

IV Martingales

1 Filtrations et martingales

On considère un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) .

Définition 1. Une filtration est une famille $(F_n)_{n \geq 0}$ de sous-tribus de \mathcal{F} telles que $F_n \subset F_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. On pose $F_{-1} = \{\emptyset, \Omega\}$ et $F = (F_n)_{n \geq -1}$ (F est la plus petite tribu qui contienne les F_n pour $n \geq -1$). Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ un processus stochastique, sa filtration naturelle $(F_n^X)_{n \geq 0}$ est la filtration définie par $F_n^X = \sigma(X_0, \dots, X_n)$.

Définition 2. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ un processus stochastique et $(F_n)_{n \geq 0}$ une filtration, on dit que $(X_n)_{n \geq 0}$ est adaptée (à la filtration $(F_n)_{n \geq 0}$) ssi $X_n \in F_n$ pour tout $n \geq 0$. On dit que $(X_n)_{n \geq 0}$ est prévisible (par rapport à la filtration $(F_n)_{n \geq 0}$) ssi $X_n \in F_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. La filtration naturelle de X est la plus petite filtration à laquelle X est adaptée.

Définition 3. Un processus $(X_n)_{n \geq 0}$ réel, adapté et intégrable (c-à-d. $E|X_n| < +\infty$ pour tout $n \geq 0$) est

- i. une martingale ssi $E[X_{n+1}/F_n] = X_n$ p.s. pour tout $n \geq 0$;
- ii. une sur-martingale ssi $E[X_{n+1}/F_n] \leq X_n$ p.s. pour tout $n \geq 0$;
- iii. une sous-martingale ssi $E[X_{n+1}/F_n] \geq X_n$ p.s. pour tout $n \geq 0$.

Si on interprète $(X_n)_{n \geq 0}$ comme les gains dans un jeu d'azard et la filtration $(F_n)_{n \geq 0}$ comme l'information disponible à chaque instant de temps, alors une martingale est un jeu équitable, une sur-martingale est un jeu défavorable et une sous-martingale un jeu favorable.

Remarque 4. Si X est une martingale, alors par récurrence de la définition on a que $E[X_m/F_n] = X_n$ pour tout $m \geq n \geq 0$. Une propriété analogue est valable pour les sous/sur-martingales. Si on note $X_n = X_n - X_0$ alors on a que la propriété (sous-/sur-)martingale est équivalente à

$$E[X_{n+1}/F_n] = 0 \text{ (ou } \leq 0, \text{ ou } \geq 0) \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Exemple 5. Soit Z une v.a. réelle et intégrable. Alors $X_n = E[Z/F_n]$ est une martingale. Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est un processus réel adapté croissant (décroissant) alors il est aussi une sous-(sur-)martingale.

Proposition 6. (Décomposition de Doob) Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite adaptée et intégrable, alors il existe une unique martingale $(M_n)_{n \geq 0}$ et une unique processus $(I_n)_{n \geq 0}$ prévisible, intégrable et tel que $I_0 = 0$ tels que on a

$$X_n = X_0 + M_n + I_n, \quad n \geq 0.$$

De plus

- a) $I_n = 0$ pour tout $n \geq 0$ ssi $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale ;
- b) $(I_n)_{n \geq 0}$ est croissant ssi $(X_n)_{n \geq 0}$ est une sous-martingale ;
- c) $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissant ssi $(X_n)_{n \geq 0}$ est une sur-martingale .

Démonstration. On montre l'unicité de la décomposition de Doob: si \tilde{M}, \tilde{I} sont une autre possible décomposition de X en partie martingale et processus prévisible intégrable, alors on doit avoir

$$\tilde{M}_n + \tilde{I}_n = M_n + I_n = X_n - X_0$$

et donc si on pose $N_n = \tilde{M}_n - M_n = I_n - \tilde{I}_n$ on a que N_n est une martingale et au même temps un processus prévisible intégrable, donc pour tout $n \geq 0$

