

Arrêt optimal

1 Rappels sur les processus et sur les temps d'arrêt

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé. $F = \{F_n\}_{n=1}^\infty$ une filtration (c-à-d. une famille croissante des sous-tribus de \mathcal{A}). La filtration détermine ce qui est connu et ce qui n'est pas connu à un instant de temps donné. Tout événement $A \in F_n$ est déterminé au temps n . Un processus $(X_n)_{n=1}^\infty$ est dit adapté ssi $X_n \in F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il est prévisible si X_1 est constante et $X_n \in F_{n-1}$ pour tout $n > 1$. Il est intégrable si $X_n \in L^1(\Omega)$ pour tout n . Il est une martingale (sur/sous) si il est intégrable et $X_n = E[X_{n+1}/F_n]$ (resp. \leq) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'espérance conditionnelle d'une v.a. F intégrable par rapport à une tribu \mathcal{G} est une v.a. intégrable $E[F/\mathcal{G}]$ telle que $E[GF] = E[GE[F/\mathcal{G}]]$ pour tout v.a. bornée G qui est \mathcal{G} -mesurable.

Un temps d'arrêt T est une v.a. $T: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ telle que les événements $\{T \leq k\}$ sont F_k -mesurables pour tout $k \in \mathbb{N}$. Cette condition équivaut à demander que $\{T \leq k\} \in F_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Quelques propriétés des temps d'arrêt : $\{T > k\} \in F_k$, $\{T \leq k\} \in F_k$, si T, S sont t.a. alors $T \wedge S = \min(T, S)$ et $T \vee S = \max(T, S)$ sont t.a. ($(T \wedge S) \leq \min(T, S)$, $(T \vee S) \geq \max(T, S)$).

La tribu F_T engendrée par le temps d'arrêt T est la plus petite tribu qui contient les événements $A \in \mathcal{A}$ tels que $\{T \leq k\} \in A \in F_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, i.e.

$$F_T = \{A \in \mathcal{A} : \{T \leq k\} \in A \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}, A \in F_k\}$$

Une fonction G est F_T -mesurable ssi $G I_{\{T \leq k\}}$ est F_k -mesurable pour tout $k \in \mathbb{N}$. C'est une caractérisation équivalente des fonctions F_T -mesurables. Pour le prouver on note que il est vrai pour les fonction caractéristiques $G = I_B$ où $B \in F_T$ et que on peut approcher n'importe quelle fonction F_T mesurable par des combinaison linéaires de s fonctions caractéristiques. Si on note $G_k = G I_{\{T \leq k\}}$ alors on a que $(G_k)_{k=1}^\infty$ est un processus adapté et que $G = G_T$. Donc toute fonction $G \in F_T$ peut être écrite comme la valeur au temps T d'un processus adapté $(G_k)_{k=1}^\infty$.

Si $(X_n)_{n=1}^\infty$ est un processus adapté alors le processus arrêté $T: \tilde{X}_n = X_{n \wedge T}$ est adapté et X_T est F_T -mesurable. Si $(M_n)_{n=1}^\infty$ est une martingale alors $(\tilde{M}_n)_{n=1}^\infty$ est une martingale. Si S, T sont deux t.a. alors on dit que $S \leq T$ si $S(\omega) \leq T(\omega)$ presque sûrement.

Si S, T sont deux t.a. tels que $S \leq T$ alors $F_S \subset F_T$. Preuve: La tribu F_S est engendrée par les événements $A \in \mathcal{A}$ tels que $\{S \leq k\} \in A \in F_k$. Mais alors si $A \in F_S$ on a que $\{T \leq k\} \cap A = \{S \leq T \leq k\} \cap A = \{T \leq k\} \cap A \in F_k$ car $\{T \leq k\} \in F_k$ et $\{S \leq k\} \in A \in F_k$ par hypothèse. Donc tous les générateurs A de F_S sont aussi générateurs de F_T et donc $F_S \subset F_T$.

Lemme 1. Si les t.a. sont bornés et $(M_n)_{n=1}^\infty$ est une martingale, alors

$$E[M_T/F_S] = M_S. \quad (1)$$

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $S \leq T \leq N$ par l'hypothèse de bornitude des t.a. On montre d'abord que $E[M_N/F_T] = M_T$. Par la propriété d'espérance conditionnelle on doit montrer que $E[M_N G] = E[M_T G]$ pour toute fonction bornée G qui est F_T -mesurable. On a que $G I_{\{T \leq n\}} \in F_n$ et que

$$\begin{aligned} E[M_N G] &= \sum_{n=1}^N E[M_N G I_{\{T \leq n\}}] = \sum_{n=1}^N E[E[M_N/F_n] G I_{\{T \leq n\}}] \\ &= \sum_{n=1}^N E[M_n G I_{\{T \leq n\}}] = \sum_{n=1}^N E[M_T G I_{\{T \leq n\}}] = E[M_T G]. \end{aligned}$$

Maintenant on a que $E[M_T/F_S] = E[E[M_N/F_T]/F_S] = E[M_N/F_S] = M_S$ car $F_S \subset F_T$.

