

## Corrigé du Partiel

[Durée une heure et demi. Aucun document n'est autorisé. Tous les exercices sont indépendants. Seules les réponses soigneusement justifiées seront prises en compte.]

Exercice 1. On considère deux v.a.  $X, Y$  telles que  $Y \in \mathbb{N}$  et  $P(Y = k) = p^{k-1}(1-p)$  pour tout  $k \geq 1$  et

$$E[1_{X \leq t} | Y] = e^{pYt} \quad \text{pour } t \geq 0$$

a) Montrer que  $X$  est une v.a. continue et calculer sa densité de probabilité  $f_X$ .

b) Calculer  $P(Y = k | X = t)$  pour  $k \in \mathbb{N}$  et  $t \geq 0$ .

Solution. a) On a  $P(Y = k) = P(Y > k) - P(Y > k+1) = (1-p)^k - (1-p)^{k+1}$  pour  $k \geq 1$ , alors

$$P(X \leq t) = E[1_{X \leq t}] = E[E[1_{X \leq t} | Y]] = E[e^{pYt}] = \sum_{k=1}^{\infty} e^{pkt} p^{k-1} (1-p) = \frac{e^{pt}(1-p)}{1 - pe^{pt}}$$

La fonction de répartition étant continue (en  $e$  et  $C^1$  par morceaux), la v.a. est une v.a. continue et sa densité est donnée par

$$f_X(t) = \frac{d}{dt} P(X \leq t) = \frac{(1-p)e^{pt}}{(1-pe^{pt})^2} \quad t \geq 0$$

b)

$$P(Y = k | X = t) = \frac{E[1_{Y=k, X \leq t}]}{E[1_{X \leq t}]} = \frac{(e^{pt})^k p^{k-1} (1-p)}{e^{pt}(1-pe^{pt})}.$$

Exercice 2. Montrer que le processus  $(X_n)_{n \geq 0}$  à valeurs sur l'espace discret  $M$  est une chaîne de Markov homogène avec matrice de transition  $P$  si et seulement si, presque sûrement

$$E[f(X_{n+1}) | X_n, \dots, X_0] = (Pf)(X_n)$$

Solution. Si  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov alors

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = P(x_n, x_{n+1}).$$

La définition de l'espérance conditionnelle donne

$$\begin{aligned} & E[f(X_{n+1})g(X_n, \dots, X_0)] \\ &= \sum_{x_0, \dots, x_{n+1}} f(x_{n+1})g(x_n, \dots, x_0)P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)P(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) \\ &= \sum_{x_0, \dots, x_{n+1}} f(x_{n+1})g(x_n, \dots, x_0)P(x_{n+1}, x_n)P(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) \\ &= \sum_{x_0, \dots, x_n} Pf(x_n)g(x_n, \dots, x_0)P(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) \\ &= E[Pf(X_n)g(X_n, \dots, X_0)] = E[E[f(X_{n+1}) | X_n, \dots, X_0]g(X_n, \dots, X_0)]. \end{aligned}$$

Etant vrai pour nimporte quelle  $g$  mesurable et borné on a que

$$E[f(X_{n+1})/X_n, \dots, X_0] = (Pf)(X_n), \quad p.s..$$

D'autre part si la formule avec l'espérance conditionnelle est vrai on a que

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = x_{n+1}, \dots, X_0 = x_0) &= E[1_{X_{n+1} = x_{n+1}} 1_{X_n = x_n} \dots 1_{X_0 = x_0}] \\ &= E[E[1_{X_{n+1} = x_{n+1}}/X_n, \dots, X_0] 1_{X_n = x_n} \dots 1_{X_0 = x_0}] = E[P(X_n, x_{n+1}) 1_{X_n = x_n} \dots 1_{X_0 = x_0}] \\ &= P(X_n, x_{n+1}) E[1_{X_n = x_n} \dots 1_{X_0 = x_0}] \end{aligned}$$

et donc

$$P(X_{n+1} = x_{n+1}/X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = \frac{P(X_{n+1} = x_{n+1}, \dots, X_0 = x_0)}{P(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0)} = P(X_n, x_{n+1}).$$

Exercice 3. Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  le processus stochastique à valeurs sur  $N$  donné par

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 & \text{si } X_n > 0 \\ U_{K_n} & \text{si } X_n = 0 \end{cases}$$

où  $(U_n)_{n \geq 1}$  est une suite iid à valeurs sur  $N$  et de loi  $\mu(x) = P(U_1 = x) > 0$  pour tout  $x \in N$  et  $K_n = \text{card}\{k \in N : k \leq n \text{ et } X_k = 0\}$  est le nombre de zéros dans la suite  $(X_0, \dots, X_n)$ . Soit  $T_y = \inf\{n \geq 0 : X_n = y\}$ .

