

# 7600017 - Introdução à Física Computacional - 2022

## Sexto Projeto

07/11/2022

Entrega: 12/12/2022

## Instruções

- Use o diretório `proj6_#usp` em `/home/public/IntroFisComp22/projeto6`
- Deixe no diretório os arquivos abaixo:
  - `exerA.f90`, `tabA1_out.dat`, `grafA.ps`
- Os códigos devem seguir rigorosamente os padrões especificados abaixo para entrada/saída
- Use precisão dupla em seus resultados

## Exercícios

Consideraremos neste projeto o efeito da atração gravitacional entre os Planetas e o Sol. De acordo com a lei da gravitação de Newton, a força de atração gravitacional entre um Planeta (de massa  $M_P$ ) e o Sol (de massa  $M_S$ ) é dada por:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M_S M_P}{r^3} \vec{r}$$

sendo  $G$  a constante gravitacional de dimensão  $[G] = [L^3 T^{-2} M^{-1}]$  e  $\vec{r}$  o vetor distância entre o Sol e o Planeta. Como os raios médios das translações dos Planetas, bem como

seus períodos, são números grandes no sistema MKS, é conveniente usarmos unidades astronômicas de espaço e de tempo. A unidade de espaço é o UA (unidade astronômica,  $1 \text{ UA} \approx 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ ), correspondendo à distância média Terra-Sol, e a unidade de tempo é o ano ( $1 \text{ ano} \approx 3.2 \times 10^7 \text{ s}$ ), período de translação da Terra. A unidade de massa correspondente pode ser obtida aproximando-se a órbita terrestre como circular:

$$\frac{M_T v^2}{r} = \text{força centrípeta} = \text{força gravitacional} = \frac{GM_S M_T}{r^2}.$$

Assim, obtemos

$$GM_S = v^2 r = \left( \frac{2\pi r}{\text{ano}} \right)^2 = 4\pi^2 \frac{(UA)^3}{\text{ano}^2}$$

ou seja  $GM_S = 4\pi^2$  nas unidades astronômicas.

Vamos considerar inicialmente o problema de dois corpos (Sol + Planeta). Neste caso a conservação de momento angular (válida para forças centrais) implica em um movimento planar. Consideremos o Sol parado na origem  $(x_S, y_S) = (0, 0)$ . A equação de movimento para o planeta — com coordenadas  $(x, y)$  — será

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{F_{Gx}}{M_P} = -G \frac{M_S}{r^3} x$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{F_{Gy}}{M_P} = -G \frac{M_S}{r^3} y$$

sendo  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

No presente projeto vamos usar, ao invés do método de Euler-Cromer, o método de Verlet, que se baseia na expansão de Taylor

$$y(t_i \pm \Delta t) = y(t_i) \pm \frac{dy}{dt_i} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dt_i^2} (\Delta t)^2 \pm \frac{1}{6} \frac{d^3 y}{dt_i^3} (\Delta t)^3 + \dots$$

Somando-se as expressões com os dois sinais obtemos

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + \frac{d^2 y}{dt_i^2} (\Delta t)^2 + \mathcal{O}((\Delta t)^4),$$

que é uma ordem mais precisa do que o método de Euler que usamos até aqui. Contudo, para calcular  $y_2$  precisamos de  $y_1$  e de  $y_0$ . Isso é “consertado” usando-se, por exemplo, na primeira iteração o método de Euler  $y_1 = y_0 + v_0 \Delta t$ , onde  $y_0$  e  $v_0$  são a posição e a velocidade iniciais (dadas). (Ver mais detalhes no Capítulo 4 e no Apêndice A do livro Computational Physics de N. J. Giordano e H. Nakanishi.)

**TAREFA A:** Implemente o método acima para calcular o movimento de um Planeta ao redor do Sol, usando unidades astronômicas.

