Lista de Revisão: Notação de Somatório

Vídeos

As seguintes playlists disponíveis no Khan Academy (www.khanacademy.org) tem conteúdos que estão relacionados com esta lista. Não é necessário assistir a todos os vídeos, fica a critério de cada aluno conforme sua necessidade pessoal. Nem todos os vídeos estão disponíveis na plataforma em português, então é possível que para o link funcionar você precise mudar a configuração da sua conta para o idioma inglês (mas ainda assim tem legendas em português na maioria dos vídeos):

- Notação Σ para somas: https://goo.gl/gi2GCy
- Escrevendo séries com notação Σ: https://goo.gl/UJ4PGX
- Propriedades da notação Σ: https://goo.gl/6w6mGk

A Notação de Somatório Σ

Quando escrevemos somas, utilizamos o símbolo da adição $+$ entre dois elementos, por exemplo, $a + b$ significa "somar o elemento a com o elemento b". Porém, quando somamos uma quantidade grande de elementos ou quando os elementos da soma podem ser escritos em termos de um elemento genérico, passa a ser útil utilizar a notação de somatório (Σ).

Por exemplo, se temos 3 números que vamos representar por x_1, x_2 e x_3, podemos escrever sua soma como $x_1 + x_2 + x_3$ ou então, utilizando a notação de somatório, utilizar:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \Sigma_{i=1}^{3} x_i$$

O Σ indica que estamos fazendo uma soma dos elementos que estão na sua frente, no caso os x_i. O índice inferior, $i = 1$ significa que o primeiro x_i da soma será x_1 (quando $i = 1$, que será somado com o próximo elemento, x_2 e iremos repetir o procedimento até que $i = n$, que é o número na parte superior do somatório. Os somatórios são usados apenas quando os i são discretos e, no nosso exemplo, eles estão variando de 1 em 1.

É usual, para representar somas finitas mas sem um número específico, utilizar como último elemento o "n". Neste caso, dizemos que a soma está variando de i indo de 1 (mas é possível começar em outros valores) até n. De forma geral, podemos definir o somatório dos x_i da seguinte maneira:

Definição 1.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$$

Exemplo 1. Para $n = 4$ com $x_i = i^2$, temos:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

Propriedades

Propriedade 1. Soma da constante

$$\sum_{i=1}^{n} c = \underbrace{c + c + c + \cdots + c}_{n \text{ vezes}} = nc$$

Propriedade 2. Multiplicação por uma constante

$$\sum_{i=1}^{n} cx_i = cx_1 + cx_2 + cx_3 + \cdots + cx_n = c(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = c\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Propriedade 3. Somatório da soma

$$\sum_{i=1}^{n} (ax_i + by_i) = a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Somatórios duplos

Considere os seguintes dados:

Tabela 1:

		Coluna			
		1	**2**	**3**	**4**
	1	21	471	278	61
Linha	**2**	410	372	337	472
	3	368	238	313	124

Vamos convencionar que x_{ij} denota o elemento da linha i e da coluna j, por exemplo, x_{34} corresponde ao elemento da linha 3 e coluna 4, logo, $x_{34} = 124$.

Se queremos escrever em termos de somatório a soma das linhas 1 e 2, devemos fazer uma soma nas linhas (isto é, uma soma em i) e outra soma nas colunas (soma em j), da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = \sum_{j=1}^{4} x_{1j} + \sum_{j=1}^{4} x_{2j} = x_{11} + \cdots + x_{14} + x_{21} + \cdots + x_{24} = 2422$$

Observe que primeiro "fixamos" um i para depois fazer a soma em j. A soma de fora inicia em $i = 1$ e a partir daí "resolvemos" o segundo somatório para todos os valores de j para somente então modificar para $i = 2$ e repetir o procedimento.

Exercícios propostos

Exercício 1. Para os dados da tabela 1, resolva:

- $\sum_{i=1}^{3} x_{i2}$
- $\sum_{j=3}^{4} x_{1j}$
- $\sum_{i=2}^{3} \sum_{j=2}^{4} x_{ij}$

Exercício 2. Expanda as seguintes notações de somatório:

- $\sum_{i=2}^{5} x_i$
- $\sum_{i=3}^{8} a_i x_i$
- $\sum_{i=1}^{4} b x_i$
- $\sum_{i=1}^{n} a_{i+1} x^{i-1}$
- $\sum_{i=1}^{3} (x_i - i)^{i-1}$

Exercício 3. Escreva as seguintes expressões em notação Σ:

- $2x_1(x_1 - 1) + 3x_2(x_2 - 2) + 4x_3(x_3 - 3)$
- $a_2(x_3 + 2) + a_3(x_4 + 3) + a_4(x_5 + 4)$
- $-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \cdots \quad x \neq 0$
- $1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{x^n}$

Exercício 4. [1] Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória[2] tal que $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $Var[X_i] = \sigma^2$, calcule $\mathbb{E}[\bar{X}]$ e $Var[\bar{X}]$, onde $\bar{X} := \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

Exercício 5. Seja a função s^2 definida por:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória tal que $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $Var[X_i] = \sigma^2$, calcule o valor esperado de s^2.

Referências

[1] ANDERSON, David Ray; SWEENEY, Dennis J.; WILLIAMS, Thomas Arthur,. Estatística aplicada à administração e economia. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, c2007. 597p. ISBN 978-85-221-0521-2 : (broch.).

[2] CHIANG, Alpha C. Matemática para economistas. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, c1982. 684 p. ISBN (Broch.).

[1] Para os exercícios 4 e 5 é necessário que o aluno tenha noções básicas de propriedades de variáveis aleatórias.

[2] Isso significa que $\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \ X_i$ tem a mesma distribuição.