

Exercice 1. Soit $(Y_n)_{n \geq 0}$ une suite i.i.d. avec loi $P(Y_n = 1) = p$ et $P(Y_n = 0) = 1 - p$. Soit $X_n = \inf\{i \geq 0; Y_{n+i} = 0\}$, soit le nombre consécutifs de 1 avant n .

1. Montrer que X_n est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.
2. Montrer que X_n est irréductible et calculer sa probabilité stationnaire. Y a-t-il d'autres probabilités stationnaires pour cette chaîne ?

On a $X_0 = 1_{Y_0=1}$ et $X_{n+1} = (X_n + 1)1_{Y_{n+1}=1}$. Il s'agit d'une récurrence algébrique et donc la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ est bien une chaîne de Markov. Elle est aussi homogène car

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = y / X_n = x) &= P((1 + x)1_{Y_{n+1}=1} = y) = P((1 + x)1_{Y_1=1} = y) = P(X_1 = y / X_0 = x) \\ &= \begin{cases} P(Y_1 = 1) & \text{si } y = x + 1 \\ P(Y_1 = 0) & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \end{aligned}$$

La matrice de transition est donnée par $P(x, x+1) = p$, $P(x, 0) = 1-p$ pour tout $x \geq 0$.

La matrice est irréductible car si $y > x$ on a que $P^{y-x}(x, y) = P(x, x+1) \cdots P(x+(y-x)-1, y) = p^{y-x} > 0$ et si $y < x$ on a que $P^{y+1}(x, y) = P(x, 0)P(0, 1) \cdots P(y-1, y) = (1-p)p^y > 0$. La unique probabilité stationnaire (si elle existe) est donnée par les équations

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \pi(x-1)P(x-1, x) = p \pi(x-1), \quad x > 0 \\ \pi(0) &= \sum_{x \geq 0} \pi(x)P(x, 0) = (1-p) \sum_{x \geq 0} \pi(x) = (1-p) \end{aligned}$$

et donc $\pi(x) = p^x \pi(0) = p^x (1-p)$ pour tout $x \geq 0$. Elle est unique car la matrice P est irréductible. On a bien que $\sum_{x \geq 0} \pi(x) = 1$.

Exercice 2. (Exercice 1.10 de [1]) Soit (X_n) une chaîne de Markov sur un espace dénombrable M avec matrice de transition P irréductible qui admet une probabilité invariante π . On pose

$$P^{-1}(x, y) = \frac{\pi(y)}{\pi(x)} P(y, x).$$

1. Montrer que P^{-1} est une matrice de transition sur M et que π est une probabilité invariante pour P^{-1} .
2. Montrer que $P = P^{-1}$ si et seulement si π est réversible.
3. Soit $N \geq 1$, et $X_n = X_{N-n}$, $n = 0, \dots, N$. Montrer que, si X_0 est distribuée avec loi π , alors X_n est une chaîne de Markov avec matrice de transition P^{-1} et la loi de X_0 est π .

On vérifie facilement que P^{-1} est une matrice de transition, en effet $P^{-1}(x, y) \geq 0$ et

$$\sum_y P^{-1}(x, y) = \sum_y \frac{\pi(y)}{\pi(x)} P(y, x) = \frac{1}{\pi(x)} = 1$$

car $P = \frac{1}{x} P$ est invariante pour P . Montrons que $\frac{1}{x} P$ est invariante pour P :

$$\sum_x (x) P(x, y) = \sum_x (x) \frac{(y)}{(x)} P(y, x) = (y) \sum_x P(y, x) = (y)$$

car P est une matrice de transition et donc $\sum_x P(y, x) = 1$ pour tout $y \in M$.

Pour tout x, y on a que

$$P(x, y) = P(x, y) = \frac{(y)}{(x)} P(y, x) \quad (x) P(x, y) = P(y, x) (y)$$

donc $\frac{1}{x} P$ est réversible par rapport à $\frac{1}{x} P$ ssi $P = P$.

