

Convergence et théorèmes limites

Préliminaires

Notation. Si $u \in \mathbb{R}^d$ on note par $\|u\|_r$ la norme L^r du vecteur u : $\|u\|_r = (\sum_{i=1}^d |u_i|^r)^{1/r}$. Comme toutes les normes sont équivalentes dans \mathbb{R}^d on prendra $r=1$ et on notera $\|u\| = \|u\|_1 = \sum_{i=1}^d |u_i|$. Si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées i.i.d. On notera X_1, \dots, X_n, \dots ou $(X_n)_{n \geq 1}$ une telle suite (infinie) de v.a.

Convergence en loi

Théorème 1. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^d et X une v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^d . Les conditions suivantes sont équivalentes (c-à-d chacune d'entre elles implique toutes les autres):

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]$ pour toute fonction $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x) = F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ point de continuité de F_X .
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]$ pour toute fonction $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée.

Si une de ces conditions est vérifiée (et donc toutes) on dit que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi (ou en distribution) vers X (et l'on note $X_n \xrightarrow{L} X$).

Rappel. Dans \mathbb{R}^d , $F_X(x) = F_X(x_1, \dots, x_d) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d)$.

Exemple 2. On considère la suite de v.a. $(X_n)_{n \geq 1}$ telle que X_n est une v.a. uniforme discrète à valeurs dans $\{1/n, 2/n, 3/n, \dots, (n-1)/n, 1\}$.

$$X_n(t) = \mathbb{E}[e^{itX_n}] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{itk/n} = \frac{e^{it/n} - e^{it(n+1)/n}}{1 - e^{it/n}} = \frac{e^{it/n} - e^{it}}{1 - e^{it/n}}$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{it/n} - e^{it}}{1 - e^{it/n}} = \frac{e^{it} - e^{it}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{it} - 1}{it}.$$

Si $X \sim U([0, 1])$ alors

$$X(t) = \int_0^1 e^{itx} dx = \frac{e^{it} - 1}{it}$$

et donc $X_n \xrightarrow{L} X$.

Exemple 3. Soient U_1, U_2, \dots des v.a. iid $U([0, 1])$. On pose $X_n = n \min_{1 \leq k \leq n} U_k$. Montrons que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une v.a. $X \sim E(1)$. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F_{X_n}(x) &= P(n \min_{1 \leq k \leq n} U_k \leq x) = 1 - P(n \min_{1 \leq k \leq n} U_k > x) = 1 - P(U_1 > x/n)^n \\ &= 1 - P(1 - P(U_1 \leq x/n))^n = 1 - P(1 - F_{U_1}(x/n))^n \end{aligned}$$

et donc

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 1 - [1 - F_d(x/n)]^n & \text{si } x/n \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x/n < 0 \\ 1 & \text{si } x/n > 1 \end{cases}$$

Fixons $x > 0$ et choisissons n suffisamment grand tel que $x/n \in [0, 1]$. Alors

$$\lim_n F_{X_n}(x) = \lim_n 1 - [1 - F_d(x/n)]^n = 1 - e^{-x}.$$

Donc

$$\lim_n F_{X_n}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} = F_X(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exemple 4. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. discrètes telles que $P(X_n = 1/n) = 1$. Alors $X_n \xrightarrow{L} X$ ou X est la v.a. identiquement nulle $P(X = 0) = 1$. On voit bien que $F_{X_n}(0) = 0$ pour tout n mais que $F_X(0) = 1$. Donc en général on ne pourrait pas avoir convergence de $F_{X_n}(t)$ vers $F_X(t)$ dans tous les points $t \in \mathbb{R}$.

