

Prepartiel

Exercice 1. On considère deux v.a. X, Y telles que

$$E[f(X)/Y] = f(Y).$$

Pour toute fonction f mesurable et bornée. Montrer que $X = Y$ p.s.

Exercice 2. Soit $X \sim U([0, 1])$ et $Y = \min(X, 1/2)$. Calculer $E[X/Y]$.

Exercice 3. Soient X, Y deux v.a. telles que $E[X] = E[Y] = 0$ et telles que $Z = X + Y$ est indépendante de Y pour un quelconque R . Montrer que $E[X/Y] = E[Y]$.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite des v.a.. Pour $n \geq 0$, on considère deux v.a. Y, Z telles que $Y = (X_0, \dots, X_n)$ et $Z = (X_n, X_{n+1}, \dots)$. Montrer que les deux égalités suivantes sont équivalentes:

- i. $E[Z/X_0, \dots, X_k] = E[Z/X_k]$ pour tout $0 \leq k \leq n$;
- ii. $E[YZ/X_n] = E[Y/X_n]E[Z/X_n]$.

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov avec espace d'états M discret.

a) Montrer que si $A \subset M$ est un ensemble fermé pour la chaîne, alors

$$X \in A \implies P_x(n \geq 0 : X_n \in A) = 1.$$

b) Soit $N_x = \inf_{n \geq 1} 1_{X_n = x}$ et $T_x = \inf \{n \geq 1 : X_n = x\}$. Montrer que

$$P_x(N_x = k) = P_x(T_x < +\infty)^k.$$

c) Soit $Y_n = (X_n, X_{n+1}, X_{n+2})$. Montrer que la suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans M^3 est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition $Q: M^3 \rightarrow M^3$ [0, 1].

d) En supposant que (M) est une probabilité invariante pour P déterminer une probabilité invariante pour Q .

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov homogène avec espace d'états $\{1, 2, 3\}$ et matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

- a) Déterminer les classes de communication ;
- b) Soit $T = \inf \{n \geq 1 : X_n \in \{1, 2\}\}$. Calculer $P_3(T = k)$ pour tout $k \geq 1$;
- c) Déterminer toutes les probabilités invariantes de P ;

Exercice 7. Dans deux pièces il y a un souris et un chat. Soit $X_n \in \{1, 2\}$ la position du chat à l'instant n et $Y_n \in \{1, 2\}$ la position du souris à l'instant n . On suppose que $(X_n)_{n \geq 0}$ et $(Y_n)_{n \geq 0}$ sont des chaînes de Markov sur $\{1, 2\}$ de matrices de transition

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

À l'instant initial le souris est dans la pièce 1 et le chat dans la pièce 2. Si ils se trouvent dans la même pièce alors le chat mange le souris. Calculer le temps moyen de survie du souris $E[T]$ où $T = \inf \{n \geq 0 : X_n = Y_n\}$.

Exercice 8. Soit $(Z_n)_{n \geq 0}$ une suite iid telle que $P(Z_1 = k) = p(1-p)^k$ pour $k \geq 0$. Soit $X_n = \max(Z_0, \dots, Z_n)$. Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov sur \mathbb{N} et donner sa matrice de transition.