$$N_n = E[N_{n+1}/F_n] = N_{n+1}$$

car $N_{n+1} \in F_n$ ce qui implique que N_n est constant en n et donc que $N_n = N_0 = 0$ car $I_0 = \tilde{I}_0 = 0$. Donc $I_n = \tilde{I}_n$ et $M_n = \tilde{M}_n$. Pour l'existence on remarque que $M_n = X_n - I_n$ et en prenant l'espérance conditionnelle on obtient que

$$0 = E[M_{n+1}/F_n] = E[X_{n+1}/F_n] - E[I_{n+1}/F_n] = E[X_{n+1}/F_n] - I_{n+1}$$

car par la prévisibilité de I_n on a $I_{n+1} \in F_n$. Donc on peut poser

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} E[X_{i+1}/F_i], \quad I_0 = 0$$

ce qui nous donne un processus prévisible et intégrable. Il est aussi évident que si on pose $M_n = X_n - I_n$ alors $(M_n)_{n \geq 0}$ est une martingale.

La formule pour I_n donne directement que si $(X_n)_{n \geq 0}$ est martingale alors $I_n = 0$ pour tout $n \geq 0$, l'implication opposée est évidente. Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une (sur-)sous-martingale alors pour tout n : $E[X_{n+1}/F_n] \leq X_n$ (ou \geq) et donc le processus I_n est (de-)croissant.

Proposition 7. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une (sous-)martingale et φ une fonction convexe (convexe et croissante) et telle que $E[|\varphi(X_n)|] < +\infty$ pour tout $n \geq 0$, alors $(\varphi(X_n))_{n \geq 0}$ est une sous-martingale.

Démonstration. Par l'inégalité de Jensen on a que

$$E[\varphi(X_{n+1})/F_n] \geq \varphi(E[X_{n+1}/F_n]) = \varphi(X_n)$$

ou la dernière égalité est due à la propriété de martingale de X . Si X est sous-martingale on a que

$$E[\varphi(X_{n+1})/F_n] \geq \varphi(E[X_{n+1}/F_n]) \geq \varphi(X_n)$$

par le fait que on suppose φ croissante.

Proposition 8. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une martingale de carré intégrable (c-i-à-d. $E[X_n^2] < +\infty$ pour tout $n \geq 0$). Alors la sous-martingale $(X_n^2)_{n \geq 0}$ admet la décomposition

$$X_n^2 = X_0^2 + N_n + [X]_n$$

avec

$$N_n = 2 \sum_{i=1}^n X_i \Delta X_i, \quad [X]_n = \sum_{i=1}^n (\Delta X_i)^2$$

où le processus $(M_n)_{n \geq 0}$ est un martingale et le processus $([X]_n)_{n \geq 0}$ est un processus croissant appelé variation quadratique de X .

Démonstration. (exercice)

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une martingale. Déterminer la décomposition de Doob de $(X_n^2)_{n \geq 0}$:

$$X_n^2 = X_0^2 + M_n + X_n$$

avec $(M_n)_{n \geq 0}$ martingale et $(X_n)_{n \geq 0}$ processus prévisible (et croissant). Montrer que

$$X_n = E[(X_n)^2/F_n] = E[[X]_n/F_n].$$

2 Théorèmes de convergence

Théorème 9. (Doob) Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une sous-martingale positive et $X_\infty = \sup_{n \geq 0} X_n$ pour $n \geq 0$. Alors

$$E[(X_N)^2] \leq 4E[X_0^2]$$

pour tout $N \geq 0$.

Démonstration. On pose $X_{N+1} = 0$ par convenance. On a que

$$(X_{n+1})^2 - (X_n)^2 = (X_{n+1} - X_n)(X_{n+1} + X_n) \leq 2X_{n+1}(X_{n+1} - X_n) \quad \text{pour tout } n \leq N$$

car si $X_{n+1} - X_n > 0$ alors $X_{n+1} = X_n$ et $X_n = X_{n+1}$. Donc

$$\begin{aligned} E[(X_{N+1})^2] &\leq E[(X_N)^2] + 2E[X_{N+1}(X_{N+1} - X_N)] \\ 2E[E[X_N/F_{N+1}](X_{N+1} - X_N)] &= 2E[E[X_N(X_{N+1} - X_N)/F_{N+1}]] \\ &= 2E[X_N(X_{N+1} - X_N)] \end{aligned}$$

On a utilisé la propriété de sous-martingale de $(X_n)_{n \geq 0}$. Par sommation sur n entre 0 et N cela donne

$$E[(X_N)^2] \leq 2E[X_0 X_N]$$

Théorème 10. Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une martingale telle que $E[M_n^2] < +\infty$. Alors la suite M_n converge dans $L^2(\mathcal{F}_\infty)$ et p.s.

