

# **Revisão de Probabilidade e Estatística**

**Preparatória para as disciplinas de Econometria I e Econometria Bayesiana do PPGECON/UFSC**

Aishameriane Schmidt

Última revisão: 2 de março de 2018

Por favor, envie observações, comentários e correções para [aishameriane@gmail.com](mailto:aishameriane@gmail.com)

# Sumário

<b>1</b>	<b>Noções de teoria dos conjuntos</b>	<b>4</b>
1.1	Eventos . . . . .	6
1.2	Exercícios . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Probabilidade</b>	<b>13</b>
2.1	Definições básicas . . . . .	13
2.1.1	Exercícios . . . . .	16
2.2	Independência de eventos e probabilidade condicional . . . . .	18
2.3	Exercícios . . . . .	26
2.4	Variáveis aleatórias . . . . .	30
2.5	Caracterização . . . . .	30
2.5.1	O espaço de probabilidade definido por uma v.a. . . . .	31
2.5.2	Variáveis aleatórias discretas . . . . .	32
2.5.3	Distribuição de Poisson . . . . .	35
2.5.4	Principais distribuições discretas . . . . .	40
2.5.5	Variáveis aleatórias contínuas . . . . .	42
2.5.6	Principais modelos contínuos . . . . .	43
2.6	Distribuição Normal (retirado de Stern and Izbicki (2016)) . . . . .	45
2.6.1	Distribuição Exponencial . . . . .	47
2.7	Distribuição Gama (retirado de Stern and Izbicki (2016)) . . . . .	51
2.8	Distribuição Beta (retirado de Stern and Izbicki (2016)) . . . . .	53
2.9	Exercícios . . . . .	55
2.10	Esperança, variância e covariância de v.a.'s . . . . .	58
2.10.1	Definições básicas . . . . .	58
2.10.2	Propriedades . . . . .	58
2.10.3	Exercícios . . . . .	62
2.11	Distribuição de Vetores Aleatórios . . . . .	68
2.11.1	Esperança Condicional de Variáveis Aleatórias . . . . .	74

# Introdução

Ao longo destas notas iremos estudar tópicos de probabilidade e de estatística que são pré-requisitos para as disciplinas de Econometria I e econometria Bayesiana no mestrado/doutorado. As aulas são mais focadas em teoria, porém na medida do possível exemplos computacionais em R serão apresentados. **Essas notas não são totalmente autorais, muitas das definições foram apenas copiadas de livros, então por favor não distribua elas.** Os exercícios, sempre que possível, estarão com a resolução ou o gabarito (mas não há garantias disso). Se necessário, procure a Aisha (e também nos casos de discordância com a solução). É possível que exercícios estejam repetidos. Nem todos conteúdos e nem todos exercícios serão vistos em sala de aula.

## Qual a diferença entre probabilidade e estatística?

A probabilidade é, para a estatística, aquilo que o cálculo representa para as engenharias: uma ferramenta. A probabilidade é considerada por muitas pessoas como uma sub-área da matemática. Apesar de estar relacionada com a estatística através de uma certa *noção de incerteza*, a probabilidade não se ocupa de dados, isto é, não há uma amostra, nem uma população e muito menos um problema de inferência. Neste sentido, a estatística é formada de métodos para descrição de amostras, populações e de inferência do primeiro grupo para o segundo. Já a probabilidade acaba lidando com noções mais abstratas e, na sua forma axiomática, não irá tratar de dados coletados.

Iremos começar as aulas revisando as noções matemáticas de conjuntos para então fazer a revisão de probabilidade, que será a maior parte das aulas. O programa das aulas pode ser acessado aqui: <https://www.overleaf.com/13950545czgdmbmghvzm#/54077450/>.

# 1 Noções de teoria dos conjuntos

Esta seção foi retirada de [Lima \(1982\)](#).

Um **conjunto** (ou coleção) é formado por objetos (que são os seus **elementos**). Eles têm como relação básica a relação de **pertinência**, que possibilita relacionar elementos com conjuntos.

Quando  $x$  (objeto) é um elemento do conjunto  $A$ , dizemos que “ $x$  pertence a  $A$ ” e denotamos por  $x \in A$ . Caso contrário, diremos que “ $x$  não pertence a  $A$ ” e denotaremos por  $x \notin A$ .

Um conjunto fica bem especificado (definido) quando há uma regra clara que permita avaliar se um elemento qualquer pertence ou não ao conjunto.

Uma vez que existem conjuntos de tamanho muito grande, se torna difícil sempre que nos referirmos a ele, listarmos todos seus elementos. Sendo assim, podemos utilizar uma notação mais econômica que, através de uma regra de pertinência (ou propriedade), deixa o conjunto totalmente especificado.

Por exemplo, podemos ter uma situação onde a propriedade  $P$  define totalmente o conjunto  $A$ : se um objeto  $x$  atende  $P$ , então  $x \in A$ , caso contrário,  $x \notin A$ . Então, podemos escrever:

$$A = \{x : x \text{ tem a propriedade } P\}$$

Os dois pontos na expressão acima fazem o papel da expressão “*tal que*”. Outra notação usual, ao invés dos dois pontos, é a barra vertical “|”.

Quando estamos falando de um subconjunto  $B \subset A$  ( $B$  é subconjunto de  $A$  ou, equivalentemente,  $B$  está contido em  $A$ ), podemos escrever:

$$B = \{x \in A : x \text{ tem a propriedade } P\}$$

A expressão acima significa que o conjunto  $B$  são os elementos  $x$  do conjunto  $A$  que satisfazem a propriedade  $P$ . Por exemplo, se queremos nos referir aos números reais maiores que 10, podemos definir:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 10\}$$

Se  $A$  e  $B$  forem conjuntos, podemos compará-los através da relação de “*inclusão*” ( $\subset$ ). Dizemos que  $B$  é subconjunto de  $A$  se todo elemento de  $B$  também<sup>1</sup> é elemento de  $A$  e denotamos por  $B \subset A$ . Neste caso, também são utilizados os termos:  $B$  é *parte* de  $A$ ,  $B$  está *incluído* em  $A$  ou ainda  $B$  está *contido* em  $A$ . Em alguns livros encontramos as notações  $B \subset A$  para indicar que  $B$  está contido em  $A$  (mas não é igual),  $B \subseteq A$  para indicar que  $B$  está contido e pode ser igual a  $A$  ou ainda  $B \subsetneq A$  para indicar  $B$  está contido mas não é igual a  $A$ . Nestas notas, iremos utilizar  $B \subset A$  como “ $B$  está contido em  $A$  e eles podem ser iguais”.

---

<sup>1</sup>Observe que não necessariamente a recíproca é verdadeira, não é necessário que todo elemento de  $A$  seja elemento de  $B$ . De fato, quando a recíproca é verdadeira, teremos que os dois conjuntos são iguais.

Quando não há elemento de  $A$  que satisfaça  $P$ , o conjunto  $B$  não tem nenhum elemento e é denominado *conjunto vazio* ( $\emptyset$ ). Definimos  $\emptyset$  da seguinte forma:

$$\forall x, x \notin \emptyset$$

(lê-se: qualquer que seja  $x$ ,  $x$  não pertence ao vazio)

Uma coisa importante a se notar é que existe diferença entre  $\emptyset$  e  $\{\emptyset\}$ . O primeiro é o conjunto vazio, o segundo é um conjunto cujo único elemento é o conjunto vazio. Para entender melhor a diferença, considere o seguinte exercício:

**Exercício 1.** Analise se são verdadeiras ou falsas as seguintes sentenças:

- a.  $\emptyset \in \emptyset$ .
- b.  $\emptyset \in \{\emptyset\}$ .
- c.  $\{\emptyset\} \in \emptyset$ .
- d.  $\emptyset \subset \emptyset$ .
- e.  $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ .
- f.  $\{\emptyset\} \subset \emptyset$ .

**Solução:**

- a. A afirmação significa: “o elemento vazio pertence ao conjunto vazio”. A afirmação é falsa pois o conjunto vazio não tem nenhum elemento.
- b. A afirmação significa: “o vazio é elemento do conjunto que só contém o vazio”. A frase é verdadeira pois no lado esquerdo estamos listando todos os elementos do conjunto à direita, que neste caso só contém o vazio.
- c. A afirmação significa: “o conjunto cujo único elemento é o vazio é elemento do conjunto vazio”. Pela definição do conjunto vazio, sabemos que ele não contém elementos e, portanto, a frase é falsa.
- d. A afirmação significa: “o conjunto vazio está contido no conjunto vazio”. A afirmativa é verdadeira pois todo conjunto contém o conjunto vazio (dizemos que é verdadeira por vacuidade).
- e. A afirmação significa: “o conjunto vazio está contido no conjunto cujo único elemento é o vazio”. Quando comparamos dois conjuntos, precisamos verificar se os elementos de um estão contidos no outro. Como o lado esquerdo não contém elementos, significa, por vacuidade, que todo elemento pertence ao conjunto do lado direito.
- f. A afirmação significa: “o conjunto cujo único elemento é o vazio está contido no vazio”. A afirmação é falsa pois o conjunto do lado esquerdo contém um elemento, enquanto que o conjunto do lado direito não tem elemento, por definição. O único subconjunto do vazio é ele próprio, isto é,  $\emptyset \subset \emptyset$ .

□

## 1.1 Eventos

Em probabilidade, utilizamos muito a teoria de conjuntos principalmente ao falar de probabilidade de eventos. Vamos introduzir algumas definições básicas e ver alguns exercícios (ainda sem probabilidade). Algumas definições desta seção foram retiradas de [Stern and Izbicki \(2016\)](#).

### Definição 1.1.1. Espaço Amostral

O conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento particular é chamado de *espaço amostral* e é denotado por  $\Omega$  (lê-se *ômega*). Este conjunto pode ser: enumerável, finito ou infinito, se houver uma bijeção  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  ou ainda, pode ser não enumerável (por exemplo, no caso de  $\Omega = \mathbb{R}$ ).

**Exemplo 1.1.2. Espaço amostral do lançamento de uma moeda** Imagine que você faz o experimento de lançar uma moeda. Considere que  $K$  significa que o resultado foi cara e  $C$  significa que o resultado foi coroa. Então,  $\Omega = \{K, C\}$  é o espaço amostral do experimento.

### Exemplo 1.1.3. Espaço amostral do tempo até uma lâmpada queimar

Considere agora o seguinte experimento: você observa uma lâmpada e está interessado no tempo, em minutos, até a lâmpada queimar<sup>2</sup>. Então,  $\Omega = [0, +\infty)$ .

**Definição 1.1.4. Evento** Um *evento* é qualquer coleção de possíveis resultados de um experimento, isto é, qualquer subconjunto de  $\Omega$  (incluindo o próprio  $\Omega$ ).

### Definição 1.1.5. Relação entre eventos

$$A \subset B \iff x \in A \Rightarrow x \in B \quad (1)$$

$$A = B \iff A \subset B \text{ e } B \subset A \quad (2)$$

A equação 1 significa, em palavras, que *o conjunto A está contido no conjunto B se e somente se qualquer elemento de A está pertencendo a B*. Já a equação 2 fala da igualdade de dois conjuntos e estabelece que *dois conjuntos A e B serão iguais se e somente se A está contido B e B está contido em A*. Se usarmos 1 em 2, chegamos à conclusão que *A e B serão iguais se e somente se qualquer elemento de A está em B e qualquer elemento de B está em A*.

Podemos definir ainda três operações de conjuntos: união, interseção e complementar.

**Definição 1.1.6. União de dois eventos** A união de dois eventos  $A$  e  $B$ , representada por  $A \cup B$ , é o conjunto de elementos que percentem a  $A$ ,  $B$  ou ambos:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\} \quad (3)$$

De maneira mais geral, seja  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de conjuntos.  $x \in \Omega$  é um elemento da união de  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , denotada por  $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ , se e somente se existe um  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in A_n$ . Isto é,  $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \in \Omega : \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \in A_n\}$

**Definição 1.1.7. Interseção de dois eventos** A interseção de dois eventos  $A$  e  $B$ , representada por  $A \cap B$ , é o conjunto de elementos que percentem a  $A$  e, ao mesmo tempo,  $B$ :

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\} \quad (4)$$

---

<sup>2</sup>O intervalo será fechado em zero se considerarmos que é possível que a lâmpada já esteja queimada quando iniciamos o teste.

Dizemos ainda que  $A$  e  $B$  são conjuntos disjuntos se, e somente se,  $A \cap B = \emptyset$ .

