$
то ряд расходится.

Доказательство. Возьмем $b_k = k$, ряд $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} (b_k)^{-1}$ расходится.
$$v_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} k - (k+1) = k(\frac{a_k}{a_{k+1}}) - 1$$
И пользуемся признаком Куммера. □

10. (Признак Гаусса) Пусть
$$(\forall k \in \mathbb{N}) a_k > 0, \frac{a_k}{a_{k+1}} = \alpha + \frac{\beta}{k} + \frac{\gamma_k}{k^{1+\epsilon}},$$
где $\alpha, \beta, \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, \gamma_k$ – ограниченная числова последовательность. Тогда при $\alpha > 1$ или $\alpha = 1, \beta > 1$, ряд $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} a_k$ сходится, а при $\alpha < 1$ или $\alpha = 1, \beta \leq 1$ – расходится.

Доказательство.
$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \alpha, \lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{\alpha} (\alpha \neq 0)$$
Тогда по признаку Даламбера ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha < 1$

При $\alpha = 1$

$$\lim k \to \infty k(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1) = \beta$$

тогда по признаку Раабе ряд сходится при $\beta > 1$ и расходится при $\leq$1
При $\alpha = 1, \beta = 1$ воспользуемся признаком Куммера с $b_k = klnk, k \geq 2$.
Ряд обратных к b расходится по интегральному признаку, так как расходится соответствующий интеграл

$$v_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} b_k - b_{k+1} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{\gamma_k}{k^{1+\epsilon}}\right) klnk - (k+1)ln(k+1) =$$

$$= (k+1)\ln k + \frac{\gamma_k}{k^\epsilon} lnk - (k+1)\ln(k+1) = \frac{\gamma_k \ln k}{k^\epsilon} - \ln(\frac{k+1}{k})^{k+1}$$

$$\frac{\gamma_k \ln k}{k^\epsilon} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

$$\ln(\frac{k+1}{k})^{k+1} \xrightarrow{k\to\infty} 1$$

$$\frac{\gamma_k \ln k}{k^\epsilon} - \ln(\frac{k+1}{k})^{k+1} \to -1$$

□

Теорема 2.1. *Если выполнено условие сходимости Д'Аламбера, то выполнено условие сходимости ряда Коши.*

Доказательство.

$$a_n = a_K \prod_{k=K}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq a_K q^{n-K}, \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{a_K} q^{1-\frac{K}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1 * q < 1$$

Если взять $p, q < p < 1$, то, начиная с некоторого номера $\sqrt[n]{a_n} < p < 1$ □

Глава 3

Ряды с членами разных знаков или с членами – комплексными числа.

1. (Признак Лейбница) Пусть $\sum_{\text{k=1}}^{\infty} a_k$ – ряд со знакочередующимся членами, которыепо модулю монотонно стремятся к нулю. Тогда ряд сходится и остаток $|r_n| \geq |a_{n+1}| \geq |a_n|$.

   Доказательство. Пусть $a_1 > 0$. Тогда $\mathcal{S}_{2n} = \sum_{\text{k=1}}^{\text{n}}(a_{2k-1} + a_{2k})$ – неубывающая последовательность, $\mathcal{S}_{2n+1} = a_1 + \sum_{\text{k=1}}^{\text{n}}(a_{2k} + a_{2k+1})$ – невозрастающая последовательность, $\mathcal{S}_{2n} \leq S_{2n+1} = a_1 + \sum_{\text{k=1}}^{\text{n}}(a_{2k} + a_{2k+1}) \leq 0$ – невозрастающая последовательность, $\mathcal{S}_{2n} \leq \mathcal{S}_{2n+1}$.

   Значит, $\mathcal{S}_{2n}$ – неубывающая, ограниченная сверху последовательность. $\mathcal{S}_{2n+1}$ – невозрастающая, ограниченная снизу последовательность. Они сходятся и, так как $\mathcal{S}_{2n+1} - \mathcal{S}_{2n} = a_{2n+1} = \overline{o}(1)$

   $\square$

2.