Exemple 5. Reprenons l'exemple 2 de convergence vers la loi uniforme dans $[0, 1]$. Montrons que $X_n \xrightarrow{L} X$ en utilisant le critère (iii) du théorème 6. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée, par les propriétés de l'intégrale de Riemann on a que

$$E[f(X_n)] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) I_{0 < x < 1} dx = E[f(X)].$$

Convergence en probabilité

Définition 6 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^d et X une v.a. dans \mathbb{R}^d telles que $(X_n)_{n \geq 1}$ et X soient définies sur le même espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) . On dit que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers X et on note $X_n \xrightarrow{P} X$ si pour tout $\epsilon > 0$

$$\lim_n P(|X_n - X| > \epsilon) = 0.$$

Exemple 7. Soit $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$. On dit que $X_n \xrightarrow{P} 0$ si $X_n \in [0, 1/n]$. Montrons que $X_n \xrightarrow{P} 0$. Soit $\epsilon > 0$ on doit prouver que $P(|X_n| > \epsilon) \rightarrow 0$. Mais

$$P(|X_n| > \epsilon) = P(X_n > \epsilon) = P(I_{U < 1/n} > \epsilon) = P(U < 1/n) = 1/n \rightarrow 0$$

pour $n \rightarrow \infty$.

Loi faible des grandes nombres

Définition 8 Soit (X_1, \dots, X_n) un vecteur aléatoire. On définit la moyenne empirique des $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ par $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

Exemple 9. Soient les X_i des v.a. iid de loi $N(0, 1)$ alors $\bar{X}_n \sim N(0, 1/n)$. Donc pour tout $\epsilon > 0$

$$P(|\bar{X}_n| > \epsilon) = P(|Z| > \epsilon \sqrt{n}) = P(Z > \epsilon \sqrt{n}) + P(Z < -\epsilon \sqrt{n}) = 2P(Z < -\epsilon \sqrt{n}) = 2F_Z(-\epsilon \sqrt{n})$$

où $Z \sim N(0, 1)$. Cette quantité est strictement décroissante et donc converge vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. Étant donné que $\varepsilon > 0$ est arbitraire cela implique que $X_n \xrightarrow{P} 0$.

Lemme 10. (Inégalité de Markov) Soit X est une v.a. non négative et intégrable (c-à-d $E[X] < +\infty$) alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E[X]}{\varepsilon}$$

Démonstration Dans le cas où X admet une densité on a que

$$P(X \geq \varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} I_{[x, +\infty[}(x) f(x) dx = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{x}{x} f(x) dx = \frac{E[X]}{\varepsilon}$$

car pour tout $x \geq 0$ on a $I_{[x, +\infty[}(x) \leq x/\varepsilon$. En général on observe que le même argument peut être appliqué à la fonction espérance mathématique

$$P(X \geq \varepsilon) = E[I_{[x, +\infty[}(X)] \leq E[X/\varepsilon]$$

car si $F \leq G$ alors $0 \leq E[F] \leq E[G]$.

Lemme 11. (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) Soit X est une v.a. réelle telle que $E[X] = \mu$ et $\text{Var}(X) < +\infty$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a que

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{E[(X - \mu)^2]}{\varepsilon^2} = \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

Démonstration En utilisant l'inégalité de Markov avec $(X - \mu)^2$ on obtient que

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) = P((X - \mu)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E[(X - \mu)^2]}{\varepsilon^2} = \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

Théorème 12. (Loi faible des grandes nombres) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite iid tel que $\text{Var}(X_i) < +\infty$ et $\mu = E[X_i]$. On définit $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ la moyenne empirique des X_j . Alors

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$$

Démonstration On a que

$$\text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n^2} [\text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n)] = \frac{\text{Var}(X_1)}{n}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, par l'inégalité de Tchebychev

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\text{Var}(X_1)}{n \varepsilon^2} \rightarrow 0$$

pour $n \rightarrow \infty$. Donc $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$

Convergence presque sûre

Définition 13 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^d et soit X une v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^d , telles que X_n et X sont définies sur le même espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) . On dit que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement (ou fortement) vers X et on note $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ si $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1$. Autrement dit si l'ensemble $A = \{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}$ est tel que $P(A) = 1$.

Exemple 14. Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite iid de v.a. $\text{Ber}(p)$ et $X_n = Y_1 + \dots + Y_n$. Montrons que X_n/n^2 converge presque sûrement vers 0. En effet l'ensemble $A = \{\omega : |X_n|/n^2 \leq 1/n \text{ pour tout } n\}$ est tel que $P(A) = 1$. Donc pour $\omega \in A$ on a que $0 \leq |X_n(\omega)|/n^2 \leq 1/n$ ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega)/n^2 = 0$ pour tout $\omega \in A$ et donc que

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n/n^2 = 0) = P(A) = 1$$

qui montre la convergence presque sûre.

