7600017 - Introdução à Física Computacional - 2022
Prof. Guilherme Sipahi

Terceiro Projeto

17/10/2022

Entrega: 06/11/2020

Instruções

- Use o diretório **proj3_#*usp*** em `/public/IntroFisComp22/projeto3`
- Deixe no diretório apenas 4 arquivos, de nomes `exerA.f90`, `exerB.f90`, `grafB.pdf`, `exerC1.f90`, `exerC2.f90` e `grafC.pdf`
- Os códigos devem seguir rigorosamente os padrões especificados abaixo para `entrada/saída`
- **Use precisão dupla em seus resultados**
- **Se deixar de fazer algum exercício não inclua o arquivo correspondente**

Método de Euler

O objetivo deste projeto é o cálculo da velocidade de uma bicicleta em função do tempo, levando-se em conta os efeitos resistivos (hidrodinâmicos) do ar.

A) Ignoremos inicialmente o efeito resistivo do ar e a segunda lei de Newton nos dá

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \ , \tag{1}$$

sendo m a massa do sistema ***ciclista* + *bicicleta*** e F a força que o ciclista emprega (devido à sua energia interna) para o movimento. Supomos aqui que não haja atritos nas engrenagens da bicicleta de forma que praticamente toda a força empregada pelo ciclista é transmitida ao movimento do sistema ***ciclista* + *bicicleta***. A questão é: como se calcula F? Podemos, ao invés de aplicar (1), tratar o problema de outra forma. Estudos fisiológicos de ciclistas corredores mostraram que a potência

P fornecida pelos ciclistas é de aproximadamente 400 W para corridas de duração da ordem de uma hora. Então temos

$$\frac{dE}{dt} = P \tag{2}$$

e

$$mv\frac{dv}{dt} = P \ , \tag{3}$$

o que implica em

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P}{mv} \ . \tag{4}$$

De novo, desprezamos o atrito devido às engrenagens da bicicleta e o atrito da roda com o solo. Resolvendo-se a equação (4) temos

$$v(t) = \sqrt{v_0^2 + 2Pt/m} \ . \tag{5}$$

Discretizando a equação (4) acima usando a relação para a derivada de dois pontos para frente, i.e.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t} \quad \text{com } t_i = i \ \Delta t \quad \text{e} \quad i = 0, 1, 2, \cdots \quad , \tag{6}$$

temos a relação

$$v_{i+1} = v_i + \frac{P}{mv_i}\Delta t + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \quad , \tag{7}$$

conhecida como **método de Euler**.

Escreva um código que calcule, usando a equação (7), a velocidade como função do tempo. Use $m = 80\ kg$ para a massa do sistema ciclista+bicicleta e $P = 400\ W$. Leia a partir do terminal, em uma única linha, o intervalo de tempo total T (em s), Δt (em segundos) e a velocidade inicial v_0 (pequeno, mas diferente de zero) em m/s. A saída do programa deve ser o arquivo `velA_out.dat`, com a velocidade em função do tempo para um intervalo de tempo T, no formato

```
t    v(t)
```

A primeira linha do arquivo deve ser

```
0    v0
```

e o número de linhas do arquivo será 1 + int($T/\Delta t$).

B) Vamos agora considerar o efeito da resistência do ar. Em geral esperamos que a força resistiva obedeça à seguinte relação

$$f_{res} \sim \gamma_1 v - \gamma_2 v^2 \ , \tag{8}$$

onde o primeiro termo domina para pequenas velocidades e o segundo para grandes velocidades. No presente caso, o primeiro termo, que pode ser estimado pela lei de Stokes para o escoamento hidrodinâmico de objetos simples, pode ser desprezado frente ao segundo termo. O coeficiente γ_2 pode ser estimado levando-se em conta que no intervalo dt a massa de ar que se choca com o ciclista é dada por

$$m_{ar} \approx \rho \ A \ v \ dt \tag{9}$$

sendo A a área de choque e ρ a densidade do ar. Se esta massa de ar, ao chocar-se com o ciclista, adquire a mesma velocidade v da bicicleta, temos que a energia dada ao ar é

$$E_{ar} \approx m_{ar} v^2/2 \ . \tag{10}$$

Esta energia é transferida pela força resistiva

$$F_{res} \ v \ dt = W_{res} = E_{ar} \tag{11}$$

e temos que

$$F_{res} = C \ \rho \ A \ v^2 \ , \tag{12}$$

onde C é o coeficiente de arrasto (*drag coefficient*). No presente cálculo $C = 1/2$, o que representa uma boa aproximação. Se inserirmos a equação (12) em (7) teremos a equação

$$v_{i+1} = v_i + \frac{P}{m v_i} \Delta t - \frac{C \rho A v_i^2}{m} \Delta t + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \ . \tag{13}$$

Generalize o programa da tarefa **A)** levando em conta o efeito da resistência do ar. Leia a partir do terminal, todos em uma única linha, T, Δt, v_0 e a área A, nessa mesma ordem.

Obs: use $m = 80$ kg, $P = 400$ W e $\rho = 1.2 \ kg/m^3$. Também note que suas respostas devem ser referentes a um intervalo T, isto é, a velocidade do ciclista após um tempo T (lido), etc. Teste seu programa para tempo T igual a 3 horas.

