

Pre-examen

[Durée : deux heures. Aucun document n'est autorisé. Tous les exercices sont indépendants. Seules les réponses soigneusement justifiées seront prises en compte.]

Exercice 1. Soit $\mu : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ une probabilité sur \mathbb{N} telle que $\mu(x) > 0$ pour tout $x > 0$ et telle que $\mu(0) = 0$. On pose $p_{x-1, x} = \mu(x)$ (quantité éventuellement infinie). On définit une matrice de transition sur \mathbb{N} par

$$P(0, y) = \mu(y), \quad P(x, y) = x^{-1} 1_{0 \leq y \leq x-1}, \quad x \geq 1, y \geq 0.$$

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P . Soit $(F_n = \sigma(X_0, \dots, X_n))_{n \geq 0}$ la filtration engendrée par $(X_n)_{n \geq 0}$. On pose $S_x = \inf \{n \geq 0 : X_n = x\}$ et $T_x = \inf \{n \geq 1 : X_n = x\}$.

- Calculer $E[X_{n+1}/F_n]$ en fonction de X_n et n .
- Montrer que la chaîne est irréductible.
- La chaîne est-elle apériodique?
- Soit $x \geq 1$. Montrer que $P_x(S_0 < +\infty) = 1$. En déduire que la chaîne est récurrente.
- Montrer que $S_x < +\infty$ est une condition suffisante de récurrence positive.
- On pose $u(x) = E_x[S_0]$. Écrire le système d'équations satisfaites par $u(x)$. Vérifier que ce système possède une solution donnée par

$$u(x) = \sum_{k=1}^x \frac{1}{k}, \quad x \geq 1.$$

On admettra que le système admet une seule solution.

- En déduire que

$$\log(x) - \log(x-1) < +\infty$$

est une condition nécessaire et suffisante de récurrence positive.

- On choisit maintenant $\mu(x) = 1/(x(x+1))$. Vérifier que c'est bien une probabilité et calculer $E_0[T_0]$.
- (Avec la méthode de la question précédente) Soit $x \in \mathbb{N}$, que peut-on dire sur le comportement asymptotique de $P_x(X_n = 0)$ quand $n \rightarrow +\infty$?

Exercice 2.

- Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une martingale telle que $E[M_n^2] < +\infty$ et soit

$$A_n = \sum_{k=1}^n E[(M_k - M_{k-1})^2 / F_{k-1}]$$

pour tout $n \geq 1$ et $A_0 = 0$. Montrer que M_n^2 est une martingale.

b) Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} (c-à-d. $X_{n+1} = X_n + Z_{n+1}$ où $(Z_n)_{n \geq 1}$ est une suite iid telle que $P(Z_n = \pm 1) = 1/2$). On suppose $X_0 = 0$. Montrer que $X_n^2 - n$ est une martingale par rapport à la filtration engendrée par les $(X_n)_{n \geq 0}$.

c) Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov sur l'ensemble E de M de matrice de transition P . Soit $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que

$$M_n = f(X_n) - \sum_{k=0}^{n-1} [f(X_k) - Pf(X_k)], \quad n \geq 1$$

est une martingale par rapport à la filtration engendrée par les $(X_n)_{n \geq 0}$. (On rappelle que $Pf(x) = \sum_{y \in M} f(y) P(x, y)$).

d) Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ la martingale introduite à la question précédente. Montrer que

$$M_n^2 - \sum_{k=0}^{n-1} [P(f^2)(X_k) - (Pf(X_k))^2], \quad n \geq 1$$

est une martingale par rapport à la filtration engendrée par les $(X_n)_{n \geq 0}$. (par définition $f^2(x) = (f(x))^2$ pour tout $x \in M$)