

TD2. Vecteurs aléatoires, vecteurs Gaussiens et loi Gamma et Khi-deux.

Exercice 1. Soit (X, Y) un couple aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^2 admettant une densité $f_{(X,Y)}(x, y) = C e^{-x^2 - y^2}$

- Déterminer C et montrer que X, Y ne sont pas indépendantes.
- Calculer $P(X + Y = 0)$ et $P(X = 0, Y = 0)$ et $\text{Var}(X/Y) = E[(X/E[X/Y])^2/Y]$.
- Soient (R, θ) tels que $R \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ et $X = R \sin(\theta)$, $Y = R \cos(\theta)$. Montrer que R, θ sont indépendantes et calculer leurs lois marginales.

Exercice 2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires tel que la loi marginale de X est une loi uniforme sur $[0, 1]$ et la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est une loi $N(x, x^2)$.

- Calculer $E(X)$, $\text{Var}(X)$ et $\text{Cov}(X, Y)$.
- Montrer que X et Y/X sont indépendantes.

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\Gamma(n_1, \lambda)$ et $G(\alpha, \beta)$. On pose $S = X + Y$ et $T = X/(X + Y)$.

- Montrer que S et T sont des variables indépendantes et préciser leurs lois respectives.
- Déterminer la loi de X/Y et calculer son espérance si elle existe.

Exercice 4. Montrer que la loi exponentielle de paramètre λ est un cas particulier de la loi Gamma. Considérons maintenant X_1, \dots, X_n , n variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ . Déterminer la loi de $\sum_{i=1}^n X_i$.

Exercice 5. Soit U_1, \dots, U_n n variables indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer les lois respectives des variables aléatoires $M_n = \min(U_1, \dots, U_n)$ et $M_n = \max(U_1, \dots, U_n)$.

Exercice 6. Soit $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ où ρ est un réel.

- Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel ρ pour que Σ soit la matrice de variance-covariance d'un vecteur gaussien.
- On suppose de plus que ce vecteur gaussien est centré. Donner l'expression analytique de sa densité de probabilité.

Exercice 7. Soit (X, Y) un vecteur gaussien de moyenne $(1, 0)$ et de matrice de variance-covariance $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

- Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y , $P(X < 0)$ et $P(X < 0, Y < 0)$.
- Déterminer la valeur de ρ telle que $P(X + Y > 0) = 0.9$.

Exercice 8. Soit (X, Y) deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes de même loi $N(0, 1)$. On pose $U = X/Y$. Montrer que U suit une loi de Cauchy, i.e. une loi dont la densité de probabilité est de la forme $f(u) = \frac{1}{\pi(1+u^2)}$.