

Problème d'arrêt pour une somme actualisée

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite iid avec $E[(X_1)_+] < +\infty$. Soit $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $S_0 = 0$. Le processus des gains est donné par $Y_n = \gamma^n S_n$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$ avec $\gamma \in]0, 1[$ et $Y_0 = 0$.

a) Utiliser la loi forte des grands nombres pour $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k)_+ = E[(X_1)_+]$ et montrer que $\limsup_n Y_n = 0$. Donc H2 est vérifié.

b) Montrer que $Y_n = \gamma^n \sum_{k=1}^n (X_k)_+$ et déduire que l'hypothèse H1 est vérifiée. Montrer que on a

$$E[\sup_n Y_n] = \frac{1}{1-\gamma} E[(X_1)_+].$$

c) On veut montrer que il faut pas s'arrêter quand $S_n < 0$ (pourquoi?). Soit T un temps d'arrêt tel que $P(S_T < 0) > 0$. Montrer qu'il existe un autre temps d'arrêt \tilde{T} tel que $P(S_{\tilde{T}} < 0) = 0$ et que $E[Y_{\tilde{T}}] > E[Y_T]$.

d) Montrer que $(S_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène et que le problème a une structure markovienne. On notera P_s et E_s la loi et l'espérance relatives à la chaîne de Markov $(S_n)_{n \geq 0}$ avec état initiale $S_0 = s$:

$$E_s[f(S_1, \dots, S_n)] = E[f(s + X_1, \dots, s + X_1 + \dots + X_n)] = E_0[f(s + S_1, \dots, s + S_n)]$$

pour toutes fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pour lesquels l'intégrale existe.

e) Soit $v_n(s) = \text{esssup}_{T \geq n} E[Y_T / S_n = s]$. On admettra l'équation

$$v_n(s) = \text{esssup}_{T \geq 1} E[Y_{n+T} / S_1 = s]$$

Montrer que $v_1(s)$ satisfait $v_1(s) = \max(s, E_s[v_1(S_1)])$.

f) Montrer que un t.a. optimal est donné par $T = \inf \{n \geq 1 : S_n \geq D\}$ où

$$D = \{s \in \mathbb{R} : s \geq E_s[v_1(S_1)]\}.$$

g) Montrer que $E_s[v_1(S_1)] = E_s[Y_T]$ où T est un quelconque t.a. optimal.

h) Si on écrit $T = t(S_1, S_2, \dots)$ alors montrer que on a

$$E_0[Y_T(s + S_T)] = E_s[Y_T(S_T)] = E_s[Y_T]$$

où $T = t(S_1, S_2, \dots)$ est un nouveau temps d'arrêt.

i) Déduire que $D = \{s \in \mathbb{R} : s \geq E_0[Y_T] / (1 - \gamma)\}$ et donc que la condition d'arrêt optimal est donné par un dépassement de seuil: le temps d'arrêt optimal est de la forme $T = \inf \{n \geq 1 : S_n \geq R\}$ pour un quelque R .

j) Soit S un t.a. optimal, montrer que $v_1(s) = E[Y_S / S_1 = s] = E[\gamma^S]$