O seu programa deve conter **duas saídas diferentes**. A primeira, escrita diretamente para o **terminal**, deve ter o seguinte formato:

- resposta à primeira questão abaixo, com o número de linhas que for necessário.
- respostas às próximas 4 questões, uma por linha (sem linhas adicionais entre as respostas); a resposta numérica deve ser a última palavra da linha.
  Cuidado: Não coloque unidades ou pontuação após a resposta!

Questões:

1. Porque o ciclista corredor normalmente se curva em corridas? Porque os ciclistas correm em grupo? Por que é mais vantajoso um corredor colar-se atrás de outro ao invés de ultrapassá-lo diretamente?
2. Qual o espaço total percorrido pelo ciclista após o tempo T?
3. Qual a velocidade final do ciclista após o tempo T?
4. Em que instante é alcançada a velocidade terminal?
5. Qual a velocidade média do ciclista no período de tempo T?

A segunda saída, que você pode chamar **velB_out.dat**, deve possibilitar a confecção do gráfico abaixo, com a comparação de seus resultados para diversos valores da área A. Use $v_0 = 0.1\ m/s$ e tempo de 20 minutos. Use $\Delta t = 0.1\ s$.

Seu gráfico deve conter:

- curva da solução exata sem resistência do ar
- curvas para 3 valores diferentes da área $\mathbf{A = 1/2,\ 1,\ 2}$.

O gráfico deve ser preparado com `gnuplot` e salvo como arquivo `pdf`, de nome `grafB.pdf`.

Sugestão: use o mesmo formato do arquivo do exercício A.

Método de Euler-Cromer

O método de Euler é simples e muito útil. Entretanto, como todo método numérico, pode não ser apropriado para todos os casos. Usando o movimento de um pêndulo, vamos avaliar as suas limitações do método de Euler e propor o uso de outro método que fazendo uma pequena modificação, possibilita a sua resolução.

C) Consideremos o pêndulo da figura abaixo, onde uma massa m é suspensa por uma haste de comprimento l e massa desprezível. Indicamos com θ o ângulo em relação à vertical. A equação de Newton para a componente tangencial do movimento é

$$m\ a_\theta = m\ l \frac{d_\theta^2}{dt^2} = -m\ g \sin\theta$$

e consequentemente temos a equação diferencial

$$\frac{d_\theta^2}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta\ .$$

Caso as oscilações sejam pequenas, usamos $sin\theta \approx \theta$ e obtemos a aproximação harmônica do problema

$$\frac{d_\theta^2}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta\ .$$

cuja solução é dada por

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega_0\ t + \phi)\ , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}\ ,$$

sendo θ_0 e ϕ constantes que fixam o movimento.

Escreva um código que resolva numericamente o pêndulo dentro da aproximação harmônica. Uma possível discretização das equações acima é (método de Euler)

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\theta \rightarrow \omega_{i+1} = \omega_i - \frac{g}{l}\theta_i \Delta t$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \rightarrow \theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i \Delta t\ ,$$

onde $t = i\ \Delta t$. Faça sempre $-\pi \leq \theta \leq \pi$, isto é, quando θ ultrapassar π faça $\theta \rightarrow \theta - 2\pi$ ou, se θ ficar menor que $-\pi$, faça $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$. Neste programa calcule também $E(t)$, sendo E a energia total do sistema. Você notará que a solução está incorreta e que a energia total não é constante. Isto nos diz que a discretização escolhida não é adequada. Uma ligeira modificação no método de Euler consertará este problema. Para isso é suficiente considerar as equações (de Euler-Cromer)

$$\omega_{i+1} = \omega_i - \frac{g}{l}\theta_i \Delta t$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \omega_{i+1} \Delta t\ ,$$

Escreva um programa com estas novas equações e mostre graficamente a ausência dos problemas antes apontados.

Em seus programas leia (cada um em uma linha) a partir do terminal:

- o ângulo $\boldsymbol{\theta_0}$
- o comprimento da haste **l**
- a massa **m**
- $\boldsymbol{\Delta}$**t**
- o tempo total $\mathbf{T_{sim}}$ de simulação

Use $\omega_0 = 0\ rad/s$. No código **exerC1.f90** use o método de Euler e no código **exerC2.f90** o método de Euler-Cromer. A saída, nos arquivos **exerC1_out.dat** e **exerC2_out.dat**, deve ser no formato:

```
t     theta(t)
```

Além disso, você deve preparar o arquivo **grafC.pdf** com dois gráficos:

- o primeiro com a solução exata para $\theta(t)$, comparando-a com a solução numérica pelo método de Euler (código **exerC1.f90**) e com o método de Euler-Cromer (código **exerC2.f90**);

- o segundo com a energia total (cinética mais potencial) como função do tempo, para o caso 1 (método de Euler) e para o caso 2 (método de Euler-Cromer).

Para esses gráficos use $m = 1\ kg$, $l = 1\ m$, $\Delta t = 0.04\ s$ e $\theta_0 = 10°$. (Converta o ângulo para radianos em seu programa!) Acompanhe o movimento por $10\ s$, começando do máximo deslocamento ($\theta = \theta_0$) e com velocidade zero.