

## TD1. Esperance conditionelle.

Exercice 1. Soient  $X$  une v.a. intégrable définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, F, P)$ , et  $B$  une sous-tribu de  $F$ .

1. Rappeler la définition de  $E(X/B)$ .
2. Compléter les égalités suivantes :
  - a)  $E(E(X/B)) =$
  - b) Si  $X$  et  $B$  sont indépendantes,  $E(X/B) =$
  - c) Si  $Y$  est une v.a.  $B$ -mesurable et si  $XY$  et  $X$  sont intégrables,  $E(YX/B) =$
  - d) Pour toute v.a.  $Z$   $B$ -mesurable et bornée  $E(ZE(X/B)) =$

Exercice 2. Soit  $X$  une v.a. intégrable définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, F, P)$ , et soient  $B_1, B_2$  deux sous-tribus de  $F$ ,  $B_1 \subset B_2$ . Montrer que

$$E(E(X/B_1)/B_2) = E(X/B_1) \quad \text{et que} \quad E(E(X/B_2)/B_1) = E(X/B_1).$$

Exercice 3. Soit  $\{A_1, A_2, \dots\}$  une partition (finie ou infinie) de  $\Omega$ . Soit  $B = \sigma(A_1, \dots)$  la tribu engendrée par cette partition. Montrer que

$$E(X/B)(\omega) = \sum_{j: P(A_j) > 0} \frac{E(X1_{A_j})}{P(A_j)} 1_{A_j}(\omega).$$

Exercice 4. Un modèle discret d'évolution d'actifs. Soit  $S_0$  une constante,  $0 < d < u$  et  $X_n$  une suite iid d'valeurs dans  $\{u, d\}$  telle que  $P(X_n = u) = p$ . On considère la suite  $S_n$ ,  $n \geq 1$  définie par  $S_n = X_n S_{n-1}$  pour  $n \geq 1$  qui est un modèle d'évolution d'un actif financier. Soit  $F_0 = \{S_0\}$ ,  $F_1 = \sigma(X_1)$ ,  $F_2 = \sigma(X_1, X_2)$ .

1. Montrer que  $(S_2) \perp (X_1, X_2)$ .
2. Calculer  $E[S_2/F_1]$  et  $E[S_2/F_0]$  et vérifier que  $E[E[S_2/F_1]/F_0] = E[S_2]$ .
3. Si  $F_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$  donner une formule pour  $E[S_n/F_k]$  pour tout  $k \leq n$ .

Exercice 5. Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires iid intégrables. Calculer

$$E(X_1/X_1 + X_2 + \dots + X_n).$$

Exercice 6. Soient  $X_1, X_2$  deux v.a. indépendantes telles que  $P(X_i > t) = e^{-\lambda t}$ ,  $t > 0$ . On pose  $Y = X_1 + X_2$  et on considère une fonction  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$ . Calculer  $E(f(X_1)/Y)$ .

Exercice 7. Soit  $X$  une v.a. telle que  $E(X^2) < \infty$ . On pose  $\text{Var}(X/F) = E(X^2/F) - E(X/F)^2$ . Montrer que

$$\text{Var}(X) = E(\text{Var}(X/F)) + \text{Var}(E(X/F)).$$

Exercice 8. Soit  $X$  une v.a. de loi  $B(a, b)$ ,  $a, b > 0$  et, conditionnellement à  $X$ , soit  $Y$  une v.a. binomiale de paramètres  $(n, X)$ . Calculer l'espérance et la variance de  $Y$ .

Exercice 9. [Formule de Bayes] Montrer que si  $G$  est une sous-tribu de  $\mathcal{F}$  et  $A \in \mathcal{F}$ ,  $G \subset G$  on a

$$P(G/A) = \frac{E[P(A/G)1_G]}{E[P(A/G)]}.$$

Exercice 10. On considère deux v.a.  $X, Y$ :  $X$  est uniforme sur l'ensemble  $\{1, \dots, 6\}$  et conditionnellement à  $X$  la v.a.  $Y$  a une loi  $\text{Bin}(X, 1/2)$ . Calculer  $P(X = i/Y = 0)$  pour  $i = 1, \dots, 6$ .

Exercice 11. Montrer que si  $X_1 = X_2$  sur  $B \in \mathcal{F}$  (c.-à-d.  $X_1(\omega) = X_2(\omega)$  si  $\omega \in B$ ), alors  $E[X_1/F] = E[X_2/F]$  sur  $B \in \mathcal{F}$ .

Exercice 12. Soient  $(X, Y)$  une couple des v.a. à valeurs dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  avec densité jointe  $f_{X,Y}(x, y)$ . Montrer que  $E[g(Y)/X] = h(X)$  où  $h$  est n'importe quelle fonction telle que

$$h(x) \int_{\mathbb{R}^m} f_{X,Y}(x, y) dy = \int_{\mathbb{R}^m} g(y) f_{X,Y}(x, y) dy.$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .