

## Solutions prepartiel

Exercice 1. On considère deux v.a.  $X, Y$  telles que

$$E[f(X)/Y] = f(Y).$$

Pour toute fonction  $f$  mesurable et bornée. Montrer que  $X = Y$  p.s.

Solution. On fixe  $N \in \mathbb{N}$  et on considère

$$\begin{aligned} E[|X - Y|^2 1_{X \leq N} 1_{Y \leq N}] &= E[(X^2 - 2XY + Y^2) 1_{X \leq N} 1_{Y \leq N}] \\ &= E[E[X^2 1_{X \leq N} / Y] 1_{Y \leq N}] - 2E[E[X 1_{X \leq N} / Y] Y 1_{Y \leq N}] + E[E[Y^2 1_{Y \leq N}] 1_{Y \leq N}] \\ &= E[Y^2 1_{Y \leq N}] - 2E[Y^2 1_{Y \leq N}] + E[Y^2 1_{Y \leq N}] = 0. \end{aligned}$$

Donc par convergence monotone

$$E[|X - Y|^2] = E[\sup_N (|X - Y|^2 1_{X \leq N} 1_{Y \leq N})] = 0$$

et  $X = Y$  p.s. A noter que on ne peut pas directement montrer que  $E[|X - Y|^2] = 0$  car on ne suppose pas que  $X$  et  $Y$  sont dans  $L^2(\mathbb{P})$ .

Exercice 2. Soit  $X \in \mathcal{U}([0, 1])$  et  $Y = \min(X, 1/2)$ . Calculer  $E[X/Y]$ .

Solution. Soit  $f(Y) = E[X/Y]$ . La fonction est caractérisée par l'équation  $E[f(Y)X] = E[f(Y)Y]$  pour toute fonction  $f$ . On a

$$E[f(Y)Y] = \int_0^{1/2} f(x) x dx + \frac{1}{2} f(1/2) (1/2)$$

et

$$E[X f(Y)] = \int_0^{1/2} x f(x) dx + \int_{1/2}^1 x dx f(1/2) = \int_0^{1/2} x f(x) dx + \frac{3}{8} f(1/2)$$

Donc on peut choisir

$$f(x) = x 1_{x < 1/2} + \frac{3}{4} 1_{x = 1/2}.$$

Exercice 3. Soient  $X, Y$  deux v.a. telles que  $E[X] = E[Y] = 0$  et telles que  $Z = X + Y$  est indépendante de  $Y$  pour un quelconque  $R$ . Montrer que  $E[X/Y] = E[Y]$ .

Solution. Par indépendance on a que  $E[Z/Y] = E[Z] = 0$  et donc par linéarité  $E[X/Y] = E[Z/Y] = E[Y/Y] = E[1] = E[Y]$ .

Exercice 4. Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite des v.a.. Pour  $n \geq 0$ , on considère deux v.a.  $Y_n, Z_n$  telles que  $Y_n \in \sigma(X_0, \dots, X_n)$  et  $Z_n \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ . Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

- $E[Z_n/X_0, \dots, X_n] = E[Z_n/X_n]$  pour tout v.a.  $Z_n \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$  bornée
- $E[Y_n Z_n/X_n] = E[Y_n/X_n] E[Z_n/X_n]$  pour toutes v.a.  $Y_n \in \sigma(X_0, \dots, X_n)$  et  $Z_n \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$  bornées

*Solution.* On montre que i ii. Par embollement des espérances conditionnelles :

$$E[YZ/X_n] = E[E[YZ/X_0, \dots, X_n]/X_n] = E[E[YZ/X_0, \dots, X_n]/X_n] = E[Y E[Z/X_0, \dots, X_n]/X_n]$$

car  $Y$  est  $(X_0, \dots, X_n)$  mesurable. Par i on a donc

$$E[YZ/X_n] = E[Y E[Z/X_n]/X_n] = E[Y/X_n] E[Z/X_n]$$

car  $E[Z/X_n]$  est par définition  $(X_n)$  mesurable. On montre maintenant que ii i.

$$E[Y E[Z/X_0, \dots, X_n]] = E[YZ] = E[E[YZ/X_n]] = E[E[Y/X_n] E[Z/X_n]] = E[Y E[Z/X_n]]$$

et donc  $E[Z/X_0, \dots, X_n] = E[Z/X_n]$ .