- a) Montrer que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition  $P$  donnée par

$$P(x+1, x) = 1 \quad \text{et} \quad P(0, x) = \mu(x) \quad x \in N.$$

- b) La chaîne est-elle irréductible? Soit  $S_0 = \inf\{n > 0 : X_n = 0\}$ . Calculer  $P_0(S_0 = k)$  pour tout  $k \in N$ . En déduire que 0 est un état récurrent et que  $P_x(T_y < +\infty) = 1$  pour tout  $x, y \in N$ .

- c) Soit  $\phi_{x,y}(t) = E_x[t^{T_y}]$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Montrer que  $E_x[T_y] = \lim_{t \rightarrow 1} \phi_{x,y}(t)$  (limite pour  $t$  que tends 1 de façon croissante) où  $\phi_{x,y}(t) = d\phi_{x,y}(t)/dt$ .

- d) Montrer que  $\phi_{x,y}(t) = t \phi_{x-1,y}(t)$  si  $x \geq y$  et  $x > 0$  et calculer  $\phi_{x,y}(t)$  pour  $x < y$ .

- e) Montrer que, pour tout  $y > 0$

$$\phi_{0,y}(t) = \frac{t^y}{1 - \sum_{z < y} \mu(z) t^{z+1}}.$$

- f) Donner une formule pour  $E_x[T_y]$ .

- g) Soit  $\mu(x) = P(U_1 = x)$ . Montrer que  $\mu$  est une mesure invariante pour  $P$  et décrire l'ensemble de toutes les mesures invariantes pour  $P$ .

- h) Montrer que  $P$  admet une unique probabilité invariante si et seulement si  $E[U_1] < +\infty$ .

- i) Vérifier que si  $U_1$  est intégrable on a  $\phi(0) = 1/E_0[S_0]$ .

- j) Montrer que pour tout  $x > 0$  on a  $E_x[S_x] = x + E_0[T_x]$  et vérifier que si  $U_1$  est intégrable alors  $\phi(x) = 1/E_x[S_x]$  pour tout  $x \geq 0$ .

*Solution.* a) La probabilité  $P(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0)$  est non-nulle si et seulement si le vecteur  $(x_0, \dots, x_n)$  est tel que  $x_k > 0 \implies x_{k+1} = x_k + 1$  pour tout  $0 \leq k < n$ . Dans ce cas, si  $x_n > 0$  on a que

$$P(X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = 1_{x_n = x_{n+1} - 1}$$

Si  $x_n = 0$  on considère le nombre  $m = \text{card}\{k \in \mathbb{N} : k \leq n, x_k = 0\}$  de zéros dans les premiers  $n+1$  éléments de la suite. Soient  $i_1, \dots, i_m$  leur positions (c-à-d  $x_{i_k} = 0$  pour tout  $1 \leq k \leq m$ ). Evidemment  $i_m = n$  car on suppose que  $x_n = 0$ . Alors

$$\{X_{n+1} = x_{n+1}, X_0 = x_0\} = \{X_0 = x_0, U_1 = x_{i_1+1}, \dots, U_{m-1} = x_{i_{m-1}+1}, U_m = x_{n+1}\}$$

et aussi

$$\{X_n = x_n, X_0 = x_0\} = \{X_0 = x_0, U_1 = x_{i_1+1}, \dots, U_{m-1} = x_{i_{m-1}+1}\}$$

car connaissant les positions  $i_1, \dots, i_m$  des  $m$  zéros et la taille des sauts  $(U_k)_{1 \leq k \leq m}$  permet de reconstruire sans ambiguïté toute la suite  $X_0, \dots, X_n$ . Donc

