

## TD4. Chaînes de Markov (III).

Exercice 1. Soit  $Y_n$  une suite i.i.d. avec loi  $P(Y_n = 1) = p$  et  $P(Y_n = 0) = 1 - p$ . Soit  $X_n = \inf \{i \geq 0; Y_{n-i} = 0\}$ , soit le nombre consécutifs de 1 avant  $n$ .

1. Montrer que  $X_n$  est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.
2. Montrer que  $X_n$  est irréductible et calculer sa probabilité stationnaire. Y-a-t-il d'autres probabilités stationnaires pour cette chaîne ?

Exercice 2. (Retournement du temps) Soit  $(X_n)$  une chaîne de Markov sur un espace dénombrable  $M$  avec matrice de transition  $P$  qui admet une probabilité invariante  $\pi$ . On pose

$$P^*(x, y) = \frac{\pi(y)}{\pi(x)} P(y, x)$$

1. Montrer que  $P^*$  est une matrice de transition sur  $M$  et que  $\pi$  est une probabilité invariante pour  $P^*$ .
2. Montrer que  $P = P^*$  si et seulement si  $\pi$  est réversible.
3. Soit  $N \geq 1$ , et  $X_n = X_{N-n}$ ,  $n = 0, \dots, N$ . Montrer que, si  $X_0$  est distribuée avec loi  $\pi$ , alors  $X_n$  est une chaîne de Markov avec matrice de transition  $P^*$  et la loi de  $X_0$  est  $\pi$ .

Exercice 3. (Marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}/K\mathbb{N}$ ) Soit  $M = \mathbb{Z}/K\mathbb{N}$ , c'est-à-dire le cercle discret avec  $K$  points. Soit  $X_n$  la marche aléatoire avec probabilité  $p$  de sauter à droite et  $1 - p$  de sauter à gauche. Calculer la probabilité invariante et la matrice  $P$  de la correspondante chaîne retournée dans le temps.

Exercice 4. (Processus de naissance et mort) Soit  $(p_k)_{k \geq 0}$  une suite de nombres dans  $]0, 1[$  et  $Q$  la matrice de transition donnée par :

$$P(0, 1) = 1; \quad \begin{aligned} P(k, k+1) &= p_k \\ P(k, k-1) &= 1 - p_k = q_k \end{aligned} \quad \text{si } k \geq 1.$$

avec  $0 < p_k < 1$  pour tout  $k \geq 1$ .

- 2.a. Montrer que la chaîne de Markov associée est irréductible.
- 2.b. On pose  $\rho_0 = 1$  et

$$\rho_n = \frac{q_1 \dots q_n}{p_1 \dots p_n} \quad n \geq 1$$

Montrer que la chaîne est récurrente si et seulement si  $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n = \infty$ .

Exercice 5. (Promenade aléatoire sur  $\mathbb{Z}^d$ ) Si  $U$  est une v.a. à valeur dans  $\mathbb{Z}^d$  on considère la fonction  $u(t), t \in [0, 1]^d$  donnée par la somme de Fourier :

$$u(t) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} e^{i \langle z, t \rangle} P(U = z)$$

1. Vérifier que  $P(U = z) = \int_{[0, 1]^d} e^{i \langle z, t \rangle} u(t) dt$ .

2. Soit  $(U_j)_{j=1}^n$  une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans  $\mathbb{Z}^d$ . On pose  $X_0 = 0$ ,  $X_n = \sum_{j=1}^n U_j$ . Montrer que le point 0 est récurrent pour cette chaîne de Markov si et seulement si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{1}{\mathbb{P}_0(X_s = 0)} ds = +\infty$$

3. Appliquer ce critère au marche aléatoire symétrique sur  $\mathbb{Z}^d$

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & \text{si } |x - y| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$