Exercice 5. Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une chaîne de Markov avec espace d'états  $M$  discret.

a) Montrer que si  $A \subset M$  est un ensemble fermé pour la chaîne, alors

$$P_x(X_n = 0 : X_n \in A) = 1.$$

b) Soit  $N_x = \inf_{n \geq 1} 1_{X_n = x}$  et  $T_x = \inf \{n \geq 1 : X_n = x\}$ . Montrer que

$$P_x(N_x = k) = P_x(T_x < +\infty)^k.$$

c) Soit  $Y_n = (X_n, X_{n+1}, X_{n+2})$ . Montrer que la suite  $(Y_n)_{n \geq 0}$  prend ses valeurs dans  $M^3$  est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition  $Q: M^3 \rightarrow M^3$   $[0, 1]$ .

d) En supposant que  $(M)$  est une probabilité invariante pour  $P$  déterminer une probabilité invariante  $\mathbb{P}_0$  ( $M^3$ ) pour  $Q$ .

*Solution.* a)  $A$  est fermé, donc  $P(x, y) = 0$  si  $x \in A$  et  $y \notin A$ . Soit  $x \in A$ :

$$\begin{aligned} P_x(X_n \in A) &= \sum_{x_1 \in M} P(x, x_1) \sum_{x_2 \in M} P(x_1, x_2) \dots \sum_{x_n \in M} P(x_{n-1}, x_n) 1_{x_n \in A} \\ &= \sum_{x_1 \in M} P(x, x_1) \sum_{x_2 \in M} P(x_1, x_2) \dots \sum_{x_n \in M} P(x_{n-1}, x_n) 1_{x_n \in A} \\ &= \sum_{x_1 \in M} P(x, x_1) \sum_{x_2 \in M} P(x_1, x_2) \dots \sum_{x_n \in M} P(x_{n-1}, x_n) 1_{x_n \in A} \\ &= \sum_{x_1 \in M} P(x, x_1) \sum_{x_2 \in M} P(x_1, x_2) \dots \sum_{x_n \in M} P(x_{n-1}, x_n) 1_{x_n \in A} \end{aligned}$$

et par récurrence on obtient que  $P_x(X_n \in A) = P_x(X_1 \in A) = 0$ .

b) Par la propriété de Markov on a

$$\begin{aligned} P_x(N_x = k) &= P_x(N_x = k, T_x = n) = P_x(\inf_{j=1}^k 1_{X_{n+j} = x} = k, T_x = n, X_n = x) \\ &= P_x(\inf_{j=1}^k 1_{X_{n+j} = x} = k | X_n = x) P_x(T_x = n, X_n = x) \\ &= P_x(N_x = k | X_n = x) P_x(T_x = n, X_n = x) = P_x(N_x = k) P_x(T_x = n) \\ &= P_x(N_x = k) P_x(T_x < +\infty) \end{aligned}$$

et donc on peut conclure par récurrence.

c) Si on note  $y_k = (y_k^1, y_k^2, y_k^3)$ ,  $y_k \in M^3$ ,  $y_k^i \in M$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $k \geq 0$ .

Soit  $y_0, \dots, y_{n+1} \in M^3$ . Si  $y_k^1 = y_{k-1}^2$  pour  $1 \leq k \leq n+1$  et  $y_k^1 = y_{k-2}^3$  pour  $2 \leq k \leq n+1$  alors

$$\begin{aligned} P(Y_0 = y_0, \dots, Y_{n+1} = y_{n+1}) &= P(X_0 = y_0^1, X_1 = y_1^1, \dots, X_{n+1} = y_{n+1}^1, X_{n+2} = y_{n+1}^2, X_{n+3} = y_{n+1}^3) \\ &= P(y_0^1) P(y_0^1, y_1^1) \dots P(y_n^1, y_{n+1}^1) P(y_{n+1}^1, y_{n+1}^2) P(y_{n+1}^2, y_{n+1}^3) \end{aligned}$$

et  $P(Y_0 = y_0, \dots, Y_{n+1} = y_{n+1}) = 0$  autrement. Dans le premier cas on a donc