De maneira mais geral, seja  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de conjuntos.  $x \in \Omega$  é um elemento da interseção de  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , denotada por  $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ , se e somente se para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in A_n$ . Isto é,  $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \in \Omega : \text{para todo } n \in \mathbb{N}, x \in A_n\}$ .

**Definição 1.1.8. Complementar de um evento** Seja  $A$  um conjunto.  $x$  é um elemento de  $A^c$  se e somente se  $x \notin A$ . Isto é, o complemento de  $A$  é definido formalmente como  $A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\}$ .

### Exemplo 1.1.9. Complementar do espaço amostral

O complementar do espaço amostral ( $\Omega$ ) é o conjunto vazio,  $\emptyset$ , pois:

- Como o conjunto  $\emptyset$  não possui elementos,  $\forall \omega \in \Omega$  temos que  $\omega \notin \emptyset$ ;
- Uma vez que  $\emptyset$  não possui elementos, não há elemento de  $\emptyset$  que pertença a  $\Omega$  (dizemos que isso ocorre por *vacuidade*).

O exemplo pode parecer confuso, pois também por vacuidade temos que  $\emptyset \subset \Omega$ . Para mais detalhes, aqui tem uma explicação boa: <http://mathcentral.uregina.ca/qq/database/qq.09.06/narayan1.html>. Em geral, o complementar não será subconjunto do conjunto original.

**Teorema 1.1.10** (Leis de De Morgan). *Seja  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de subconjuntos de  $\Omega$ . Então, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,*

- $(\cup_{i=1}^n A_i)^c = \cap_{i=1}^n A_i^c$
- $(\cap_{i=1}^n A_i)^c = \cup_{i=1}^n A_i^c$

Além disso,

- $(\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i)^c = \cap_{i \in \mathbb{N}} A_i^c$
- $(\cap_{i \in \mathbb{N}} A_i)^c = \cup_{i \in \mathbb{N}} A_i^c$

**Definição 1.1.11** (Partição). *Seja  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de conjuntos. Dizemos que  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  particiona  $\Omega$  se:*

- para todo  $i, j \in \mathbb{N}$  tal que  $i \neq j$ ,  $A_i$  e  $A_j$  são disjuntos.
- $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$ .

## 1.2 Exercícios

**Exercício 2.** Prove as seguintes propriedades:

- |    |                    |  |
|----|--------------------|--|
| a. | Comutatividade     | $A \cup B = B \cup A$<br>$A \cap B = B \cap A$   |
| b. | Associatividade    | $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$<br>$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$                   |
| c. | Leis distributivas | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$<br>$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ |
| d. | Leis de De Morgan  | $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$<br>$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$                                       |

**Dica:** Para provar que dois conjuntos são iguais, é necessário utilizar a definição 2. É possível que até aqui você tenha trabalhado nessas provas utilizando os diagramas de Venn, porém eles não são considerados como uma prova formal. Por exemplo, vamos fazer a prova da lei distributiva da interseção  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

Queremos mostrar duas coisas:

$$(1) A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(2) A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Observe que, utilizando notação de conjuntos,

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= \{x \in \Omega : x \in A \text{ e } x \in (B \cup C)\} \\ (A \cap B) \cup (A \cap C) &= \{x \in \Omega : x \in (A \cap B) \text{ ou } x \in (A \cap C)\} \end{aligned}$$

Vamos mostrar (1). Tome  $x \in A \cap (B \cup C)$ . Pela definição de interseção, temos que  $x \in A$  (\*) e, ao mesmo tempo,  $x \in (B \cup C)$ . Mas isso implica, pela propriedade de união, que  $x \in B$  ou  $x \in C$ . Juntando com (\*), temos que  $x \in (A \cap B)$  ou  $x \in (A \cap C)$ . Logo,  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

Agora, vamos mostrar (2).

Seja  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . Então,  $x \in (A \cap B)$  ou  $x \in (A \cap C)$ . Abrimos então em dois casos:

**Caso a:**  $x \in (A \cap B)$ . Isso significa que  $x \in A$  e, ao mesmo tempo,  $x \in B$ . Logo,  $x$  pertence à qualquer união de  $B$ , em particular,  $x \in (B \cup C)$ . Logo,  $x \in A \cap (B \cup C)$ .

**Caso b:**  $x \in (A \cap C)$ . Pelo mesmo argumento anterior, isso significa que  $x \in A$  e, ao mesmo tempo,  $x \in C$ . Logo,  $x$  pertence à qualquer união de  $C$ , em particular,  $x \in (C \cup B)$ . Se você provou a propriedade de comutatividade da letra a, pode concluir que  $x \in A \cap (B \cup C)$ .

Vamos resolver o segundo item da parte (d)  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ .

- **Parte 1:** Queremos mostrar que  $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$ , isto é, mostrar que todo elemento de  $(A \cap B)^c$  pertence a  $A^c \cup B^c$ .

Tome  $a \in (A \cap B)^c$ . Então,  $a \notin (A \cap B)$ , pela definição de complementar, de forma que temos três casos possíveis.

Caso 1:  $a \in A$  e  $a \notin B$ . Neste caso,  $a \in B^c$  e portanto está em qualquer união de  $B^c$ , em particular, está em  $A^c \cup B^c$ .

Caso 2:  $a \notin A$  e  $a \in B$ . Neste caso,  $a \in A^c$  e portanto está em qualquer união de  $A^c$ , em particular, está em  $A^c \cup B^c$ .

Caso 3:  $a \notin A$  e  $a \notin B$ . Neste caso,  $a \in A^c$  e  $a \in B^c$  e portanto está em  $A^c \cup B^c$ .

- **Parte 2:** Queremos mostrar que  $(A \cap B)^c \supset A^c \cup B^c$ , isto é, que todo elemento que está em  $A^c \cup B^c$  pertence a  $(A \cap B)^c$ .

Tome  $a \in A^c \cup B^c$  (apesar de estar usando a mesma letra  $a$ , ele não é o mesmo elemento tomado na parte 1!). Então, por se tratar de uma união, novamente temos 3 casos possíveis.

Caso 1:  $a \in A^c$ . Então,  $a \notin A \Rightarrow a \notin A \cap B$ , isto é, o fato de  $a$  não pertencer ao conjunto  $A$  implica que ele não irá pertencer a qualquer interseção de  $A$ , pela própria definição de interseção. Podemos concluir, como  $a$  não está na interseção, que ele está no complementar, isto é,  $a \in (A \cap B)^c$ .

Caso 2: O caso 2 é análogo ao caso 1, supondo que  $a \in B^c$ .

Caso 3: O caso 3 decorre dos casos 1 e 2, isto é, suponha que  $a \in A^c$  e  $a \in B^c$ .

Os outros exercícios são resolvidos de forma similar. Qualquer problema procure a Aishameriane mais próxima.



**Exercício 3.**

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right) \triangle \left[\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right)$$

onde  $A \triangle B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$ .

**Solução:** Vamos verificar o que ocorre nos dois primeiros casos.

1.  $n = 1$

$$\begin{aligned} (0, 1 + 1) \triangle [1, 2 + 1] &= (0, 2) \triangle [1, 3] \\ &= [(0, 2) \cup [1, 3]] \cap [(0, 2)^c \cup [1, 3]^c] \\ &= [(0, 3)] \cap [((-\infty, 0] \cup [2, +\infty)) \cup ((-\infty, 1) \cup [3, +\infty))] \\ &= (0, 3) \cap [(-\infty, 1) \cup [2, \infty)] \\ &= (0, 1) \cup [2, 3] \end{aligned}$$

2.  $n = 2$

$$\begin{aligned} \left(0, 1 + \frac{1}{2}\right) \triangle \left[\frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}\right] &= \left(0, \frac{3}{2}\right) \triangle \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right] \\ &= \left(\left(0, \frac{3}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]\right) \cap \left(\left(0, \frac{3}{2}\right)^c \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]^c\right) \\ &= \left(0, \frac{5}{2}\right) \cap \left[\left((-\infty, 0] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)\right) \cup \left(\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)\right)\right] \\ &= \left(0, \frac{5}{2}\right) \cap \left[\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)\right] \\ &= \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right] \end{aligned}$$

Observe que termos são sempre da forma:

$$(0, a) \triangle [b, c] = (0, b) \cup [a, c]$$

Então, quando  $n \rightarrow \infty$ , teríamos algo como:

$$\left(0, 1 + \frac{1}{n}\right) \triangle \left[\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right] \approx (0, 0) \cup [1, 2]$$

Note que  $\{0\}$  não pertence a nenhum dos conjuntos e que  $[1, 2]$  não está contido no intervalo quando  $n = 1$ , por causa do 1. Sendo assim, a interseção dos conjuntos é igual a  $\{2\}$ . □

**Exercício 4.** Prove as leis de De Morgan do caso geral (teorema 1.1.10).

**Solução:** Vamos fazer a demonstração para o caso finito. O caso infinito é análogo.

- $(\cup_{i=1}^n A_i)^c = \cap_{i=1}^n A_i^c$

( $\Rightarrow$ ) Seja  $a \in (\cup_{i=1}^n A_i)^c$ . Então,  $a \notin A_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , de forma que  $a \in \cap_{i=1}^n A_i^c$ . A ideia é que se  $a$  não está em nenhum  $A_i$ , ele necessariamente está em todos os complementares e portanto, na intersecção destes.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $a \in \cap_{i=1}^n A_i^c$ . Isso significa que,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a \in A_i^c$  e portanto,  $a \notin A_i$ . Assim,  $a \notin \cup_{i=1}^n A_i$ . Concluimos que  $a \in (\cup_{i=1}^n A_i)^c$ .

- $(\cap_{i=1}^n A_i)^c = \cup_{i=1}^n A_i^c$

( $\Rightarrow$ ) Seja  $a \in (\cap_{i=1}^n A_i)^c$ . Então,  $\exists j \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $a \notin A_j$ , de forma que, para este  $j$ ,  $a \in A_j^c$ . Logo,  $a$  está em qualquer união de  $A_j^c$ , em particular,  $a \in \cup_{i=1}^n A_i^c$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $a \in \cup_{i=1}^n A_i^c$ . Então,  $\exists j \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $a \in A_j^c$  e, consequentemente,  $a \notin A_j$ . Logo,  $a \notin \cap_{i=1}^n A_i$  o que significa que  $a \in (\cap_{i=1}^n A_i)^c$ .

□

**Exercício 5.** Mostre que  $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ . Este exercício é útil para conseguirmos escrever um conjunto como a união de conjuntos disjuntos.

**Solução:**

( $\Rightarrow$ ) Seja  $a \in A$ . Temos dois casos:

1.  $a \in B$ .

Então,  $a \in (A \cap B)$ . Logo,  $a \in (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ .

2.  $a \notin B$ .

Então,  $a \in B^c$  e portanto,  $a \in (A \cap B^c)$ . Logo,  $a \in (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $a \in (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ . Então,  $a \in (A \cap B)$  ou  $a \in (A \cap B^c)$ . Se  $a \in (A \cap B)$ , então  $a \in A$  e  $a \in B$ . Se  $a \in (A \cap B^c)$ , então  $a \in A$  e  $a \in B^c$ . Em qualquer um dos casos, vale que  $a \in A$ .

□

**Exercício 6.** Considere  $A$  e  $B$  dois subconjuntos de  $\Omega$ . A *diferença simétrica* entre  $A$  e  $B$  é o conjunto de todos elementos que estão em  $A$  ou em  $B$  mas que não estão em ambos. Escreva a diferença simétrica formalmente utilizando as operações de união, intersecção e/ou complementar. Mostre que a diferença simétrica entre  $A$  e  $B$  é igual à diferença simétrica entre  $A^c$  e  $B^c$ .

