

Temps d'arrêt et propriété forte de Markov

1 Temps d'arrêt

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé muni d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ (suite croissante des tribus). Une v.a. $T: \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est appelée un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ ssi $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \geq 0$. On utilisera la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

Exemple 1. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ un processus stochastique à valeurs dans un ensemble X discret et soit $(\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n))_{n \geq 0}$ la filtration associée au processus.

• Pour tout $x \in X$, le temps de premier passage en x : $T_x = \inf \{n \geq 1: X_n = x\}$ est un t.a.

• Pour tout $A \subset X$, le temps d'atteinte de A : $T_A = \inf \{n \geq 1: X_n \in A\}$ est un t.a.

• Si $A \subset X$ alors la v.a. $L_A = \sup \{n \geq 1: X_n \in A\}$ n'est pas en général un t.a.

Remarque 2. Une définition équivalente de temps d'arrêt est que T est un t.a. ssi $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \geq 0$.

Si T est un t.a. on a que $\{T > n\} \in \mathcal{F}_n$, $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, $\{T < n\} \in \mathcal{F}_n$, $\{T = +\infty\} \in \mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$.

Définition 3. Si T est un t.a. on peut définir la tribu \mathcal{F}_T par

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}: A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n \text{ pour tout } n \geq 0\}.$$

Exercice 1. Vérifier que \mathcal{F}_T est bien une tribu.

Proposition 4. Si S, T sont deux t.a. et $S(\omega) \leq T(\omega)$ pour tout ω alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

Démonstration. Exercice.

Théorème 5. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite iid tel que X_1 soit intégrable et T un temps d'arrêt intégrable pour la filtration associée à $(X_n)_{n \geq 1}$ et soit $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Alors

$$E[S_T] = E[T]E[X_1].$$

Démonstration. Par Fubini et par indépendance de X_k par rapport à \mathcal{F}_{k-1} on a que

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{k=1}^T X_k / \mathcal{I}_{k-1}\right] &= E\left[\sum_{k=1}^T X_k / \mathcal{I}_{k-1}\right] = E\left[\sum_{k=1}^T X_k / E[\mathcal{I}_{k-1}]\right] \\ &= E\left[\sum_{k=1}^T X_k / E[T]\right] = E[X_1]E[T] \end{aligned}$$

Donc la fonction $\sum_{k=1}^T X_k / \mathcal{I}_{k-1}$ est intégrable sur \mathbb{N} par rapport à la mesure $P \circ Q$ où Q est la mesure de comptage sur \mathbb{N} ($Q(\{k\}) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$), on peut refaire le calcul précédemment sans mettre la valeur absolue et on obtient

$$E[S_T] = E\left[\sum_{k=1}^T X_k \mathcal{I}_{k-1}\right] = E[X_1]E[T] = E[X_1]E[T].$$

Remarque 6. L'importance de l'identité de Wald est dans le fait que T ne doit pas être indépendant de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$. Par exemple on peut prendre $T = \inf \{n \geq 1 : X_n > 0\}$ pour un certain R donné. Alors est facile de montrer que conditionnellement à $\{T = n\}$ le vecteur (X_1, \dots, X_n) est un vecteur iid où chaque composante a la loi de la v.a. X_1 conditionnellement à $\{T \geq n\}$.

Exemple 7. (Promenade aléatoire). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite iid avec $P(X_n = 1) = 1/2$. Fixons $a < 0 < b$ et $a, b \in \mathbb{Z}$. Soit $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $N = \inf \{n \geq 1 : S_n \in [a, b]\}$. N est un t.a. pour la filtration associée aux $(X_n)_{n \geq 0}$. Vérifier que est intégrable. Soit $L = b - a > 0$. Par la propriété de Markov de la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ (avec $S_0 = 0$) et l'homogénéité on a que

