

## TD5. Arrêt optimal

Exercice 1. (Le problème de Moser) Il s'agit du problème d'arrêt optimal suivant. Soient  $X_1, \dots, X_N$  des v.a. iid positives avec fonction de répartition  $F$  et moyenne  $E[X_i]$  finie. On imagine connaître la loi  $F$ . Soit  $F_n = (X_1, \dots, X_n)$  et  $Y_n = X_n$ : on observe en séquence  $N$  réalisations indépendantes de  $F$ , notre gain est la dernière valeur observée avant de s'arrêter. Le horizon est  $N$ : si nous ne nous arrêtons pas avant  $N$  on est obligé d'accepter le gain  $Y_N = X_N$ .

- Montrer que la fonction valeur  $Z_n$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{F}_n(X_n)$  pour tout  $1 \leq n \leq N$  (sugg: utiliser que  $Y_n \in \mathcal{F}_n(X_n)$  et une récurrence rétrograde)
- Soit  $V_n = E[Z_n]$ . Montrer que  $V_n = (V_{n+1} \circ \theta_n)(x) = E[\sup_{k \geq n} (X_k, x)]$ .
- Montrer que  $V_n$  est une fonction positive et croissante, telle que  $V_n(x)$  est décroissante et  $V_n(x) \geq 0$  si  $x \rightarrow +\infty$ .
- Montrer que une règle optimale est

$$T = \inf \{k \leq N : X_k \geq V_{N-k+1}\}$$

- Soit  $X_i \sim U([0, 1])$  pour  $1 \leq i \leq N$  et  $N = 6$ . Montrer que la stratégie optimale est donnée par la procédure suivante: s'arrêter au temps 1 si  $X_1 \geq 0.775$ , s'arrêter au temps 2 si  $X_2 \geq 0.742$ , s'arrêter au temps 3 si  $X_3 \geq 0.695$ , s'arrêter au temps 4 si  $X_4 \geq 0.625$ , s'arrêter au temps 5 si  $X_5 \geq 1/2$  ou s'arrêter à 6.

Exercice 2. (problème de la secrétaire) Il s'agit de choisir parmi  $N$  objets le meilleur. On a le droit d'inspecter un objet à la fois et de décider de le choisir et donc s'arrêter ou de passer à l'inspection du suivant. Ce n'est pas possible de revenir sur ses propres pas: chaque fois on ne peut seulement garder que le dernier objet ou continuer. On veut déterminer une stratégie optimale qui nous permet de maximiser la probabilité de choisir l'objet qui est le meilleur parmi les  $N$  à notre disposition. Ce problème porte le nom de problème de la princesse dans la littérature anglo-saxonne, problème classique de la secrétaire (CSP - classic secretary problem).

Le modèle mathématique est basé sur un espace d'états donné par les possibles permutations des  $N$  objets:  $\Omega = \{1, \dots, N\}^N$  tel que  $(i) \neq (j)$  si  $i \neq j$  pour tout  $i, j = 1, \dots, N$ . Sur  $\Omega$  on considère la distribution uniforme qui donne le même poids  $1/N!$  à chaque permutation. La valeur  $(i)$  est le rang absolu de l'objet inspecté donc si  $(i) = 1$  le meilleur objet se trouve dans la position  $i$ . On remarque qu'on ne peut pas observer directement les  $(i)$  (on ne connaît pas le classement des objets jusqu'à ce qu'on ait inspecté tous les  $N$  objets). A chaque pas  $n$  on observe une variable  $X_n(\omega)$  qui donne le rang relatif de l'objet inspecté par rapport à tous les  $n$  objets inspectés auparavant. Donc  $X_1 = 1$ ,  $X_2 \in \{1, 2\}$ , ...,  $X_n \in \{1, \dots, n\}$  et  $X_N(\omega) = (N)$ : une fois que j'ai inspecté tous les objets je connais leur classement absolu. A chaque instant  $n$  je connais  $F_n = (X_1, \dots, X_n)$  la tribu engendrée par les rangs relatifs des premiers  $n$  objets. Exemple: si  $N = 4$  et  $\omega = (3, 4, 1, 2)$  alors  $X_1(\omega) = 1$ ,  $X_2(\omega) = 2$ ,  $X_3(\omega) = 1$ ,  $X_4(\omega) = 2$ . Soit  $\Omega = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{N}^N : 1 \leq x_k \leq k, k = 1, \dots, N\}$  l'ensemble des valeurs possibles pour le vecteur aléatoire  $X = (X_1, \dots, X_N)$ . On remarque que l'application  $X: \Omega \rightarrow \Omega$  qui envoie chaque possible permutation des  $N$  objets vers la correspondante suite des rangs relatifs est bijective, i.e. existe  $\phi: \Omega \rightarrow \Omega$  telle que  $\phi(X(\omega)) = \omega$ . Ce qui est équivalent à dire que donnée la suite des rangs relatifs  $x_1, \dots, x_N$  on peut reconstruire les valeurs de  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$ .

- Montrer que pour tout  $(x_1, \dots, x_N) \in \Omega$  on a

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_N = x_N) = 1/N!$$

b) Montrer que pour tout  $n \leq N$  on a que  $P(X_n = j) = 1/n$  pour  $j = 1, \dots, n$  et que les v.a.  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes.

c) L'objectif est de trouver une stratégie donnée par un t.a. qui nous permet de optimiser la probabilité de choisir l'objet meilleur parmi les  $N$  disponibles. Autrement dit on veut maximiser  $P(\tau(T) = 1) = E[1_{\tau(T)=1}]$  pour tout  $T$  t.a. de la filtration  $F$  et borné par  $N$ . On définit un processus adapté  $Y$  par  $Y_k = E[1_{\tau(k)=1}/F_k] = F_k$ . Montrer que

$$P(\tau(T) = 1) = E[Y_T].$$

d) Montrer que  $Y_n = 1_{X_n=1} \frac{n}{N}$  et donc que  $Y_n \leq (X_n)$ .

e) Montrer que  $Z_n \leq (X_n)$  et donc que un temps d'arrêt optimal est donné par

$$T = \inf \{k \leq N : E(Z_{k+1}) \leq k/N, X_k = 1\}$$

f) Montrer que  $E[Z_n]$  est une fonction décroissante de  $n$  et donc que il existe  $r$  tel que

$$T = T_r = \inf \{r \leq k \leq N : X_k = 1\} \cap \{N\}$$

g) Montrer que pour tout  $1 \leq r \leq N$ :

$$G_N(r) = E[Y_{T_r}] = P(\tau(T_r) = 1) = \frac{r}{N} \prod_{k=r}^N \frac{1}{k}$$

h) Montrer que  $\lim_N G_N(xN) = x \log x$  et que cette fonction a un maximum pour  $x = 1/e \approx 0.37$ . Donc dans la limite d'un grand nombre d'objets la stratégie optimale est de ne laisser de côté une proportion du 37 % et après choisir le premier meilleur de tout les précédents.