Démonstration. On décompose la martingale selon ses accroissements:

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^n M_k$$

et on remarque que les accroissements sont orthogonaux: si $n > k$:

$$E[M_n M_k] = E[E[M_n M_k / \mathcal{F}_{n-1}]] = E[E[M_n / \mathcal{F}_{n-1}] M_k] = 0$$

car $M_k \in \mathcal{F}_{n-1}$. Donc

$$E[M_n^2] = E[M_0^2] + \sum_{k=1}^n E[(M_k)^2]$$

et

$$E[M_0^2] + \sum_{k=1}^n E[(M_k)^2] =$$

ce que implique que la suite $\sum_{k=1}^n M_k$ converge dans $L^2(\mathcal{F}_\infty)$ et donc que $M = \lim_n M_n$ dans L^2 : en effet pour tout $k \leq n$

$$E[(M_n - M_k)^2] = \sum_{i=k+1}^n E[(M_i)^2] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

quand $n \rightarrow \infty$. La suite $(M_n)_{n \geq 0}$ est donc de Cauchy dans $L^2(\mathcal{F}_\infty)$.

On veut maintenant montrer la convergence presque sûre. Pour cela on considère la v.a.

$$V_n = \sup_{i,j \leq n} |M_i - M_j|.$$

On a

$$\begin{aligned} E[V_n^2] &= E[\lim_N \sup_{i,j \leq N} |M_i - M_j|^2] = \lim_N E[\sup_{i,j \leq N} |M_i - M_j|^2] \\ &\leq 4 \lim_N E[\sup_{i \leq N} |M_i|^2] \end{aligned}$$

car par inégalité triangulaire $|M_i - M_j| \leq |M_i - M_n| + |M_j - M_n|$ et $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ pour $a, b \geq 0$. Fixons $n \geq 0$ et soit $Y_k = M_{n+k} - M_n$ et $G_k = F_{n+k}$. Le processus $(Y_k)_{k \geq 0}$ est une martingale de carré-intégrable relative à la filtration $(G_k)_{k \geq 0}$ et donc par l'inégalité de Doob (car $(Y_k)_{k \geq 0}$ est une sous-martingale positive par rapport à la filtration $(G_k)_{k \geq 0}$) on a que

$$E[\sup_{0 \leq k \leq N} Y_k^2] = E[(\sup_{0 \leq k \leq N} |Y_k|)^2] \leq 4E[Y_N^2]$$

ce que nous donne

$$E[V_n^2] \leq 4 \lim_N E[\sup_{0 \leq k \leq N} Y_k^2] \leq 16 \lim_N E[Y_N^2] = 16 \lim_N E[|M_N - M_n|^2] = 16E[|M - M_n|^2]$$

car la convergence de M_n vers M a lieu dans L^2 . Maintenant si on prends la limite $n \rightarrow \infty$ on obtient par convergence monotone (la suite V_n est décroissante)

$$E[\lim_n V_n^2] = \lim_n E[V_n^2] = \lim_n 16E[|M - M_n|^2] = 0$$

et donc $\lim_n V_n = 0$ presque sûrement. Mais cela implique que pour presque toute la suite réelle $(M_n(\omega))_{n \geq 0}$ converge vers une limite $\tilde{M}(\omega)$. De la convergence L^2 de $(M_n)_{n \geq 0}$ vers M on peut déduire qu'il existe une sous-suite M_{n_k} qui converge p.s. vers M et donc on doit avoir $\tilde{M} = M$.

