

Exercice 1. Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une martingale par rapport à une filtration $(F_n)_{n \geq 0}$, telle que $E(M_n^2) < +\infty$ pour tout $n \geq 0$. Soit

$$A_n = \sum_{i=1}^n E[M_i^2 | F_{i-1}] \quad (1)$$

Montrer que $M_n^2 - A_n$ est une $(F_n)_{n \geq 0}$ -martingale.

Il suffit de montrer que pour tout $n \geq 0$ on a, presque sûrement

$$E[M_{n+1}^2 - A_{n+1} | F_n] = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} M_{n+1}^2 - A_{n+1} &= M_{n+1}^2 - M_n^2 - E[M_{n+1}^2 | F_n] \\ &= M_{n+1}^2 - M_n^2 - E[M_{n+1}^2 | F_n] \\ &= M_{n+1}^2 - M_n^2 - E[M_{n+1}^2 | F_n] \\ &= M_{n+1}^2 - M_n^2 - E[M_{n+1}^2 | F_n] \end{aligned}$$

et clairement

$$E[M_{n+1}^2 - A_{n+1} | F_n] = 0.$$

Exercice 2. Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. avec $P(Y_i = 1) = p = 1 - P(Y_i = -1)$. Soit $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ (et $S_0 = 0$). Montrer que les processus $(W_n)_{n \geq 0}$ et $(M_n)_{n \geq 0}$ définis par

$$W_n = S_n - 2np, \quad W_0 = 0$$

et

$$M_n = \frac{1-p}{p}^{S_n}, \quad M_0 = 1$$

sont des martingales par rapport à la filtration naturelle des Y_n définie par $F_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ pour $n \geq 1$ et $F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

On doit montrer que $E[W_n | F_{n-1}] = 0$ pour tout $n \geq 1$ et une relation similaire pour M_n . Commencez par W_n :

$$W_n = S_n - 2np = Y_{n+1} - 2p$$

et par indépendance des $(Y_i)_{i \geq 1}$ on a

$$E[W_n | F_{n-1}] = E[Y_{n+1} - 2p] = E[Y_{n+1}] - 2p = 0.$$

Pour M_n :

$$M_n = M_{n+1} \mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_{n+1}] = \frac{1}{p} \mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_{n+1}]$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_n] &= \frac{1}{p} \mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_{n+1}] = \frac{1}{p} \mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_n] \\ &= \frac{1}{p} M_n = \frac{1}{p} (p + (1-p) M_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exercice 1. Soit G une fonction convexe et croissante, de dérivée première g . On note $S_n = \sup_{0 \leq k \leq n} X_k$.

a) Montrer que si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une sous-martingale positive,

$$H_n = G(S_n) - \mathbb{E}[G(S_{n+1}) | \mathcal{F}_n]$$

est une sous-martingale. On a donc $\mathbb{E}[H_{n+1} | \mathcal{F}_n] \leq H_n$.

$$(S_{n+1} - X_{n+1})g(S_{n+1}) = (S_{n+1} - X_{n+1})g(S_n).$$

$$\mathbb{E}[H_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[G(S_{n+1}) - \mathbb{E}[G(S_{n+1}) | \mathcal{F}_n] | \mathcal{F}_n] = G(S_n) - \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n]g(S_n).$$

b) En déduire que si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une sous-martingale positive nulle en 0, pour tout $p > 1$

$$\mathbb{E}[S_N^p] \leq \frac{p}{p-1} \mathbb{E}[X_N S_N^{p-1}].$$

Puis en déduire (en utilisant l'inégalité de Hölder) qu'il existe une constante C_p qui ne dépend pas de X telle que pour tout $p > 1$

$$\mathbb{E}[S_N^p] \leq C_p \mathbb{E}[X_N^p].$$

c) En utilisant la fonction $G(x) = (x - K)_+$, montrer que si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une sous-martingale positive

$$\mathbb{E}[S_N - K] \leq \frac{\mathbb{E}[X_N]}{K}.$$

On doit montrer que $\mathbb{E}[H_n | \mathcal{F}_n] \leq 0$. Or, $S_{n+1} > X_{n+1}$ car $S_{n+1} = \max(S_n, X_{n+1})$ et donc on a que

$$(S_{n+1} - X_{n+1})g(S_{n+1}) = (S_{n+1} - X_{n+1})g(S_n)$$

car si $S_{n+1} = X_{n+1}$ alors les deux cotés sont nulles. De ce fait on en déduit que

$$\begin{aligned} H_n &= G(S_{n+1}) - \mathbb{E}[G(S_{n+1}) | \mathcal{F}_n] = G(S_{n+1}) - \mathbb{E}[G(S_n) + (S_{n+1} - X_{n+1})g(S_n) | \mathcal{F}_n] \\ &= G(S_{n+1}) - G(S_n) - \mathbb{E}[(S_{n+1} - X_{n+1})g(S_n) | \mathcal{F}_n] \\ &= (X_{n+1} - X_n)g(S_n) \end{aligned}$$

car $G(x) = G(y) + (x - y)g(y)$ pour tout $x > y$ et donc pour $x = S_{n+1}$ et $y = S_n$, par la convexité de G et le fait que g est la droite de G . A ce point

$$\mathbb{E}[H_n/F_n] = \mathbb{E}[X_n/F_n]g(S_n) = 0$$

car $g(x) = 0$ (étant G une fonction croissante) et étant $(X_n)_{n \geq 0}$ une sous-martingale. Donc $(H_n)_{n \geq 0}$ est bien une sous-martingale. Soit maintenant $G(x) = (x)_+^p$ pour $p \geq 1$. Elle est une fonction croissante et convexe de droite $g(x) = p(x)_+^{p-1} \geq 0$. Alors si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une sous-martingale nulle en 0 on a que le processus

$$H_n = (S_n)_+^p - p(S_n)_+^{p-1}(S_n - X_n)$$

est sous-martingale et donc $\mathbb{E}[H_N] = \mathbb{E}[H_0] = 0$ ce qui donne que

$$\mathbb{E}[S_N^p] = \mathbb{E}[(S_N)_+^p] = p \mathbb{E}[(S_N)_+^{p-1}(S_N - X_N)] = p \mathbb{E}[S_N^{p-1} X_N]$$

car $S_n \geq 0$ on donne que $X_0 = 0$. Si on suppose que $S_N \in L^p(\cdot)$ et simplifiant cette inégalité on obtient que

$$(1 - p) \mathbb{E}[S_N^p] = p \mathbb{E}[S_N^{p-1} X_N] \quad \mathbb{E}[S_N^p] = \frac{p}{1 - p} \mathbb{E}[S_N^{p-1} X_N].$$

En général on peut considérer $S_{N,K} = \min(S_N, K)$ avec K constante positive qui on fait tendre vers $+\infty$. Dans ce cas il reste vrai que $(S_{n,K})_{n \geq 0}$ est un processus croissant et tel que $S_{n+1,K} \geq X_{n+1}$ $S_{n+1,K} = S_{n,K}$ et donc on a aussi que le processus $(H_{n,K})_{n \geq 0}$ défini par

$$H_{n,K} = G(S_{n,K}) - (S_{n,K} - X_n)g(S_{n,K})$$

est une sous-martingale et que

$$\mathbb{E}[S_{N,K}^p] = \frac{p}{1 - p} \mathbb{E}[S_{N,K}^{p-1} X_N].$$

Quand $K \rightarrow +\infty$ on obtient, par convergence monotone que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_N^p] &= \lim_{K \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[S_{N,K}^p] = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{p}{1 - p} \mathbb{E}[S_{N,K}^{p-1} X_N] = \frac{p}{1 - p} \mathbb{E}[\lim_{K \rightarrow +\infty} S_{N,K}^{p-1} X_N] \\ &= \frac{p}{1 - p} \mathbb{E}[S_N^{p-1} X_N]. \end{aligned}$$

Par Holder on a que

$$\mathbb{E}[S_N^p] = \frac{p}{1 - p} \mathbb{E}[(S_N^{p-1})^{1/p} (X_N^q)^{1/q}]$$

pour tout $p, q \geq 1$ tels que $1/p + 1/q = 1$. En choisissant p tel que $p(p-1) = p$ on a que $1/p = (p-1)/p$ et $1/q = 1/(p-1) = 1/(p(p-1))/p = 1/p$ et donc

$$\mathbb{E}[S_N^p] = \frac{p}{1 - p} \mathbb{E}[S_N^{(p-1)/p} (X_N^p)^{1/p}]$$

ce qui donne si $S_N \in L^p$:

$$\mathbb{E}[S_N^p]^{1/p} = \frac{p}{1 - p} \mathbb{E}[X_N^p]^{1/p}.$$

En général il suffit de passer par $S_{N,K}$ et de prendre la limite pour $K \rightarrow +\infty$.

