

TD3. Chaînes de Markov (II). Quelques solutions.

Exercice 1. (Modèle de Wright-Fischer) Ce modèle décrit l'évolution d'un ensemble de N chromosomes. On suppose qu'il y a 2 types de chromosomes, A et B, et on note X_n le nombre de chromosomes de type A présents à la génération n (il y en a donc $N - X_n$ de type B). Le modèle évolue de la façon suivante : chaque chromosome de la génération $n+1$ choisit au hasard et uniformément un chromosome parent dans la génération n , ceci indépendamment des autres chromosomes. Le chromosome i a alors le même type que son chromosome parent.

1. Sachant que $X_n = i$, calculer la probabilité qu'un chromosome donné de la génération $n+1$ soit de type A. En déduire que la suite $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $\{0, 1, \dots, N\}$, de probabilité de transition

$$P(i, j) = \binom{N}{j} \left(\frac{i}{N}\right)^j \left(\frac{N-i}{N}\right)^{N-j}, \quad i, j \in \{0, 1, \dots, N\},$$

$$P_{00} = \frac{N!}{j!(N-j)!}.$$

2. Cette matrice est-elle irréductible ?
3. Donnez deux exemples simples de probabilités stationnaires pour cette chaîne. En déduire qu'elle possède une infinité de probabilités stationnaires.

(Remarque: une probabilité π est stationnaire pour P si $\pi = \pi P$.)

Solution. On note $Z_{n,k} \in \{A, B\}$ le type du chromosome k dans la génération n . On se donne une double suite $(K_{n,k})_{n \geq 1, 1 \leq k \leq N}$ se v.a. iid uniformément distribués sur l'ensemble discret $\{1, \dots, N\}$: le chromosome k dans la génération n hérite son type du chromosome $K_{n,k}$ dans la génération précédente ($n-1$). Donc $Z_{n+1,k} = Z_{n, K_{n+1,k}}$, cela se fait de façon univoque à partir des types des chromosomes dans la population. Si l'on note Z_n le vecteur aléatoire $(Z_{n,1}, \dots, Z_{n,N}) \in \{A, B\}^N$ et $K_n = (K_{n,1}, \dots, K_{n,N})$ on a que

$$Z_{n+1} = f(Z_n, K_n)$$

Par définition $X_n = \sum_{k=1}^N 1_{Z_{n,k}=A}$. On note que X_0, \dots, X_n sont mesurables par rapport aux v.a. $(K_i)_{1 \leq i \leq n}$ et X_0 et que on peut supposer que Z_0 (et donc X_0) est indépendante de $(K_n)_{n \geq 1}$. Cela implique que

$$E[f(X_{n+1})/K_n, \dots, K_1, Z_0] = f(X_n)$$

où

$$f(X_n) = E\left[f\left(\sum_{k=1}^N 1_{Z_{n, K_{n+1,k}}=A}\right)\right] = E\left[f\left(\sum_{k=1}^N 1_{Z_{n, U_k}=A}\right)\right]$$

avec des v.a. $(U_k)_{1 \leq k \leq N}$ iid uniformément distribués sur l'ensemble discret $\{1, \dots, N\}$. La loi de la v.a. $R = \sum_{k=1}^N 1_{Z_{n, U_k}=A}$ est facile à calculer: soit $r(Z_n)$ le nombre de A dans le vecteur Z_n , donc on voit facilement que

$$P(R = p) = \binom{N}{p} \frac{r(Z_n)^p}{N^p} = \frac{N!}{p!(N-p)!} \left(\frac{r(Z_n)}{N}\right)^p \left(\frac{N-r(Z_n)}{N}\right)^{N-p}$$

car pour avoir $R = p$ on doit choisir au hasard p chromosomes A dans un ensemble de $r(Z_n)$ chromosomes A et $N - p$ chromosomes B . Par conséquent

$$f(Z_n) = \sum_{p=0}^N f(p) \frac{N}{p} \frac{r(Z_n)}{N}^p \frac{N - p}{N} \frac{r(Z_n)}{N}^{N-p}$$

et (à noter que $X_n = r(Z_n)$)

$$E[f(X_{n+1})/K_n, \dots, K_1, Z_0] = \sum_{p=0}^N f(p) \frac{N}{p} \frac{X_n}{N}^p \frac{N - p}{N} \frac{X_n}{N}^{N-p} = g(X_n).$$