$$\begin{aligned} P(N > (n+1)L) &= P(\{S_1, \dots, S_{nL}\} \notin [a, b], \{S_{nL+1}, \dots, S_{(n+1)L}\} \notin [a, b]) \\ &= \int_{x \in [a, b]} P(\{S_1, \dots, S_{nL}\} \notin [a, b], \{S_{nL+1}, \dots, S_{(n+1)L}\} \notin [a, b] | S_{nL} = x) \\ &= \int_{x \in [a, b]} P(\{S_1, \dots, S_{nL}\} \notin [a, b] | S_{nL} = x) P(\{S_{nL+1}, \dots, S_{(n+1)L}\} \notin [a, b] | S_{nL} = x) \\ &= \int_{x \in [a, b]} P(\{S_1, \dots, S_{nL}\} \notin [a, b] | S_{nL} = x) P(\{S_1, \dots, S_L\} \notin [a, b] | S_0 = x) \end{aligned}$$

mais

$$P(\{S_1, \dots, S_L\} \notin [a, b] | S_0 = x) = P(S_L \notin [a, b] | S_0 = x) = P(X_1 = \dots = X_L = +1) = 2^{-L}$$

car la distance de $x \in [a, b]$ de l'ensemble $[a, b]^c$ est au plus L . Cela donne

$$\begin{aligned} P(N > (n+1)L) &= \int_{x \in [a, b]} P(\{S_1, \dots, S_{nL}\} \notin [a, b] | S_{nL} = x) (1 - 2^{-L}) \\ &= P(\{S_1, \dots, S_{nL}\} \notin [a, b]) (1 - 2^{-L}) = P(N > nL) (1 - 2^{-L}) \end{aligned}$$

et par récurrence on obtient que $P(N > nL) = (1 - 2^{-L})^n$. Pour tout $k \geq 0$ soit n tel que $nL < k < (n+1)L$:

$$P(N > k) = P(N > nL) = (1 - 2^{-L})^n = (1 - 2^{-L})^{k/L} (1 - 2^{-L})^{nL/k} = (1 - 2^{-L})^{k/L} c^k$$

avec $c = (1 - 2^{-L})^{1/L} < 1$ et donc

$$E[N] = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{k < N}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} P(k < N) < +\infty$$

ce qui montre l'intégrabilité de N . Par l'identité de Wald on a donc

$$E[S_N] = E[X_1]E[N] = 0$$

car $E[X_1] = 0$. Etant que $N < +\infty$ p.s. la v.a. S_N peut prendre seulement les deux valeurs a ou b :

$$0 = E[S_N] = aP(S_N = a) + bP(S_N = b).$$

Alors

$$P(S_N = a) = \frac{b}{b-a}, \quad P(S_N = b) = \frac{a}{b-a}$$

et si l'on note $T_x = \inf \{n \geq 1 : S_n = x\}$ le temps d'atteinte de x on a que pour tout $a < 0$ et $b > 0$

$$P(T_a < +\infty) = P(T_a < T_b) = P(S_N = a) = \frac{b}{b-a}.$$

En prenant la limite pour $b \rightarrow +\infty$ on obtient que $P(T_a < +\infty) = 1$ pour tout $a < 0$. En remarquant que le processus $(S_n)_{n \geq 1}$ a la même loi que $(S_n)_{n \geq 0}$ (si $S_0 = 0$) on a aussi que $P(T_x < +\infty) = P(T_{\lfloor x \rfloor} < +\infty)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$ et donc que $T_x < +\infty$ p.s. pour tout $x \neq 0$. De plus si $x \neq 0$ alors on doit avoir $E[T_x] < +\infty$ car autrement par Wald on obtiendrait

$$x = E[S_{T_x}] = E[T_x]E[X_1] = 0$$

car $S_{T_x} = x$ p.s.