Maintenant on considère $G(x) = (x - K)_+$ pour une constante $K \geq 0$. On a que $g(x) = 1_{x \leq K}$ et donc que le processus $H_n = (S_n - K)_+ - \sum_{i=0}^{n-1} (S_i - K)_+ 1_{S_i \leq K}$ est une sous-martingale et donc que

$$\mathbb{E}[(S_N - K)_+] \leq \mathbb{E}[(S_N - K)_+ 1_{S_N \leq K}]$$

Mais $\mathbb{E}[(S_N - K)_+] = \mathbb{E}[(S_N - K)_+ 1_{S_N \leq K}]$ et donc

$$\mathbb{E}[(X_N - K)_+ 1_{S_N \leq K}] = 0 \quad \mathbb{E}[X_N 1_{S_N \leq K}] = K \mathbb{P}(S_N \leq K)$$

$$\mathbb{P}(S_N \leq K) = \frac{\mathbb{E}[X_N 1_{S_N \leq K}]}{K} = \frac{\mathbb{E}[X_N]}{K}.$$

Exercice 11. (Boules dans l'urne) : On dispose d'une urne initialement de boules rouges et vertes. A l'instant 0, une urne contient une boule de chaque couleur et on effectue une succession de tirages de boules par la règle suivante: on tire une boule de l'urne au hasard, on la remet dans l'urne en ajoutant une boule du même couleur. Soit S_n le nombre de boules rouges au temps n , et $X_n = S_n / (n + 2)$ la proportion de boules rouges au temps n .

a) Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov et que

$$\mathbb{P}[f(S_{n+1}) | S_n] = f(S_n + 1) \frac{S_n}{n+2} + f(S_n) \frac{n+2 - S_n}{n+2}.$$

b) Montrer que X_n est une martingale par rapport à la filtration naturelle et calculer $\mathbb{E}(X_n)$.

c) Montrer que $X_n \rightarrow X$ presque sûrement et dans L^1 .

d) Pour tout $k \geq 1$ soit

$$Z_n^{(k)} = \frac{S_n(S_n + 1) \cdots (S_n + k - 1)}{(n+2)(n+3) \cdots (n+k+1)}.$$

Montrer que $(Z_n^{(k)})_{n \geq 0}$ est une martingale pour tout $k \geq 1$ et calculer $\mathbb{E}[Z_n^{(k)}]$.

e) Montrer que

$$\mathbb{E}[X^k] = \mathbb{E}[Z_0^k] = \frac{1}{k+1}$$

f) Par un calcul de fonction caractéristique en déduire que la v.a. X suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 12. (Chaque pas de temps) : À chaque pas de temps n on tire une boule au hasard parmi les $n+2$ boules présentes. Soit $(U_n)_{n \geq 0}$ une suite des v.a. indépendantes telles que U_n a la loi uniforme sur $\{0, \dots, n+2\}$. La suite $(S_n)_{n \geq 1}$ satisfait alors la récurrence algébrique suivante

$$S_{n+1} = S_n + 1_{U_n \leq S_n}, \quad S_0 = 1$$

et donc elle est une chaîne de Markov avec probabilité de transition

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k+1 | S_n = k) = \mathbb{P}(U_n \leq k) = \frac{k}{n+2}, \quad \mathbb{P}(S_{n+1} = k | S_n = k) = \mathbb{P}(U_n > k) = \frac{n+2-k}{n+2}$$

pour tout $k = 0, \dots, n+2$ et zéro autrement. La définition de l'espérance conditionnelle par rapport à \mathcal{F}_n nous donne

$$\mathbb{E}[f(S_{n+1})/S_n = k] = f(k+1)\frac{k}{n+2} + f(k)\frac{k}{n+2}$$

ce qui implique que

$$\mathbb{E}[f(S_{n+1})/S_n] = f(S_n+1)\frac{S_n}{n+2} + f(S_n)\frac{n+2}{n+2}$$

et en particulier

$$\mathbb{E}[S_{n+1}/S_n] = \frac{S_n(S_n+1)}{n+2} + \frac{S_n(n+2)}{n+2} = \frac{n+3}{n+2}S_n$$