**Solução:** Se  $a \in A \Delta B$ , então  $a \in (A \cup B)$ , mas  $a \notin (A \cap B)$ , isto é:

$$\begin{aligned} A \Delta B &= \{a \in \Omega : a \in (A \cup B) \text{ e } a \notin (A \cap B)\} \\ &= \{a \in \Omega : a \in (A \cup B) \text{ e } a \in (A \cap B)^c\} \\ &= \{a \in \Omega : a \in (A \cup B) \text{ e } a \in (A^c \cup B^c)\} \\ &\Rightarrow A \Delta B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \end{aligned}$$

Observe que:

$$\begin{aligned}
A^c \triangle B^c &= (A^c \cup B^c) \cap ((A^c)^c \cup (B^c)^c) \\
&= (A^c \cup B^c) \cap (A \cup B) \\
&= (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \\
&= A \triangle B
\end{aligned}$$

□

**Exercício 7.** Seja  $A = \{2, 4, 6\}$ ,  $B = \{3, 4\}$  com  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Encontre:

- $A \cup B$
- $A \cap B$
- $A \cup B^c$
- $A \cup A^c$  e  $A \cap A^c$
- $B \cup B^c$  e  $B \cap B^c$
- $(A \cup B)^c$
- $(A \cap B)^c$
- $A^c \cap B^c$
- $A \cup \Omega$
- $A^c \cup \Omega$
- $B \cap \Omega$
- $B^c \cap \Omega$

A solução está disponível em: [https://1drv.ms/f/s!AlHDLj\\_7OjaL9kUhUcLJA\\_AIL7ld](https://1drv.ms/f/s!AlHDLj_7OjaL9kUhUcLJA_AIL7ld)

**Exercício 8.** Considere que você está analisando para um dia o evento “A variação do dólar foi negativa em relação ao início do dia” (N) e “A variação do dólar foi positiva em relação ao início do dia” (P). Estamos interessados na variação do dólar em dois dias consecutivos, isto é, se houveram duas variações negativas, duas positivas, etc.

- Como você escreveria formalmente (notação de conjuntos) o espaço amostral  $\Omega$ ?
- Como você escreveria formalmente “Houveram dois dias consecutivos de variação negativa no dólar”? Chame este evento de A.
- Como você escreveria formalmente o evento “Houve pelo menos um dia com variação negativa no dólar”? Chame este evento de B.
- Avalie se  $A \subset B$ .
- Descreva com suas palavras quem é o conjunto  $B^c$ . Escreva-o formalmente.

f.  $A$  e  $B^c$  são disjuntos? Justifique.

A solução está disponível em: [https://1drv.ms/f/s!AlHDLj\\_7OjaL9kUhUcLJA\\_AIL71d](https://1drv.ms/f/s!AlHDLj_7OjaL9kUhUcLJA_AIL71d)

**Exercício 9.** De um grupo de 25 alunos:

- 14 irão comprar itens para fazer churrasco no final de semana;
- 12 irão comprar um chocolate para o professor de Estatística;
- 5 irão fazer o churrasco e comprar o chocolate para o professor.

Quantos alunos não irão nem comprar os itens de churrasco nem o chocolate?

A solução está disponível em: [https://1drv.ms/f/s!AlHDLj\\_7OjaL9kUhUcLJA\\_AIL71d](https://1drv.ms/f/s!AlHDLj_7OjaL9kUhUcLJA_AIL71d)

**Exercício 10.** Escreva o espaço amostral dos seguintes experimentos:

- Duas moedas são lançadas simultaneamente e observa-se a sequência de caras e coroas obtida;
- Um dado é lançado e observa-se a face virada para cima;
- Duas cartas de um baralho são retiradas e observa-se a sequência dos naipes;
- Dois dados são lançados e observa-se as faces viradas para cima;
- Dois dados são lançados e observa-se a soma das duas faces;
- Uma moeda e um dado são lançados e observa-se a face da moeda e do dado viradas para cima;
- Três times  $A, B$  e  $C$  participam de um campeonato de *curling*. Inicialmente o time  $A$  joga contra o time  $B$  e o vencedor joga com o time  $C$  e assim por diante. O campeonato finaliza quando um time ganha duas vezes em seguida ou quando são disputadas, ao todo, quatro partidas. Você está interessado no espaço amostral: resultados possíveis das partidas do torneio.

A solução está disponível em: [https://1drv.ms/f/s!AlHDLj\\_7OjaL9kUhUcLJA\\_AIL71d](https://1drv.ms/f/s!AlHDLj_7OjaL9kUhUcLJA_AIL71d)

**Exercício 11.** Seja o experimento da letra d. do exercício anterior. Defina os seguintes eventos:

- $A$  = a soma das faces dos dois dados é igual a 5;
- $B$  = a face do primeiro dado é menor ou igual a 2.

Determine os eventos  $A$  e  $B$  em termos de  $\Omega$  encontrado anteriormente (isto é, explicita quais resultados de  $\Omega$  pertencem a  $A$  e  $B$ ) e determine os seguintes eventos:

- $A \cup B$ ;
- $A \cap B$ ;
- $A^c$ .

A solução está disponível em: [https://1drv.ms/f/s!AlHDLj\\_7OjaL9kUhUcLJA\\_AIL71d](https://1drv.ms/f/s!AlHDLj_7OjaL9kUhUcLJA_AIL71d)

## 2 Probabilidade

Nesta seção iremos introduzir os principais conceitos de probabilidade. Apesar do uso de algumas definições e teoremas, ainda não estamos fazendo uso das definições mais formais, como por exemplo,  $\sigma$ -álgebra. É comum encontrar nos livros específicos de probabilidade esse conteúdo de forma mais aprofundada, porém não é comum que se encontre dessa forma nos textos de estatística econômica. Para quem desejar se aprofundar no assunto de maneira mais rigorosa, recomenda-se a leitura do capítulo 1 de [James \(2010\)](#).

### 2.1 Definições básicas

Existem três definições de probabilidade que são comumente apresentadas nos livros texto: a probabilidade por frequência relativa, a definição subjetiva e a definição axiomática. As seguintes definições foram retiradas de [Mittelhammer \(2013\)](#):

#### Definição 2.1.1. Probabilidade por frequência relativa

Seja  $n$  o número de vezes que um experimento é repetido sob condições idênticas. Seja  $A$  o evento no espaço amostral  $\Omega$  e defina  $n_A$  o número de vezes que o evento  $A$  ocorreu. Então, a probabilidade do evento  $A$  é igual a:

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}$$

Apesar de ser uma definição que tem bases em experimentos *reais* e por isso ser mais familiar, ela não permite desenvolver formalmente muitos resultados, uma vez que não há garantias de que o limite irá convergir em todos os casos. Além disso, não é nem possível observar infinitas repetições para termos certeza deste limite.

#### Definição 2.1.2. Probabilidade subjetivista

Um número real,  $\mathbb{P}(A)$ , contido no intervalo  $[0, 1]$  e escolhido para expressar o grau de crença pessoal na possibilidade de ocorrência de um evento  $A$ , sendo que 1 representa absoluta certeza.

A definição subjetiva está relacionada com a estatística Bayesiana, que incorpora essa subjetividade de maneira a não deixar toda a informação sobre os parâmetros apenas para a amostra. Voltaremos nessa definição na última aula.

A definição axiomática de probabilidade foi desenvolvida por Kolmogorov em 1956 e se baseia em *axiomas*. Axiomas são afirmações que consideramos como verdades (sem a necessidade de prová-los) e a partir disso os teoremas são provados. Por exemplo, temos na geometria Euclidiana, o axioma que diz que *dois pontos podem ser ligados por uma única reta*.

#### Definição 2.1.3. Probabilidade axiomática

Seja  $\mathbb{P}$  uma função que tem como domínio o espaço amostral  $\Omega$  e contradomínio em  $\mathbb{R}$ , isto é, temos  $\mathbb{P} : \gamma \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\gamma$  é o conjunto de todos eventos em  $\Omega$ , também denominado espaço de eventos. Diremos que  $\mathbb{P} : \gamma \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de probabilidade (ou medida de probabilidade) se atender aos seguintes axiomas:

1.  $\mathbb{P}(A) \geq 0, \forall A \subset \Omega$  (*Axioma da não-negatividade*);
2.  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$  (*Axioma da normalização*);
3. Se  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de conjuntos disjuntos em  $\Omega$ ,  $\mathbb{P}(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ . (*Axioma da aditividade enumerável*).

Iremos diferenciar a *função de probabilidade* da *probabilidade*, sendo que esta última é a imagem de um evento através da função  $\mathbb{P}$ .

Da definição axiomática decorrem imediatamente cinco lemas, que são comumente utilizados (e quase nunca demonstrados).

**Lema 2.1.4.** *A probabilidade de nada ocorrer é zero*

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

*Demonstração.* Tome  $(\{A_n\})_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $A_1 = \Omega$  e  $A_n = \emptyset \forall n > 1$ . Note que  $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ , portanto:

$$\mathbb{P}(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

Podemos então escrever:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\Omega) + \sum_{n > 1} \mathbb{P}(\emptyset) \quad (5)$$

Por outro lado, sabemos que  $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$ , de forma que  $\mathbb{P}(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \mathbb{P}(\Omega)$ . Assim, juntando com 5,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Omega) &= \mathbb{P}(\Omega) + \sum_{n > 1} \mathbb{P}(\emptyset) \\ \mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}(\Omega) &= \sum_{n > 1} \mathbb{P}(\emptyset) \\ 0 &= \sum_{n > 1} \mathbb{P}(\emptyset) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\emptyset) \end{aligned}$$

Note que  $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\emptyset)$  é não decrescente pois a probabilidade é sempre não negativa. Como o limite é igual a zero e as somas parciais formam uma sequência não decrescente, as somas finitas são zero. Logo,  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .  $\square$

**Lema 2.1.5.** *A probabilidade da união é a soma das probabilidades se os eventos forem disjuntos*

Se  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são disjuntos, então  $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ .

*Demonstração.* Tome  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $B_i = A_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$  e  $B_i = \emptyset$  para  $i > n$ . Por construção, os  $B_i$ 's são disjuntos e portanto:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) &= \mathbb{P}(\cup_{i \in \mathbb{N}} B_i) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(B_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(B_k) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) + 0 \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)
\end{aligned}$$

Juntando as duas extremidades, segue o resultado desejado. □

**Lema 2.1.6. Probabilidade do complementar**

Para todo evento  $A$ ,  $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

*Demonstração.* Sabemos que  $A$  e  $A^c$  são disjuntos pois  $A \cap A^c = \emptyset$ . Por outro lado, temos que  $A \cup A^c = \Omega$ . Então:

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$$

Segue que  $1 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) \Rightarrow \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ . □

**Lema 2.1.7. Probabilidade da união**

Para todos os eventos  $A$  e  $B$ ,  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ .

*Demonstração.* Note que podemos escrever o conjunto  $A$  como a união de dois conjuntos disjuntos:

$$A = (B^c \cap A) \cup (B \cap A)$$

Então:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}[(B^c \cap A) \cup (B \cap A)] = \mathbb{P}(B^c \cap A) + \mathbb{P}(B \cap A)$$

De forma que:

$$\mathbb{P}(B^c \cap A) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B \cap A) \tag{6}$$

Note que  $B$  é disjunto de  $B^c \cap A$  e que  $B \cup (B^c \cap A) = (B \cup B^c) \cap (B \cup A) = \Omega \cap (B \cup A) = (B \cup A)$ , portanto,

$$\mathbb{P}(B \cup A) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(B^c \cap A) \tag{7}$$

Juntando 6 e 7, temos:

$$\mathbb{P}(B \cup A) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(B^c \cap A) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

□

**Lema 2.1.8. Probabilidade de subconjuntos**

Se  $A \subset B$ , então  $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$ .

*Demonstração.* Já vimos que  $B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B)$ , que são disjuntos. Então:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A^c \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) \quad (8)$$

$$\text{Mas } A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A \cap B) \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B^c).$$

Juntando com 8, temos que  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A^c \cap B) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B^c)$ . Mas  $A \subset B$ , logo,  $(A \cap B^c) = \emptyset$ , de forma que  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c \cap B)$ .

$$\text{Como } \mathbb{P}(A^c \cap B) \geq 0, \text{ temos } \mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A).$$

□

**2.1.1 Exercícios**

**Exercício 12.** Mostre que  $\mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$ .

**Solução:** Note que:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c) \quad \text{e}$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B) &= \\ &= [\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c)] + [\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)] - 2\mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B) + 2\mathbb{P}(A \cap B) - 2\mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B) \\ &= \mathbb{P}[(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)] \end{aligned}$$

□

**Exercício 13.** Prove que

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

**Solução:** Considere  $D = B \cup C$ . Então:



$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A \cup D) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D) - \mathbb{P}(A \cap D) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cup C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - [\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap A \cap C)] \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - [\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)] \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

□

**Exercício 14.** Seja  $\Omega$  o espaço amostral e  $A$ ,  $B$  e  $C$  eventos. Prove que:

- $\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(A^c \cap B^c)$ .
- $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c)$ .
- $\max(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)) \leq \mathbb{P}(A \cup B) \leq \min(1, \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B))$ .
- $\max(0, \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1) \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B))$ .