2 Propriete de Markov forte

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov homogène à valeurs dans l'espace discret M et de matrice de transition P . Si on considère la filtration $F_n = (\mathcal{F}_0, \dots, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ la propriété de Markov forte s'écrit

$$E[(X_{n+1}, \dots, X_{n+k})/F_n] = E[(X_{n+1}, \dots, X_{n+k})/X_n] = E_{X_n}[(X_0, \dots, X_k)].$$

On veut montrer la généralisation suivante de cette equation ou on remplace n par un temps aleatoire.

Théorème 8. (Propriete de Markov forte)

Soit T un t.a.. Pour tout $x \in M$, conditionnellement à l'événement $\{T < +\infty, X_T = x\}$ le processus $(X_{T+n})_{n \geq 0}$ est independant de F_T et est une chaîne de Markov de matrice de transition P issue de x . En particulier sur $\{T < +\infty\}$ on a que

$$E[(X_{T+n})_{n \geq 0}/F_T] = E_{X_T}[(X_n)_{n \geq 0}]. \quad (1)$$

pour tout $\phi: M^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable et tel que $\phi((X_{T+n})_{n \geq 0})$ soit integrable.

Démonstration. On doit montrer que pour des evenements A de la forme

$$A = \{X_T = y_0, \dots, X_{T+n} = y_n\} \quad (2)$$

pour quelques $y_0, \dots, y_n \in M$ et $B \in F_T$ on a que

$$P(A, B/T < +\infty, X_T = x) = P(A/T < +\infty, X_T = x)P(B/T < +\infty, X_T = x). \quad (3)$$

Or, par la propriété de Markov usuelle:

$$\begin{aligned} P(A, B, T = k, X_T = x) &= P(X_k = y_0, \dots, X_{k+n} = y_n, X_k = x, B, T = k) \\ &= P(X_k = y_0, \dots, X_{k+n} = y_n/X_k = x)P(X_k = x, B, T = k) \\ &= P_x(X_0 = y_0, \dots, X_n = y_n)P(X_k = x, B, T = k) \end{aligned}$$

car $B \in \{T = k\} \in F_k$. En conditionnant sur la valeur de T on a que

$$\begin{aligned} P(A, B/T < +\infty, X_T = x) &= \sum_{k \geq 0} \frac{P(A, B, T = k, X_T = x)}{P(T < +\infty, X_T = x)} \\ &= P_x(X_0 = y_0, \dots, X_n = y_n) \sum_{k \geq 0} \frac{P(X_k = x, B, T = k)}{P(T < +\infty, X_T = x)} \\ &= P_x(X_0 = y_0, \dots, X_n = y_n)P(B/T < +\infty, X_T = x) \end{aligned}$$

et en prenant $B = \emptyset$ on obtient (3). La famille des evenements de la forme (2) est un π -systeme et donc deux mesures qui coïncident sur ces evenements coïncident aussi sur la tribu qu'ils engendrent ce que dans notre cas donne $\sigma((X_{T+n})_{n \geq 0})$. Pour montrer (1) on suppose que ϕ est bornée et on approche la fonction $\phi((X_n)_{n \geq 0})$ par des fonctions simples ϕ_n de façon monotone: $\phi_n \leq \phi_{n+1} \leq \phi$. Si $\phi_n((X_n)_{n \geq 0}) = \sum_{k \geq 0} \phi_{n,k} 1_{(X_n)_{n \geq 0} \in E_k}$ alors par (3) on a que, sur $\{T < +\infty\}$,

$$\begin{aligned} E[\phi_n((X_{T+n})_{n \geq 0})/F_T] &= \sum_k \phi_{n,k} P((X_{T+n})_{n \geq 0} \in E_k/F_T) = \sum_k \phi_{n,k} P((X_{T+n})_{n \geq 0} \in E_k/X_T) \\ &= \sum_k \phi_{n,k} P_{X_T}((X_n)_{n \geq 0} \in E_k) = E_{X_T}[\phi_n((X_{T+n})_{n \geq 0})] \end{aligned}$$

La limite on obtient donc la (1).