Mais alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1}/F_n] &= \mathbb{E}[X_{n+1}/X_1, \dots, X_n] = \frac{1}{n+3} \mathbb{E}[S_{n+1}/X_1, \dots, X_n] \\ &= \frac{1}{n+3} \mathbb{E}[S_{n+1}/S_1, \dots, S_n] \stackrel{\text{Markov}}{=} \frac{1}{n+3} \mathbb{E}[S_{n+1}/S_n] = \frac{S_n}{n+2} = X_n \end{aligned}$$

car $X_n = (n+2)S_n$ et donc $(X_1, \dots, X_n) = (S_1, \dots, S_n)$ et on a utilisé la propriété de Markov. Cela montre que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale. On a donc que

$$\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0] = \frac{1}{2}$$

car au début on a une boule rouge et une verte. Il est aussi clair que $0 \leq X_n \leq 1$ et donc que la martingale est positive et bornée. Par le théorème de Doob elle converge presque sûrement vers $X_\infty \in L^1$. Par la broutilte de la martingale en n et la convergence est aussi L^2 car $\sup_n \mathbb{E}[X_n^2] < +\infty$ et donc on a aussi la convergence dans L^1 .

Soit

$$Z_n^{(k)} = \frac{S_n(S_n+1)\dots(S_n+k-1)}{(n+2)\dots(n+k+1)}$$

alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_{n+1}^{(k)}/S_n] &= \frac{(S_n+1)(S_n+2)\dots(S_n+k)}{(n+3)\dots(n+k+2)} \frac{S_n}{n+2} + \frac{S_n(S_n+1)\dots(S_n+k-1)}{(n+3)\dots(n+k+2)} \frac{n+2}{n+2} \\ &= \frac{S_n(S_n+1)\dots(S_n+k-1)}{(n+2)\dots(n+k+1)} \frac{n+2+k}{n+k+2} = Z_n^{(k)} \end{aligned}$$

ce qui montre que $(Z_n^{(k)})_{n \geq 0}$ est une martingale bornée pour tout $k \geq 1$. Par le théorème de convergence et par le fait que $0 \leq Z_n^{(k)} \leq 1$ on a que $Z_n^{(k)} \rightarrow Z^{(k)}$ presque sûrement et dans L^2 et donc que $\mathbb{E}[Z_0^{(k)}] = \mathbb{E}[Z_n^{(k)}] = \mathbb{E}[Z^{(k)}]$ ce qui donne

$$\mathbb{E}[Z^{(k)}] = \mathbb{E}[Z_0^{(k)}] = \frac{1}{2} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{k+1}.$$

Au même temps la convergence presque sûre de $X_n \rightarrow X_\infty$ donne que

$$Z_n^{(k)} = \frac{(n+2)^k X_n (X_n + 1/(n+2)) \dots (X_n + (k-1)/(n+2))}{(n+2)\dots(n+k+1)} \rightarrow X_\infty^k$$

presque sûrement. On obtient que $Z^{(k)} = X^k$ et que

$$\mathbb{E}[X^k] = \frac{1}{k+1}$$

pour tout $k \geq 1$. Cela suffit pour caractériser la loi de X : pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}[X^k] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{(k+1)!} = \frac{1}{it} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{it} - 1}{it}$$

et donc par unicité de la fonction caractéristique on peut conclure que la loi de X est la loi uniforme sur $[0, 1]$:

$$\int_0^1 e^{itx} dx = \frac{e^{it} - 1}{it}$$

Exercice 11. Soient $(Y_n)_{n \geq 1}$ v.a. i.i.d., $Y_n \geq 0$ et $\mathbb{E}(Y_n) = 1$. Soit $X_n = \prod_{k=1}^n Y_k$ pour tout $n \geq 1$ et $X_0 = 1$.

- Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale par rapport à la filtration engendrée par les $(Y_n)_{n \geq 1}$ ($F_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ pour $n \geq 1$ et $F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$)
- Supposons que $Y_n < \infty$ pour quelque $n \geq 1$. Montrer que $\mathbb{E}[\log Y_1] < 0$ et utiliser la loi des grandes nombres pour $\log X_n/n$ pour montrer que si $\mathbb{P}(Y_1 = 1) < 1$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0 \quad p.s.$$

- Soit maintenant $Z_n = \max(Y_1, \dots, Y_n)$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\mathbb{E}[\log Z_n] < 0$ et conclure que si $\mathbb{P}(Y_1 = 1) < 1$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0 \quad p.s.$$

sans hypothèses supplémentaires sur $(Y_n)_{n \geq 1}$.

- En déduire que la convergence de $X_n \rightarrow X$ dans le théorème de Doob n'a pas lieu dans $L^1(\mathbb{P})$ mais seulement presque sûrement.

