

Corrigé Examen

[Durée deux heures. Aucun document n'est autorisé. Tous les exercices sont indépendants. Seule les réponses soigneusement justifiées seront prise en compte.]

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov homogène sur l'espace d'états N de matrice de transition

$$P(0, 1) = 1, \quad P(x, x+1) = 1 - p, \quad P(x, x-1) = p \quad \text{pour } x \geq 1$$

avec $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

- Calculer $P_0(X_4 = 2)$.
- Montrer que la chaîne est irréductible.
- Est-elle fortement irréductible ?
- Est-elle apériodique ?
- Montrer que une mesure invariante pour P est donnée par

$$\mu(0) = 1, \quad \mu(x) = \frac{1}{p} \left(\frac{q}{p} \right)^x \quad \text{pour tout } x \geq 1.$$

- Déterminer les valeurs de p pour lesquels la chaîne admet une probabilité invariante et montrer que dans ce cas P est réversible par rapport à μ et que μ est la seule probabilité invariante.
- Soit $T_0 = \inf \{n > 0 : X_n = 0\}$. Supposant que la chaîne est récurrente positive, calculer le temps moyen de retour à 0 (c-à-d $E_0[T_0]$) en fonction de p . En déduire que si $p \geq 1/2$ alors la chaîne n'est pas récurrente positive.
- Soit $S_x = \inf \{n \geq 0 : X_n = x\}$ et $u_N(x) = P_x(S_0 < S_N)$ pour $0 \leq x \leq N$. Trouver l'équation satisfaite par $u_N(x)$ et montrer que u_N est donnée par

$$u_N(0) = 1, \quad u_N(x) = 1 - \frac{\sum_{k=0}^{x-1} (q/p)^k}{\sum_{k=0}^{N-1} (q/p)^k}, \quad 0 < x \leq N.$$

- Montrer que $P_0(T_0 < +\infty) = u_N(1)$ pour tout $N \geq 1$. Calculer $\limsup_N u_N(1)$ et en déduire que si $p \geq 1/2$ la chaîne est récurrente.

Solution. Pour tout $x \geq 0$ on a $P^h(x, x+h) = p^h$ pour tout $h \geq 1$ et $P^h(x, x-h) = q^h$ pour tout $1 \leq h \leq x$ donc la chaîne est irréductible. Elle n'est pas fortement irréductible car dans ce cas il doit exister $n > 0$ tel que pour tout $x, y \in N$ on ait $P^n(x, y) > 0$ mais $P^n(x, x+n+1) = 0$. La chaîne n'est pas apériodique car $P^n(0, 0) = 0$ pour tout n impair et $P^n(0, 0) > 0$ pour tout n pair, donc $R(x) = \{2, 4, \dots\}$ et la période de 0 est 2. Si μ est une mesure invariante, alors $\mu = \mu \circ P$ et donc $\mu(x) = p\mu(x-1) + (1-p)\mu(x+1)$ pour tout $x \geq 2$ et $\mu(1) = \mu(0) + q\mu(2)$. On vérifie facilement que $\mu(x) = (p/q)^x / p$ satisfait ces équations. La récurrence positive de la chaîne est équivalente au fait que $\sum_{x=0}^{\infty} \mu(x) < +\infty$ car toutes les mesures invariantes sont proportionnelles et donc $E_x[T_x] = \mu(y) = C_x \mu(y)$ pour tout y tel que x récurrent. La condition de sommabilité de $\mu(y)$ donne que $E_x[T_x] < +\infty$ si et seulement si $p < 1/2$. Dans ce cas la probabilité invariante est donc $\mu = C\mu$ pour une certaine constante C . La condition de réversibilité est

$$(x)P(x, x+1) = (x+1)P(x+1, x), \quad x \geq 0$$

qui est facilement vérifié par $\frac{P(x+1)}{P(x)} = \frac{p}{q}$ pour tout $x \geq 1$ et $\frac{P(1)}{P(0)} = 1/q = P(0,1)/P(1,0)$. On a que

$$E_0[T_0] = \frac{1}{P(0)} = \frac{1}{P(0)} = 1 + \frac{1}{p} \frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{p} \frac{p}{q} = \frac{p(1-p) + 1}{p(1-p)} = \frac{1-p^2}{p(1-p)}$$

pour tout $p < 1/2$ et ∞ si $p = 1/2$ donc la chaîne n'est pas récurrente positive si $p \geq 1/2$. La fonction $u_N(x)$ satisfait l'équation

$$u_N(x) = pu_N(x+1) + qu_N(x-1)$$

pour tout $0 < x < N$ avec les conditions au bords $u_N(0) = 1$ et $u_N(N) = 0$. Il est facile de voir que la fonction donnée est la seule à satisfaire ces équations. Donc si $q \geq p$

$$u_N(1) = 1 \frac{1-p(q/p)}{1-p(q/p)^N}$$

On a aussi $P_0(T_0 < +\infty) = P_1(S_0 < +\infty) = P_1(S_0 < S_N) = u_N(1)$. Si $p \geq 1/2$ on a que $q/p \geq 1$ et donc $u_N(1) = 1$ et $P_0(T_0 < +\infty) = 1 : 0$ est récurrent.

