

## TD1. Intégrales doubles et couples de variables aléatoires.

**Exercice 1.** Calculer les intégrales  $\int_D f(x, y) dx dy$  dans les cas suivants :

- $f(x, y) = 1/(x + y + 1)^2$  et  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ .
- $f(x, y) = \sin(x + y)$  et  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2\}$ .
- $f(x, y) = x^2 + y^2$  et  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ .
- $f(x, y) = \exp(-x - y)/(2 - x)$  et  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0, x + y < 2\}$ .
- $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + 1}$  et  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$  (Utiliser le passage en coordonnées polaires).
- $f(x, y) = (x + y)^2 \exp(-x^2 - y^2)$  et  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$  (Utiliser le changement de variable  $u = x + y$  et  $v = x - y$ ).
- $f(x, y) = y \exp(-xy)$  et  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ . On demande ici de calculer l'intégrale de deux façons différentes (intégrer d'abord en  $y$ ; faire ensuite le contraire).

**Exercice 2.** Soit

$$f(x, y) = \begin{cases} k y^2 \exp(-x^2 - y^2) + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour quelle valeur de  $k$ ,  $f$  peut-elle représenter la densité d'un couple de variables aléatoires ?

**Exercice 3.** Soit  $V = (X, Y)$  un couple de variables aléatoires admettant pour densité

$$f_V(x, y) = \begin{cases} k & \text{si } |x| + |y| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- Déterminer ainsi que les lois marginales de  $X$  et de  $Y$ .
- Déterminer  $\text{cov}(X, Y)$  et étudier l'indépendance de  $X$  et  $Y$ .

**Exercice 4.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes et de même loi continue uniforme sur  $[0, 1]$ .

- Calculer la densité de probabilité de  $Z = \inf(X, Y)$  et de  $W = \sup(X, Y)$ .
- Calculer l'espérance mathématique de  $Z$  et de  $W$ .
- Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre  $Z$  et  $W$ .

**Exercice 5.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires admettant pour densité de probabilité  $f_{(X, Y)}(x, y) = \exp(-x - y) \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(y) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ .

- Vérifier que  $f_{(X, Y)}$  est bien une densité de probabilité.

b) Déterminer les lois marginales de  $X$  et de  $Y$ .

c) Calculer  $P(X - 1/Y > 2)$ .

**Exercice 6.** Soit  $X$  une variable aléatoire admettant pour loi conditionnelle lorsque  $Y = y$ , la loi de densité  $f_{X|Y}(x) = y^2 x \exp(-y^2 x) 1_{\mathbb{R}_+}(x)$ . La variable aléatoire  $Y$  admet pour densité  $f_Y(y) = 1/y^2 1_{[1, +\infty[}(y)$ . Calculer la loi conditionnelle de  $Y$  sachant que  $X = x$  ainsi que l'espérance conditionnelle  $E(Y/X)$ .

**Exercice 7.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 1$ . On considère les variables  $U$  et  $V$  définies par  $U = X + Y$  et  $V = X/Y$ .

a) Déterminer la loi du couple de variables aléatoires  $(U, V)$ . Les variables  $U$  et  $V$  sont-elles indépendantes ?

b) Calculer  $E(U)$  et  $E(V)$ .