Alors on a aussi que

$$\begin{aligned} E[f(X_{n+1})/X_n, \dots, X_0] &= E[E[f(X_{n+1})/K_n, \dots, K_1, Z_0]/X_n, \dots, X_0] \\ &= E[g(X_n)/X_n, \dots, X_0] = g(X_n) \end{aligned}$$

et donc que

$$P(X_{n+1} = x_{n+1}/X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = \frac{N}{x_{n+1}} \frac{x_n}{N}^{x_{n+1}} \frac{N - x_n}{N}^{N-x_n} = P(x_n, x_{n+1})$$

donc $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition P .

b) La matrice n'est pas irréductible car $P(0, 0) = P(N, N) = 1$. En effet les classes de communications sont trois: $\{0\}$, $\{N\}$, $\{1, \dots, N-1\}$ et seulement les premières deux sont fermées.

c) Deux probabilités invariantes sont donc

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0) \quad \text{et} \quad e_2 = (0, \dots, 0, 1)$$

et toute combinaison convexe de ces deux probabilités est aussi invariante.

Exercice 2. Soit U_n une v.a. qui prend des valeurs dans $[0, 1]$ et $(U_n)_{n \geq 0}$ une suite iid uniforme sur $[0, 1]$ et indépendante de X_0 . Soit $X_n = 1_{U_n < X_n}$ et $S_n = X_0 + \dots + X_n$. Calculer $P(X_{n+1} = 1/S_0, \dots, S_n)$ et montrer que $(S_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov non homogène.

Solution. On a que pour tout $n \geq 0$ il existe une fonction mesurable et bijective $f_n: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ telle que $(S_0, \dots, S_n) = f_n(X_0, \dots, X_n)$ donc $(S_0, \dots, S_n) = (X_0, \dots, X_n)$ et

$$P(X_{n+1} = 1/S_0, \dots, S_n) = P(X_{n+1} = 1/X_0, \dots, X_n) = P(U_{n+1} < 1/X_0, \dots, X_n).$$

Les v.a. X_0, \dots, X_n sont discrètes, cela nous permet de calculer l'espérance conditionnelle de façon élémentaire: $P(U_{n+1} < 1/X_0, \dots, X_n) = P(X_0, \dots, X_n)$ avec

$$(X_0, \dots, X_n) = P(X_{n+1} = 1/X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)$$

pour tout $(x_0, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^{n+1}$. Maintenant si l'on pose $S_k = x_0 + \dots + x_k$ on a

$$\begin{aligned} P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) &= E\left[\prod_{k=0}^n (x_k 1_{U_k < S_k} + (1 - x_k) 1_{U_k > S_k})\right] \\ &= E\left[E\left[\prod_{k=0}^n (x_k 1_{U_k < S_k} + (1 - x_k) 1_{U_k > S_k}) \mid \mathcal{F}_n\right]\right] = E[V] \end{aligned}$$

Par indépendance du vecteur aléatoire (U_0, \dots, U_n) on a que

$$\begin{aligned} v(\cdot) &= E\left[\sum_{k=0}^n (X_k 1_{U_k} + (1 - X_k) 1_{U_k >})\right] = E\left[\sum_{k=0}^n (X_k 1_{U_k} + (1 - X_k) 1_{U_k >})\right] \\ &= \sum_{k=0}^n (X_k + (1 - X_k)(1 - p)) = s_n(1 - p)^{n+1} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1/S_0 = s_0, \dots, S_n = s_n) &= \frac{P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n, X_{n+1} = 1)}{P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)} \\ &= \frac{E[s_{n+1}(1-p)^{n+1}]}{E[s_n(1-p)^{n+1}]} \end{aligned}$$

Le fait que cette quantité ne dépende que de s_n implique immédiatement la propriété de Markov:

$$g_n(s_n) = P(X_{n+1} = 1/S_0 = s_0, \dots, S_n = s_n) = P(X_{n+1} = 1/S_n = s_n).$$

En e et

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1/S_n = s_n) &= P(X_{n+1} = 1, S_0 = s_0, \dots, S_n = s_n/S_n = s_n) \\ &= P(X_{n+1} = 1/S_0 = s_0, \dots, S_n = s_n)P(S_0 = s_0, \dots, S_n = s_n/S_n = s_n) \\ &= g_n(s_n)P(S_0 = s_0, \dots, S_n = s_n/S_n = s_n) = g(s_n)P(\cdot/S_n = s_n) = g_n(s_n). \end{aligned}$$

La matrice de transition est

$$P(S_{n+1} = y/S_n = x) = P_n(x, y) = \begin{cases} g_n(x) & \text{si } y = x + 1 \\ 1 - g_n(x) & \text{si } y = x \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

et elle ne dépend pas du temps.