Pour tout $x_0, \dots, x_N \in M$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_N = x_N) &= \mathbb{P}(X_0 = x_N, \dots, X_N = x_0) = (x_N) P(x_N, x_{N-1}) \dots P(x_1, x_0) \\ &= P(x_N, x_{N-1}) (x_{N-1}) P(x_{N-1}, x_{N-2}) \dots P(x_1, x_0) \\ &= P(x_N, x_{N-1}) P(x_{N-1}, x_{N-2}) \dots P(x_1, x_0) (x_0) \end{aligned}$$

et donc pour tout $0 \leq n < N$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) &= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0)}{\mathbb{P}(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0)} \\ &= \frac{P(x_{n+1}, x_n) \dots P(x_1, x_0) (x_0)}{P(x_n, x_{n-1}) \dots P(x_1, x_0) (x_0)} = P(x_{n+1}, x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) \end{aligned}$$

ce qui montre que $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ est une chaîne de Markov. Sa loi initiale est $\frac{1}{x}$, en e et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_0 = x_0) &= \sum_{x_1, \dots, x_N} \mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_N = x_N) \\ &= \sum_{x_1, \dots, x_N} P(x_N, x_{N-1}) P(x_{N-1}, x_{N-2}) \dots P(x_1, x_0) (x_0) = (x_0) \end{aligned}$$

pour tout $x_0 \in M$.

Exercice 1. (Exercice 11.10 de [1]) Soit $M = \mathbb{Z}/K\mathbb{N}$, c'est-à-dire le cercle discret avec K points. Soit X_n la marche aléatoire avec probabilité p de sauter à droite et $1-p$ de sauter à gauche. Calculer la probabilité invariante et la matrice P de la correspondante chaîne de retour dans le temps.

Solution. La matrice de transition est $P(x, x+1) = p$, $P(x, x-1) = 1-p$ ou son identité $\frac{1}{K}$ avec K et K avec 0. Le système d'équations pour la probabilité invariante est

$$(0) = (K-1)p + (1)(1-p)$$

$$(x) = (x-1)p + (x+1)(1-p), \quad 1 \leq x \leq K-2$$

$$(K-1) = (K-2)p + (0)(1-p)$$

Une solution est $\pi(x) = 1/K$. En effet, elle est la seule solution, car il est facile de voir que P est irréductible (en au plus K pas on peut aller de n'importe quel état à n'importe quel autre état). La matrice retour dans le temps est

$$P^{-1}(x, y) = \frac{\pi(y)}{\pi(x)} P(y, x) = P(y, x)$$

et donc $P^{-1}(x, x+1) = 1/p$ et $P^{-1}(x, x) = p$ pour tout $0 \leq x < K$.

Exercice 11. (10 points) Soit $(p_k)_{k=0}^{\infty}$ une suite de nombres dans $]0, 1[$ et Q la matrice de transition définie par:

$$P(0, 1) = 1; \quad \begin{aligned} P(k, k+1) &= p_k \\ P(k, k) &= 1 - p_k = q_k \end{aligned} \quad \text{si } k \geq 1.$$

avec $0 < p_k < 1$ pour tout $k \geq 1$.

a) Montrer que la chaîne de Markov associée est irréductible.

b) On pose $\rho_0 = 1$ et

$$\rho_n = \frac{q_1 \cdots q_n}{p_1 \cdots p_n} \quad n \geq 1$$

Montrer que la chaîne est récurrente si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n = +\infty$.

Soit $x, y \in \mathbb{N}$ avec $y > x$, alors $P^{y-x}(x, y) = P(x, x+1)P(x+1, x+2) \cdots P(y-1, y) = p_x p_{x+1} \cdots p_{y-1} > 0$. Soit $x > y$, alors $P^{x-y}(x, y) = P(x, x-1) \cdots P(y+1, y) = q_x \cdots q_{y+1} > 0$, donc la matrice P est irréductible.

Pour montrer la récurrence on calcule la probabilité de revenir en 0: $\mathbb{P}_0(T_0 < +\infty)$ avec $T_x = \inf\{n > 0: X_n = x\}$. Par Markov on a que pour tout $N > 0$

$$\mathbb{P}_0(T_0 < +\infty) = \mathbb{P}_1(T_0 < +\infty) = \mathbb{P}_1(S_0 < +\infty) = \mathbb{P}_1(S_0 < +\infty, S_N = +\infty)$$

avec $S_x = \inf\{n \geq 0: X_n = x\}$. Soit

$$u_N(x) = \mathbb{P}_x(S_0 < +\infty, S_N = +\infty)$$

Par la propriété de Markov la fonction u_N satisfait l'équation

$$u_N(x) = p_x u_N(x+1) + q_x u_N(x)$$

pour tout $0 < x < N$ avec les conditions au bord $u_N(0) = 1$ et $u_N(N) = 0$. Donc

$$u_N(x+1) - u_N(x) = \frac{q_x}{p_x} (u_N(x) - u_N(x))$$

ce qui nous donne

$$u_N(x+1) - u_N(x) = \frac{q_x}{p_x} \frac{q_1}{p_1} (u_N(1) - u_N(0))$$

et

$$u_N(x) = 1 + \sum_{k=1}^{x-1} \frac{q_k}{p_k} \frac{q_1}{p_1} (u_N(1) - u_N(0))$$

