

Corrigé du Partiel

[Durée une heure et demi. Aucun document n'est autorisé. Tous les exercices sont indépendantes. Seules les réponses soigneusement justifiées seront prises en compte.]

Exercice 1. Soient T, S des temps d'arrêt pour une filtration $(F_n)_{n \geq 0}$.

- Montrer que $U = \min(T, S)$ est un temps d'arrêt.
- Montrer que si $S(\omega) \leq T(\omega)$ pour tout ω alors $F_S \subseteq F_T$.

Solution. a) Par hypothèse $\{S \leq k\} \in F_k$ et donc $\{T = k, S \leq k\} \in F_k$. Bien sûr on a aussi $\{S = k, T \leq k\} \in F_k$ ce qui permet de conclure que

$$\{U = k\} = \{T = k, S \leq k\} \cup \{S = k, T \leq k\} \in F_k$$

pour tout $k \geq 0$.

b) Soit $A \in F_S$ on doit montrer que $A \in \{T = n\} \in F_n$ pour tout $n \geq 0$. On a que

$$A \cap \{T = n\} = A \cap \{S \leq T = n\} = \bigcup_{k=0}^n (A \cap \{S = k\} \cap \{T = n\})$$

Par hypothèse $A \cap \{S = k\} \in F_k$ et donc $\{S = k\} \cap \{T = n\} \in F_n$ ce qui donne $A \cap \{T = n\} \in F_n$.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite iid de valeurs dans \mathbb{R} et $g(\cdot) = E[e^{X_1}] < +\infty$ pour tout \mathbb{R} . Soit $(F_n)_{n \geq 0}$ la filtration naturelle de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ (c-à-d. $F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $F_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ pour $n \geq 1$) et soit $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ la marche aléatoire engendrée par les $(X_n)_{n \geq 1}$.

- Montrer que pour tout t.a. T borné associé à la filtration naturelle on a que

$$E[e^{-S_T g(\cdot)^{S_T}}] = 1, \quad \forall \mathbb{R}.$$

- Soit $a < 0 < b$ et $T = \inf\{n > 0 : S_n \in (a, b)\}$. Utiliser le résultat de la question a) pour montrer que si \hat{g} est tel que $g(\hat{g}) = 1$ alors

$$P(S_T \leq a) = e^{\hat{g} a}.$$

- Soit $X_k = 1$ avec probabilité p et $X_k = 0$ avec probabilité $q = 1 - p$ et $p > 1/2$. Soit $T = \inf\{n > 0 : S_n = 1\}$. On suppose que $P(T < +\infty) = 1$. Montrer que

$$1 = e^{-E[g(\cdot)^{S_T}]}$$

pour tout $s > 0$ et utiliser cette équation pour obtenir la fonction génératrice de T ($s) = E[s^T]$ pour $|s| < 1$.

Solution. a) Soit T borné par N , alors

$$E\left[\frac{e^{-S_T}}{g(\cdot)^{S_T}}\right] = \sum_{k=0}^N E\left[\frac{e^{-S_k}}{g(\cdot)^k} 1_{T=k}\right] = \sum_{k=0}^N E\left[\frac{e^{-S_N}}{g(\cdot)^N} 1_{T=k}\right] = E\left[\frac{e^{-S_N}}{g(\cdot)^N}\right] = 1.$$

b) Si $\hat{a} > 0$ il y a rien à démontrer car $P(S_T \leq a) = 1 - e^{-\hat{a}T}$. Supposons que $\hat{a} < 0$ et soit $T = \inf\{n > 0: X_n \in]a, b]\}$ alors on a que

$$1 = E[e^{\hat{a}S_T - N}] = E[e^{\hat{a}S_T - N} 1_{S_T \leq N}] = e^{\hat{a}a} E[1_{S_T \leq a, T \leq N}] = e^{\hat{a}a} P(S_T \leq a, T \leq N)$$

et en prenant la limite (croissante) pour $N \rightarrow \infty$ on a le résultat.

c) Dans ce cas on a que $g(x) = pe + qe^{px}$. Par la question a) on a que $1 = E[e^{S_T - N} g(S_T - N)]$. On remarque que $e^{S_T - N} \rightarrow 1$ et que $g(S_T - N) \rightarrow pe + qe^{p(S_T - N)}$ et donc par convergence dominée on obtient que

$$E[e^{S_T} g(S_T)] = \lim_{N \rightarrow \infty} E[e^{S_T - N} g(S_T - N)] = 1$$

mais $S_T = 1$ et donc on a l'équation $E[(pe + qe^{px})^T] = e^{pT}$ pour tout $T > 0$. Soit $1/s = pe + qe^{ps}$ et $z = e^{ps}$ alors $pzs/s + qz^2 = 0$ et