Théorème 15 (Loi forte des grandes nombres) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite iid telle que les X_n soient intégrables (c-à-d. $E|X_1| < \infty$). Alors

$$X_n/n \xrightarrow{p.s.} E[X_1].$$

Exemple 16. Soient X_1, X_2, \dots des v.a. iid $E(X_i) = 0$ ($\sigma^2 > 0$). X_1 est intégrable ($E|X_1| = \sigma < \infty$). Alors

$$X_n/n \xrightarrow{p.s.} 0.$$

Convergence en moyenne d'ordre

Définition 17 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^d et X une v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^d . On suppose que $E(|X_n|^r) < +\infty$ pour tout $n \geq 1$ et que $E(|X|^r) < +\infty$. On dit que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge vers X dans L^r (ou en moyenne d'ordre r), et on note $X_n \xrightarrow{L^r} X$ (ou $X_n \xrightarrow{r} X$) si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|^r) = 0.$$

En particulier: si $d = 1$, $(X_n)_{n \geq 1}$ et X sont des v.a. réelles alors $X_n \xrightarrow{L^r} X$ si $E[|X|^r] < \infty$, $E[|X_n|^r] < \infty$ et $E[|X_n - X|^r] \rightarrow 0$.

Exemple 18. Soit $r > 0$. Soit $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$. On considère $(X_n)_{n \geq 1}$ telle que

$$X_n = n I_{[0, 1/n]}(U)$$

Quelle est la condition sur r pour que $X_n \xrightarrow{L^r} 0$?

$$E[|X_n - 0|^r] = E[|X_n|^r] = E[X_n^r] = E[n^r I_{[0, 1/n]}(U)] = n^r P(U \leq 1/n) = n^r/n$$

et n^{r-1} converge vers 0 ssi $r < 1$. On remarque que $X_n \xrightarrow{p.s.} 0$ et aussi en probabilité (et en loi). Voir plus avant pour les liens entre les modes de convergence.

Théorème 19. (Inégalité de Hölder) Soient X et Y deux v.a. réelles définies sur le même espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) . Si $r, s > 1$ sont tels que $r^{-1} + s^{-1} = 1$ et si $E[|X|^r] < \infty$ et $E[|Y|^s] < \infty$ alors

$$E[|XY|] \leq (E[|X|^r])^{1/r} (E[|Y|^s])^{1/s}.$$

Corollaire 20. Soient $p > 0$ et $p > q > 0$. On suppose que $E[|X|^p] < \infty$ alors $E[|X|^q] \leq (E[|X|^p])^{p/q}$ et $E[|X|^q] < \infty$.

Quelques propriétés de la convergence

Proposition 21. Soit $r > 0$ et $0 < s < r$. Alors $X_n \xrightarrow{r} X \implies X_n \xrightarrow{s} X$.

Démonstration Par l'inégalité de Hölder $E[|X_n - X|^s] \leq (E[|X_n - X|^r])^{s/r}$. Donc si $X_n \xrightarrow{r} X$ alors $E[|X_n - X|^r] \rightarrow 0$ et $E[|X_n - X|^s] \rightarrow 0$.

Proposition 22. Si $X_n \xrightarrow{1} X$ alors $E[X_n] \rightarrow E[X]$.

Démonstration Par hypothèse on a que $E[|X_n|] < \infty$, $E[|X|] < \infty$ et $E[|X_n - X|] \rightarrow 0$. Donc

$$|E[X] - E[X_n]| = |E[X - X_n]| \leq E[|X - X_n|] \rightarrow 0.$$

car $E[|X_n - X|] \leq |X_n - X| \leq |X_n| + |X|$.

Proposition 23. $X_n \xrightarrow{2} a \in \mathbb{R}$ (on dit que X_n converge vers la constante a en moyenne quadratique) ssi $E[X_n] \rightarrow a$ et $\text{Var}(X_n) \rightarrow 0$.