Lemme 11. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une sur-martingale positive et bornée par K . La martingale $(M_n)_{n \geq 0}$ de la décomposition de Doob est uniformément de carré-intégrable et

$$E[M_n^2] \leq 2K E[X_0] \leq E[X_0^2].$$

Démonstration. La martingale M_n est définie par $M_n = X_n - X_0 + A_n$ où A_n est un processus prévisible, intégrable et positif croissant (car X est une sur-martingale). Par construction X_n, A_n et donc M_n sont de carré-intégrable, en particulier $E[M_n^2] = \sum_{i=1}^n E[(M_i - M_{i-1})^2]$. On observe que

$$E[(M_i - M_{i-1})^2] = E[(X_i - X_{i-1} - E[X_i - X_{i-1} | F_{i-1}])^2] = E[(X_i - X_{i-1})^2]$$

compte tenu des propriétés de la variance conditionnelle. Observons que

$$\begin{aligned} E[(X_i - X_{i-1})^2] &= E[X_i^2] - E[X_{i-1}^2] - 2E[X_{i-1}(X_i - X_{i-1})] \\ &= E[X_i^2] - E[X_{i-1}^2] + 2E[X_{i-1}(A_i - A_{i-1})]. \end{aligned}$$

Par sommation, il vient

$$\begin{aligned} E[M_n^2] &= E[X_n^2] - E[X_0^2] + 2 \sum_{i=1}^n E[X_{i-1}(A_i - A_{i-1})] \\ &= E[X_n^2] - E[X_0^2] + 2K \sum_{i=1}^n E[A_i - A_{i-1}] = E[X_n^2] - E[X_0^2] + 2K E[A_n] \\ &= E[X_n^2] - 2K X_n + 2K E[X_0] + 2K E[A_n + X_n] \\ &= E[X_n^2] - 2K X_n + 2K E[X_0] + 2K E[X_0] - 2K E[X_0] + 2K E[X_0] \\ &= E[X_n^2] - 2K X_n + 4K E[X_0] \end{aligned}$$

car $X_n^2 - 2K X_n = X_n(X_n - 2K) \leq 0$ et on a utilisé la propriété de martingale de $A_n + X_n$.

Lemme 12. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une sous-martingale telle que $\sup_n E[(X_n)_+] = K < +\infty$. Alors $X_n = Y_n - Z_n$ où $(Y_n)_{n \geq 0}$ est une martingale positive et $(Z_n)_{n \geq 0}$ est une sur-martingale positive.

Démonstration. Le processus $((X_n)_+)_{n \geq 0}$ est une sous-martingale de décomposition de Doob

$$(X_n)_+ = (X_0)_+ + M_n + I_n$$

où d_n est un processus croissant, positif, prévisible et intégrable tel que

$$E[I_n] = E[|X_0|] + E[(X_n)_+] - E[|X_0|] + K.$$

La v.a. $I = \lim_n I_n$ (qui existe car I_n est croissante) est donc aussi intégrable (par convergence monotone $E[I] = \lim_n E[I_n]$). Soit $Y_n = (X_0)_+ + M_n + E[I | \mathcal{F}_n]$, $(Y_n)_{n \geq 0}$ est une martingale par construction et elle est positive car $Y_n = (X_0)_+ + M_n + I_n = (X_n)_+ \geq 0$ du fait que $E[I | \mathcal{F}_n] = E[I_n | \mathcal{F}_n] = I_n$. Alors $Z_n = Y_n - X_n = (X_n)_+ - X_n = (X_n)_- \geq 0$ est une sur-martingale (car différence d'une martingale et d'une sous-martingale) positive, décroissante.

Théorème 13. (Doob) Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une sur-martingale positive. Alors $(X_n)_{n \geq 0}$ converge p.s. vers une v.a. $X \in L^1(\mathcal{F}_\infty)$. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une sous-martingale telle que $\sup_n E[(X_n)_+] < \infty$. Alors $(X_n)_{n \geq 0}$ converge p.s. vers une v.a. $X \in L^1(\mathcal{F}_\infty)$.