$$\begin{aligned} P(Y_{n+1} = y_{n+1} / Y_n = y_n, \dots, Y_0 = y_0) &= \frac{P(Y_0 = y_0, \dots, Y_{n+1} = y_{n+1})}{P(Y_0 = y_0, \dots, Y_n = y_n)} \\ &= \frac{P(y_0^1) P(y_0^1, y_1^1) \dots P(y_n^1, y_{n+1}^1) P(y_{n+1}^1, y_{n+1}^2) P(y_{n+1}^2, y_{n+1}^3)}{P(y_0^1) P(y_0^1, y_1^1) \dots P(y_n^1, y_n^2) P(y_n^2, y_n^3)} = P(y_{n+1}^2, y_{n+1}^3) = P(y_n^3, y_{n+1}^3) \end{aligned}$$

et  $P(Y_{n+1} = y_{n+1} / Y_n = y_n, \dots, Y_0 = y_0) = 0$  autrement. Si on pose  $Q(x, y) = P(x^3, y^3) \mid x^2, y^1, x^3, y^2$  on peut écrire que

$$P(Y_{n+1} = y_{n+1} / Y_n = y_n, \dots, Y_0 = y_0) = Q(y_n, y_{n+1})$$

donc  $(Y_n)_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov de matrice  $Q$ .

d) Une probabilité  $\mathbb{P}_0$  pour  $Q$  satisfait

$$\mathbb{P}_0(y) = \sum_{z \in M^3} \mathbb{P}_0(z) Q(z, y) = \sum_{z^1, z^2, z^3 \in M} \mathbb{P}_0(z) P(z^3, y^3) \mid z^2, y^1, z^3, y^2 = \sum_{z^1 \in M} \mathbb{P}_0(z^1, y^1, y^2) P(y^2, y^3)$$

Si  $\mathbb{P}_0$  est une probabilité invariante pour  $(X_n)_{n \geq 0}$  alors si la loi de  $X_0$  est  $\mathbb{P}_0$  on a que

$$P(Y_k = x) = P(X_k = x^1, X_k = x^2, X_k = x^3) = (x^1) P(x^1, x^2) P(x^2, x^3)$$

pour tout  $k \geq 0$  et tout  $x \in M^3$  et donc si on pose  $\mathbb{P}_0(x) = (x^1) P(x^1, x^2) P(x^2, x^3)$  on a que

$$P(Y_{k+1} = x) = \mathbb{P}_0(x) = \mathbb{P}_0(x)$$

et donc que  $\mathbb{P}_0$  est une probabilité invariante pour  $Q$ .

Exercice 6. Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une chaîne de Markov homogène avec espace d'états  $\{1, 2, 3\}$  et matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les classes de communication ;

b) Soit  $T = \inf \{n \geq 1 : X_n \in \{1, 2\}\}$ . Calculer  $P_3(T = k)$  pour tout  $k \geq 1$  ;

c) Déterminer toutes les probabilités invariantes de  $P$  ;

Solution. a) Les classes de communication sont  $\{3\}$ ,  $\{1, 2\}$ . b)

$$P_3(T = k) = P_3(X_1 = 3, \dots, X_{k-1} = 3, X_k \in \{1, 2\}) = (1/3)^{k-1} (2/3).$$

c) Si on note  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$  la proba invariante on doit avoir

$$\pi_1 = \pi_2/2 + \pi_3/3, \quad \pi_2 = \pi_1 + \pi_2/2 + \pi_3/3, \quad \pi_3 = \pi_3/3$$

et donc  $\pi_3 = 0$ ,  $\pi_1 = \pi_2/2$  et  $1 = \pi_2 + \pi_1 = 3\pi_2/2$  ce qui donne  $\pi = (1/3, 2/3, 0)$  comme la seule probabilité invariante.