Remarque 2. Une propriété analogues sont vraie pour les sous/sur-martingales. Soit $(X_n)_{n=1}$ une sous-martingale, alors il existe toujours une martingale $(M_n)_{n=1}$ et un processus prévisible croissante $(A_n)_{n=1}$ (i.e. $A_n \leq F_{n-1}$ et $A_{n+1} \geq A_n$) tels que $X_n = M_n + A_n$. En effet si M doit être une martingale on a que

$$X_n - A_n = M_n = E[M_{n+1}/F_n] = E[X_{n+1} - A_{n+1}/F_n] = E[X_{n+1}/F_n] - A_{n+1}$$

et donc il suffit de poser $A_1 = 0$ et $A_{n+1} - A_n = E[X_{n+1}/F_n] - X_n = 0$ pour tout $n > 1$. Alors si X est une sous-martingale avec décomposition $X_n = M_n + A_n$ on a que

$$E[X_T/F_S] = E[M_T/F_S] + E[A_T/F_S] = M_S + E[A_T/F_S] = M_S + E[A_S/F_S] = M_S + A_S = X_S$$

car $A_T \leq A_S$ par la croissance de $(A_n)_{n=1}$ et le fait que $T \leq S$.

Remarque 3. Si F est une v.a. intégrable alors $F_n = E[F/F_n]$ est une martingale. Donc le lemme précédent donne que $E[F/F_S] = F_S$ pour tout t.a. borné $\leq S$. Donc on peut calculer l'espérance conditionnelle par rapport à la tribu F_S en prenant la valeur au temps $n = S$ de l'espérance conditionnelle calculée par rapport à F_n .

2 Arrêt optimal en horizon fini

On considère un processus adapté $(Y_n)_{n=1}$ et on se pose le problème d'optimiser la valeur $E[Y_T]$ parmi tous les temps d'arrêt T (pour la filtration F). L'interprétation est que $Y_n(\cdot)$ est le gain que l'on obtient si on décide de s'arrêter au temps n et que l'on cherche à optimiser le gain moyen attendu en fonction de la règle d'arrêt que l'on se donne (que est la seule chose raisonnable au temps initial, i.e. sans connaissance au préalable l'évolution du système). On retient seulement les règles d'arrêt $T \leq T$ qui sont telles que $\{T = n\} \in F_n$, c-à-d. pour lesquelles on sait dire si il faut s'arrêter au temps n seulement en fonction de l'histoire observée jusqu'au moment- n .

On considère d'abord le problème en horizon fini i.e. on se donne $N \in \mathbb{N}$ et on appelle T_N l'ensemble des temps d'arrêt bornés par N et on optimise parmi tous les t.a. $T \leq T_N$. Soit $J_N = \sup_{T \leq T_N} E[Y_T]$ le gain moyen optimal. On appelle $T \leq T_N$ temps d'arrêt optimal si $E[Y_T] = J_N$.

Notation: L'infimum tronqué $\inf_{N} A$ pour un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est donné par $\inf_{N} A = \inf A$ si $A \neq \emptyset$ et $\inf_{N} = N$.

La solution du problème d'arrêt optimal (comme de la plus part des problèmes d'optimisation) passe par la détermination d'une fonction valeur Z_n associée à tout choix qui sont encore disponibles au temps n . La fonction valeur représente le gain sur lequel on peut espérer en fonction de toute l'information que j'ai accumulée jusqu'au temps n , i.e. de F_n . Elle doit satisfaire les propriétés suivantes:

- $Z_n \leq F_n$: elle est un processus adapté. On doit être capable de la déterminer seulement en fonction des informations disponibles au temps n .
- $Z_n \leq Y_n$: au temps n ce que j'espère gagner ne peut pas être inférieur à ce que je peux gagner en m'arrêtant tout de suite à n .
- $Z_n = E[Z_{n+1}/F_n]$: ma position a une valeur qui n'est pas inférieure à ce que j'espère gagner en moyenne à l'étape suivante (tant donné que je connais de F_n).

