

Exercice 1. Soit  $(M_n)_{n \geq 0}$  une martingale par rapport à une filtration  $(F_n)_{n \geq 0}$ , telle que  $E(M_n^2) < +\infty$  pour tout  $n \geq 0$ . Soit

$$A_n = \sum_{i=1}^n E[M_i^2 | F_{i-1}] \quad (1)$$

Montrer que  $M_n^2 - A_n$  est une  $(F_n)_{n \geq 0}$ -martingale.

Exercice 2. Soit  $(Y_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a. i.i.d. avec  $P(Y_i = 1) = p = 1 - P(Y_i = -1)$ . Soit  $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  (et  $S_0 = 0$ ). Montrer que les processus  $(W_n)_{n \geq 0}$  et  $(M_n)_{n \geq 0}$  définis par

$$W_n = S_n - 2np, \quad W_0 = 0$$

et

$$M_n = \frac{1-p}{p}^{S_n}, \quad M_0 = 1$$

sont des martingales par rapport à la filtration naturelle des  $Y_n$ :  $F_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$  pour  $n \geq 1$  et  $F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ .

Exercice 3. Soit  $G$  une fonction convexe et croissante, de dérivée à droite  $g$ . On note  $S_n = \sup_{0 \leq k \leq n} X_k$ .

a) Montrer que si  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une sous-martingale positive,

$$H_n = G(S_n) - (S_n - X_n)g(S_n)$$

est une sous-martingale. (on utilisera la propriété suivante : si  $f$  est une fonction croissante convexe, on a  $f(x) - (x - y)g(x) \leq f(y) - (y - x)g(y)$  pour  $x \geq y$ .)

$$(S_{n+1} - X_{n+1})g(S_{n+1}) = (S_{n+1} - X_{n+1})g(S_n).$$

$$H_{n+1} - H_n = (S_{n+1} - X_{n+1})g(S_n) - (S_n - X_n)g(S_n).$$

b) En déduire que si  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une sous-martingale positive nulle en 0, pour tout  $p > 1$

$$E(S_N^p) \leq \frac{p}{p-1} E[X_N S_N^{p-1}].$$

Puis en déduire (en utilisant l'inégalité de Hölder) qu'il existe une constante  $C_p$  qui ne dépend pas de  $X$  telle que pour tout  $p > 1$

$$E(S_N^p) \leq C_p E[X_N^p].$$

c) En utilisant la fonction  $G(x) = (x - K)_+$ , montrer que si  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une sous-martingale positive

$$E(S_N - K) \leq \frac{E[X_N]}{K}.$$

**Exercice 11. (une urne à boules) :** On dispose d'une infinité de boules rouges et vertes. A l'instant 0, une urne contient une boule de chaque couleur et on effectue une succession de tirages d'urne par la règle suivante: on tire une boule de l'urne au hasard et on la remet dans l'urne en ajoutant une boule du même couleur. Soit  $S_n$  le nombre de boules rouges au temps  $n$ , et  $X_n = S_n / (n+2)$  la proportion de boules rouges au temps  $n$ .

- a) Montrer que la suite  $(S_n)_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov et que

$$\mathbb{P}[f(S_{n+1}) | S_n] = f(S_n + 1) \frac{S_n}{n+2} + f(S_n) \frac{n+2 - S_n}{n+2}.$$

- b) Montrer que  $X_n$  est une martingale par rapport à la filtration naturelle et calculer  $\mathbb{E}(X_n)$ .

- c) Montrer que  $X_n \rightarrow X$  presque sûrement et dans  $L^1$ .

- d) Pour tout  $k \geq 1$  soit

$$Z_n^{(k)} = \frac{S_n(S_n+1) \cdots (S_n+k-1)}{(n+2) \cdots (n+k+1)}.$$

Montrer que  $(Z_n^{(k)})_{n \geq 0}$  est une martingale pour tout  $k \geq 1$  et calculer  $\mathbb{E}[Z_n^{(k)}]$ .

- e) Montrer que

$$\mathbb{E}[X^k] = \mathbb{E}[Z_0^{(k)}] = \frac{1}{k+1}$$

- f) Par un calcul de fonction caractéristique en déduire que la v.a.  $X$  suit une loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 12.** Soient  $(Y_n)_{n \geq 1}$  v.a. i.i.d.,  $Y_n \geq 0$  et  $\mathbb{E}(Y_n) = 1$ . Soit  $X_n = \prod_{k=1}^n Y_k$  pour tout  $n \geq 1$  et  $X_0 = 1$ .

- a) Montrer que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une martingale par rapport à la filtration engendrée par les  $(Y_n)_{n \geq 1}$  ( $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$  pour  $n \geq 1$  et  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ )
- b) Supposons que  $\mathbb{E} Y_1 < 1$  pour quelque  $\epsilon > 0$ . Montrer que  $\mathbb{E}[\log Y_1] < 0$  et utiliser la loi des grands nombres pour  $\log X_n/n$  pour montrer que si  $\mathbb{P}(Y_1 = 1) < 1$  alors

$$\lim_n X_n = 0 \quad p.s.$$

- c) Soit maintenant  $Z_n = \max(Y_1, \dots, Y_n)$ . Montrer qu'il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $\mathbb{E}[\log Z_n] < 0$  et conclure que si  $\mathbb{P}(Y_1 = 1) < 1$  alors

$$\lim_n X_n = 0 \quad p.s.$$

sans hypothèses supplémentaires sur  $(Y_n)_{n \geq 0}$ .

- d) En déduire que pour la convergence de  $X_n \rightarrow X$  dans le théorème de Doob n'a pas lieu dans  $L^1(\mathbb{P})$  mais seulement presque sûrement.