Exercice 3. Des catastrophes se produisent à des temps T_1, T_2, \dots où $T_0 = X_1 + X_2 + \dots + X_i$ et les X_i sont des variables aléatoires i.i.d., positives, de moyenne c et non nulle.

a) Montrer que le processus $(T_i, i \geq 1)$ est une chaîne de Markov.

Soit $N(t) = \sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{T_i \leq t\}}$ le nombre de catastrophes arrivées avant l'instant t . Montrer que lorsque $t \rightarrow \infty$:

b) $N(t)$ presque sûrement.

c) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{E[X_1]}$ presque sûrement.

Solution. a) On peut écrire $T_{n+1} = T_n + X_n$ et $T_0 = 0$. Donc $(T_n)_{n \geq 0}$ est une récurrence aléatoire car la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est iid. Cela implique directement que $(T_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène.

b) Par la loi des grandes nombres on a que

$$\lim_n \frac{T_n}{n} = E[X_1] = c > 0 \quad \text{P.p.s.}$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N (aléatoire) tel que

$$P(T_n \leq (c + \varepsilon)n \text{ pour tout } n > N) = 1$$

mais donc il existe $S > 0$ aléatoire tel que

$$P(T_n \leq (c + \varepsilon)n \text{ pour tout } n > N) = P(N(t) \leq t/(c + \varepsilon) \text{ pour tout } t > S)$$

$$P(\liminf_t \frac{N(t)}{t} \geq \frac{1}{c + \varepsilon})$$

et donc $N(t) \leq ct$ presque sûrement.

c) Par le même argument on a aussi que

$$\liminf_t \frac{N(t)}{t} \leq \frac{1}{c - \varepsilon} \quad p.s.$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Par un argument similaire on trouve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} \leq \frac{1}{c + \varepsilon} \quad p.s.$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Donc on vient de montrer que

$$\lim_n \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{c} \quad p.s.$$

Exercice 4. Soit $N_y = \inf_{n \geq 0} 1_{X_n = y}$ et $T_x = \inf \{n > 0 : X_n = x\}$. Montrer que la loi de N_y sous P_x est

$$P_x(N_y = r) = \begin{cases} f_{xy} f_{yy}^{r-1} (1 - f_{yy}) & \text{si } r \geq 1 \\ 1 - f_{xy} & \text{si } r = 0 \end{cases}$$

où $f_{xy} = P_x(T_y < +\infty)$ est la probabilité de repasser par y en partant de x .

Solution. (Voir le polycopié du cours)

Exercice 5. (Marche aléatoire sur \mathbb{Z}) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ telle que $P(X_n = 1) = p \in (0, 1)$. On dit qu'on a pour tout $n \geq 1$: $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $A_n = \{S_n = 0\}$.

a) Calculer $P(A_n)$ (distinguer les cas pairs et impairs).

b) Que représente le nombre $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{A_k}$?

c) Montrer que $P(\lim_{n \rightarrow \infty} 1_{A_n} = 0) = 0$ lorsque $p \neq \frac{1}{2}$,

i. en utilisant le lemme de Borel-Cantelli

ii. en utilisant la loi forte des grands nombres.

d) Montrer que $(S_n, n \geq 1)$ est une chaîne de Markov. Préciser sa matrice de transition.

e) On considère $T_1 := \inf \{n \geq 1 : S_n = 0\}$ le premier instant où S touche 0, puis, $i \geq 2$, $T_i := \inf \{n - T_{i-1} + 1 : S_n = 0\}$, le i -ième temps de retour en 0 (par convention, $\inf \emptyset = +\infty$). On admet que pour tout $i \geq 1$, le processus $(S_{T_i+n}, n \geq 1)$ a même loi que $(S_n, n \geq 1)$.

