

Corrigé Pre-examen

[Durée deux heures. Aucun document n'est autorisé. Tous les exercices sont indépendantes. Seule les réponses soigneusement justifiées seront prise en compte.]

Exercice 1. Soit μ sur \mathbb{N} une probabilité telle que $\mu(x) > 0$ pour tout $x > 0$ et telle que $\mu(0) = 0$. On pose $p_x = \mu(x-1)/\mu(x)$ (quantité éventuellement infinie). On définit une matrice de transition sur \mathbb{N} par

$$P(0, y) = \mu(y), \quad P(x, y) = \begin{cases} p_x & \text{si } y = x-1 \\ 1-p_x & \text{si } y = x \end{cases}, \quad x \geq 1, y \geq 0.$$

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P . Soit $(F_n = (X_0, \dots, X_n))_{n \geq 0}$ la filtration engendrée par $(X_n)_{n \geq 0}$. On pose $S_x = \inf \{n \geq 0 : X_n = x\}$ et $T_x = \inf \{n \geq 1 : X_n = x\}$.

- Calculer $E[X_{n+1}/F_n]$ en fonction de X_n et μ .
- Montrer que la chaîne est irréductible.
- La chaîne est-elle apériodique?
- Soit $x \geq 1$. Montrer que $P_x(S_0 < +\infty) = 1$. En déduire que la chaîne est récurrente.
- Montrer que $\mu < \nu$ est une condition suffisante de récurrence positive.
- On pose $u(x) = E_x[S_0]$. Écrire le système d'équations satisfaites par $u(x)$. Vérifier que ce système possède une solution donnée par

$$u(x) = \sum_{k=1}^x \frac{1}{k}, \quad x \geq 1.$$

On admettra que le système admet une seule solution.

- En déduire que

$$\log(x) \leq u(x) \leq \log(x) + \frac{1}{x^2}$$

est une condition nécessaire et suffisante de récurrence positive.

- On choisit maintenant $\mu(x) = 1/(x(1+x))$. Vérifier que c'est bien une probabilité et calculer $E_0[T_0]$.
- (Avec la méthode de la question précédente) Soit $x \in \mathbb{N}$, que peut-on dire sur le comportement asymptotique de $P_x(X_n = 0)$ quand $n \rightarrow \infty$?

Solution. a) On a que

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} / X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = x_{n+1} / X_n = x_n)$$

$$= \begin{cases} 1/x_n & \text{si } x_{n+1} > 0 \text{ et } 0 < x_{n+1} < x_n \\ 0 & \text{si } x_{n+1} > 0 \text{ et } x_{n+1} \geq x_n \\ \mu(x) & \text{si } x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

alors

$$E[X_{n+1}/F_n] = E[X_{n+1}/X_n] = 1_{X_n > 0} \frac{1}{X_n} \sum_{x=0}^{X_n-1} x + 1_{X_n=0} X_n = 1$$

b) Soit $0 < y < x$, alors $P(x, y) = 1/x > 0$ et $P(0, y) = (y) > 0$ pour tout $y > 0$. Soit $0 < x < y$ alors $P(x, 0) = 1/x$ et $P(0, y) = (y) > 0$ donc $P^2(x, y) > 0$. On vient de montrer que pour tout x, y il existe n tel que $P^n(x, y) > 0$, donc la chaîne est irréductible. En fait elle est fortement irréductible car si $0 < y < x$ on a aussi $P^2(x, y) > P(x, 0)P(0, y) = (y)/x > 0$ et $P^2(0, y) > P(0, y+1)P(y+1, y) > (y+1)/(y+1) > 0$. Donc $P^2(x, y) > 0$ pour tout $x, y > 0$.

c) On a que $P^2(0, 0) > P(0, 1)P(1, 0) = (1) > 0$ et $P^3(0, 0) = P(0, 2)P(2, 1)P(1, 0) = (2)/2 > 0$ et donc $\{2, 3\} \subset R(0)$ et la période de 0 est 1. Etant la chaîne irréductible tout les états ont la même période, donc la chaîne est aperiodique.

d) Pour tout $n \geq 0$ on a que $X_{n+1} < X_n$ et donc

$$P_x(S_0 > x) = P_x(S_0 > x, 0 \leq X_1 < X_0 < x) = 0$$

donc $P_x(S_0 \leq x) = 1$ ce qui donne $P_x(S_0 < +\infty) = 1$ pour tout $x > 0$. Mais par la propriété de Markov

$$P_0(T_0 < +\infty) = \sum_{x>0} P(0, x)P_x(S_0 < +\infty) = \sum_{x>0} (x) = 1$$

et donc la chaîne est récurrente.