Exercice 7. Dans deux pièces il y a un souris et un chat. Soit  $X_n \in \{1, 2\}$  la position du chat à l'instant  $n$  et  $Y_n \in \{1, 2\}$  la position du souris à l'instant  $n$ . On suppose que  $(X_n)_{n \geq 0}$  et  $(Y_n)_{n \geq 0}$  sont des chaînes de Markov sur  $\{1, 2\}$  de matrices de transition

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

À l'instant initial le souris est dans la pièce 1 et le chat dans la pièce 2. Si se trouvent dans la même pièce alors le chat mange le souris. Calculer le temps moyen de survie du souris  $E[T]$  où  $T = \inf \{n \geq 0 : X_n = Y_n\}$ .

Solution. On considère l'espace d'états  $M = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$  où  $(x, y) \in M$  correspond à la situation où le souris est dans la pièce  $x$  et le chat dans la pièce  $y$ . Si  $Z_n = (X_n, Y_n)$ , la chaîne de Markov  $(Z_n)_{n \geq 0}$  a la matrice de transition  $P$  donnée par

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.7 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 & 0.4 \\ 0.8 & 0.3 & 0.8 & 0.7 \\ 0.8 & 0.6 & 0.8 & 0.4 \end{pmatrix}$$

On a que  $Z_0 = (1, 2)$  et que  $T = \inf \{n \geq 0 : Z_n = (1, 1) \text{ ou } Z_n = (2, 2)\}$ . Soit  $f(x) = E_x[T]$ . Par la propriété de Markov on a que

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sum_z P(x, z) f(z) & \text{si } x \notin \{(1, 1), (2, 2)\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette formule est prouvée dans la façon suivante. Soit  $A = \{(1, 1), (2, 2)\}$ . On remarque d'abord que

$$\begin{aligned} P_x(T = k) &= P_x(X_1 \neq A, \dots, X_{k-1} \neq A, X_k \in A) \\ &= \sum_{z \in M} P_x(X_1 \neq A, \dots, X_{k-1} \neq A, X_k = z | X_1 = z) P(x, z) \end{aligned}$$

Par la propriété de Markov on a

$$= \sum_{z \in M} P_z(X_0 \neq A, \dots, X_{k-2} \neq A, X_{k-1} \in A) P(x, z) = \sum_{z \in M} P_z(T = k-1) P(x, z)$$

et donc si  $x \notin A$ :

$$\begin{aligned} f(x) = E_x[T] &= \sum_{k=1}^{\infty} k P_x(T = k) = \sum_{z \in M} P(x, z) \sum_{k=1}^{\infty} k P_z(T = k-1) \\ &= \sum_{z \in M} P(x, z) \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) P_z(T = m) = \sum_{z \in M} P(x, z) E_z[T+1] = 1 + \sum_{z \in M} P(x, z) E_z[T] \\ &= 1 + \sum_{z \in M} P(x, z) f(z). \end{aligned}$$

En revenant à notre problème on a que

$$(1, 2) = 1 + (1, 2) + (2, 1)$$

$$(2, 1) = 1 + (1, 2) + (2, 1)$$

ou  $P((1, 2), (1, 2)) = 0.2$ ,  $P((1, 2), (2, 1)) = 0.8$ ,  $P((2, 1), (1, 2)) = 0.8$ ,  $P((2, 1), (2, 1)) = 0.2$ . La solution est donc donnée par la solution du système linéaire:

$$(1, 2) = \frac{1}{(1-0.2)(1-0.8)}.$$

Pourquoi on est sûr de voir  $(1-0.2)(1-0.8) > 0$  ?

**Exercice 8.** Soit  $(Z_n)_{n \geq 0}$  une suite iid telle que  $P(Z_1 = k) = p(1-p)^k$  pour  $k \geq 0$ . Soit  $X_n = \max(Z_0, \dots, Z_n)$ . Montrer que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov sur  $\mathbb{N}$  et donner sa matrice de transition.

*Solution.* On a que  $Z_n = \max(Z_{n-1}, X_n)$  et donc  $(Z_n)$  est une récurrence aléatoire car la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  est iid. Cela montre que  $(Z_n)_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov. Calculons la matrice de transition  $P(x, y)$ :

$$P(x, y) = P(Z_1 = y | Z_0 = x) = P(\max(x, X_1) = y) = \begin{cases} P(X_1 = y) = p(1-p)^y & \text{si } x < y \\ P(X_1 \leq x) = 1 - (1-p)^{x+1} & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x > y \end{cases}$$