$$z = \frac{1/s}{2q} = \frac{1/s^2}{2q} = \frac{1}{2qs}$$

ce qui donne

$$(s) = E[s^T] = E[(pe + qe^{ps})^T] = z = \frac{1}{2qs}.$$

Exercice 3. Une chaîne de Markov contrôlée $(X_n)_{n \geq 0}$ prend des valeurs dans \mathbb{R} évolue selon la récurrence aléatoire contrôlée

$$X_{n+1} = X_n + U_{n+1}$$

où $U_n = u_n(X_0, \dots, X_n)$, u un contrôle prend des valeurs dans \mathbb{R} et $(U_n)_{n \geq 1}$ est une suite des v.a. iid de moyenne nulle et variance $\sigma^2 > 0$. On se fixe un horizon $T > 0$ et une constante $\gamma \in]0, 1[$. On veut trouver un contrôle u qui minimise le coût moyen (actualisé)

$$W_T^u(t, x) = E_{(t, x)}^u \left[\sum_{k=t}^{T-1} \gamma^k C(X_k, U_k) + \gamma^T R(X_T) \right]$$

où $C(x, u) = u^2 + ax^2/2$ et $R(x) = a_0 x^2/2 + b_0$ avec a, a_0, b_0 constantes réelles et positives.

a) Montrer que la fonction $W_T(t, x) = \inf_{u \in \mathcal{C}_t} W_T^u(t, x)$ satisfait l'équation

$$W_T(t, x) = \inf_{u \in \mathbb{R}} \{C(x, u) + \gamma E[W_T(t+1, x+u)]\}.$$

b) Montrer par récurrence rétrograde que $W_T(t, x)$ est de la forme

$$W_T(t, x) = \frac{1}{2} a_T x^2 + b_T$$

avec $(a_j)_{j=0}^T$ et $(b_j)_{j=0}^T$ des constantes à déterminer.

c) Montrer que le contrôle optimal u est Markovien et tel que

$$u_t(x) = k_T x$$

pour une certaine suite $(k_j)_{j=0}^T$ de constantes.

d) Calculer les constantes a_j, b_j, k_j pour $j = 0$.

Solution. a) Soit

$$V_T^u(t, x) = {}^t W_T^u(t, x) = E_{(t,x)}^u \left[\sum_{k=t}^{T-1} C(X_k, U_k) + R(X_T) \right]$$

Par l'équation de Bellman le coût moyen optimal $V_T(t) = \inf_{u \in C_k} V_T^u(t)$ satisfait

$$V_T(t, x) = \inf_{u \in R} \{ {}^t C(x, u) + E[V_T(t+1, x+u+1)] \}$$

pour tout $0 \leq t < T$ et donc

$$\begin{aligned} W_T(t, x) &= \inf_{u \in R} \{ {}^t C(x, u) + E[V_T(t+1, x+u+1)] \} \\ &= \inf_{u \in R} \{ C(x, u) + E[W_T(t+1, x+u+1)] \}. \end{aligned}$$

b) On a que $W_T(T, x) = R(x) = a_0 x^2/2 + b_0$. Supposons que $W_T(T-1, x) = a_n x^2/2 + b_n$ alors

$$\begin{aligned} W_T(T-1, x) &= \inf_{u \in R} \{ C(x, u) + E[W_T(T-1, x+u+1)] \} \\ &= \inf_{u \in R} \{ (u^2 + a x^2)/2 + E[a_n (x+u+1)^2/2 + b_n] \} \end{aligned}$$

par les hypothèses sur a_n on a

$$\begin{aligned} &= \inf_{u \in R} \{ (u^2 + a x^2)/2 + a_n (x+u)^2/2 + a_n^2/2 + b_n \} \\ &= \inf_{u \in R} \{ (1 + a_n) u^2 + (a + a_n^2) x^2 + 2 a_n x u \} / 2 + a_n^2/2 + b_n \end{aligned}$$

On doit donc minimiser la fonction $\phi(u) = (1 + a_n) u^2 + (a + a_n^2) x^2 + 2 a_n x u$. On a

$$\phi'(u) = 2(1 + a_n) u + 2 a_n x = 0$$

qui nous donne $u_{T-1} = -a_n x / (1 + a_n)$ et donc

$$\phi(u_{T-1}) = -a_n^2 x^2 / (1 + a_n) + (a + a_n^2) x^2 / 2$$

et alors

$$\begin{aligned} W_T(T-1, x) &= (a + a_n^2) x^2 / (1 + a_n) + a_n^2/2 + b_n \\ &= (a + a_n^2 / (1 + a_n)) x^2 / 2 + a_n^2/2 + b_n \\ &= a_{n+1} x^2 / 2 + b_{n+1} \end{aligned}$$

où

$$a_{n+1} = a + a_n^2 / (1 + a_n) \quad b_{n+1} = a_n^2/2 + b_n.$$

Cela montre au même temps que la stratégie optimale est de la forme souhaitée avec

$$k_{n+1} = -a_n / (1 + a_n).$$