**Solução:**

- Note que  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$  pois:

$(\Rightarrow) \forall a \in (A \cup B)^c, a \notin (A \cup B)$  e assim  $a \notin A$  e  $a \notin B$ . Isso significa que  $a \notin (A^c \cap B^c)$ .

$(\Leftarrow)$  Tome  $a \in (A^c \cap B^c)$ . Então  $a \in A^c$  e  $a \in B^c$ , o que significa que  $a \notin A$  e  $a \notin B$ , de forma que  $a \notin (A \cup B) \Rightarrow a \in (A \cup B)^c$ . Logo,  $A^c \cap B^c$  é o complementar de  $A \cup B$  e, portanto, a igualdade vale.

- Observe que podemos escrever  $A$  como  $(A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ , pois dado  $a \in A$ , temos que  $a \in (A \cap B)$  caso  $a \in B$  ou  $a \in (A \cap B^c)$  caso  $a \notin B$ . Esses dois conjuntos são disjuntos, pois não existe  $a$  tal que  $a \in B$  e, ao mesmo tempo,  $a \in B^c$ .

Também vale que se  $a \in (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ , então teremos duas possibilidades:

- $a \in (A \cap B) \Rightarrow a \in A$  e  $a \in B$ ; ou
- $a \in (A \cap B^c) \Rightarrow a \in A$  e  $a \in B^c$

De qualquer maneira, os conjuntos são iguais. Uma vez que  $(A \cap B)$  e  $(A \cap B^c)$  são disjuntos, a probabilidade de sua união é a soma das probabilidades. Logo,

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c)$$

- Vamos desenvolver a desigualdade da direita e depois a da esquerda.

$$\bullet \mathbb{P}(A \cup B) \leq \min(1, \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B))$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

Por outro lado, também vale que  $\mathbb{P}(A \cup B) \leq 1$ .

- $\max(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)) \leq \mathbb{P}(A \cup B)$

Se  $A \subset B$ , então  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ . Como  $A \subset (A \cup B)$ , então  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A \cup B)$ . Vale também que  $\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A \cup B)$ . Então,

$$\mathbb{P}(A \cup B) \geq \max(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B))$$

$$d. \max(0, \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1) \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B))$$

Novamente iremos começar com a desigualdade do lado direito e depois do lado esquerdo.

$$1. \mathbb{P}(A \cap B) \leq \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B))$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \underbrace{\mathbb{P}(A|B)}_{\leq 1} \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) \mathbb{P}(A)$$

Temos então:

$$\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B) \cdot 1 \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) \cdot 1$$

O que implica que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &\leq \mathbb{P}(B) \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) \\ \mathbb{P}(A \cap B) &\leq \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)) \end{aligned}$$

$$2. \mathbb{P}(A \cap B) \geq \max(0, \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1)$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \underbrace{\mathbb{P}(A \cup B)}_{\leq 1}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$

Mas também vale que  $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0$ . Portanto,  $\mathbb{P}(A \cap B) \geq \max(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1, 0)$

□

**Exercício 15.** Sejam  $A_1, A_2, \dots \in \gamma$ . Mostre que:

$$\mathbb{P}(\cup_{n \geq 1} A_n) \leq \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$$

**Solução:** Esse exercício aparece como parte da demonstração da generalização da probabilidade da união de  $n$  eventos. Uma demonstração pode ser vista em [Ross \(2010\)](#) (na 8ª edição em português, fica na página 49-51). □

## 2.2 Independência de eventos e probabilidade condicional

Quando trabalhamos com probabilidades, é muito comum nos depararmos com situações onde desejamos saber a probabilidade de algo ocorrer *dado* que sabemos algo sobre outro evento passado. Em outras palavras, queremos usar nosso

conhecimento prévio para fazer alguma previsão sobre eventos futuros.

O reverendo Thomas Bayes (1701-1761) foi uma das primeiras pessoas a pensar neste tipo de situação e desenvolver uma solução matemática para o problema, que ficou conhecido como o problema das *probabilidades inversas*. Sua contribuição inicial deu origem a uma área inteira da estatística que atualmente é chamada, em sua homenagem, de *estatística bayesiana*<sup>3</sup>.

Nesta seção iremos abordar somente o Teorema de Bayes e seu uso em probabilidade, sem explorar mais profundamente outros aspectos da área. Porém é importante destacar que atualmente muitos modelos macroeconômicos e microeconômicos estão baseados em metodologia bayesiana para estimação dos seus parâmetros e cada vez mais a metodologia bayesiana tem ganho espaço nas aplicações em economia. Um exemplo é o modelo atualmente utilizado pelo Banco Central do Brasil, o SAMBA (*Stochastic Analytical Model with a Bayesian Approach*). Para entender um pouco mais dessa relação entre estatística bayesiana e econometria, recomendo este texto do professor Christopher Sims (Nobel de Economia em 2011): <http://sims.princeton.edu/yftp/UndrstndgNnBsns/GewekeBookChpater.pdf>.

Considere para todos as definições e teoremas que existe um espaço de probabilidade  $(\Omega, \gamma, \mathbb{P}[\cdot])$ ; isto é, existe um experimento aleatório para o qual o espaço amostral é  $\Omega$ , uma coleção de eventos  $\gamma$  e uma função de probabilidade<sup>4</sup>  $\mathbb{P}[\cdot]$  que estão bem definidos. As definições a seguir foram retiradas e/ou adaptadas das obras listadas nas referências.

Dados dois eventos,  $A$  e  $B$ , queremos definir a probabilidade condicional de  $A$  ocorrer dados que  $B$  ocorreu.

### Definição 2.2.1. Probabilidade Condicional

Sejam  $A$  e  $B$  eventos em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \gamma, \mathbb{P}[\cdot])$ . A *probabilidade condicional* do evento  $A$  dado  $B$ , denotada por  $\mathbb{P}[A|B]$ , é definida por:

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad , \text{ se } \mathbb{P}(B) \neq 0 \quad (9)$$

e não está definida para  $\mathbb{P}(B) = 0$ .

**Observação: 1** Um resultado direto da definição 9 é que  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}[B|A]\mathbb{P}(A)$  se ambas probabilidades  $\mathbb{P}(A)$  e  $\mathbb{P}(B)$  são não nulas (faça a conta em um papel para conferir), de forma a relacionar as condicionais  $\mathbb{P}[A|B]$  e  $\mathbb{P}[B|A]$  com as probabilidades não-condicionadas de  $A$  e  $B$ .

**Observação: 2** A definição 9 vai ao encontro da noção de probabilidade sob o enfoque frequentista. Suponha que foram observadas  $N$  ocorrências de um experimento aleatório (sendo  $N$  um número grande) para o qual os eventos  $A$  e  $B$  estão definidos. Então,  $\mathbb{P}[A|B]$  representa a proporção de ocorrências do evento  $B$  onde o evento  $A$  também ocorreu, isto é:

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{N_{AB}}{N_B}$$

Onde  $N_{AB}$  representa o número de ocorrências do evento  $A \cap B$  e  $N_B$  representa o número de ocorrências do evento  $B$  nas  $N$  observações do experimento. Portanto,  $\mathbb{P}[A \cap B] = \frac{N_{AB}}{N}$  e  $\mathbb{P}(B) = \frac{N_B}{N}$ , de forma que:

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{N_{AB}/N}{N_B/N} = \frac{N_{AB}}{N_B} = \mathbb{P}[A|B]$$

<sup>3</sup>Para saber mais sobre a origem da estatística bayesiana, veja [McGrayne \(2011\)](#)

<sup>4</sup>Embora toda a teoria aqui explicitada refira-se a eventos, pode ser estendida naturalmente para variáveis aleatórias tanto discretas como contínuas. Quando necessário, será especificado se a função é de densidade ou distribuição de probabilidade, mas considere como sendo possível adaptar para todos os casos.

O que é consistente com a definição dada.

**Exemplo 2.2.2.** Considere o lançamento de duas moedas. Seja  $\Omega = \{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\}$ , onde  $C$  significa que a face observada foi cara e  $K$  significa que a face observada foi coroa. Assuma que as moedas são honestas. Vamos calcular 1) a probabilidade de saírem duas caras dado que saiu cara na primeira moeda e 2) a probabilidade de duas caras dado que pelo menos uma é cara.

Defina os eventos:  $A_1 =$  cara na primeira moeda e  $A_2 =$  cara na segunda moeda. Então, a probabilidade de saírem duas caras dado que saiu cara na primeira moeda é:

$$\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 | A_1] = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

A probabilidade de saírem duas caras dado que pelo menos uma das moedas é cara será igual a  $\frac{1}{3}$  e fica sugerida como exercício.

Quando falamos de probabilidades condicionais do tipo  $\mathbb{P}[A|B]$ , o que fazemos é definir um novo espaço amostral,  $\Omega_B$ , onde tomamos apenas as ocorrências do evento  $B$  e calculamos a probabilidade de  $A$  ocorrer. De certa forma, isso pode ser visto como uma *restrição* do espaço amostral original. No exemplo 2.2.2, temos  $\Omega_B = \{(C, K), (C, C)\}$  para o primeiro item e  $\Omega_B = \{(C, C), (C, K), (K, C)\}$ . Em ambos casos, restringimos o espaço amostral para os eventos que já sabemos que ocorreram e com base nesse novo espaço amostral é que iremos calcular a probabilidade de interesse.

Surge então (ou deveria surgir) a pergunta: para um dado evento  $B$  para o qual  $\mathbb{P}(B) > 0$ , será que  $\mathbb{P}[\cdot | B]$  é uma função de probabilidade que tem  $\gamma$  como seu domínio? Isto é, será que  $\mathbb{P}[\cdot | B]$  satisfaz os três axiomas para ser considerada uma função de probabilidade? Observe que sim, pois:

- (i)  $\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}(B)} \geq 0 \quad \forall A \in \gamma;$
- (ii)  $\mathbb{P}[\Omega|B] = \frac{\mathbb{P}[\Omega \cap B]}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1;$
- (iii) Se  $A_1, A_2, \dots$  é uma sequência de eventos mutuamente exclusivos em  $\gamma$  e  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \gamma$ , então

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | B\right] = \frac{\mathbb{P}\left[\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap B\right]}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)\right]}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i | B]$$

Então,  $\mathbb{P}[\cdot | B]$  para um dado  $B$  que satisfaz  $\mathbb{P}(B) > 0$  é uma função de probabilidade, o que justifica chamá-la de probabilidade condicional.  $\mathbb{P}[\cdot | B]$  também apresenta as mesmas propriedades que uma probabilidade não condicionada. Logo, podemos enunciar os seguintes resultados que são similares aos já obtidos para probabilidades não condicionais:

**Teorema 2.2.3.** A probabilidade condicional do vazio é zero, isto é,  $\mathbb{P}[\emptyset | B] = 0$ .

*Demonstração.*

$$\mathbb{P}[\emptyset | B] = \frac{\mathbb{P}(\emptyset \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\emptyset)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0}{\mathbb{P}(B)} = 0$$

□

**Teorema 2.2.4.** Se  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são eventos mutuamente exclusivos em  $\gamma$ , então

$$\mathbb{P}[A_1 \cup \dots \cup A_n | B] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A_i | B]$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A_1 \cup \dots \cup A_n | B] &= && \text{(definição prop. condicional)} \\ &= \frac{\mathbb{P}[(A_1 \cup \dots \cup A_n) \cap B]}{\mathbb{P}(B)} && \text{(distributiva)} \\ &= \frac{\mathbb{P}[(A_1 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)]}{\mathbb{P}(B)} && \text{(independência dos } A_i \text{'s)} \\ &= \frac{\mathbb{P}[\sum_{i=1}^n (A_i \cap B)]}{\mathbb{P}(B)} && \text{(definição prob. condicional)} \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A_i | B] \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.2.5.** Se  $A$  é um evento em  $\gamma$ , então

$$\mathbb{P}[A^c | B] = 1 - \mathbb{P}[A | B]$$

onde  $A^c$  é o evento complementar de  $A$ .