En effet chaque étape j'ai deux choix (m'arrêter ou continuer) sauf au temps final N où je dois forcément m'arrêter et donc gagner Y_N . On définit donc la fonction valeur par

$$Z_N = Y_N, \quad Z_n = \sup (Y_n, E[Z_{n+1}/F_n]) \quad \text{pour } 1 \leq n < N \quad (2)$$

Elle est une sur-martingale qui majore Y . En effet on va montrer qu'elle est l'enveloppe de Snell de Y , i.e. la plus petite sur-martingale Q tel que $Q_n \geq Y_n$ pour tout $0 \leq n \leq N$.

Théorème 4. Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ un processus adapté tel que $E|Y_n| < \infty$ pour tout $n \geq 1$. On définit Z_n par l'équation (2) et un t.a. $T = \inf \{k \geq 1 : Y_k = Z_k\}$. Alors la suite $(Z_{n \wedge T})_{n \geq 1}$ est une martingale et

$$E[Z_1] = E[Z_T] = E[Y_T] = J_N.$$

Le t.a. T est optimal et Z est l'enveloppe de Snell de Y .

Remarque 5. On utilisera souvent des écritures du genre $T = \inf \{k \geq 1 : Y_k = Z_k\}$ pour désigner des temps d'arrêt. Ils sont abrégés pour $T(\cdot) = \inf \{k \geq 1 : Y_k(\cdot) = Z_k(\cdot)\}$. Exercice: montrer que il s'agit bien d'un temps d'arrêt.

Démonstration. Par définition $Z_n = E[Z_{n+1}/F_n]$ et $Z_n = Y_n$. Sur l'événement $\{T \geq n\}$ on a $Z_n = E[Z_{n+1}/F_n]$ donc le processus $\tilde{Z}_n = Z_{n \wedge T}$ est une martingale par rapport à $(F_n)_{n \geq 1}$. En effet $E[1_A \tilde{Z}_{n+1} | F_n] = E[1_A Z_{n+1} | F_n] = E[1_A Z_n | F_n] = \tilde{Z}_n$ pour tout $A \in F_n$. Donc si on considère les deux temps d'arrêt $n \wedge T$ et T on a $n \wedge T \leq T$ et $E[\tilde{Z}_T | F_{n \wedge T}] = \tilde{Z}_{n \wedge T}$ qui équivaut à dire $E[Z_T | F_{n \wedge T}] = Z_{n \wedge T}$. En prenant l'espérance on a, pour tout t.a. $T \leq N$:

$$E[Y_T] \stackrel{(1)}{=} E[Z_T] \stackrel{(2)}{=} E[Z_1] \stackrel{(3)}{=} E[Z_T] \stackrel{(4)}{=} E[Y_T]$$

La propriété (1) est donnée par la propriété $Y_n = Z_n$ pour tout n et donc pour tout t.a. $T \leq N$. La propriété (2) est la propriété de sur-martingale de Z_n par rapport au t.a. T . La propriété (3) est donnée par la propriété de martingale du processus arrêté \tilde{Z}_n et enfin la propriété (4) est due au fait que $Y_T = Z_T$ par définition de T . Cela étant vrai pour n'importe quelle t.a. $T \leq N$ on a que $E[Y_T] = J_N$ et donc que T est un t.a. optimal pour Y . Le gain optimal est donc $J_N = E[Z_1]$. On va montrer que Z est l'enveloppe de Snell de Y : en effet soit Q un autre sur-martingale qui domine Y : au temps initial on a $Q_N = Y_N = Z_N$. De plus si on a $Q_n = Z_n$ pour tout $N \geq n > k$ alors $Q_k = E[Q_{k+1}/F_k] = E[Z_{k+1}/F_k] = Z_k$ et $Q_k = Y_k$, donc on a aussi $Q_k = Z_k$ et on a établi la domination aussi à l'instant k . Par induction (récrograde) on a domination à tout temps $1 \leq k \leq N$ et donc Z est effectivement la plus petite des sur-martingales qui dominent Y . On peut conclure que le gain optimal est donné par l'espérance en $t=1$ de l'enveloppe de Snell de Y .

Corollaire 6. Le t.a. T est le plus petit t.a. optimal: si S est un autre t.a. optimal alors $T \leq S$ presque sûrement.