Maintenant

$$0 = u_N(N) = 1 + (u_N(1) - 1) \prod_{k=1}^N \frac{q_k - q_1}{p_k - p_1}$$

Et on obtient que

$$\mathbb{P}_0(T_0 < +\infty) = u_N(1) = 1 - \prod_{k=1}^N \frac{q_k - q_1}{p_k - p_1}.$$

Or

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{q_k - q_1}{p_k - p_1} = +\infty \quad \lim_N u_N(1) = 1 \quad \mathbb{P}_0(T_0 < +\infty) = 1$$

Inversement

$$\mathbb{P}_0(T_0 < +\infty) < 1 \quad \limsup_N u_N(1) < 1 \quad \prod_{k=1}^{\infty} \frac{q_k - q_1}{p_k - p_1} = \limsup_N \frac{1}{1 - u_N(1)} < +\infty$$

ce qui nous donne

$$\mathbb{P}_0(T_0 < +\infty) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{q_k - q_1}{p_k - p_1} = +\infty.$$

Exercice 1. Soit U une v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^d on considère la fonction $u(t), t \in [0, 1]^d$ définie par la somme de Fourier :

$$u(t) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} e^{2\pi i z \cdot t} \mathbb{P}(U = z)$$

1. Vérifier que $\mathbb{P}(U = z) = \int_{[0,1]^d} e^{-2\pi i z \cdot t} u(t) dt$.
2. Soit $(U_j)_{j=1}^n$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans \mathbb{R}^d . On pose $X_0 = 0$, $X_n = \sum_{j=1}^n U_j$. Montrer que le point 0 est récurrent pour cette chaîne de Markov si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^d} \frac{1}{| \sum_{j=1}^n u(t) |} dt = +\infty$$

3. Appliquer ce critère au marche aléatoire symétrique sur \mathbb{Z}^d :

$$P(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & |x - y| = 1 \\ 0 & |x - y| \neq 1 \end{cases}$$

Exercice 2. Soit μ la loi de U sur \mathbb{R}^d , par le théorème de Fubini par rapport à la mesure produit $\mu \otimes dt$ sur l'espace $\mathbb{R}^d \times [0, 1]^d$ on a

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^d} e^{2\pi i z \cdot t} u(t) dt &= \int_{[0,1]^d} e^{2\pi i z \cdot t} \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i w \cdot t} \mu(U = w) dw dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mu(U = w) \int_{[0,1]^d} e^{2\pi i z \cdot t} e^{2\pi i w \cdot t} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mu(U = w) \int_{[0,1]^d} e^{2\pi i (z+w) \cdot t} dt = \mu(U = z) \end{aligned}$$

car, par un calcul direct on a que

$$\int_{[0,1]^d} e^{2i \cdot z \cdot t} e^{-2i \cdot w \cdot t} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } w = z \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a aussi que

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^d} e^{2i \cdot z \cdot t} \mathbb{1}_{\{U_1 + \dots + U_n = z\}}(U_1 + \dots + U_n = z) dt \\ = \int_{[0,1]^d} e^{2i \cdot z \cdot t} \mathbb{1}_{\{U_1 = z_1\}} \dots \mathbb{1}_{\{U_n = z_n\}}(U_1 = z_1) \dots (U_n = z_n) dt \\ \quad \quad \quad \int_{\substack{z_1, \dots, z_n \in [0,1]^d \\ z_1 + \dots + z_n = z}} \\ = \int_{\substack{z_1, \dots, z_n \in [0,1]^d \\ z_1 + \dots + z_n = z}} e^{2i \cdot z_1 + \dots + z_n \cdot t} \mathbb{1}_{\{U_1 = z_1\}} \dots \mathbb{1}_{\{U_n = z_n\}}(U_1 = z_1) \dots (U_n = z_n) dt = \int_{[0,1]^d} e^{2i \cdot z \cdot t} U(t)^n dt \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^d} \mathbb{1}_{\{U_1 + \dots + U_n = z\}}(U_1 + \dots + U_n = z) dt &= \int_{[0,1]^d} e^{2i \cdot z \cdot t} \int_{[0,1]^d} U(t)^n dt \\ &= \int_{[0,1]^d} e^{2i \cdot z \cdot t} U(t)^n dt \end{aligned}$$