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A^c | B] &= && \text{(def. prob. condicional)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A^c \cap B)}{\mathbb{P}(B)} && \text{(forma alternativa de } \mathbb{P}(B)) \\ &= \frac{\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} - \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= 1 - \mathbb{P}[A | B] \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.2.6.** Se  $A_1$  e  $A_2$  pertencem a  $\gamma$ , então

$$\mathbb{P}[A_1 | B] = \mathbb{P}[A_1 \cap A_2 | B] + \mathbb{P}[A_1 \cap A_2^c | B]$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[A_1|B] &= & (\text{def. prob. cond.}) \\
&= \frac{\mathbb{P}[A_1 \cap B]}{\mathbb{P}(B)} & (\text{reescrevendo } A_1) \\
&= \frac{\mathbb{P}[(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c)] \cap B]}{\mathbb{P}(B)} & (\text{distributiva}) \\
&= \frac{\mathbb{P}[(A_1 \cap A_2) \cap B \cup (A_1 \cap A_2^c) \cap B]}{\mathbb{P}(B)} & (\text{independência}) \\
&= \frac{\mathbb{P}[(A_1 \cap A_2) \cap B] + \mathbb{P}[(A_1 \cap A_2^c) \cap B]}{\mathbb{P}(B)} & (\text{reorganizando}) \\
&= \frac{\mathbb{P}[(A_1 \cap A_2) \cap B]}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}[(A_1 \cap A_2^c) \cap B]}{\mathbb{P}(B)} & (\text{def. prob. cond.}) \\
&= \mathbb{P}[A_1 \cap A_2|B] + \mathbb{P}[A_1 \cap A_2^c|B]
\end{aligned}$$

□

**Teorema 2.2.7.** Para quaisquer dois eventos  $A_1$  e  $A_2 \in \gamma$ ,

$$\mathbb{P}[A_1 \cup A_2|B] = \mathbb{P}[A_1|B] + \mathbb{P}[A_2|B] - \mathbb{P}[A_1 \cap A_2|B]$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[A_1 \cup A_2|B] &= & (\text{def. prob. cond.}) \\
&= \frac{\mathbb{P}[(A_1 \cup A_2) \cap B]}{\mathbb{P}(B)} & (\text{distributiva}) \\
&= \frac{\mathbb{P}[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)]}{\mathbb{P}(B)} & (\text{def. prob. união.}) \\
&= \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) - \mathbb{P}(A_1 \cap B \cap A_2 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} & (\text{rearranjando}) \\
&= \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(A_2 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} - \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} & (\text{def. prob. cond.}) \\
&= \mathbb{P}[A_1|B] + \mathbb{P}[A_2|B] - \mathbb{P}[A_1 \cap A_2|B]
\end{aligned}$$

□

**Teorema 2.2.8.** Se  $A_1$  e  $A_2 \in \gamma$  com  $A_1 \subset A_2$ , então

$$\mathbb{P}[A_1|B] \leq \mathbb{P}[A_2|B]$$

*Demonstração.* Esse resultado decorre do lema 2.1.8.

□

Enquanto que os teoremas de 11 a 16 têm uma correspondência direta com as probabilidades não-condicionais, o seguinte teorema tem aplicação apenas no segundo caso:

**Teorema 2.2.9. Teorema da probabilidade total**

Para um dado espaço de probabilidade  $(\Omega, \gamma, \mathbb{P}[\cdot])$ , se  $B_1, B_2, \dots, B_n$  são uma coleção de eventos mutuamente disjuntos (ou exclusivos) em  $\gamma$  satisfazendo  $\Omega = \bigcup_{j=1}^n B_j$  e  $\mathbb{P}(B_j) > 0$  para  $j = 1, \dots, n$ <sup>5</sup>, então, para todo  $A \in \gamma$ , vale que

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}[A|B_j]\mathbb{P}(B_j)$$

*Demonstração.* Observe que  $A = \bigcup_{j=1}^n (A \cap B_j)$  e que os termos  $(A \cap B_j)$  e  $(A \cap B_i)$  são mutuamente exclusivos para  $i \neq j$ . Logo,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left[\bigcup_{j=1}^n (A \cap B_j)\right] = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A \cap B_j) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}[A|B_j]\mathbb{P}(B_j)$$

**Na aula, eu fiz a versão acima, que é bem direta. Abaixo tem uma forma mais detalhada que pode ajudar a entender melhor o que está acontecendo.**

Observe que

$$A = A \cap \Omega \quad (10)$$

Além disso, como  $(B_j)_{j=1}^n$  é uma partição de  $\Omega$ , temos

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^n (B_j) \quad (11)$$

Usando a equação 11 na equação 10, obtemos:

$$A = A \cap \left(\bigcup_{j=1}^n B_j\right) \quad (12)$$

$$= \bigcup_{j=1}^n (A \cap B_j) \quad (13)$$

e portanto,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n (A \cap B_j)\right) \quad (14)$$

Como  $(B_j)_{j=1}^n$  é uma partição, é também uma sequência disjunta. Portanto, para todo  $i \neq j$ ,  $B_i \cap B_j = \emptyset$  e

$$(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = A \cap (B_i \cap B_j) \quad (15)$$

$$= A \cap \emptyset \quad (16)$$

$$= \emptyset \quad (17)$$

Isto é,  $(A \cap B_j)_{j=1}^n$  também é uma sequência disjunta. Assim, dos axiomas da probabilidade,

---

<sup>5</sup>Dizemos, neste caso, que os  $B_j$  formam uma *partição* de  $\Omega$ .

$$\mathbb{P}(\cup_{j=1}^n (A \cap B_j)) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A \cap B_j) \quad (18)$$

Finalmente, do axioma da probabilidade condicional, temos para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\mathbb{P}(A \cap B_j) = \mathbb{P}(B_j)\mathbb{P}(A|B_j)$ . Usando as equações 14 e 18, concluímos que:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(B_j)\mathbb{P}(A|B_j) \quad (19)$$

□

O próximo resultado é uma implicação direta do teorema da probabilidade total:

**Corolário 2.2.10.** Para um dado espaço de probabilidade  $(\Omega, \gamma, \mathbb{P}[\cdot])$ , seja  $B \in \gamma$  satisfazendo  $0 < \mathbb{P}(B) < 1$ ; então, para todo  $A \in \gamma$ :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}[A|B^c]\mathbb{P}(B^c)$$

*Demonstração.* O resultado segue diretamente do teorema da probabilidade total. □

Finalmente podemos enunciar a fórmula de Bayes:

**Teorema 2.2.11. Fórmula de Bayes**

Para um dado espaço de probabilidade  $(\Omega, \gamma, \mathbb{P}[\cdot])$ , se  $B_1, B_2, \dots, B_n$  são uma coleção de eventos mutuamente disjuntos (ou exclusivos) em  $\gamma$  satisfazendo  $\Omega = \bigcup_{j=1}^n B_j$  e  $\mathbb{P}(B_j) > 0$  para  $j = 1, \dots, n$ , então, para todo  $A \in \gamma$  para o qual  $\mathbb{P}(A) > 0$  vale que:

$$\mathbb{P}[B_k|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B_k]\mathbb{P}(B_k)}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}[A|B_j]\mathbb{P}(B_j)} \quad (20)$$

*Demonstração.*

$$\mathbb{P}[B_k|A] = \frac{\mathbb{P}[B_k \cap A]}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}[A|B_k]\mathbb{P}(B_k)}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}[A|B_j]\mathbb{P}(B_j)}$$

□

**Corolário 2.2.12.** Para um dado espaço de probabilidade  $(\Omega, \gamma, \mathbb{P}[\cdot])$ , sejam  $A$  e  $B \in \gamma$  satisfazendo  $\mathbb{P}(A) > 0$  e  $0 < \mathbb{P}(B) < 1$ ; então:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}[A|B^c]\mathbb{P}(B^c)}$$

**Definição 2.2.13.** Dois eventos  $A$  e  $B$  são independentes se  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ .

**Lema 2.2.14.**  $A$  e  $B$  são independentes se e somente se  $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ . Em outras palavras,  $A$  e  $B$  são independentes se e somente se a incerteza sobre  $A$  não muda se assumirmos que  $B$  é verdadeiro.



*Demonstração.* Assuma  $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ . Da definição de probabilidade condicional, lembramos que  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$ . Usando a suposição inicial,  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$  e  $A$  e  $B$  são independentes.

Assuma  $A$  e  $B$  independentes. Portanto,  $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$ . Juntando os dois extremos da desigualdade e dividindo por  $\mathbb{P}(B)$ ,  $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ .  $\square$

**Teorema 2.2.15.** *Se  $A$  e  $B$  são eventos independentes, então os eventos  $A$  e  $B^c$ ,  $A^c$  e  $B$  e  $A^c$  e  $B^c$  também são independentes.*

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B^c) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(A)[1 - \mathbb{P}(B)] \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A^c \cap B) &= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(B)[1 - \mathbb{P}(A)] \\ &= \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A^c \cap B^c) &= \mathbb{P}(A \cup B)^c \\ &= 1 - \mathbb{P}(A \cup B) \\ &= 1 - [\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)] \\ &= 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(A^c) - \mathbb{P}(B)[1 - \mathbb{P}(A)] \\ &= \mathbb{P}(A^c)[1 - \mathbb{P}(B)] \\ &= \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)\end{aligned}$$

$\square$

### **Definição 2.2.16. Independência Condicional**

(surrupiado das notas de aula de Econometria Bayesiana) Seja  $C$  um evento qualquer, então dizemos que  $A$  e  $B$  são condicionalmente independentes se:

$$\mathbb{P}(A \cap B|C) = \mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(B|C) \quad (21)$$

Podemos utilizar a definição de independência não condicional com a regra da multiplicação para obter:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap B|C) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} \quad (\text{prob. cond.}) \\
&= \frac{\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(B \cap C)\mathbb{P}(A|B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} \quad (\text{regra mult.}) \\
&= \mathbb{P}(B|C)\mathbb{P}(A|B \cap C)
\end{aligned}$$

Igualando as duas pontas da equação acima, temos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(B|C) &= \mathbb{P}(B|C)\mathbb{P}(A|B \cap C) \\
\mathbb{P}(A|C) &= \frac{\mathbb{P}(B|C)\mathbb{P}(A|B \cap C)}{\mathbb{P}(B|C)} = \mathbb{P}(A|B \cap C)
\end{aligned}$$

De maneira que  $\mathbb{P}(A|C) = \mathbb{P}(A|B \cap C)$ .

Note que isso não significa que  $A$  e  $B$  são independentes. Caso o  $C$  seja desconhecido, a nossa probabilidade é alterada. É possível que a informação que  $C$  tenha para  $A$  seja a mesma que  $B$  agregaria e por isso que, condicionado a  $C$ , a informação de  $B$  para  $A$  não seja relevante. Assim, *independência condicional não implica independência incondicional*.

## 2.3 Exercícios

### Exercício 16. Independência do vazio

Na aula, conversamos sobre a independência e o que acontece quando um dos eventos é o evento impossível (ou tem probabilidade zero). O exercício então é mostrar que  $\forall B \in \Omega$ ,  $B$  e  $\emptyset$  são independentes.

*Demonstração.* Da definição de independência, sabemos que dados dois eventos  $A$  e  $B$  quaisquer, eles são independentes se e somente se  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ . Logo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B \cap \emptyset) &= \\
&= \mathbb{P}(\emptyset) && (\text{vazio interseção com qualquer coisa é vazio}) \\
&= 0 && (\text{prob. do vazio é zero}) \\
&= \mathbb{P}(B) \cdot 0 && (\text{igualdade matemática}) \\
&= \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(\emptyset) && (\text{probabilidade do vazio})
\end{aligned}$$

□

**Exercício 17.** (Retirado de [Viali \(2004c\)](#)) Calcular a probabilidade de no lançamento de um dado equilibrado<sup>6</sup> obter-se os seguintes eventos:

- A face observada (o resultado do dado, o número virado para cima) é igual a 5;
- A face observada é um número ímpar;

<sup>6</sup>Dizemos que um dado é *equilibrado* quando a probabilidade das faces é sempre a mesma. Para um dado de 6 faces, teremos que a probabilidade de cada uma será  $\frac{1}{6}$ . Outras formas encontradas na literatura são: dado não viciado; dado não viesado; dado honesto. A mesma nomenclatura se aplica a situações envolvendo moedas.

- c. A face observada é maior que 2;
- d. A face observada é um número primo;
- e. A face observada é menor que  $\pi$ ;
- f. A face observada é diferente de 3.

A solução está disponível em: [https://1drv.ms/f/s!AlHDLj\\_7OjaL9kUhUcLJA\\_AIL71d](https://1drv.ms/f/s!AlHDLj_7OjaL9kUhUcLJA_AIL71d)

**Exercício 18.** (Adaptado de Stern and Izbicki (2016)) Um total de 4 bolas numeradas de 1 a 4 é distribuído aleatoriamente em  $n$  urnas, também numeradas de 1 a 4, uma de cada vez, de tal modo que cada bola tem exatamente a mesma probabilidade de cair em cada uma das urnas. Assim, cada urna pode receber entre 0 e 4 bolas. Qual é a probabilidade da primeira urna ficar vazia?