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) &= \frac{P(X_0 = x_0, U_1 = x_{i_1+1}, \dots, U_{m-1} = x_{i_{m-1}+1}, U_m = x_{n+1})}{P(X_0 = x_0, U_1 = x_{i_1+1}, \dots, U_{m-1} = x_{i_{m-1}+1})} \\ &= \frac{P(X_0 = x_0, U_1 = x_{i_1+1}, \dots, U_{m-1} = x_{i_{m-1}+1}) P(U_m = x_{n+1})}{P(X_0 = x_0, U_1 = x_{i_1+1}, \dots, U_{m-1} = x_{i_{m-1}+1})} = P(U_m = x_{n+1}) = \phi(x_{n+1}) \end{aligned}$$

par indépendance de  $U_m$  par rapport à  $(X_0, U_1, \dots, U_{m-1})$ . Cela montre que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov avec matrice de transition annoncée.

- b) Il est clair que si  $x \leq y$  alors  $P^{y \otimes x}(x, y) = 1$  et donc  $x \leq y$ . Au même temps  $P(0, y) = \phi(y) > 0$  et donc  $0 \leq y$  pour tout  $y \in \mathbb{N}$ . Cela implique que  $x \leq y$  pour tout  $x < y$  car  $P^{x+1}(x, y) = P^x(x, 0)P(0, y) = \phi(y) > 0$ . On a donc  $x \leq y$  pour tout  $x, y \in \mathbb{N}$  et la chaîne est irréductible. De plus

$$P_0(S_0 = k) = P_0(X_1 = k) = \phi(k)$$

et donc  $P_0(S_0 < +\infty) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi(k) = 1$  ce qui montre que 0 est un état récurrent et donc que la chaîne est elle-même récurrente (car irréductible). Si  $x > y = 0$  alors  $P_x(T_y < +\infty) = P_x(T_y < +\infty, X_{y \otimes x} = y) = 1$  car  $P_x(X_{y \otimes x} = y) = 1$ . Si  $x < y$  alors par récurrence de  $y$  on a  $P_y(T_y < +\infty) = 1$  mais aussi  $1 = P_y(T_y < +\infty) = P_y(T_y < +\infty, X_{y \otimes x} = x) = P_x(T_y \otimes (y \otimes x) < +\infty) = P_x(T_y < +\infty)$  où on a utilisé la propriété de Markov dans la deuxième égalité.

- c) En disant on a que

$$x_{\cdot, y}(t) = E_x[t^{T_y}] = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P_x(T_y = k) \quad x_{\cdot, y}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k t^{k-1} P_x(T_y = k)$$

et par convergence monotone quand  $t \downarrow 1$  on obtient

$$\lim_{t \downarrow 1} x_{\cdot, y}(t) = \lim_{t \downarrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} k t^{k-1} P_x(T_y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k P_x(T_y = k) = E_x[T_y].$$

d) Si  $x \leq y$  et  $x > 0$  on a que

$$\begin{aligned} E_x[t^{T_y}] &= \sum_{k=1}^{\infty} t^k P_x(X_1 = x, T_y = k) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P_{x+1}(X_0 \leq y, \dots, X_{k-1} \leq y, X_k = y) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} t^k P_{x+1}(T_y = k) \\ &= E_{x+1}[t^{T_y+1}] = t \cdot E_{x+1}[t^{T_y}] \end{aligned}$$

Par récurrence on a :  $x_{y,y}(t) = t^{x_{y,y}}$  car  $x_{y,y}(t) = 1$ .