Démonstration Si $X_n \xrightarrow{2} a \in \mathbb{R}$ alors $E[|X_n - a|^2] \rightarrow 0$. Soit $\mu_n = E[X_n]$

$$\begin{aligned} E[|X_n - a|^2] &= E[(X_n - \mu_n + \mu_n - a)^2] = E[(X_n - \mu_n)^2] + 2E[(X_n - \mu_n)(\mu_n - a)] + (\mu_n - a)^2 \\ &= \text{Var}(X_n) + (\mu_n - a)^2 \end{aligned}$$

et donc $\text{Var}(X_n) + (\mu_n - a)^2 \rightarrow 0$ ce qui entraîne que $\text{Var}(X_n) \rightarrow 0$ et que $\mu_n \rightarrow a$. Réciproquement si $\text{Var}(X_n) \rightarrow 0$ et $\mu_n \rightarrow a$ alors $E[|X_n - a|^2] = \text{Var}(X_n) + (\mu_n - a)^2 \rightarrow 0$.

Liens entre les modes de convergence

Proposition 24.

i. La convergence presque sûre entraîne la convergence en probabilité :

$$X_n \xrightarrow{p.s.} X \implies X_n \xrightarrow{P} X$$

ii. La convergence en probabilité entraîne la convergence en loi

$$X_n \xrightarrow{P} X \implies X_n \xrightarrow{L} X$$

iii. $X_n \xrightarrow{L} X \iff X_n \xrightarrow{P} X$ si $X = c \in \mathbb{R}$

iv. La convergence dans L^r entraîne la convergence en probabilité

$$X_n \xrightarrow{r} X \implies X_n \xrightarrow{P} X.$$

Théorème 25. (de continuité) Soit $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$ une fonction continue. Alors

i. $X_n \xrightarrow{L} X \implies g(X_n) \xrightarrow{L} g(X)$

ii. $X_n \xrightarrow{P} X \implies g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$

iii. $X_n \xrightarrow{p.s.} X \implies g(X_n) \xrightarrow{p.s.} g(X)$

Théorème 26. (Slusky) Soient $(X_n)_{n \geq 1}$, $(A_n)_{n \geq 1}$ et $(B_n)_{n \geq 1}$ trois suites de v.a.. Soient X une v.a. et $a, b \in \mathbb{R}$. Si $X_n \xrightarrow{L} X$, $A_n \xrightarrow{P} a$ et $B_n \xrightarrow{P} b$ alors

$$A_n X_n + B_n \xrightarrow{L} aX + b$$

Exemple 27. Soient les X_i des v.a. iid de loi $G(\lambda, \mu)$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$. $E[X_i] = \mu/\lambda$ et $\text{Var}(X_i) = \mu/\lambda^2$. Alors $X_1 + \dots + X_n \sim G(n\lambda, \mu)$ et $\bar{X}_n \sim G(n\lambda, n\mu)$. Par la loi faible des grandes nombres $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu/\lambda$ donc on obtient aussi que $G(n\lambda, n\mu) \xrightarrow{L} \mu/\lambda$.

Théorème 28 Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite telle que

$$E[|X_n|] < +\infty$$

alors $X_n \rightarrow 0$ presque sûrement.

Démonstration Considérons la v.a. positive $S_n = \sum_{i=1}^n |X_i|$. Par hypothèse on a que $E[S] < +\infty$, donc la probabilité que $S_n < +\infty$ est égale à 1. Mais $S_n < +\infty$ implique que la série $\sum_{i=1}^n |X_i|$ est convergente et donc que $|X_n| \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow +\infty$. Comme cela arrive avec proba 1 on vient de montrer que $P(\lim_n X_n = 0) = 1$ et donc que $X_n \rightarrow 0$ presque sûrement.