Exercice 2. Soient X_1, X_2, \dots des v.a. indépendantes $X_i \sim N(0, 1)$ et $\sigma_n \sim N(0, \frac{1}{n})$ avec $\sigma_n > 0$ pour tout $n \geq 1$. Soit $Y_n = X_n + \sigma_n$ et

$$X_n = E[X | F_n], \quad n \geq 1$$

avec $F_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$. On peut voir X comme une quantité inconnue que l'on cherche à estimer. La v.a. Y_n est le résultat obtenu en mesurant X au temps n , la mesure étant brouillée par une erreur aléatoire. On suppose que les erreurs commises en temps différents sont indépendantes. Au temps n , notre meilleure estimation L^2 de X est donnée par X_n . On se pose la question de savoir si X_n converge vers X quand $n \rightarrow \infty$.

- Montrer que le processus $(X_n)_{n \geq 1}$ est une martingale uniformément bornée dans L^2 (c-à-d $\sup_n E[X_n^2] < +\infty$)
- Montrer que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers une variable X et que $X \in L^2$. La v.a. X représente notre meilleure prévision de X (au sens L^2) donnée par l'observation de toutes les v.a. $(Y_n)_{n \geq 1}$.
- Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $1 \leq i \leq n$ on a $E[Z_n | Y_i] = 0$ où la v.a. Z_n est définie par

$$Z_n = X - \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_k^2}} \sum_{k=1}^n \frac{Y_k}{\sigma_k^2}$$

- En déduire que pour tout $n \geq 1$ la v.a. Z_n est indépendante du vecteur (Y_1, \dots, Y_n) puis que $X_n = X - Z_n$.
- Calculer $E[(X - X_n)^2]$ et en déduire que $X_n \rightarrow X$ presque sûrement si et seulement si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n^2} = +\infty$$

Donc si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n^2} < +\infty$ il est impossible de déterminer la quantité inconnue X même avec un nombre infini d'observations.

Solution. Le processus est adapté par les propriétés de l'espérance conditionnelle

$$E[X_n^2] = E[(E[X/F_n])^2] \quad E[E[X^2/F_n]] = E[X^2] < +\infty$$

donc la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est uniformément bornée dans L^2 et donc dans L^1 . La propriété de martingale est facile à vérifier : $E[X_{n+1}/F_n] = E[E[X/F_{n+1}]/F_n] = E[X/F_n] = X_n$ pour tout $n \geq 1$. Par un résultat du cours une martingale uniformément bornée dans L^2 converge p.s. et dans L^2 vers une limite X_∞ . Par un calcul on a que

$$E[Z_n Y_i] = E[Y_i X] - \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}} \sum_{k=1}^n E[Y_i Y_k]$$

mais $E[Y_i X] = E[(X + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} Y_k) X] = E[X^2]$ par indépendance, $E[Y_i Y_k] = E[(X + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{j^2} Y_j)(X + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j^2} Y_j)] = E[X^2] + E[\sum_{j=1}^{\min(i,k)} \frac{1}{j^2}]$ et donc

$$E[Z_n Y_i] = 1 - \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + 1 \right) = 0$$

La v.a. Z_n est une combinaison linéaire du vecteur Gaussien (X, Y_1, \dots, Y_n) et donc elle est Gaussienne et le fait que $E[Z_n Y_i] = 0$ implique que Z_n est indépendante de toutes les Y_1, \dots, Y_n et de moyenne nulle. Donc

$$0 = E[Z_n/F_n] = E[X - \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} Y_k / F_n] = E[X/F_n] - \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} Y_k$$

ce qui donne une expression pour X_n :

$$X_n = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} Y_k = X_\infty Z_n.$$

Or

$$Z_n = X_\infty - \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} (X + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j^2} Y_j) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}} X_\infty - \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} Y_k$$

et donc

$$E[(X_\infty - X_n)^2] = E[Z_n^2] = \frac{1}{(1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2})^2} (1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}}$$

ce qui montre que $X_\infty - X_n$ dans L^2 ssi $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < +\infty$.