

## Examen

[Durée deux heures. Aucun document n'est autorisé. Tous les exercices sont indépendants. Seules les réponses soigneusement justifiées seront prises en compte.]

**Exercice 1.** Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  un processus continu sur l'espace  $\{0, \dots, N\}$  avec  $N > 0$ . Dans l'état  $M, x \in \{0, \dots, N\}$  deux actions sont possibles : soit on s'arrête et on gagne la quantité  $r(x)$  avec  $r: M \rightarrow \mathbb{R}_+$ , soit on continue et l'état suivant est choisi par un processus à probabilité  $1/2$  (donc  $1/2$ ). Dans les états  $0, N$  on s'arrête automatiquement et on perdrait la quantité  $r(0)$  ou  $r(N)$ . On considère le problème en horizon fini, autrement dit on est obligé de s'arrêter si on ne l'a pas déjà fait) et aussi le problème en horizon infini. Le but est de trouver le gain moyen maximal  $V_n(x)$  en horizon fini et le gain moyen maximal  $V(x)$  en horizon infini. L'espace d'action est  $\{0, 1\}$  où 0 représente l'action de continuer et 1 de s'arrêter. Par simplicité on fait l'hypothèse que quand on décide de s'arrêter on va à l'état 0. La fonction de transition  $P: M \times M$  du processus continu est donc homogène et donne  $P(x, x) = 1/2$  pour tout  $x \in \{0, \dots, N\}$ ,  $P_0(0, 0) = P_0(N, N) = 1$ ,  $P_1(x, 0) = 1$  pour tout  $x \in M$  et on a que, pour tout continu  $C_0$

$$V_n^u(x) = E_{(0,x)}^u \left[ \sum_{i=0}^{n-1} r(X_i) + r(X_n) \right] \quad V^u(x) = E_{(0,x)}^u \left[ \sum_{i=0}^{\infty} r(X_i) \right]$$

où  $u_n = u_n(X_0, \dots, X_n)$ . On pose aussi

$$V_n(x) = \sup_{u \in C_0} V_n^u(x) \quad V(x) = \sup_{u \in C_0} V^u(x).$$

- Donner une explication intuitive de la forme des fonctions  $V_n^u(x)$  et  $V^u(x)$ . Représentent-elles bien le gain moyen de la politique  $u$  en horizon fini et infini?
- Soit  $(Z_n)_{n \geq 1}$  une suite iid de Bernoulli de paramètre  $1/2$ . Donc  $Z_n: E = \{0, 1\}$ . Déterminer la fonction  $F: M \times E \rightarrow M$  qui, étant donné un continu, permet de définir le processus  $(X_n)_{n \geq 0}$  continu par exemple comme une randomisation continue de  $F(X_n, u_n(X_0, \dots, X_n), Z_{n+1})$ .
- Montrer que  $V_n(x)$  satisfait les équations

$$V_n(x) = \max(r(x), (V_{n-1}(x) + V_{n-1}(x+1))/2), \quad x \in \{0, \dots, N\}$$

avec  $V_n(0) = 0$  et  $V_n(N) = r(N)$  et que  $V(x)$  satisfait

$$V(x) = \max(r(x), (V(x) + V(x+1))/2), \quad x \in \{0, \dots, N\} \quad (1)$$

avec  $V(0) = 0$  et  $V(N) = r(N)$ .

- Justifier que pour tout  $M$  et pour tout  $u \in C_0$   $\lim_n V_n^u(x) = V^u(x)$  et que  $\lim_n V_n(x) = V(x)$ .

- e) Montrer que  $V$  est la plus petite solution de l'équation (1) telle que  $Q(x) \leq r(x)$  pour tout  $x \in M$ . On a  $Q(x) = (Q(x-1) + Q(x+1))/2$  pour tout  $0 < x < N$  et  $Q(x) = r(x)$  pour tout  $x \in M$ , montrer que  $Q(x) = V(x)$  (Indication: montrer que pour tout  $n \geq 1$  on a  $Q(x) = V_n(x)$ ).
- f) Expliquer comment à partir de on peut déterminer une politique markovienne optimale  $u: M \rightarrow A$ .
- g) Calculer la politique optimale dans le cas  $N = 6$  et  $r(x) = x(6-x)$ .

**Exercice 2.** Soit  $(M_n)_{n \geq 0}$  une sur-martingale et  $T = \inf \{n \geq 0: M_n > E[M_{n+1}|F_n]\}$  une v.a. telle que  $P(T < +\infty) = 1$ . Soit  $\tilde{M}_n = M_n - T$  le processus arrêté au temps  $T$ .

- a) Montrer que  $T$  est un temps d'arrêt.
- b) Montrer que  $(\tilde{M}_n)_{n \geq 0}$  est un processus adapté et intégrable (c-à-d  $\tilde{M}_n \in L^1(\mathcal{F}_n)$ ) pour tout  $n \geq 0$ .
- c) Soient  $F, G$  deux v.a. intégrables, on dit que  $F = G$  sur  $B$  si  $P(\{ \omega \in B: F(\omega) = G(\omega) \}) = P(B)$  (c-à-d  $1_B = G 1_B$  p.s). Montrer que si  $B \in F_n$  et  $F = G$  sur  $B$ , alors

$$E[F|F_n] = E[G|F_n] \quad \text{sur } B.$$

- d) Montrer que  $(\tilde{M}_n)_{n \geq 0}$  est une martingale.
- e) Supposons que  $T$  est un t.a. borné. Montrer que  $E[M_0] = E[M_T]$ .
- f) Supposons que  $M_n \geq 0$  pour tout  $n$ . Que peut-on dire de la relation entre  $E[M_0]$  et  $E[M_T]$  sans autre hypothèse que  $P(T < +\infty) = 1$ ?