Pour montrer la récurrence au point $x \in [0,1]^d$ il suffit montrer que

$$P^n(x, x) = \int_{[0,1]^d} U(t)^n dt$$

Or

$$P^n(x, x) = \int_{[0,1]^d} \mathbb{1}_{\{X_n = x\}}(X_n = x) dt = \int_{[0,1]^d} U(t)^n dt$$

Maintenant, pour justifier le change de sommation et intégrale on introduit un paramètre $0 < \epsilon < 1$ et on considère

$$\int_{[0,1]^d} U(t)^n dt = \int_{[0,1]^d} \int_{[0,1]^d} U(t)^n dt = \int_{[0,1]^d} \int_{[0,1]^d} U(t)^n dt$$

car $\int_{[0,1]^d} U(t)^n dt = \int_{[0,1]^d} \int_{[0,1]^d} U(t)^n dt = \int_{[0,1]^d} \int_{[0,1]^d} U(t)^n dt$ et

$$\int_{[0,1]^d} U(t)^n dt = \int_{[0,1]^d} \int_{[0,1]^d} U(t)^n dt = \int_{[0,1]^d} \int_{[0,1]^d} U(t)^n dt = \frac{1}{1 - \epsilon} < +\infty.$$

Maintenant pour tout t on a

$$\int_{[0,1]^d} U(t)^n dt = \frac{1}{1 - \epsilon} \int_{[0,1]^d} U(t)^n dt$$

alors

$$\int_{[0,1]^d} P^n(x, x) dt = \int_{[0,1]^d} \frac{1}{1 - \epsilon} \int_{[0,1]^d} U(t)^n dt dt$$

et par convergence monotone

$$P^n(x, x) = \lim_{n \rightarrow 0} \int_{\mathbb{T}^d} P^n(x, x) = \lim_{n \rightarrow 0} \int_{[0,1]^d} \frac{1}{\int_{\mathbb{T}^d} P^n(x, x)} dt.$$

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ la marche aléatoire symétrique sur \mathbb{T}^d , alors

$$U(t) = \mathbb{E}[e^{i \sum_{j=1}^d z_j X_j(t)}] = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos(2\pi z_i)$$

car $\{U = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d e_i\}_{i=1, \dots, d}$ est la base canonique de \mathbb{T}^d ($(e_i)^j = 1$ si $i = j$ et 0 sinon). Donc

$$\int_{[0,1]^d} \frac{1}{\int_{\mathbb{T}^d} P^n(x, x)} dt = \int_{[0,1]^d} \frac{1}{\int_{\mathbb{T}^d} \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos(2\pi t_i)} dt$$

$$= \int_{[0,1]^d} \frac{1}{d(1 - \frac{1}{d}) + \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d [1 - \cos(2\pi t_i)]} dt$$

Par périodicité de la fonction à intégrer on a que

$$\int_{[0,1]^d} \frac{1}{d(1 - \frac{1}{d}) + \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d [1 - \cos(2\pi t_i)]} dt = \int_{[d/2, 1/2]^d} \frac{1}{d(1 - \frac{1}{d}) + \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d [1 - \cos(2\pi t_i)]} dt$$

Il n'est pas difficile de montrer que la fonction à intégrer est singulière seulement pour $t = 0$ et que il existent des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que $C_1/t^2 \leq \frac{1}{d(1 - \frac{1}{d}) + \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d [1 - \cos(2\pi t_i)]} \leq C_2/t^2$ pour tout $t \in [d/2, 1/2]^d$ et donc que

$$\int_{[d/2, 1/2]^d} \frac{1}{d(1 - \frac{1}{d}) + C_2/t^2} dt \leq \int_{[d/2, 1/2]^d} \frac{1}{d(1 - \frac{1}{d}) + \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d [1 - \cos(2\pi t_i)]} dt$$

et

$$\int_{[d/2, 1/2]^d} \frac{1}{d(1 - \frac{1}{d}) + \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d [1 - \cos(2\pi t_i)]} dt \leq \int_{[d/2, 1/2]^d} \frac{1}{d(1 - \frac{1}{d}) + C_1/t^2} dt$$

La limite

$$\lim_{n \rightarrow 0} \int_{[d/2, 1/2]^d} \frac{1}{d(1 - \frac{1}{d}) + C_{1,2}/t^2} dt$$

est fini si $d > 2$ et $= +\infty$ pour $d = 1, 2$. On en peut déduire que la marche aléatoire est récurrente pour $d = 1, 2$ et transiente pour $d \geq 3$.