Le théorème central limite (TCL)

Théorème 29 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite iid tel que $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < +\infty$. Soit $\mu = E[X_1]$. Alors

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{L} N(0, 1)$$

Démonstration Considérons la suite des v.a. $Y_n = (X_n - \mu)/\sigma$. On a que $E[Y_n] = 0$ et $\text{Var}(Y_n) = 1$. De plus

$$\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} = Z_n.$$

Considérons la fonction caractéristique de

$$Z_n(t) = E[e^{itZ_n}] = E[e^{it(Y_1 + \dots + Y_n)/\sqrt{n}}] = (E[e^{itY_1/\sqrt{n}}])^n = (\varphi_1(t/\sqrt{n}))^n$$

Dans la limite $n \rightarrow \infty$ on peut substituer un développement limité de φ_1 autour de 0 :

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(0) + \varphi_1'(0)t + \frac{\varphi_1''(0)}{2}t^2 + O(t^3)$$

avec $\varphi_1(0) = E[Y_1] = 0$ et $\varphi_1''(0) = E[Y_1^2] = 1$ et donc

$$Z_n(t) = (1 - \frac{t^2}{2n} + O(t^3/n^{3/2}))^n \rightarrow \exp(-\frac{t^2}{2})$$

qui est la fonction caractéristique d'une gaussienne standard.

Exemple 30. Soient X_1, X_2, \dots des v.a. iid $E(\cdot)$. $\text{Var}(X_1) = 1/\sigma^2$ et $E[X_1] = 1/\mu$. Par le TCL on a

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n/\mu}{\sqrt{n}/\sigma} \xrightarrow{L} N(0, 1) \quad \text{ou} \quad \bar{n}(\sum_{i=1}^n X_i - n/\mu) \xrightarrow{L} N(0, 1/\sigma^2).$$

Théorème 31 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite iid à d valeurs et Σ la matrice de covariance de X_1 est définie (c-à-d si $\Sigma_{ii} < \infty$ pour $i = 1, \dots, d$) alors

$$\bar{n}(\sum_{i=1}^n X_i - nE[X_1]) \xrightarrow{L} N_d(0, \Sigma).$$

La méthode

Théorème 32a (méthode, cas unidimensionnel) Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles. On suppose que $\bar{n}(Y_n) \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2)$. Si $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continûment dérivable au point $g(0)$ (c-à-d est C^1 dans un voisinage du point 0) alors

$$\bar{n}(g(Y_n) - g(0)) \xrightarrow{L} N(0, (g'(0))^2 \sigma^2).$$

Exemple 33. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite iid $E(\cdot)$. Soit $Y_n = \bar{X}_n$. Par le TCL on a que $\bar{n}(\bar{X}_n - 1/\mu) \xrightarrow{L} N(0, 1/\sigma^2)$. Soit $g(x) = 1/x$. $g'(x) = -1/x^2$ et $g'(1/\mu) = -\mu^2$. Donc $(g(1/\bar{X}_n) - g(1/\mu))^2 = \mu^4$ et g est continûment dérivable au point $1/\mu$. Par la méthode on a que

$$\bar{n} \left(\frac{1}{\bar{X}_n} - \frac{1}{\mu} \right) \xrightarrow{L} N(0, \mu^2)$$

Exemple 34. (Normalisation de la variance) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite iid Bernoulli(p) (avec $p \in]0, 1[$), $\sigma^2 = \text{Var}(X_1) = p(1-p)$. Par le TCL $\bar{n}(\sum_{i=1}^n X_i - np) \xrightarrow{L} N(0, p(1-p))$. Peut-on trouver une application $g:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ (qui ne dépend pas de p) telle que $\bar{n}(g(\sum_{i=1}^n X_i) - g(np)) \xrightarrow{L} N(0, 1)$?

Supposons que une telle application existe et qu'elle soit continûment dérivable au point p . Par la méthode on doit avoir que $g'(p)^2 p(1-p) = 1$ et $g'(p)^2 = 1/(p(1-p))$ pour tout $p \in]0, 1[$. Une solution possible est

$$g(p) = \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \quad g(p) = 2 \arcsin(\sqrt{p})$$

donc on a que

$$\sqrt{2} \sqrt{n} (\arcsin(\sqrt{X_n/n}) - \arcsin(\sqrt{p})) \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, 1).$$