

TD2. Propriété de Markov forte.

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite iid de loi $U([0, 1])$ et $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $S_0 = 0$. Soit $T = \inf \{n \geq 0 : S_n > 1\}$. Montrer que $P(T = n) = 1/n!$ et que $E[T] = e$, $E[S_T] = e/2$.

Exercice 2. (Promenade aléatoire asymétrique). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite iid avec $P(X_n = +1) = p > 1/2$, $P(X_n = -1) = 1 - p$ et $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $S_0 = 0$. Soit $\tau = \inf \{n \geq 0 : S_n < 0\}$ et $Y = \inf_{n \geq 0} S_n$. Montrer que

- $P(\tau < +\infty) < 1$;
- $P(Y \leq -k) = P(\tau < +\infty)^k$
- Soit $T = \inf \{m \geq 0 : S_m = 1\}$. Appliquer le théorème de Wald à T pour montrer que

$$E[T] = \frac{1}{E[X_1]} = \frac{1}{2p-1}.$$

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite iid avec $E[X_n] = 0$ et $\text{Var}(X_n) = \sigma^2 < +\infty$. Si T est un t.a. intégrable montrer que

$$E[S_T^2] = \sigma^2 E[T].$$

(Sugg.: Calculer $E[S_T^2]$ par récurrence et montrer que $(S_{T-n})_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\cdot)$.)

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite indépendante et $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite de t.a. intégrables et tels que $E[T_n] \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$. Montrer que si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n E[X_m 1_{X_m > m}] \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow +\infty$, alors

$$\frac{E[X_{T_n}]}{E[T_n]} \rightarrow 0.$$

(Sugg.: L'estimation est facile si $X_{T_n} = T_n$ ou si $T_n = N$ pour $N \in \mathbb{N}$.)

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite iid avec $E[X_n] = 0$ et $E[X_n^2] = 1$. Soit $T_c = \inf \{n \geq 0 : |S_n| > c \sqrt{n}\}$.

- En utilisant l'exercice 3 montrer que $E[T_c] = +\infty$ pour $c > 1$.
- Montrer que pour tout $n = T_c - n$ on a

$$E[S_n^2] \leq c^2 E[S_n] + 2c \sqrt{E[S_n^2]} + E[X_n^2].$$

- Utiliser l'exercice 4 et cette inégalité pour montrer que $E[T_c] < +\infty$ si $c < 1$.

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov d'espace d'états M et $A \subset M$. Soit

$$T_A^k = \inf \{n \geq 0 : X_n \in A\}, \quad T_A^0 = 0.$$

1. Montrer que $Y_k = X_{T_A^k}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition $P_A(x, y) = P_x(X_{T_A^1} = y), x, y \in A$.
2. Montrer que $P_A(x, y)$ est la solution minimale de l'équation

$$P_A(x, y) = P(x, y) + \sum_{z \notin A} P(x, z) P_A(z, y).$$

Exercice 7. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov d'espace d'états M , $Y_n = X_{S_n}$ et

$$S_{m+1} = \inf \{n \geq S_m : X_n \notin X_{S_m}\}.$$

Montrer que $(Y_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition \tilde{P} donnée par

$$\tilde{P}(x, x) = 0, \quad \tilde{P}(x, y) = \frac{P(x, y)}{\sum_{z \neq x} P(x, z)} \text{ pour } x \neq y.$$

Exercice 8. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite iid avec $E[(X_1)_+] < +\infty$ et $Y_n = \max_{1 \leq m \leq n} X_m$.

1. Soit $T = \inf \{n \geq 0 : X_n > c\}$ et $p = P(X_1 > c)$. Calculer $E[Y_T]$.
2. Soit c la solution de $E[(X_1 - c)_+] = c$. Montrer que $E[Y_T] = c$ et utiliser le fait que

$$Y_n = c + \sum_{m=1}^n ((X_m - c)_+ - c)$$

pour prouver que si T est t.a. intégrable alors $E[Y_T] = c$.