Démonstration. Supposons d'abord que $(X_n)_{n \geq 0}$ soit une sur-martingale $(X_n)_{n \geq 0}$ positive et bornée par K . D'après le lemme 11, elle admet une décomposition en $X_n = M_n + A_n$, où la martingale est bornée dans L^2 et donc converge p.s. vers une v.a. M et comme la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ est bornée alors il existe aussi la limite $A = \lim_n A_n$ (car A_n est croissant). La suite $(X_n)_{n \geq 0}$ converge donc p.s.. Par changement de signe, il en est de même pour les sous-martingales bornées.

Considérons maintenant une sur-martingale positive $(Z_n)_{n \geq 0}$ et soit $X_n = e^{\beta Z_n}$. Le processus $(X_n)_{n \geq 0}$ est une sous-martingale positive et bornée par 1. Pour ce que on vient de voir, elle converge donc p.s. et en est de même pour la suite $Z_n = \frac{1}{\beta} \log X_n$ condition de mettre β comme limite. Mais

$$E[Z] = E[\liminf_n Z_n] = \liminf_n E[Z_n] = E[Z_0].$$

La limite est intégrable et donc p.s.

Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une sous-martingale bornée dans L^1 alors on peut utiliser le lemme 12 pour la décomposer en $X_n = Y_n - Z_n$ avec $(Y_n)_{n \geq 0}$ martingale positive et $(Z_n)_{n \geq 0}$ sur-martingale positive. Ces deux processus convergent p.s. vers des limites Y et Z p.s. et intégrables. Donc on obtient aussi le dernier résultat.

Remarque 14. Bien que la limite d'une sous-martingale bornée dans L^1 soit une v.a. dans L^1 , cette convergence n'a pas a priori lieu en L^1 . Voici un contre exemple.

Soit $(Z_n)_{n \geq 0}$ une suite iid avec $P(Z_n = +1) = 1 - p$ et $P(Z_n = -1) = p$. Soit $u > 1$. On pose $X_0 = x$ et $X_{n+1} = u^{Z_{n+1}} X_n$. Supposons que $p = 1/(1+u)$ de telle sorte que $E[u^{Z_{n+1}}] = 1$. Alors il est facile de vérifier que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale et donc $E[X_n] = E[X_0] = x$. Par la loi forte des grands nombres on a

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z_k = E[Z_1] = 2p - 1 = \frac{1-p}{1+u} < 0$$

d'où

$$\frac{X_n}{x} \sim u^{2p-1} < 1 \quad \text{p.s.}$$

Ainsi $X_n \rightarrow 0$ p.s., alors que son espérance est constante! (et donc $X_n \not\rightarrow 0$ dans L^1).

3 Arrêt optionnel

Définition 15. (Transformation de Martingale) Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ un processus adapté et $(C_n)_{n \geq 1}$ un processus prévisible. On définit le nouveau processus $((C_n X_n)_{n \geq 0})_{n \geq 0}$ par $(C_0 X_0) = 0$ et $(C_n X_n) = C_n X_n$ pour tout $n \geq 1$. Alors

$$((C_n X_n))_n = \sum_{i=1}^n C_i (X_i - X_{i-1}).$$

Lemme 16. Soit $(C_n)_{n \geq 1}$ un processus prévisible borné ($|C_n| \leq K$ pour tout $n \geq 1$).

i. Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale alors $((C_n X_n)_{n \geq 0})_{n \geq 0}$ est une martingale.

- ii. Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une (sous-)sur-martingale et $C_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ alors $((C_n X_n)_{n \geq 0})$ est une (sous-)sur-martingale.

Ces propriétés sont aussi valables sans condition de bornitude, si $X_n \in L^2$ pour tout $n \geq 1$ et $X_0 \in L^2$ pour tout $n \geq 0$.

Démonstration. L'intégrabilité et l'adaptation de $((C_n X_n)_{n \geq 0})$ sont laissées en exercice. On a que, pour tout $n \geq 1$,

$$E[(C_n X_n)/F_{n-1}] = E[C_n X_n/F_{n-1}] = C_n E[X_n/F_{n-1}]$$

par la propriété de $(C_n)_{n \geq 1}$ et donc on peut conclure.