e) On a $E_x[S_0] < \infty$ car $P_x(S_0 \leq x) = 1$. Et encore par la propriété de Markov on obtient

$$E_0[T_0] = 1 + \sum_{x>0} (x)E_x[S_0] = 1 + \sum_{x>0} x(x) = 1 + \sum_{x>0} x^2 < \infty$$

qui donne la récurrence positive dans le cas $\sum_{x>0} x^2 < \infty$.

f) Par Markov on a

$$u(x) = 1 + \frac{1}{x} \sum_{y=0}^{x-1} u(y), \quad x > 0$$

et $u(0) = 0$. Alors pour tout $x > 0$

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{x} \sum_{y=0}^{x-1} u(y) &= 1 + \frac{1}{x} \sum_{y=1}^{x-1} \left(1 + \frac{1}{y} \sum_{k=0}^{y-1} u(k) \right) = 1 + \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{x-1} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{x-1} \frac{x}{k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{x-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^x \frac{1}{k} = u(x). \end{aligned}$$

Par unicité on a $E_x[S_0] = \sum_{k=1}^x \frac{1}{k}$.

g) On peut alors écrire $E_0[T_0] = 1 + \sum_{x>0} (x)E_x[S_0] = 1 + \sum_{x>0} (x)u(x)$ et du fait que $(x)/\log x \rightarrow 1$ pour $x \rightarrow \infty$ on en déduit que la condition nécessaire et suffisante pour avoir $E_0[T_0] < \infty$ est que $\sum_{x>0} \log x (x) < \infty$.

h) On a

$$(x) = \frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

et donc

$$u(x) = \frac{1}{x} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1/n} = 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} E_0[T_0] &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{x(1+x)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{\pi^2}{6} < +\infty \\ u(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{x(1+x)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{\pi^2}{6} < +\infty \end{aligned}$$

donc la chaîne est récurrente positive.

i) La chaîne est fortement irréductible car $P^2(x, y) > 0$ pour tout x, y donc on a convergence vers l'équilibre et $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, y) = \pi(y) = 1/E_0[T_0]$ pour tout $x, y \in \mathbb{N}$. On obtient que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_x(X_n = 0) = \frac{1}{E_0[T_0]} = \frac{1}{1 + \pi^2/6}.$$

Exercice 2.

a) Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une martingale telle que $E[M_n^2] < +\infty$ et soit

$$A_n = \sum_{k=1}^n E[(M_k - M_{k-1})^2 | \mathcal{F}_{k-1}]$$

pour tout $n \geq 1$ et $A_0 = 0$. Montrer que $M_n^2 - A_n$ est une martingale.

b) Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} c-à-d $X_{n+1} = X_n + Z_{n+1}$ où $(Z_n)_{n \geq 1}$ est une suite iid telle que $P(Z_n = \pm 1) = 1/2$. On suppose $X_0 = 0$. Montrer que $X_n^2 - n$ est une martingale par rapport à la filtration engendrée par les $(X_n)_{n \geq 0}$.

c) Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov sur l'ensemble E de matrice de transition P . Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que

$$M_n = f(X_n) - \sum_{k=0}^{n-1} [f(X_k) - Pf(X_k)], \quad n \geq 1$$

est une martingale par rapport à la filtration engendrée par les $(X_n)_{n \geq 0}$. (On rappelle que $Pf(x) = \sum_{y \in E} f(y) P(x, y)$).

d) Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ la martingale introduite à la question précédente. Montrer que

$$M_n^2 - \sum_{k=0}^{n-1} [P(f^2)(X_k) - (Pf(X_k))^2], \quad n \geq 1$$

est une martingale par rapport à la filtration engendrée par les $(X_n)_{n \geq 0}$. (par définition $f^2(x) = (f(x))^2$ pour tout $x \in E$)

Solution. a) Voir cours.

b) Soit $Y_n = X_n^2 - n$. $Y_n \in \mathcal{F}_n$ donc il est un processus adapté. De plus $|Y_n| \leq 2n$ ce qui donne l'intégrabilité. Il nous reste à vérifier la condition de martingale.

$$Y_n = X_{n+1}^2 - (n+1) = Z_{n+1}^2 + 2X_n Z_{n+1} + X_n^2 - (n+1) = Z_{n+1}^2 + 2X_n Z_{n+1} - 1 + Y_n$$

et

$$E[Y_n/F_n] = E[Z_{n+1}^2 + 2X_n Z_{n+1}]/F_n = E[Z_1^2] + 2X_n E[Z_1] = 0$$

pour tout $n \geq 0$ et donc $(Y_n)_{n \geq 0}$ est une martingale.

c), d) A faire....