Démonstration. Supposons que $P(T > S) > 0$. Alors pour ω tel que $T(\omega) > S(\omega)$ on a que $Y_S(\omega) < Z_S(\omega)$ car $T(\omega)$ est le premier k où on a $Y_k(\omega) = Z_k(\omega)$. Comme l'événement $\{T > S\}$ a une probabilité positive on obtient que $E[Y_S] < E[Z_S]$ strictement. Mais par la propriété de sur-martingale de Z on en déduit que $E[Y_S] < E[Z_S] = E[Z_1] = J_N$ et cela est en contradiction avec l'hypothèse que S est optimal (i.e. $E[Y_S] = \sup_{T \leq S} E[Y_T] = J_N$).

Remarque 7. Si F est une v.a. positive (≥ 0) et si l'événement $\{F > 0\}$ a une probabilité strictement positive, alors $E[F] > 0$. En effet si $P(F > 0) > 0$ alors $P(F > \epsilon) > 0$ pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit (pourquoi?). Et donc $E[F] = E[FI_F] \geq E[\epsilon I_{F > \epsilon}] = \epsilon P(F > \epsilon) > 0$.

Remarque 8. On observe qu'une définition équivalente de T est

$$T = \inf \{k \geq 1 : Y_k \leq E[Z_{k+1}/F_k]\}$$

Corollaire 9. Le temps d'arrêt $T = \inf \{k \geq 1 : Y_k \leq E[Z_{k+1}/F_k]\}$ est le plus grand temps d'arrêt optimal: si S est un t.a. optimal alors $S \leq T$ p.s..

Démonstration. Supposons que $P(T < S) > 0$. On remarque que $\tilde{Z}_n = Z_{n \wedge (T+1)}$ est une martingale (en effet si $n \leq T$ alors $Y_n = E[Z_{n+1}/F_n]$ et donc $Z_n = E[Z_{n+1}/F_n]$). D'une part on a que $E[\tilde{Z}_S | F_S] = \tilde{Z}_S$ par la martingale de \tilde{Z} . On remarque aussi que $\{T < S\} \in F_S$ et donc que

$$Y_S I_{T < S} = Z_S I_{T < S} = \tilde{Z}_S I_{T < S} = E[\tilde{Z}_T I_{T < S} | F_S] = E[Z_T I_{T < S} | F_S]. \quad (3)$$

Autre part, si on pose $Z_{N+1} = Z_N$ alors $(Z_n)_{n=1, \dots, N+1}$ est encore une sur-martingale et donc on a que $E[Z_{S-(T+1)}/F_{T+1}] \geq Z_{T+1}$ (égalité de sur-martingale avec les deux t.a. $T+1$ et $S-(T+1) \leq N+1$). Pour le fait que $\{T < S\} \in \mathcal{F}_T$ et que $Y_S \geq Z_S$:

$$\begin{aligned} E[Y_S I_{T < S}] &= E[Z_S I_{T < S}] = E[Z_{S-(T+1)} I_{T < S}] = E[E[Z_{S-(T+1)}/F_{T+1}] I_{T < S}] \\ &= E[Z_{T+1} I_{T < S}] = E[E[Z_{T+1}/F_T] I_{T < S}] < E[Y_T I_{T < S}] = E[Z_T I_{T < S}] \end{aligned} \quad (4)$$

On a utilisé aussi le fait que par la définition de T on a $Y_T > E[Z_{T+1}/F_T]$. Les (3) et (4) donnent que

$$E[Y_S] = E[Y_S I_{T \leq S}] + E[Y_S I_{T < S}] < E[Z_T I_{T \leq S}] + E[Z_T I_{T < S}] = E[Z_T] = E[Y_T]$$

qui est en contradiction avec l'hypothèse d'optimalité de S .

Remarque 10. Il sera utile de donner une preuve détaillée du fait que $Y_T > E[Z_{T+1}/F_T]$. Commencer par montrer que si F est une v.a. intégrable et T est un t.a. alors $E[F/F_T] I_{T=n} = E[F/F_n] I_{T=n} = E[F I_{T=n}/F_n]$. De suite écrire $Y_T = \sum_{n=1}^N Y_n I_{T=n}$ et conclure.

2.1 Problèmes avec structure markovienne

Dans cette section on considère des problèmes de r-optimal (horizon N) pour lesquels le processus des gains Y est une fonction connue d'une chaîne de Markov X pour la filtration \mathcal{F} . On montre que pour cette classe de problèmes la fonction valeur Z a une forme simple.