i. En déduire que T_i est la somme de i variables aléatoires i.i.d., de même loi que T_1 .

ii. Soit $N(0) := \sum_{k=1}^{\infty} 1_{S_k=0}$ le nombre de passages de S en 0. Montrer que

$$P(N(0) = i) = (1 - P(T_1 < \infty))^i P(T_1 < \infty), \quad i \geq 1.$$

iii. En déduire que $P(N(0) < \infty)$ est soit 0 soit 1 et que

$$P(N(0) < \infty) = 1 - P(T_1 < \infty) < 1 \implies E[N(0)] < \infty.$$

f) On suppose ici que $p = 0.5$. L'objectif est de montrer que $P(\overline{\lim} A_n) = 1$.

i. Trouver un équivalent de $P(A_{2n})$ à l'aide de la formule de Stirling :

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + o(1)).$$

ii. En déduire que $E[N(0)] = \infty$ et conclure.

Solution. a) Si n est impair $P(A_n) = 0$, par contre si n est pair

$$P(A_n) = P(\#\{1 \leq k \leq n : X_k = 1\} = n/2) = \binom{n}{n/2} p^{n/2} (1-p)^{n/2} = \frac{n!}{((n/2)!)^2} [p(1-p)]^{n/2}$$

Par Stirling on a

$$P(A_{2n}) = \frac{2^{2n} n^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{n^{2n} e^{-2n} \sqrt{2\pi n}} (1 + o(1)) [p(1-p)]^{n/2} = \frac{1}{\sqrt{n}} (1 + o(1)) [4p(1-p)]^{n/2}$$

b)

$$\begin{aligned} \limsup_n A_n &= \{k \geq 1 \text{ on a que il existe } n \geq k \text{ tel que } S_n = 0\} \\ &= \{S_{2n} = 0 \text{ infiniment souvent}\} \end{aligned}$$

c.i) [avec Borel-Cantelli] On a

$$E[\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_{2n}}] = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_{2n}) \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} [4p(1-p)]^{n/2}$$

La constante C est donnée par $C = \sup_n \sqrt{n} P(A_n) / [4p(1-p)]^{n/2} \in [0, +\infty[$. Donc si $p \neq 1/2$ on a $4p(1-p) < 1$ et la série est convergente. Cela implique que $E[\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_{2n}}] < +\infty$ et que $\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_{2n}} < +\infty$ presque sûrement. Donc $P(A_n \text{ infiniment souvent}) = 0$ car pour avoir la somme $\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_{2n}} < +\infty$ il faut que seulement un nombre fini de points de $S_n = 0$.

c.ii) [avec la loi des grandes nombres] Par la LGN on a que

$$\lim_n \frac{S_n}{n} = E[X_1] = 2p - q \neq 0 \quad \text{presque sûrement.}$$

Donc pour tout $\varepsilon \in]0, 2p - q[$ il existe une v.a. $N : N < \infty$ telle que pour tout $n > N$ on a $|S_n| / (2p - q)n > \varepsilon$ avec probabilité 1. Mais alors $\#\{n : S_n = 0\} < N$ et donc

$$P(A_n \text{ infiniment souvent}) = 1 - P(\#\{n : S_n = 0\} < +\infty) = 1 - P(N < +\infty) = 0.$$

d) On peut voir $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ et $S_0 = 0$. La suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est une marche aléatoire car $(X_n)_{n \geq 1}$ est iid. Par conséquent, elle est aussi une chaîne de Markov. La matrice de transition est donnée par

$$P(x, y) = P(y = x + X_1) = \begin{cases} p & \text{si } y = x + 1 \\ 1-p & \text{si } y = x \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

e.i) Soit $\tilde{S}_n = S_{T_1+n}$. Par hypothèse le processus $(\tilde{S}_n)_{n \geq 0}$ a la même loi que $(S_n)_{n \geq 0}$. Soient \tilde{T}_i : $= \inf \{n \geq 1 : \tilde{S}_n = 0\}$ avec $\tilde{T}_0 = 0$.