Qual é essa probabilidade se você fizer o mesmo experimento, porém com  $n$  bolas e  $n$  urnas?

A solução está disponível em: [https://1drv.ms/f/s!AlHDLj\\_7OjaL9kUhUcLJA\\_AIL71d](https://1drv.ms/f/s!AlHDLj_7OjaL9kUhUcLJA_AIL71d)

**Exercício 19.** Na mochila de sua amiga Misty estão 12 *pokébolas*, sendo que 7 são de *pokémons* do tipo água e as outras 5 são de *pokémons* do tipo fada. Destes 12, um deles é o Togepi<sup>7</sup> e o outro é o Psyduck<sup>8</sup>.

Misty irá lutar uma batalha de dois rounds, onde cada treinador irá utilizar 2 *pokémons*, sendo um para cada *round* (isto é, mesmo que vença a batalha, o treinador deve trocar de *pokémon*), selecionados aleatoriamente da mochila. Calcule as seguintes probabilidades:

- a. Dos 2 *pokémons* que Misty seleciona serem do tipo água e do tipo fada, nessa ordem;
- b. De Misty utilizar seu *pokémon* preferido, Togepi<sup>9</sup>, na batalha;
- c. De Misty não utilizar seu Psyduck<sup>10</sup> na batalha;
- d. De Misty utilizar somente dois *pokémons* do tipo água;
- e. De Misty utilizar Togepi e o Psyduck na batalha;
- f. De Misty utilizar pelo menos um *pokémon* do tipo fada na batalha;
- g. Do segundo *pokémon* escolhido ser de água dado que o primeiro foi o Togepi.
- h. Resolva os itens a, b e g considerando agora que após a primeira batalha Misty guarda o *pokémon* utilizado de volta na *pokébola*, vai para o *pokémon* center para curá-lo e então retorna para o segundo round, selecionando o segundo *pokémon* dentre todas suas 12 *pokébolas*.

A solução está disponível em: [https://1drv.ms/f/s!AlHDLj\\_7OjaL9kUhUcLJA\\_AIL71d](https://1drv.ms/f/s!AlHDLj_7OjaL9kUhUcLJA_AIL71d)

**Exercício 20.** (Retirado de Viali (2004c)) Suponha que A e B sejam eventos tais que  $P(A) = a$ ,  $P(B) = b$  e  $P(A \cap B) = c$ . Escreva as seguintes probabilidades em termos de  $a$ ,  $b$  e  $c$ :

- a.  $P(A \cup B)$ ;

<sup>7</sup>Togepi é um *pokémon* do tipo fada a partir da geração VI.

<sup>8</sup>Psyduck é um *pokémon* do tipo água.

<sup>9</sup>Considere que Togepi está em uma das 12 *pokébolas* e não no colo da Misty.

<sup>10</sup>Desconsidere o fato do Psyduck fugir da *pokébola* em momentos inapropriados.

- b.  $P(A^c)$ ;
- c.  $P(B^c)$ ;
- d.  $P(A^c \cup B^c)$ ;
- e.  $P(A^c \cup B)$ ;
- f.  $P(A^c \cap B^c)$ ;
- g.  $P(A \cap B^c)$ ;

A solução está disponível em: [https://1drv.ms/f/s!AlHDLj\\_7OjaL9kUhUcLJA\\_AIL71d](https://1drv.ms/f/s!AlHDLj_7OjaL9kUhUcLJA_AIL71d)

**Exercício 21.** (Retirado de Viali (2004c)) Uma amostra de 140 clientes de um banco revelou que 80 guardam seu dinheiro na poupança, 30 investem no tesouro direto (TD) e 10 tem aplicações tanto na poupança como no TD. Qual a probabilidade de que um cliente, que tenha sido escolhido ao acaso dos 140 entrevistados, tenha dinheiro na poupança ou no TD?

A solução está disponível em: [https://1drv.ms/f/s!AlHDLj\\_7OjaL9kUhUcLJA\\_AIL71d](https://1drv.ms/f/s!AlHDLj_7OjaL9kUhUcLJA_AIL71d)

**Exercício 22.** (Retirado de Meyer (1973)) Sejam  $\Omega$  um espaço amostral e  $A$ ,  $B$  e  $C$  eventos em  $\Omega$ . Demonstre as seguintes propriedades:

- a. Se  $\emptyset$  for o espaço vazio, então  $P(\emptyset) = 0$ ;
- b. Se  $A^c$  for o evento complementar de  $A$ , então  $P(A) = 1 - P(A^c)$ ;
- c.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ;
- d.  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$ ;
- e. Se  $A \subset B$ , então  $P(A) \leq P(B)$ ;
- f.  $P(A \cup B) = 1 - P(A^c \cap B^c)$ ;
- g.  $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$ . **Obs.:** Este resultado mostra como podemos escrever a probabilidade do evento  $A$  de uma forma diferente. Ele é muito utilizado em várias demonstrações e a sua ideia básica é utilizada no teorema de Bayes.

**Não preparei uma solução para este, mas se alguém tiver problema pode me procurar.**

**Exercício 23.** (Retirado de Meyer (1973)) Mostre que

$$P[(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

**Obs.:** Este resultado trata da probabilidade que exatamente um dos eventos  $A$  ou  $B$  ocorra, enquanto que a letra c. do exercício anterior pode ser vista como a probabilidade de que pelo menos um deles ocorra. Para fazer a demonstração, você tem a opção de desenvolver um dos lados da igualdade e chegar no outro ou provar que os dois conjuntos são iguais.

**Não preparei uma solução para este, mas se alguém tiver problema pode me procurar.**

**Exercício 24.** (Retirado de Magalhães (2011)) Os eventos  $A$  e  $B$  são independentes. Sendo  $P(A \cap B^c) = 0,3$  e  $P(A^c \cap B) = 0,2$ ; calcule  $P(A \cap B)$ .

A solução está disponível em: [https://1drv.ms/f/s!AlHDLj\\_7OjaL9kUhUcLJA\\_AIL71d](https://1drv.ms/f/s!AlHDLj_7OjaL9kUhUcLJA_AIL71d)

**Exercício 25.** (Retirado de Magalhães (2011)) Sejam os resultados de 3 lançamentos de uma moeda honesta e considere os seguintes eventos:  $\alpha = \{\text{ocorrem pelo menos duas coroas}\}$  e  $\beta = \{\text{ocorre coroa no 1º lançamento}\}$ . Determine se  $\alpha$  e  $\beta$  são eventos independentes.

A solução está disponível em: [https://1drv.ms/f/s!AlHDLj\\_7OjaL9kUhUcLJA\\_AIL7ld](https://1drv.ms/f/s!AlHDLj_7OjaL9kUhUcLJA_AIL7ld)

**Exercício 26.** (Adaptado de Schmidt (2011)) Considere  $\Omega$ , espaço amostral, e  $A, B$  eventos em  $\Omega$ .

- Calcule  $P(A \cap B)$  considerando  $P(A) = 0.5$ ,  $P(B) = 0.25$  e  $A$  e  $B$  mutuamente exclusivos;
- Caso você saiba que  $A \subset B$ , é verdade que  $P(A|B) \leq P(A)$ ? *Justifique.*
- Considerando  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{1}{3}$  e  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ , calcule  $P(A^c \cap B^c)$ .
- Se  $P(A|B) = 0$ , então  $A$  e  $B$  são independentes? Justifique.

A solução está disponível em: [https://1drv.ms/f/s!AlHDLj\\_7OjaL9kUhUcLJA\\_AIL7ld](https://1drv.ms/f/s!AlHDLj_7OjaL9kUhUcLJA_AIL7ld)

## 2.4 Variáveis aleatórias

Até o momento trabalhamos apenas com probabilidades relacionadas a um espaço de probabilidade,  $(\Omega, \gamma, \mathbb{P}(\cdot))$ , onde  $\Omega$  ou *espaço amostral*, é o conjunto de todos os possíveis resultados de um determinado experimento, e  $\gamma$  é o conjunto de todas as coleções de eventos de  $\Omega$  e  $\mathbb{P}(\cdot)$  é uma função de probabilidade, que tem como domínio  $\gamma$  e contradomínio o intervalo  $[0, 1]$ .

Nós ainda estamos interessados nas probabilidades de eventos, porém com um grau de formalização maior. Por exemplo, seja o lançamento de uma moeda. Sabemos que  $\Omega = \{C, K\}$ , onde  $C$  representa “cara” e  $K$  representa “coroa” e, no caso de uma moeda honesta,  $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(K)$ . Mas o que acontece se quisermos saber qual a probabilidade de saírem 5 caras em 7 lançamentos da moeda? Poderíamos ter as situações  $\mathbb{P}(CCCCCKK)$ ,  $\mathbb{P}(CKCCCCCK)$ ,  $\mathbb{P}(KKCCCCC)$  e assim por diante. Essa notação se torna pesada e pouco prática. Poderíamos criar um “código” onde  $C = 1$  e  $K = 0$ , de maneira fazer a soma do número de caras. Por exemplo, na situação das 5 caras, estaríamos interessados em obter  $\mathbb{P}(5)$ . Essa noção é o fundamento das variáveis aleatórias.

### Exemplo 2.4.1. (Juju)

Suponha que você tem uma moeda chamada Juju e que ela é uma moeda honesta<sup>11</sup>, isto é, a probabilidade de sair cara é igual à probabilidade de sair coroa. Em notação matemática,

$$\mathbb{P}(\{\text{lançar Juju resultou em cara}\}) = \mathbb{P}(\{\text{lançar Juju resultou em coroa}\}) = \frac{1}{2}$$

Observe ainda que  $\Omega$ , o espaço amostral do experimento *lançar a Juju*, é dado por  $\Omega = \{(cara), (coroa)\}$ .

Agora vamos criar uma função que será definida por:

$$f(\text{Juju}) = \begin{cases} 0 & \text{se o lançamento de Juju deu cara,} \\ 1 & \text{se o lançamento de Juju deu coroa.} \end{cases} \quad (22)$$

Vamos chamar essa função de  $X$  (ao invés de  $f$ ). Observe que:

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{\text{lançar Juju resultou em coroa}\}) = \frac{1}{2}$$

E ainda:

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\{\text{lançar Juju resultou em cara}\}) = \frac{1}{2}$$

Isto é, a probabilidade de que  $X$  assumo valor 1 é a mesma probabilidade de sair coroa quando lançamos a Juju e a probabilidade de  $X$  ser igual a 0 é a probabilidade de sair cara no lançamento da Juju.

Como  $X$  é uma função que “pega” um elemento de  $\Omega$  e está associando um número real, então  $X$  preenche os requisitos para ser chamada de *variável aleatória*, que veremos a seguir.

## 2.5 Caracterização

Informalmente, *variável aleatória* (v.a.) é uma função que associa elementos do espaço amostral  $\Omega$  ao conjunto dos números reais,  $\mathbb{R}$ . Formalmente, temos:

<sup>11</sup>Quando Juju não for honesta, diremos que Juju é ~~safada~~ desonesta, não equilibrada, viesada ou viciada.

### Definição 2.5.1. (Variável Aleatória)

Para um dado espaço de probabilidade  $(\Omega, \gamma, P(\cdot))$  uma variável aleatória, denotada por  $X$  ou  $X(\cdot)$ , é uma função com domínio em  $\Omega$  e contradomínio em  $\mathbb{R}$ .

Analisando em termos dos conceitos já vistos de experimentos, temos  $\Omega$  como sendo o conjunto de todos resultados possíveis de um experimento (conjunto de todos eventos) e  $X(\cdot)$  é uma *função* que associa cada elemento  $\omega \in \Omega$  a um número real. Observe que em nenhum momento utilizamos a função de probabilidade  $P(\cdot)$ .

Existe uma discussão sobre a nomenclatura *variável* para um objeto que na verdade é uma função, pois isso leva a muitas interpretações errôneas e até confusão por parte dos alunos. Mas o nome já está enraizado demais para que se volte atrás. Isso acaba se confundindo mais ainda pelo fato de, ao invés de usarmos  $X(\cdot)$  para denotar a variável aleatória  $X$ , utilizarmos apenas  $X$  (e iremos continuar perpetuando isso, desculpem). Ao longo do texto, usaremos letras latinas maiúsculas para denotar a variável aleatória (função) e letras minúsculas quando estivermos nos referindo a um valor específico que a função assumiu, ou, definindo formalmente:

### Definição 2.5.2. Valor observado (outcome) de uma v.a.

A imagem  $x = X(\omega)$  de um evento  $\omega \in \Omega$  gerada por uma variável aleatória  $X$  é chamado de *valor observado* de  $X$ .

