

TD4. Convergence des variables aléatoires.

Exercice 1. Soient X_1, \dots, X_n , n variables aléatoires indépendantes de même loi. On pose $U = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ et $V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|$. Comparer $E(U)$ et $E(V)$ et les calculer.

Exercice 2. Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p . Quel est la convergence en loi de X_n/n ?

Exercice 3. Soit X_1, \dots, X_n une suite de v.a.s indépendantes telles que $X_n \sim B(n, p)$. Montrer que $\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ converge en loi vers $N(0, 1)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite des v.a. telles que X_n est une Binomiale $B(n, \lambda/n)$ avec $\lambda > 0$. Montrer que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers la Poisson de paramètre λ . Estimer la probabilité que $X_n = 2$ si $\lambda = 2$ et $n = 10000$.

Exercice 5. On définit la fonction réelle par $f_n(x) = \frac{n}{(1 + n^2 x^2)}$, $n \in \mathbb{N}$.

- Montrer que f_n est la densité d'une variable aléatoire. Que peut-on dire de $E(X_n)$ et $\text{Var}(X_n)$?
- Montrer que X_n converge en probabilité vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$.

Exercice 6. Soit X_n une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi. Quelle est la loi de $X_1 + \dots + X_n$? Que vaut $P(X_1 + \dots + X_n = n)$? Utiliser le théorème central limite pour montrer que la limite de $\exp(-\lambda/n) \sum_{k=1}^n n^k/k!$ lorsque $n \rightarrow \infty$ est égale à $e^{-\lambda}$.

Exercice 7. Une suite de variables aléatoires X_n converge en loi vers une variable aléatoire X , et une autre suite Y_n indépendante de X_n converge en probabilité vers la variable certaine Y égale à 0 dans \mathbb{R} .

- On pose, pour tout entier n , $Z_n = X_n + Y_n$. Quelle est la limite en loi de la suite Z_n ?
- Soit Y_n une variable aléatoire dont la loi est définie par $P(Y_n = 0) = 1 - 1/n$ et $P(Y_n = 1) = 1/n$. Montrer que la suite Y_n converge en probabilité vers 0. Construire une suite de variables aléatoires Z_n possédant un moment d'ordre 2 et qui converge en loi vers la variable aléatoire normale centrée réduite, sans que la variance de Z_n tende vers 1.

Exercice 8. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. On considère la suite de $U_n = U \cdot 1_{[1/n, 1]}$. Montrer que $(U_n)_n$ converge presque sûrement vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$.

Exercice 9. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite iid Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Pour tout $n \geq 1$ on pose $Y_n = X_n + X_{n+1}$.

- Déterminer la loi de Y_n et calculer $E[Y_n]$ et $\text{Var}(Y_n)$.
- Soit $T_n = (Y_1 + \dots + Y_n)/n$. Calculer $E[T_n]$ et $\text{Var}(T_n)$.
- Montrer que la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la v.a. constante p .

Exercice 10. Une compagnie d'assurance assure 500 navires pour une somme de 6 millions chacun. Chaque navire a chaque année une probabilité égale à 0.001 de subir un sinistre majeur couvert par l'assurance. Soit X le nombre de navires perdus en une année. Donner la loi de X , son espérance et sa variance. Quelles réserves doit posséder la compagnie d'assurance pour être sûre de pouvoir payer les indemnités avec une probabilité égale à 0.999 à la fin de chaque année ? Une seconde compagnie d'assurance assure également 500 navires dans les mêmes conditions que la précédente. Les compagnies ont-elles intérêt à fusionner ?