$$\begin{aligned} P(T_1 = t_1, T_2 = t_2, \dots, T_n = t_n) &= P(T_1 = t_1, \tilde{T}_1 = t_2, \dots, \tilde{T}_n = t_n) \\ &= P(T_1 = t_1, \tilde{T}_1 = t_2, \dots, \tilde{T}_n = t_n, S_{t_1} = 0) \\ &= P(\tilde{T}_1 = t_2, \dots, \tilde{T}_n = t_n | \tilde{S}_0 = 0, T_1 = t_1) P(S_{t_1} = 0, T_1 = t_1) \end{aligned}$$

(par Markov on obtient:)

$$\begin{aligned} &= P(\tilde{T}_1 = t_2, \dots, \tilde{T}_n = t_n | \tilde{S}_0 = 0) P(T_1 = t_1) \\ &= P(\tilde{T}_1 = t_2, \dots, \tilde{T}_n = t_n | \tilde{S}_0 = 0) P(T_1 = t_1) \end{aligned}$$

(par hypothèse sur la loi de \tilde{S} .)

$$= P(T_1 = t_2, \dots, T_n = t_n) P(T_1 = t_1)$$

Soit $f(n) = P(T_1 = n)$, $S_{k+1} = S_k + t_{k+1}$ et $s_0 = 0$. Par récurrence:

$$P(T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n) = f(t_1) f(t_2) \dots f(t_n).$$

e.ii) Par ce que on vient de montrer

$$\begin{aligned} P(N(0) = i) &= P(T_1 < +\infty, T_i < +\infty) \\ &= \sum_{t_1=1}^{\infty} \dots \sum_{t_i=1}^{\infty} P(T_1 = t_1, T_2 = t_1 + t_2, \dots, T_n = t_1 + \dots + t_n) \\ &= \sum_{t_1=1}^{\infty} \dots \sum_{t_i=1}^{\infty} f(t_1) f(t_2) \dots f(t_i) = \sum_{t=1}^{\infty} f(t)^i = P(T_1 < +\infty)^i \end{aligned}$$

et donc

$$P(N(0) = i) = (1 - P(T_1 < +\infty))^i P(T_1 < +\infty).$$

Maintenant

$$P(N(0) = +\infty) = \lim_K P(N(0) \leq K) = \lim_K P(T_1 < +\infty)^K = \{0, 1\}.$$

Si $P(N(0) < +\infty) = 1$ alors forcément $P(T_1 < +\infty) < 1$ et donc $E[N(0)] = 1/(1 - P(T_1 < +\infty)) < +\infty$. D'autre part si $P(N(0) < +\infty) = 0$ alors $P(T_1 < +\infty) = 1$ et aussi $E[N(0)] = +\infty$. On a prouvé que

$$P(N(0) < +\infty) = 1 \iff P(T_1 < +\infty) < 1 \iff E[N(0)] < +\infty$$

et aussi que

$$P(N(0) < \infty) = 0 \quad P(T_1 < \infty) = 1 \quad E[N(0)] = +\infty$$

Alors si $E[N(0)] = +\infty$ on doit forcément avoir $P(T_1 < \infty) = 1$ ce que forcément implique $P(N(0) < \infty) < 1$. On peut conclure que

$$P(N(0) < \infty) = 1 \quad P(T_1 < \infty) < 1 \quad E[N(0)] < +\infty$$

et aussi que

$$P(N(0) < \infty) = 0 \quad P(T_1 < \infty) = 1 \quad E[N(0)] = +\infty.$$

f) Dans le cas $p = 1/2$ on a

$$P(A_{2n}) = \frac{1}{n}(1 + o(1))$$

et

$$E[N(0)] = \sum_{n=1}^{\infty} E[1_{S_{2n}=0}] = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(1 + o(1)) = +\infty$$

mais alors $P(\limsup_n A_n) = P(N(0) = +\infty) = 1$.

Exercice 6. (Etats récurrents d'une chaîne de Markov) Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P sur un espace dénombrable d'états M . Soit $y \in M$ et soit $T_y = \inf \{k \geq 1 : X_k = y\}$. On pose

$$\begin{aligned} f(x) &= P_x(T_y < \infty) = P_x(\exists n \geq 1 : X_n = y) \quad x \in M \\ f(y) &= 1 \end{aligned}$$

a) Montrer que $f(x)$ satisfait l'équation

$$\begin{aligned} P(x, z) f(z) &= f(x) \quad x \in M \\ f(y) &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

b) Montrer que si on pose $\tilde{f}(x) = P_x(T_y < \infty)$ pour tout $x \in M$, alors \tilde{f} satisfait l'égalité

$$P(x, z) \tilde{f}(z) = \tilde{f}(x) \quad x \in M$$

c) En déduire que si $\{f(x) = 1, x \in M\}$ est la seule solution de l'équation (1), alors y est un état récurrent.