#### 2.5.1 O espaço de probabilidade definido por uma v.a.

Um novo espaço de probabilidade será necessário para poder estabelecer probabilidades a subconjuntos do novo espaço amostral real definido pela imagem da v.a.. O espaço de probabilidade  $\{\Omega, \gamma, \mathbb{P}(\cdot)\}$  nos permite determinar a probabilidade para eventos em  $S$ , porém qual é a probabilidade de que um resultado da v.a.  $X$  fique no subconjunto  $A \subset R(X)$ ?

Como  $X$  é um mapa de  $\Omega$  para a reta real, é possível definir o evento  $B$  em  $S$  tal que o evento  $B$  ocorre se e somente se  $A \subset R(X)$  ocorre. Uma vez que os eventos  $A$  e  $B$  ocorrem simultaneamente, a probabilidade deles deve ser a mesma, ou seja,  $\mathbb{P}_X(A) \equiv \mathbb{P}(B)$ , onde  $\mathbb{P}_X(\cdot)$  denota a medida de probabilidade que atribui a resultados de  $X$  suas probabilidades. Se dois eventos ocorrem sempre simultaneamente, eles são ditos equivalentes e ocorrem em espaços de probabilidades distintos, pois se ocorressem no mesmo espaço, eles seriam o mesmo evento. Logo,  $\mathbb{P}_X(A) \equiv \mathbb{P}(B)$  para  $B = \{w : X(w) \in A, w \in \Omega\}$ . A figura 1 ilustra esta relação.

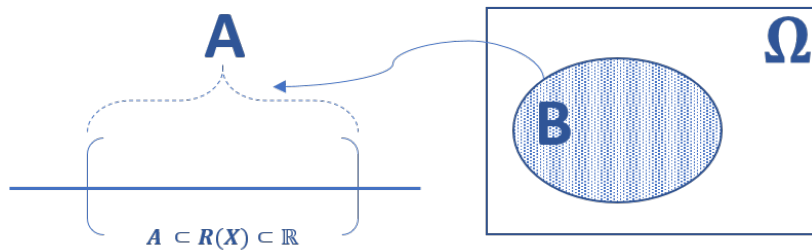


Figura 1: Correspondência entre  $B \subset S$  e  $A \subset R(X)$ .

Probabilidades definidas para eventos em  $S$  são transferidas para eventos em  $R(X)$  através da relação funcional que define uma v.a.,  $x_i = X(w_i)$ . Então, sabendo que o domínio de  $\mathbb{P}(\cdot)$  é  $\gamma$  (espaço de eventos), qual é o domínio de  $\mathbb{P}_X(\cdot)$ ? Podemos dizer informalmente que  $\gamma_X$  é o espaço de eventos do espaço de probabilidade associado à variável aleatória  $X$  e é dado por todos os subconjuntos da imagem de  $X$ ,  $R(X)$ .

Então, o espaço de probabilidade definido por  $X$  é  $(R(X), \gamma_X, \mathbb{P}_X(\cdot))$ . Lidar com espaços amostrais reais é muito mais conveniente pois nos permite utilizar os conhecimentos matematicos.

**Definição 2.5.3. (Função distribuição acumulada de uma v.a.)**

Seja  $X$  uma v.a.. A *função distribuição acumulada* de  $X$ , denotada por  $F_X(\cdot)$ , é definida como a função com domínio em  $\mathbb{R}$  e contradomínio no intervalo fechado  $[0, 1]$  que satisfaz

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \in (-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}[\{\omega : X(\omega) \leq x\}]$$

para todo número real  $x$ .

Em outras palavras, a função acumulada de  $X$  é a função que calcula as probabilidades de  $X$  assumir valores menores ou iguais a um valor específico  $x$ . Para tanto, ela avalia os valores  $\omega$  do espaço amostral tais que  $X(\omega)$  é menor ou igual que  $x$ . Essa função é importante pois ela define de forma única uma variável aleatória. Mesmo que  $X$  só assuma valores em um subconjunto dos reais, a função de distribuição é bem definida em toda a reta. Quando não houver a possibilidade de gerar confusão, a notação será apenas  $F$  ao invés de  $F_X$ .

**Teorema 2.5.4. (Propriedades da função distribuição acumulada  $F_X(\cdot)$ )**

As seguintes propriedades precisam ser atendidas para que possamos considerar uma função como sendo a função distribuição acumulada. Este teorema não será demonstrado, mas uma parte da prova pode ser encontrada em [Mood and Graybill \(1963\)](#) ou em [Magalhães \(2011\)](#).

- i.  $F_X(-\infty) \equiv \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  e  $F_X(+\infty) \equiv \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ ;
- ii.  $F_X(\cdot)$  é uma função monótona não-decrescente; isto é,  $F_X(a) < F_X(b)$  para  $a < b$ ;
- iii.  $F_X(\cdot)$  é contínua à direita; isto é,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} F_X(x + h) = F_X(x)$$

As variáveis aleatórias se dividem entre discretas e contínuas. Iremos começar o estudo com as variáveis aleatórias discretas e na sequência veremos as contínuas.

**2.5.2 Variáveis aleatórias discretas****Definição 2.5.5. Variável aleatória discreta**

Uma variável aleatória é dita *discreta* se a sua imagem consiste de um número contável de elementos, isto é, sua imagem pode ser colocada em correspondência com um subconjunto (próprio ou não) de  $\mathbb{N}$ .

**Definição 2.5.6. (Função massa de probabilidade de uma v.a. discreta)**

Se  $X$  é uma v.a. discreta ( $X$  assume valores em um subconjunto de  $\mathbb{N}$ ) que assume valores distintos  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  então a função densidade de  $X$ , denotada  $f_X(\cdot)$  é definida por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x_i) & \text{se } x = x_i, i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (23)$$

Outros nomes comumente dados à  $f_X(x)$  são: função massa de probabilidade, função de frequência discreta e função de probabilidade. A notação  $p_X(x)$  também é usada para diferenciar quando se trata de uma variável aleatória discreta e usualmente usa-se a notação  $f_X(x)$  para as contínuas. Observação: Alguns autores partem da f.d.a para chegar na f.m.p, enquanto outros fazem o caminho inverso, mas a ideia é que a v.a. fique caracterizada de forma única.



**Definição 2.5.7. f.d.a. de uma v.a. discreta** (Retirado de [Mittelhammer \(2013\)](#))

A função distribuição acumulada de uma variável aleatória  $X$ , se  $X$  for discreta, é dada por

$$F_X(x) = \sum_{X \leq x, f(x) > 0} f(x), \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

Algumas distribuições especiais são comumente utilizadas para modelar fenômenos e por seu uso frequente nas mais diversas aplicações, acabaram ganhando “nomes” e suas propriedades foram exaustivamente utilizadas. Uma lista bastante completa pode ser acessada aqui: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_probability\\_distributions](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_probability_distributions). A estas distribuições, costumamos nos referir como sendo “distribuições tabeladas”. Iremos ver brevemente a distribuição Binomial (e, portanto, a de Bernoulli), a distribuição Normal e algumas outras, se der tempo.

Imagine agora um experimento que tenha apenas dois possíveis desfechos  $A$  e  $A^c$ , onde este último denota o complementar do evento  $A$ . Imagine que a probabilidade do evento  $A$  seja  $p$ , com  $0 \leq p \leq 1$  e, portanto,  $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - p$ . Ao definirmos a variável aleatória  $X$ , que assume dois valores, um para quando o evento  $A$  foi observado e outro para quando não foi observado, diremos que  $X$  segue uma *distribuição de Bernoulli de parâmetro  $p$* .

Voltando ao exemplo da Juju, a variável aleatória  $X$  do exemplo segue uma distribuição de Bernoulli. Observe que se, ao fazer o experimento de lançar um dado, definirmos a variável aleatória  $Y$  como sendo 1 se o resultado foi um número par e 0 caso contrário,  $Y$  também é tem distribuição de Bernoulli, isto é, mesmo que o dado possa ter 6 diferentes resultados, podemos estar interessados em um evento que resulte em uma v.a. binária, ou dicotômica.

**Definição 2.5.8. (Distribuição de Bernoulli)**

Dizemos que uma variável aleatória discreta  $X$  segue uma distribuição de Bernoulli de parâmetro  $p$  se a função massa de probabilidade de  $X$  é dada por:

$$f_X(x) = p_X(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & \text{para } x = 0 \text{ ou } 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (24)$$

Onde o parâmetro  $p$  satisfaz  $0 \leq p \leq 1$ . A quantia  $(1-p)$  é comumente denotada por  $q$ . Utilizamos a notação  $X \sim \text{Bernoulli}(p)$  para dizer que  $X$  segue a distribuição Bernoulli de parâmetro  $p$ .

**Observação:** Se  $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ , então a esperança ou valor esperado de  $X$  será dado por  $\mathbb{E}[X] = p$  e a sua variância é  $\text{Var}[X] = p(1-p)$ .

Imagine agora que no experimento de Bernoulli de parâmetro  $p$ , ao invés de uma observação, sejam feitas  $n$  repetições independentes do experimento e estamos interessados no número de vezes em que um determinado desfecho ocorre nestas repetições. Se definirmos  $Y$  como a variável aleatória que denota esse número de “sucessos” em  $n$  tentativas, diremos que  $Y$  segue uma *distribuição Binomial de parâmetros  $n$  e  $p$* .

**Definição 2.5.9. (Distribuição Binomial)**

Seja  $X$  uma v.a. discreta, tomando valores em  $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ . Dizemos que  $X$  tem distribuição Binomial de parâmetros  $n$  e  $p$  se sua função massa de probabilidade é dada por:

$$p_x(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{para } x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (25)$$

onde  $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$  (lê-se a combinação de  $n$  a  $x$ )<sup>12</sup> e  $x!$  é o fatorial de  $x$ .

**Observação 1:** Se  $X \sim \text{Binomial}(n, p)$ , então a esperança ou valor esperado de  $X$  será dado por  $\mathbb{E}[X] = np$  e a sua variância é  $\text{Var}[X] = np(1 - p)$ .

**Observação 2:** Observe que a Bernoulli é um caso particular da Binomial, quando  $n = 1$ .

### Exemplo 2.5.10. 2 (O retorno de Juju)

Imagine que agora você pretende lançar a Juju 3 vezes e contar o número de vezes em que o resultado foi cara. O espaço amostral do evento agora será:

$$\Omega = \{(CCC), (CCK), (CKC), (KCC), (CKK), (KCK), (KKC), (KKK)\}$$

Vamos definir  $Y$  como sendo o número de caras em  $n = 3$  lançamentos da Juju. Logo,  $Y = 0, 1, 2, 3$  (podem sair 0 caras, 1 cara e assim por diante). Observe que:  $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 3) = \frac{1}{8}$ , isto é, entre 8 resultados possíveis, somente em um deles a Juju apresentou 0 caras. E de forma análoga, somente em 1 situação ela apresentará 3 caras. Poderíamos ter chego no mesmo concluindo que os três lançamentos são independentes, de forma que:

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(\underbrace{(K \cap K \cap K)}_{\text{eventos independentes}}) = \mathbb{P}(K)\mathbb{P}(K)\mathbb{P}(K) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Mas o que acontece quando calculamos  $\mathbb{P}(Y = 1)$ ?

Note que observamos exatamente uma cara em três possíveis situações:  $(CKK)$ ,  $(KCK)$  ou  $(KKC)$ . Como se tratam de eventos disjuntos, ao calcular a probabilidade da união, basta somar as probabilidades dos eventos individuais<sup>13</sup>:

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(CKK) + \mathbb{P}(KCK) + \mathbb{P}(KKC) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Que é justamente 3 resultados em 8. Mas como isso se relaciona com a equação 25?

Bom, para a Juju, já havíamos estabelecido que a probabilidade de sair cara, isto é, nosso “sucesso”, é igual a  $1/2$ . Então, em 3 lançamentos, se queremos saber a probabilidade de exatamente 1 cara, ela será a probabilidade de sair cara,  $p^1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1$ , vezes<sup>14</sup> a probabilidade de saírem duas coroas<sup>15</sup>, que é  $\frac{1}{2} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}$ , o que irá resultar em  $\left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}$ . Só que isso acontece em  $\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1(2 \cdot 1)} = 3$  vezes. Logo, chegamos em:

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}$$

Que é justamente a aplicação da equação 25 para o caso onde  $p = 1/2$ ,  $n = 3$  e o valor  $x$  é 1. Tente calcular agora  $\mathbb{P}(Y = 2)$  pelos dois métodos.