Définition 17. Une v.a. $T: \Omega \rightarrow \mathbb{N} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est un temps d'arrêt si $\{T \leq n\} \in F_n$ pour tout $0 \leq n < +\infty$. De manière équivalente, une t.a. ssi $\{T = n\} \in F_n$ pour tout $0 \leq n < +\infty$.

Exemple 18. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ un processus adapté et A un borelien de \mathbb{R} , alors

$$T_A = \inf \{n \geq 0: X_n \in A\}$$

(avec $T_A = +\infty$ si $X_n \notin A$ pour tout $n \geq 0$) est un temps d'arrêt pour tout $0 \leq n < +\infty$ on a

$$\{T_A \leq n\} = \bigcup_{0 \leq k \leq n} \{X_k \in A\} \in F_n.$$

Si T est un t.a. et $(X_n)_{n \geq 0}$ un processus adapté, alors le processus $X_n^T(\omega) = X_{n \wedge T}(\omega)$ est encore adapté (exercice) et s'appelle processus arrêté en T . Il est facile de montrer que si on pose

$$C_n = 1_{n < T}$$

alors le processus $(C_n X_n)_{n \geq 0}$ est prévisible et $(C_n X_n)_{n \geq 0} = X_n^T$ donc on peut conclure que

Théorème 19. Si T est un temps d'arrêt et $(X_n)_{n \geq 0}$ est une (sur-)martingale, alors $(X_n^T)_{n \geq 0}$ est une (sur-)martingale et en particulier

$$E[X_{n \wedge T}] = E[X_0]$$

dans le cas des sur-martingales (avec l'inégalité pour les martingales).

Remarque 20. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} avec $X_0 = 0$, alors $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale et pour tout t.a. T on a que

$$E[X_{n \wedge T}] = E[X_0] = 0$$

Mais en général

$$E[X_T] \neq 0$$

en effet si $T = \inf \{n \geq 0: X_n = 1\}$ alors par récurrence on a que $P(T < +\infty) = 1$ et $X_T = 1$ qui donne $E[X_T] = 1$. Donc la convergence L^1 de $X_{n \wedge T}$ vers X_T ne se fait pas toujours.

Théorème 21. (théorème d'arrêt optionnel de Doob) Soit T un t.a. et $(X_n)_{n \geq 0}$ une sur-martingale, alors X_T est intégrable et $E[X_T] \leq E[X_0]$ dans les cas suivantes :

- T est borné;
- X est borné et $T < +\infty$ p.s.
- $E[T] < +\infty$ et pour tout $K > 0$ et tout $n \geq 1$

$$|X_{n \wedge T} - X_{n-1 \wedge T}| \leq K.$$

- $X_n = 0$ pour tout $n \geq 0$ et $T < +\infty$ p.s.

Démonstration. On sait que pour tout $n \geq 1$

$$E[X_{n \wedge T} - X_{n-1 \wedge T}] \leq 0.$$

(i) Si $T \leq N$ il suffit de prendre $n = N$. (ii) On peut utiliser la convergence dominée pour montrer que

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_{n \wedge T} | \mathcal{F}_0] = E[\lim_{n \rightarrow \infty} (X_{n \wedge T} | \mathcal{F}_0)] = E[X_T | \mathcal{F}_0].$$

(iii) On a que

$$|X_{n \wedge T} | \mathcal{F}_0| \leq \sum_{k=1}^{T \wedge n} |X_k| \leq KT$$

si $|X_k| \leq K$ pour tout $k \geq 0$. Du fait que $E[T] < +\infty$ on en déduit par convergence dominée que $E[X_T] = E[X_0]$. (iv) La suite $(X_{n \wedge T})_{n \geq 0}$ est positive et converge p.s. vers X_T donc par le lemme de Fatou on a que

$$E[X_0] = \liminf_n E[X_{n \wedge T}] = E[\liminf_n X_{n \wedge T}] = E[X_T].$$