Solution. a) Si $x \neq y$ alors

$$\begin{aligned} f(x) &= P_x(\exists n \geq 1 : X_n = y) = \sum_z P_x(\exists n \geq 1 : X_n = y, X_1 = z) \\ &= \sum_{z \in M} P_x(\exists n \geq 2 : X_n = y | X_1 = z) P_x(X_1 = z) + P(x, y) \\ &= \sum_{z \in M} P(x, z) P_z(\exists n \geq 1 : X_n = y) + P(x, y) = \sum_z P(x, z) f(z). \end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{Z}$ alors

$$\tilde{P}(x) = \sum_z P(x, z) \tilde{P}(z) = \sum_{z \in \mathbb{Z}} P(x, z) \tilde{P}(z) + P(x, y) \tilde{P}(y).$$

et aussi

$$\sum_{z \in M} P(y, z) \tilde{P}(z) = P_y(n-2: X_n = y) = P_y(n-1: X_n = y) = \tilde{P}(y).$$

c) On a que

$$\begin{aligned} \tilde{P}(y) &= \sum_{z \in M} P(y, z) \tilde{P}(z) = \sum_{z \in \mathbb{Z}} P(y, z) \tilde{P}(z) + P(y, y) \tilde{P}(y) \\ &= \sum_{z \in \mathbb{Z}} P(y, z) + P(y, y) \tilde{P}(y) = 1 + P(y, y) \tilde{P}(y) \end{aligned}$$

et donc $1 + P(y, y) \tilde{P}(y) = 0 \Rightarrow \tilde{P}(y) = 1$.

Exercice 7. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ la chaîne de Markov sur \mathbb{N} de matrice de transition donnée par

$$P(0, 1) = 1, \quad P(x, x-1) + P(x, x+1) = 1, \quad P(x, x+1) = \frac{x+1}{x} P(x, x-1), \quad x \geq 1$$

Montrer que si $X_0 = 0$ alors la probabilité que $X_n = 1$ pour tout $n \geq 1$ est $6/25$.

Solution. On remarque d'abord que

$$P_0(n-1: X_n = 1) = P_1(n-1: X_n = 0).$$

Fixons $N \in \mathbb{N}$ et soit $T = \inf \{n \geq 1: X_n = 0 \text{ ou } X_n = N\}$. Alors la fonction $f_N(x) = P_x(T_0 < T_N)$ est solution de

$$f_N(x) = \sum_{z \in \{0, N\}} P(x, z) f_N(z) + P(x, 0)$$

Pour $f(1)$ on a

$$f_N(1) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} f_N(2) \quad f_N(2) = \frac{1}{4} (f_N(1) + f_N(3))$$

Et si $1 < x < N$ on a que

$$\begin{aligned} f_N(x) &= P(x, x+1) f_N(x+1) + P(x, x-1) f_N(x-1) \\ &= \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2 + x^2} f_N(x+1) + \frac{x^2}{(x+1)^2 + x^2} f_N(x-1) \end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{aligned} f_N(x+1) - f_N(x) &= \frac{x^2}{(x+1)^2} (f_N(x) - f_N(x-1)) \\ &= \sum_{k=2}^x \frac{k^2}{(k+1)^2} (f_N(2) - f_N(1)) = \frac{1}{(x+1)^2} (f_N(1) - f_N(2)) \end{aligned}$$

et donc

$$f_N(x+1) = \sum_{k=1}^x \frac{1}{(k+1)^2} (f_N(1) - f_N(2)) + f_N(1) = 1 + \sum_{k=0}^x \frac{1}{(k+1)^2} (f_N(1) - f_N(2))$$