Em seu programa **exerA.f90** leia (cada um em uma linha) a partir do terminal:

- $r$  (em UA), i.e. a distância do Planeta à origem, equivalente, no caso circular, ao raio da órbita do Planeta
- $v_0$ , a velocidade inicial
- $\Delta t$ , intervalo de tempo usado para a integração das equações do movimento

Use  $x(0) = r$ ,  $y(0) = 0$ ,  $v_x(0) = 0$  e  $v_y(0) = v_0$ . A saída do programa será dada por:

1. arquivo **trajA1\_out.dat** contendo em cada linha  $t$   $x(t)$   $y(t)$  para um período completo do movimento (circular ou elíptico);
2. comente sobre a escolha do valor de  $\Delta t$  para obter órbitas estáveis; este resultado deve ser dado no terminal.

Elabore também os seguintes arquivos:

- **tabA1\_out.dat**, contendo uma tabela, com valores de  $T^2/R^3$  para os Planetas, onde  $T$  e  $R$  são os períodos e raios das respectivas órbitas, usando os dados fornecidos na tabela acima (para o caso de órbita circular). Sua tabela deve conter 3 colunas, i.e., nome do Planeta, velocidade inicial  $v_0$  e razão  $T^2/R^3$ . A primeira linha da tabela pode ser usada para os títulos das colunas.
- **grafA.pdf**, contendo os gráficos da trajetória no plano  $x - y$ , i.e. pontos  $x(t)$ ,  $y(t)$  para os quatro quartos do período, de forma a ilustrar a lei das áreas (portanto são 4 gráficos em sequência). Neste caso use uma órbita elíptica.

Planeta	massa ( $kg$ )	raio ( $UA$ )	excentricidade
Mercúrio	$2.4 \cdot 10^{23}$	0.39	0.206
Venus	$4.9 \cdot 10^{24}$	0.72	0.007
Terra	$6.0 \cdot 10^{24}$	1.00	0.017
Marte	$6.6 \cdot 10^{23}$	1.52	0.093
Júpiter	$1.9 \cdot 10^{27}$	5.20	0.048
Saturno	$5.7 \cdot 10^{26}$	9.24	0.056
Urano	$8.8 \cdot 10^{25}$	19.19	0.046
Netuno	$1.03 \cdot 10^{26}$	30.06	0.010
Plutão	$1.31 \cdot 10^{22}$	39.53	0.248

Tabela 1: A massa do Sol é  $\approx 2.0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ .

**TAREFA B:** Podemos agora generalizar o programa anterior para incluir todos os Planetas. Para facilitar, colocaremos os Planetas em um único plano. Diferentemente do problema de dois corpos, a órbita de cada Planeta não será mais exatamente periódica. Para testar esta afirmação consideraremos o problema de 3 corpos em que temos Terra ( $M_T$ ), Sol ( $M_S$ ) e Júpiter ( $M_J$ ). Neste caso as equações de movimento para a Terra ( $x_T$ ,  $y_T$ ) são

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x_T}{dt^2} &= -G \frac{M_S}{r_{T-S}^3} x_T - G \frac{M_J}{r_{T-J}^3} (x_T - x_J) \\ \frac{d^2 y_T}{dt^2} &= -G \frac{M_S}{r_{T-S}^3} y_T - G \frac{M_J}{r_{T-J}^3} (y_T - y_J)\end{aligned}$$

onde  $r_{T-S} = \sqrt{(x_T - x_S)^2 + (y_T - y_S)^2}$  e  $r_{T-J} = \sqrt{(x_T - x_J)^2 + (y_T - y_J)^2}$  as equações para Júpiter ( $x_J$ ,  $y_J$ ) são análogas.

**Apenas para crédito adicional:** faça como desafio (com formato livre, deixe os arquivos na pasta, identificando-os com a letra “B” em algum lugar do nome) o cálculo da órbita da Terra colocando Júpiter na posição e velocidade que teria caso sua órbita fosse circular (no problema de dois corpos). Mostre que agora a órbita terrestre não é mais periódica. Multiplique a massa de Júpiter por 100 e 1000 e veja os efeitos mais acentuados.