

TD1. Espérance conditionnelle.

Exercice 1. (Processus de branchement) Soit $\{X_{m,r} : m, r \in \mathbb{N}\}$ une double suite des v.a. iid. discrètes et à valeurs ≥ 0 . On pose $Z_0 = 1$ et $Z_n = X_{n,1} + \dots + X_{n,Z_{n-1}}$ pour $n \geq 1$. Montrer que la fonction génératrice $f_n(\cdot) = E[Z_n]$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$ satisfait

$$f_0(\lambda) = 1 \quad f_n = f_{n-1} \circ f \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Exercice 2. Soient X_1 et X_2 des v.a. indépendantes et $\text{Poisson}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Soit $Y = X_1 + X_2$. Calculer $P(X_1 = k | Y)$.

Exercice 3. Soient $G \in \mathcal{F}$, $X \in L^2(\mathcal{F})$, $Z \in L^2(G)$ et $Y = E[X|G]$, montrer que

$$E[|X - E[X|G]|^2] = E[|X - Y|^2] + E[|Y - E[X|G]|^2]$$

et en déduire que

$$E[|X - Y|^2] = \inf_{Z \in L^2(G)} E[|X - Z|^2].$$

Exercice 4. Soit (X_0, X_1, \dots, X_n) un vecteur Gaussien de moyenne nulle et matrice de covariance $\Sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Montrer que

$$E[X_0 | X_1, \dots, X_n] = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i \quad \text{p.s.}$$

et déterminer les poids α_i en fonction de Σ .

Exercice 5. Soit $E[Y|G] = X$ et $E[X^2] = E[Y^2] < +\infty$ en déduire que $X = Y$ a.s.

Exercice 6. Prouver une inégalité de Chebishev conditionnelle.

Exercice 7. Prouver l'inégalité de Cauchy-Schwartz conditionnelle

$$E[|XY| | G]^2 \leq E[|X|^2 | G] E[|Y|^2 | G].$$

Exercice 8. Donner un exemple avec $\mathcal{G} = \{a, b, c\}$ pour montrer que, en général,

$$E[E[X|F_1]|F_2] \neq E[E[X|F_2]|F_1].$$

Exercice 9. Montrer les implications suivantes

$$X, Y \text{ indépendantes} \iff E[X|Y] = E[X] \iff E[XY] = E[X]E[Y]$$

et trouver des v.a. $X, Y \in \{0, 1\}$ pour montrer que les implications inverses sont fausses.