Remarque. On a que $X_n = (Y_{n+1} \dots Y_{\infty}) X_n$ et donc que $\mathbb{E}[X_n/F_n] = \mathbb{E}[(Y_{n+1} \dots Y_{\infty})/F_n] X_n = 0$ par indépendance des $(Y_i)_{i \geq 1}$. Le processus $(X_n)_{n \geq 0}$ avec $X_0 = 1$ est donc une martingale positive. A fortiori X est aussi une sur-martingale positive et par le théorème de Doob elle converge presque sûrement vers $X \in L^1(\mathbb{P})$. Le but de cet exercice est de montrer que la convergence n'a pas lieu nécessairement dans L^1 . Supposons pour le moment que $Y_n < \infty$. Cette borne inférieure implique que $\log Y_n \in L^1$. En effet

$$\mathbb{E}[|\log Y_n|] = \mathbb{E}[\log(1/Y_n) 1_{Y_n > 1}] + \mathbb{E}[\log Y_n 1_{Y_n \leq 1}]$$

$$= \mathbb{E}[\log(1/Y_n) (Y_n - 1)] + \mathbb{E}[\log(1 + Y_n(1 - Y_n))] =$$

$$\mathbb{E}[\log(1/Y_n) (Y_n - 1)] + \mathbb{E}[\log(1 + Y_n(1 - Y_n))] =$$

$$\mathbb{E}[\log(1/Y_n) (Y_n - 1)] + \mathbb{E}[\log(1 + Y_n(1 - Y_n))] = \mathbb{E}[\log(1/Y_n) (Y_n - 1)] + \mathbb{E}[\log(1 + Y_n(1 - Y_n))] =$$

par l'inégalité de Jensen. L'inégalité de Jensen donne aussi que

$$\mathbb{E}[\log Y_n] < \log \mathbb{E}[Y_n] = 0$$

avec inégalité stricte car $\mathbb{E}(Y_n = 1) < 1$. Or

$$\log X_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log Y_i$$

et par la loi des grandes nombres (valable sous l'hypothèse $\log Y_i \in L^1$) on a que

$$\lim_n \frac{1}{n} \log X_n = \mathbb{E}[\log Y_1] = c < 0$$

et donc que pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit (tel que $c + \varepsilon < 0$) il existe $N(\varepsilon)$ tel que pour tout $n > N$ on a $\log X_n < n(c + \varepsilon)$ ce qui nous donne $X_n \leq e^{(c+\varepsilon)n}$ p.s.

Pour enlever l'hypothèse que $\mathbb{E}[\log Y_1] < +\infty$ on se donne $\varepsilon_0 > 0$ et on définit $Z_n = \max(\varepsilon_0, Y_n)$ et $W_n = Z_1 \dots Z_n$. On a alors que $W_n \geq X_n$ et que $\mathbb{E}[\log Z_1] < +\infty$. Quand $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ on a que $Y_1 = \inf_{\varepsilon_0} Z_1$ et par convergence monotone que

$$\begin{aligned} \inf_0 \mathbb{E}[\log Z_1] &= \inf_0 (\mathbb{E}[\log Z_1 1_{Z_1 \leq \varepsilon_0}] + \mathbb{E}[\log Z_1 1_{Z_1 > \varepsilon_0}]) \\ &= \mathbb{E}[\inf_0 (\log Z_1 1_{Z_1 \leq \varepsilon_0})] + \mathbb{E}[\log Y_1 1_{Y_1 > \varepsilon_0}] \\ &= \mathbb{E}[\log Y_1 1_{Y_1 \leq \varepsilon_0}] + \mathbb{E}[\log Y_1 1_{Y_1 > \varepsilon_0}] = \mathbb{E}[\log Y_1] < \log \mathbb{E}[Z_1] = 0. \end{aligned}$$

Donc pour ε_0 suffisamment petit $\mathbb{E}[\log Z_n] < 0$ ce qui nous permet de conclure que $W_n \rightarrow 0$ et donc que $X_n \rightarrow 0$ p.s.

Si la convergence de X_n vers X avait lieu dans L^1 on aurait que $\mathbb{E}[X_n] \rightarrow \mathbb{E}[X] = 0$ et donc que $\mathbb{E}[X_n] \rightarrow \mathbb{E}[X]$ mais c'est absurde car $\mathbb{E}[X_n] = 1$ pour tout $n > 0$ et $\mathbb{E}[X] = 0$.