

TD6. Intervalles de confiance.

Exercice 1. Montrer que si Y est une v.a. telle que sa densité f_Y est une fonction paire et q les quantiles de Y alors $q_{1-\alpha} = -q_\alpha$.

Exercice 2. Calculer la fonction q dans les cas suivantes

1. $Y \sim B(2, 1/2)$;
2. $Y \sim U([0, 1])$;
3. $Y \sim E(\lambda)$, $\lambda > 0$;
4. $Y \sim \text{Geom}(p)$, $p \in]0, 1[$;

Exercice 3. Soit $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ un modèle paramétrique. Soient les quantiles de la v.a. Gaussienne standard (centrée et réduite). On pose $A_n = \bar{X}_n - \sigma/\sqrt{n}$ et $B_n = \bar{X}_n + \sigma/\sqrt{n}$. Déterminer α et β dans $[0, 1]$ tels que $[A_n, B_n]$ soit un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha-\beta$ pour μ .

Exercice 4. Soit $X \sim \text{Ber}(p)$. L'estimateur $T_n = \bar{X}_n$.

1. Montrer que

$$\frac{\bar{n}(T_n)}{\sqrt{n} \sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{L} N(0, 1)$$

(utiliser le TCL, la LGN, le théorème de continuité et le lemme de Slutsky).

2. Donner un intervalle de confiance asymptotique et bilatéral symétrique de niveau $1-\alpha$ pour p .

Exercice 5. Soit $X \sim E(\lambda)$, $\lambda > 0$. Déterminer un intervalle de confiance de la forme $\{ \lambda > a \}$ de niveau $1-\alpha$ pour λ .

Exercice 6. On observe un échantillon de taille n issu de la loi $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ avec $\sigma > 0$. Quelle est la loi de $\bar{n}(\bar{X}_n)/\sigma$? Déterminer un intervalle de confiance pour μ de niveau $1-\alpha$.

Exercice 7. Soit X_1, \dots, X_n un échantillon de loi $B(2, p)$ avec $p \in]0, 1[$. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique et symétrique de niveau $1-\alpha$ pour p .

Exercice 8. Soit X_1, \dots, X_n un échantillon de loi $U([a, b])$ avec $b > 0$ et $a \in \mathbb{R}$

- a) Déterminer un estimateur (A_n, B_n) du couple (a, b) par méthode des moments.
- b) L'estimateur A_n de a est-il asymptotiquement normale? Pourquoi?
- c) On suppose que $b = 2$. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique de niveau 0.95 pour a .