

TD2. Chapitres de Markov.

Exercice 1. On lance un dé à six faces de manière indépendante. Parmi les suites aléatoires suivantes, lesquelles sont des chaînes de Markov ? Donner leur matrice de transition.

- a) X_n : le plus grand résultat obtenu après n lancers.
- b) N_n : le nombre de 6 obtenus au bout de n lancers.
- c) C_n : nombre de lancers, à l'instant n , depuis le dernier 6.
- d) $B_n = \sum_{k=0}^n N_k$.

Exercice 2. On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ homogène de matrice de transition P . Déterminer si les processus suivantes sont des chaînes de Markov et éventuellement préciser leur matrice de transition :

- a) $W_n = X_{n+k}$, $n \geq 0$ où $k \in \mathbb{N}$ est fixé.
- b) $Y_n = X_{2n}$, $n \geq 0$;
- c) $Z_n = X_{T_n}$, $n \geq 0$ où $T_n = S_1 + \dots + S_n$, $T_0 = 0$ et la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est iid et à valeurs dans $\mathbb{N} + 1$.

Exercice 3. (Pannes aléatoires) Soit $\{U_n\}_{n \geq 0}$ une suite iid à valeurs dans $\{1, 2, \dots, +\infty\}$. La v.a. U_k s'interprète comme durée de vie d'une quelconque machine (la k -ème) qui est remplacée par une autre (la $k+1$ -ème) dès qu'elle défile. Au temps initial $t=0$ la machine 1 est mise en service et elle dure jusqu'au temps U_1 , subitement remplacée par la machine 2 qui dure pour un intervalle de temps U_2 et donc jusqu'au temps $U_1 + U_2$ et ainsi de suite. On note X_n le temps de service de la machine en utilisation au temps n . Le processus $\{X_n\}_{n \geq 0}$ est un processus à valeurs dans \mathbb{N} . Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène sur \mathbb{N} de matrice de transition

$$P(x, y) = \begin{cases} \frac{P(U_1 > x+1)}{P(U_1 > x)} & \text{si } y = x+1 ; \\ 1 - P(U_1 > x) & \text{si } y = 0 ; \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{N}$$

Exercice 4. (Le jeu d'Éhrenfest) Dans un récipient divisé en deux enceintes par une paroi poreuse sont réparties N molécules de gaz. A chaque unité de temps une particule choisie au hasard change d'enceinte. (les particules sont choisies avec loi uniforme sur $\{0, N\}$ et indépendamment à chaque instant de temps)

1. *Vision Microscopique*: L'état du système, à l'instant n est représenté par un vecteur $(x^i)_{i=1}^N \in M = \{0, 1\}^N$ où la i -ème composante x^i vaut 1 ou 0 selon que la i -ème particule est dans la première ou la seconde enceinte.
 - a. Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov sur M et donner sa matrice de transition.
 - b. Voir $(X_n)_{n \geq 0}$ comme récurrence aléatoire.
 - c. Montrer que pour tout $x, y \in M$ il existe $n \geq 0$ tel que $P(X_n = y | X_0 = x) > 0$.

2. *Vision macroscopique*: Soit S_n le nombre de particules dans la première enceinte au temps n : $S_n = \sum_{k=1}^N X_n^k$.
- Montrer que S_n est une chaîne de Markov sur $\{0, N\}$ et donner sa matrice de transition.
 - Voir $(S_n)_{n \geq 0}$ comme récurrence aléatoire.
 - Montrer que pour tout $x, y \in \{0, N\}$ il existe $n \geq 0$ tel que $P(S_n = y / S_0 = x) > 0$.

Exercice 5. (Ruine du joueur) Deux joueurs A et B misent de façon réciproque 1 euro et chaque fois la probabilité que A gagne est $p \in]0, 1[$. Les jeux successifs sont indépendants. Soit X_n la fortune du joueur A après n parties et soit a la fortune initiale de A et b celle de B . Le jeu termine de que un des joueurs perd tout sa fortune. On stipule que si un des joueurs perd sa fortune à l'instant n alors $X_k = X_n$ pour tout $k \geq n$. Donc $X_0 = a$ et le jeu termine de que $X_n \in \{0, a+b\}$. Soit $T = \inf \{n \geq 0 : X_n = 0 \text{ ou } X_n = a+b\}$ la durée (aléatoire) du jeu. La probabilité que A gagne si sa fortune initiale est x on la note $u(x) = P(X_T = a+b, T < +\infty / X_0 = x)$.

- Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer son espace d'états M et sa matrice de transition P .
- Montrer que $u(0) = 0$, $u(a+b) = 1$ et

$$u(x) = pu(x+1) + (1-p)u(x-1), \quad a < x < b.$$

- Déterminer $u(x)$ et $v(x) = P(X_T = 0, T < +\infty / X_0 = x)$ et conclure que $P(T = +\infty / X_0 = x) = 1$ pour tout $x \in M$.
- Remarquer que dans le cas $b = +\infty$ (joueur contre casino) et $p = q$ (jeu équitable) on a que $v(x) = 1$ et donc que un joueur perdra toujours...
- Soit $m(x) = E[T / X_0 = x]$ la durée moyenne du jeu si la fortune initiale de A est x . Montrer que $m(x)$ satisfait la récurrence:

$$m(x) = 1 + pm(x+1) + (1-p)m(x-1)$$

pour tout $x \in]0, a+b[$ avec conditions au bords $m(0) = 0$ et $m(a+b) = 0$.

- Montrer que l'unique solution de cette récurrence est

$$m(x) = x(a+b-x).$$

- Conclure que dans le cas $b = +\infty$ en moyenne il faut un temps infini pour se ruiner en jouant contre le banc.