e) Par Markov on a

$$\begin{aligned} 0_{,y}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} t^k P_0(X_1 = U_1, X_1 \leq y, \dots, X_{k-1} \leq y, X_k = y) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} t^k \sum_{z=0}^{\infty} P(U_1 = z) P_z(X_0 \leq y, \dots, X_{k-1} \leq y, X_k = y) \\ &= \sum_{z=0}^{\infty} P(U_1 = z) \sum_{k=1}^{\infty} t^k P_z(X_0 \leq y, \dots, X_{k-1} \leq y, X_k = y) \\ &= t \sum_{z=0}^{\infty} P(U_1 = z) \cdot z_{,y}(t) = t \sum_{z=y}^{\infty} P(U_1 = z) \cdot z_{,y}(t) + t \sum_{z < y}^{\infty} P(U_1 = z) \cdot z_{,y}(t) \\ &= \sum_{z=y}^{\infty} P(U_1 = z) t^{z+1} + 0_{,y}(t) \sum_{z < y}^{\infty} P(U_1 = z) t^{z+1} \end{aligned}$$

et donc

$$0_{,y}(t) = \frac{\sum_{z=y}^{\infty} P(U_1 = z) t^{z+1}}{1 - \sum_{z < y}^{\infty} P(U_1 = z) t^{z+1}}$$

f)

$$\begin{aligned} 0_{,y}(t) &= \frac{\sum_{z=y}^{\infty} (z+1) P(U_1 = z) t^{z+1}}{1 - \sum_{z < y}^{\infty} (z+1) P(U_1 = z) t^{z+1}} + \frac{(\sum_{z=y}^{\infty} P(U_1 = z) t^{z+1})(\sum_{z < y}^{\infty} (z+1) P(U_1 = z) t^z)}{(1 - \sum_{z < y}^{\infty} (z+1) P(U_1 = z) t^{z+1})^2} \\ E_0[T_y] &= 0_{,y}(1) = \frac{\sum_{z=y}^{\infty} (z+1) P(U_1 = z)}{\sum_{z=y}^{\infty} P(U_1 = z)} = \frac{\sum_{z=0}^{\infty} (z+1) P(U_1 = z)}{\sum_{z=y}^{\infty} P(U_1 = z)} \end{aligned}$$

Si  $x > y$  on a  $E_x[T_y] = x$  et si  $0 \leq x < y$  on a  $x_{,y}(t) = x_{,0}(t) + 0_{,y}(t)$  ce qui donne en dérivant que  $E_x[T_y] = E_x[T_0] + E_0[T_y]$  et donc que

$$E_x[T_y] = x + \frac{\sum_{z=0}^{\infty} (z+1) P(U_1 = z)}{\sum_{z=y}^{\infty} P(U_1 = z)} = x + \frac{E[U_1 + 1]}{P(U_1 \geq y)}$$

g) On a  $P(x) = \sum_{z=x}^{\infty} P(U_1 = z)$  et donc

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{z=x}^{\infty} P(z, x) \quad (k = P(0, x) \quad (k) + P(x+1, x) \quad (k) \\ &= P(x) + \sum_{k=x+1}^{\infty} P(k) = P(x) \end{aligned}$$

Par irréductibilité toute mesure invariante doit être un multiple de  $\mathbb{P}_d(x) = c\mathbb{P}_d(x)$ .

h) La mesure  $\mathbb{P}_d$  est normalizable si et seulement si

$$Z = \sum_{x=0}^{\infty} \mathbb{P}_d(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{k}{x} \frac{z^x}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)}{k!} = E[U_1] + 1 < +\infty$$

et alors  $\pi(x) = \mathbb{P}_d(x)/Z$  est une probabilité invariante pour  $P$  et par irréductibilité de  $P$  elle est la seule.

i) On a

$$E_0[S_0] = 1 + \sum_{z=0}^{\infty} z \pi_z = E_z[T_0] = 1 + \sum_{z=0}^{\infty} z \pi_z = 1 + E[U_1]$$

et donc

$$\pi(0) = \frac{\mathbb{P}_d(0)}{1 + E[U_1]} = \frac{1}{E_0[S_0]}$$

j) En général pour tout  $x > 0$

$$\pi(x) = \frac{\mathbb{P}_d(x)}{1 + E[U_1]} = \frac{\binom{k}{x} \frac{z^x}{k!}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)}{k!}} = \frac{\pi(x)}{E_0[S_0]}$$

et

$$E_x[S_x] = 1 + E_{x\mathbb{P}_d}[T_x] = x + E_0[T_x] = \frac{\sum_{z=0}^{\infty} z \pi_z (z+1)}{\sum_{z=0}^{\infty} z \pi_z} = \frac{1}{\pi(x)}.$$