On a aussi

$$f_N(N-1) = \frac{(N-1)^2}{(N)^2 + (N-1)^2} f_N(N-2)$$

qui donne

$$N^2 f_N(N-1) = (N-1)^2 (f_N(N-2) - f_N(N-1)) = (f_N(1) - 1)$$

Alors $f_N(N-1) \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$ et

$$0 = \lim_{N \rightarrow +\infty} f_N(N-1) = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow +\infty} f_N(N-2) = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{(N-1)^2} (f_N(1) - 1) \right)$$

Si on pose $f(1) = \lim_{N \rightarrow +\infty} f_N(1)$ la limite on obtient

$$\lim_N f_N(1) = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k-1} P_1(n: X_n = 1) = \frac{1}{2} f(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{2} = \frac{3}{2}.$$

Exercice 8. Soit Y_n une suite i.i.d. avec loi $P(Y_n = 1) = p$ et $P(Y_n = 0) = 1-p$. Soit $X_n = \inf\{i \geq 0; Y_i = 0\}$, soit le nombre consécutifs de 1 avant n .

- Montrer que X_n est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.
- Montrer que X_n est irréductible et calculer sa probabilité stationnaire. Y-a-t-il d'autres probabilités stationnaires pour cette chaîne?

Solution. a) On a que $X_n = f(X_{n-1}, Y_n)$ où

$$f(x, y) = \begin{cases} x+1 & \text{si } y=1 \\ 0 & \text{si } y=0 \end{cases}$$

et $X_1 = 1_{Y_1=1}$. Donc la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est une récurrence aléatoire car $(Y_n)_{n \geq 2}$ est une suite i.i.d indépendante de X_1 . Cela suffit pour montrer que $(X_n)_{n \geq 1}$ est une chaîne de Markov homogène. La matrice de transition est

$$P(x, x) = P(f(x, Y_1) = x) = \begin{cases} p & \text{si } x = x+1 \\ 1-p & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}.$$

b) Si $x \leq x' = n > 0$ on a que

$$P^n(x, x) = P(x, x+1)P(x+1, x+2) \dots P(x+n-1, x) = p^n > 0.$$

Si $x' < x$ on a que

$$P^{x'+1}(x, x) = P(x, 0)P(0, 1) \dots P(x-1, x) = (1-p)^{x'} p > 0$$

Donc $x \sim x'$ pour tout $x, x' \in \mathbb{N}$ et la chaîne est irréductible car il existe une seule classe de communication. La probabilité stationnaire satisfait l'équation $\pi(x) = \pi(x-1)p$ pour tout $x > 0$ et

$$\pi(0) = \sum_{x=0}^{\infty} \pi(x)P(x, 0) = (1-p)\sum_{x=0}^{\infty} \pi(x) = (1-p)\pi(0)$$

donc $\pi(x) = (1-p)^x$: la loi géométrique de paramètre $1-p$. La chaîne est irréductible, donc il n'existe pas d'autres probabilités stationnaires.

Exercice 9. (Transmission d'un message). Un message codé en binaire est transmis à travers un réseau. Chaque bit est transmis avec probabilité p de succès :

a) Valeur p_a pour un passage de 0 à 1 ($a \in \{0, 1\}$),

b) Valeur p_b pour un passage de 1 à 0 ($b \in \{0, 1\}$),

Le résultat de la transmission au n -ième relais est noté X_n . On suppose que les relais se comportent indépendamment les uns des autres et que les erreurs sur les bits sont indépendantes. On souhaite calculer la taille critique du réseau au-delà de laquelle la probabilité de recevoir un message erroné est supérieure à ϵ .

a) Écrire de deux suites de Bernoulli $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ indépendantes de probabilité de succès p_a et p_b respectivement, écrire X_n comme une suite récurrente aléatoire.

b) Soit $g_n = P(X_n = 0)$. Montrer que

$$g_{n+1} = (1 - p_a)g_n + p_b(1 - g_n)$$

et calculer g_n en fonction de g_0 .

c) Calculer

$$r_n(0) = P(\text{le message } X_n \text{ ne soit pas erroné} | X_0 = 0)$$

et

$$r_n(1) = P(\text{le message } X_n \text{ ne soit pas erroné} | X_0 = 1)$$

d) Supposons maintenant de envoyer un message de longueur l (l bits) $X_0 = (X_0^1, \dots, X_0^l)$. Alors $X_n = (X_n^1, \dots, X_n^l)$ sont indépendantes avec la même loi. Soit r_n la probabilité pour que le message X_n ne soit pas erroné. Montrer que

$$r_n = [1 + (1 - p_a)(1 - p_b)^n]^l \quad \text{soit } r_\infty = \inf \frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b}$$

en déduire la taille maximale du réseau n_c pour avoir $r_n \geq 1 - \epsilon$.