On rappelle qu'un processus de Markov X pour la filtration \mathcal{F} et Y valeurs dans l'espace dénombrable S est un processus adapté $(X_n)_{n=1,2,\dots}$ tel que $X_n \in S$ et que

$$P(X_{n+1} = x/F_n) = P(X_{n+1} = x/X_n) = P_n(X_n, x) \quad x \in S, n \geq 1$$

où P_n est le noyau de transition du processus de Markov au temps n $P_n(x, y) = P(X_{n+1} = y/X_n = x)$ qui vérifie $\sum_{y \in S} P_n(x, y) = 1$ pour tout $x \in S$ et $n \geq 1$. Si $P_n(x, y) = P(x, y)$ indépendamment de n on dit que le processus de Markov est homogène. P_n est aussi appelée matrice de transition.

Exemple 11. Dans le problème de la princesse la suite $(X_n)_{n=1, \dots, N}$ est un processus de Markov avec espace d'états $S = \{1, \dots, N\}$ et noyau de transition donné par

$$P_n(x, y) = P(X_{n+1} = y/X_n = x) = P(X_{n+1} = y) = \frac{1}{n+1} I_{1 \leq y \leq n+1}$$

par indépendance des X_n . On remarque que ce n'est pas un processus homogène en temps.

Exemple 12. Dans le problème de Moser si on fait l'hypothèse que la loi des X_n est Y valeurs dans l'espace dénombrable S on a que les X_n constituent un processus de Markov avec matrice de transition homogène $P(x, y) = P(y)$ où $P(y) = P(X_1 = y)$.

Soit X un processus de Markov pour la filtration \mathcal{F} et le processus des gains soit de la forme $Y_n = V_n(X_n)$ pour une famille de fonctions $\{V_n : S \rightarrow \mathbb{R} : n = 1, \dots, N\}$. Considérons le problème de r-optimal associé. Par induction on montre que $Z_n = V_n(X_n)$ i.e. qu'il existe des fonctions $V_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $Z_n = V_n(X_n)$. En effet $Z_N = Y_N = V_N(X_N)$ donc on peut prendre $V_N(x) = V_N(x)$. Si on suppose que $Z_{n+1} = V_{n+1}(X_{n+1})$ alors on a que $E[Z_{n+1}/F_n] = E[V_{n+1}(X_{n+1})/F_n] = E[V_{n+1}(X_{n+1})/X_n]$ par la propriété de Markov et donc que $Z_n = \sup (Y_n, E[Z_{n+1}/F_n]) = \sup (V_n(X_n), E[V_{n+1}(X_{n+1})/X_n]) = V_n(X_n)$ pour une fonction V_n . Cela conclut l'argument d'induction.

En utilisant la matrice de transition on peut écrire que

$$E[V_{n+1}(X_{n+1})/X_n] = \sum_{y \in S} V_{n+1}(y) P_n(X_n, y) = P_n V_{n+1}(X_n)$$

on a utilisé la notation $P_n(x) = \sum_{y \in S} P(x, y) V_{n+1}(y)$.

Les fonctions V_n sont données par la relation suivante:

$$V_N(x) = g_N(x) \quad \text{et} \quad V_n(x) = \sup (g_n(x), P_n V_{n+1}(x)) \text{ pour } 1 \leq n < N.$$

La règle dearrêt T devient $T = \inf \{n \leq N : g_n(X_n) = V_n(X_n)\} = \inf \{n \leq N : g_n(X_n) \geq P_n V_{n+1}(X_n)\}$. Donc si on définit les ensembles $D_n = \{x \in S : g_n(x) = V_n(x)\} = \{x \in S : g_n(x) \geq P_n V_{n+1}(x)\}$ on a que $T = \inf \{n \leq N : X_n \in D_n\}$: le premier temps où X_n entre dans le domaine D_n (qui change lui aussi avec le temps).

Supposons que la suite X soit donnée par des v.a. indépendantes. Dans ce cas la matrice de transition est $P_n(x, y) = g_n(y)$ où $g_n(y) = P(X_n = y)$ est la loi de X_n . On voit que $P_n(x)$ ne dépend pas de x et $P_n(x) = \sum_{y \in S} g_n(y) g_n(y) = E[g_n(X_n)]$. La fonction valeur est $V_n(x) = \sup (g_n(x), E[V_{n+1}(X_{n+1})])$. Si on note $c_n = E[V_n(X_n)]$ alors

$$c_N = E[g_N(X_N)], \quad c_n = E[\sup (g_n(X_n), c_{n+1})]$$

et $T = \inf \{n \leq N : g_n(X_n) > c_{n+1}\}$. Le problème de la détermination de la fonction valeur est donc ramené au calcul des constantes c_n qui dépendent seulement des g_n et des lois des X_n . Le gain moyen optimal est donné par $c_1 = E[Z_1]$.