e) Déterminer r_n et les mesures invariantes éventuelles.

f) Soit, pour $x, y \in \{0, 1\}$, $N_n(x, y) = E_x \sum_{k=1}^n 1_{\{X_k = y\}}$. Calculer $N_n(x, y)$ puis $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(x, y)}{n}$.

Solution. a) La récurrence aléatoire associée à chaque bit peut s'écrire :

$$X_{n+1} = 1_{X_n=0, U_{n+1}=1} + 1_{X_n=1, V_{n+1}=0}.$$

b) Soit $g_n = P(X_n = 0)$ alors par la propriété de Markov on a

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= P(X_{n+1} = 0) = P(X_{n+1} = 0, X_n = 0) + P(X_{n+1} = 0, X_n = 1) \\ &= P(X_{n+1} = 0 | X_n = 0)g_n + P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1)(1 - g_n) \\ &= (1 - p_a)g_n + p_b(1 - g_n) = (1 - p_a - p_b)g_n + p_b \end{aligned}$$

Donc si $\mathbb{P}(a \neq b)$ on a $g_1 = g_0 + b$, $g_2 = g_1 + b = 2g_0 + b + b$ et en général

$$g_n = g_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b = g_0 + \frac{1 - \mathbb{P}(a \neq b)^n}{1 - \mathbb{P}(a \neq b)} b = g_0 \mathbb{P}(a \neq b) \frac{b}{a+b} + \frac{b}{a+b}$$

On a aussi $r_n(0) = \mathbb{P}(a \neq b)^n$ et $r_n(1) = \mathbb{P}(a \neq b)^n$ car les rôles de a et b sont échangés dans le deuxième cas. La probabilité que chaque bit n'est pas erroné est alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n^i = X_0^i) &= \sum_x \mathbb{P}(X_n^i = x | X_0^i = x) \mathbb{P}(X_0^i = x) = \sum_{x=0,1} r_n(x) \mathbb{P}(X_0^i = x) = \min(r_n(0), r_n(1)) \\ &= \mathbb{P}(a \neq b)^n \end{aligned}$$

où $\mathbb{P}(a \neq b) = \min(a, b) / (a + b)$. Et donc la probabilité que le message de n bits n'est pas erroné est

$$r_n = [\mathbb{P}(a \neq b)^n]^I$$

La taille du réseau doit être inférieure de

$$n_c = \frac{\log(\mathbb{P}(a \neq b)) \mathbb{P}(a \neq b) \log((1 - \mathbb{P}(a \neq b))^{1/I} \mathbb{P}(a \neq b))}{\mathbb{P}(a \neq b) \log(\mathbb{P}(a \neq b))}.$$

e) La matrice de transmission est

$$r_n(x, x) = r_n(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(a \neq b)^n / (a + b) + b / (a + b) & \text{si } x = 0 \\ \mathbb{P}(a \neq b)^n / (a + b) + a / (a + b) & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

et donc $r_n(x, 1 - \mathbb{P}(a \neq b)^n) = \mathbb{P}(a \neq b)^n r_n(x, x)$. On peut vérifier que

$$r_n(x, x) = (b / (a + b), a / (a + b))$$

est la seule mesure invariante de r_n . (la chaîne est irréductible).

f)

$$N_n(0, 0) = \sum_{k=1}^n r_k(0, 0) = \sum_{k=1}^n [\mathbb{P}(a \neq b)^k / (a + b) + b / (a + b)] = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(a \neq b)^k \frac{b}{a + b} + n \frac{b}{a + b}$$

donc

$$\lim_n \frac{N_n(0, 0)}{n} = \frac{b}{a + b} = \lim_n \frac{N_n(1, 0)}{n}$$

et de façon similaire on obtient

$$\lim_n \frac{N_n(0, 1)}{n} = \lim_n \frac{N_n(1, 1)}{n} = \frac{a}{a + b}.$$