Para o exemplo dado, essa conta acaba parecendo mais complicada do que enumerar o espaço amostral inteiro, porém para 1000 lançamentos de Juju onde desejamos saber  $\mathbb{P}(\{\text{foram observadas mais caras que coroas}\})$  esse cálculo acaba não sendo tão trivial e o uso da fórmula se justifica.

<sup>12</sup>Para uma revisão relâmpago de combinatória, sugere-se a Apostila do professor Lorí Viali do departamento de Estatística da UFRGS, disponível em <http://goo.gl/xxuygf>. Último acesso em 28/02/2018.

<sup>13</sup>Caso isso não seja claro, revise a lista de probabilidade de eventos.

<sup>14</sup>O que estamos calculando é a probabilidade da interseção, mas como os eventos são independentes, será justamente a multiplicação das probabilidades.

<sup>15</sup>Lembre-se, para que se observe exatamente uma cara são necessárias duas coroas nos outros dois lançamentos

Quando trabalhamos com variáveis aleatórias nós “esquecemos” do espaço amostral original e dos eventos para lidar apenas com a função  $X(\cdot)$ . Uma discussão sobre o *espaço de probabilidade induzido por uma variável aleatória* pode ser visto em [Mittelhammer \(2013\)](#) (seção 2.2.1) e aborda em profundidade os fundamentos que nos permitem fazer isso. No momento, estamos apenas nos apropriando deste fato.

O seguinte lema a respeito da f.m.p. de uma v.a. discreta foi retirado de [Stern and Izbicki \(2016\)](#).

**Lema 2.5.11.** *Seja  $X$  uma variável aleatória discreta e  $p_X$  a fmp de  $X$ . Seja  $\chi$  os valores possíveis de  $X$ .*

- Para todo  $x \in \chi$ ,  $0 \leq p_X(x) \leq 1$ .
- $\sum_{x \in \chi} p_X(x) = 1$ .

*Demonstração.*

- $p_X(x) = P(X = x) = P(\{w \in \Omega : X(w) = x\})$ . Lembre que  $0 \leq P(\{w \in \Omega : X(w) = x\}) \leq 1$ .
- $\sum_{x \in \chi} p_X(x) = \sum_{x \in \chi} P(\{w \in \Omega : X(w) = x\})$ . Observe que, para  $x_1 \neq x_2$ , os eventos  $\{w \in \Omega : X(w) = x_1\}$  e  $\{w \in \Omega : X(w) = x_2\}$  são disjuntos. Portanto, pela aditividade enumerável,

$$\sum_{x \in \chi} p_X(x) = P(\cup_{x \in \chi} \{w \in \Omega : X(w) = x\}) = P(\Omega) = 1$$

□

Por fim, precisamos da definição de independência de variáveis aleatórias discretas. Em estatística, iremos na maioria dos casos assumir que temos v.a.’s independentes para que os resultados se mantenham.

**Definição 2.5.12. Independência de v.a.’s<sup>16</sup> discretas** (Retirado de [Stern and Izbicki \(2016\)](#))

Seja  $X_1, \dots, X_n$  variáveis aleatórias discretas. Dizemos que elas são independentes se, para todo  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) := \mathbb{P}(\cap_{i=1}^n X_i = x_i) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Portanto, para todo  $x_1, \dots, x_n$ ,  $\{\omega \in \Omega : X_i(\omega) = x_i\}$  são conjuntamente independentes.

### 2.5.3 Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson é utilizada em problemas com ocorrência mais rara e a variável aleatória de interesse assume valores discretos, por exemplo, número de eclipses, número de fragmentos de meteoros que atingem a Terra em um ano, número de pessoas que fazem aniversários em um mesmo dia, clientes chegando em uma agência bancária, número de vezes que a Aisha conseguiu fazer uma baliza sem arranhar o carro, etc.

**Definição 2.5.13.** Seja  $X$  uma v.a. discreta, tomando valores em  $\mathbb{N}$ . Dizemos que  $X$  tem distribuição de Poisson se sua função massa de probabilidade (f.m.p.) é dada por:

$$p_x = \mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad k \in \{1, 2, 3, \dots\} \quad (26)$$

Onde  $k$  representa o número de ocorrências de interesse e  $\lambda$  a taxa média de ocorrência. Utilizamos a notação  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ .

---

<sup>16</sup>v.a. = variável aleatória.

**Lema 2.5.14.** Se  $X$  tem distribuição de Poisson com parâmetro  $\lambda$ , então  $\mathbb{E}[X] = \lambda$  e  $\text{Var}[X] = \lambda$ .

*Demonstração.* A demonstração será feita no exercício 1. □

Precisamos verificar ainda que a equação 39 de fato é uma distribuição de probabilidade. Note que  $p_x$  satisfaz  $\mathbb{P}(X = k) \geq 0 \quad \forall \quad k$ , uma vez que as funções exponencial e fatorial são sempre positivas e  $\lambda > 0$  por ser uma taxa. Resta verificar que a soma das probabilidades é 1:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k}{k!} \stackrel{17}{=} e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Para que a distribuição de Poisson seja apropriada para modelar um fenômeno  $X$ , as seguintes condições devem ser atendidas:

- $X$  é o número de ocorrências em um determinado intervalo de tempo e assume valores em  $\{1, 2, 3, \dots\}$ ;
- as ocorrências acontecem de forma independente, isto é, o fato de um carro já ter passado em um pedágio não altera a probabilidade do próximo carro passar;
- a taxa  $\lambda$  com que os eventos ocorrem deve ser constante;
- dois eventos não podem ocorrer no mesmo instante;
- a probabilidade de que um evento ocorra em um intervalo de tempo é proporcional ao comprimento deste intervalo.

Exemplos de situações onde pode-se utilizar a distribuição de Poisson incluem: número de carros que passam em uma praça de pedágio; número de erros de digitação por página de livro; número de meteoros com mais de 1m de diâmetro que se chocam contra a Terra no período de 1 ano; o número de ligações telefônicas em uma central de telemarketing em uma hora; etc.

**Exemplo 2.5.15.** (Retirado de [Viali \(2004c\)](#)) Em um certo tipo de fabricação de fita magnética, ocorrem defeitos a uma taxa de 1 a cada 2000 metros. Qual a probabilidade de que um rolo com 2000 metros de fita magnética:

- Não tenha defeitos?
- Tenha no máximo 2 defeitos?
- Tenha pelo menos dois defeitos?

**Solução:**

Temos:

$\lambda = 1$ , taxa de defeitos a cada 2000 metros.

$X$  é número de defeitos a cada 2000 metros.

$x = 0, 1, 2, \dots$  os possíveis valores de  $X$ .

Então:

$$p_x = \mathbb{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \text{ para } x = 0, 1, 2, \dots$$

---

<sup>17</sup>Da expansão de Taylor de  $e^x$ , temos que:

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

$$a. \mathbb{P}(X = 0) = \frac{e^{-1}(-1)^0}{0!} = e^{-1} \approx 0,3679$$

$$b. \mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = \frac{e^{-1}(-1)^0}{0!} + \frac{e^{-1}(-1)^1}{1!} + \frac{e^{-1}(-1)^2}{2!} \approx 0,9197$$

$$c. \mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X < 2) = 1 - [\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)] = 1 - \left( \frac{e^{-1}(-1)^0}{0!} + \frac{e^{-1}(-1)^1}{1!} \right) \approx 0,2642$$

## Derivação da Poisson a partir da Binomial

O seguinte exemplo foi adaptado do Khan Academy e pode ser acessado no link: <https://goo.gl/zMAzu2>.

Imagine que você trabalha em uma praça de pedágio e quer dimensionar a quantidade de funcionários, catracas, etc. Seu problema é, então, saber quantos carros vão passar em um determinado período de tempo pelo local. Mais do que isso, você gostaria de saber quais as probabilidades, por exemplo, de que passem apenas 5 carros ou mais do que 100 carros em uma hora.

Comece definindo uma variável que representa a quantidade de interesse, isto é, defina  $X$ : número de carros que passam na praça do pedágio em uma hora. Precisamos agora pensar em quem é a f.m.p. de  $X$ , para então podermos calcular as probabilidades de interesse.

Precisamos de duas suposições para poder chegar na distribuição de Poisson: a primeira é que não há diferença do fluxo de veículos dependendo da hora do dia<sup>18</sup> e a segunda é que não há relação entre os carros que passam. Isso significa que se um montão de carros passou em determinado horário, não implica que menos carros irão passar na hora seguinte. Em probabilidade, essa suposição quer dizer que os eventos são independentes.

Vamos pensar agora em quem seria a média de  $X$  e em qual unidade ela seria mensurada. Se estamos interessados em carros por hora, podemos imaginar que a média da variável aleatória  $X$  é um número real  $\lambda$  que indica o valor esperado de carros que passam por hora na praça de pedágio.

Agora vamos tentar utilizar o que conhecemos da distribuição Binomial para aplicar no problema dos carros. Sabemos que se  $Y$  tem distribuição Binomial, a sua média é dada pelo número de repetições (por exemplo, número de lançamentos de uma moeda) vezes a probabilidade de sucesso, que para a moeda poderia ser a probabilidade de sair “cara”. Se denotarmos o número de repetições por  $n$  e a probabilidade de sucesso por  $p$ , então a média da Binomial é simplesmente  $np$ . Se no exemplo dos carros nossa média é  $\lambda$  carros por minuto, podemos dizer que isso é igual a 60 minutos vezes a probabilidade de que um carro passe em um dado minuto, que é  $\lambda/60$ :

$$\lambda \frac{\text{carros}}{\text{hora}} = 60 \underbrace{\frac{\text{minutos}}{\text{hora}}}_n \underbrace{\frac{\lambda \text{ carros}}{60 \text{ minuto}}}_p$$

Logo, se estamos modelando o fenômeno dos carros utilizando uma Binomial( $n, p$ ), a probabilidade de que exatamente  $k$  carros passem em uma hora será:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = \binom{60}{k} \left( \frac{\lambda}{60} \right)^k \left( 1 - \frac{\lambda}{60} \right)^{60-k} \quad (27)$$

<sup>18</sup>É claro que essa é uma suposição bastante “forte” e obviamente existem mais veículos às 13h do que às 2h da manhã, mas para o exemplo vamos supor que o fluxo seja o mesmo independente do horário.

O que parece uma boa aproximação, exceto pelo fato de que se mais de um carro passar em um minuto, teríamos um problema. Observe que, como utilizamos  $n = 60$ , isso significa que a equação 27 comportaria no máximo 60 sucessos, isto é, um carro por minuto. Mas é perfeitamente possível que passem mais carros por minuto. Uma solução possível é dividir  $\lambda$  por segundos e reescrevendo 27 para fornecer a probabilidade de que um carro passe em um segundo:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{3600}{k} \left( \frac{\lambda}{3600} \right)^k \left( 1 - \frac{\lambda}{3600} \right)^{3600-k} \quad (28)$$

Mas ainda assim, como a praça de pedágio irá ter várias catracas, é possível que mais de um carro passe por segundo. O que precisamos fazer, então, é avaliar o que ocorre com a primeira parte da equação 27 quando  $n \rightarrow +\infty$ . Antes disso, vamos fazer uma pequena revisão matemática de limites. Vamos provar este resultado:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{a}{x} \right)^x = e^a \quad (29)$$

Definimos  $\frac{1}{n} = \frac{a}{x}$ , o que implica que  $x = na$ . Observe que se  $x \rightarrow +\infty$ , o mesmo ocorre com  $n$ , pois  $n = \frac{x}{a}$ . Fazendo as devidas substituições em 29, temos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^a = \left( \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n}_e \right)^a = e^a \quad (30)$$

Para ver a definição do número  $e$  via limite, veja: <https://goo.gl/qs9pZ>.

O segundo resultado matemático que iremos usar envolve fatoriais:

$$\frac{x!}{(x-k)!} = x(x-1)(x-2) \cdots (x-k+1) \quad (31)$$

Agora, vamos aplicar o limite na primeira parte da expressão 27:

$$\mathbb{P}(X = k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{n}{k} \left( \frac{\lambda}{n} \right)^k \left( 1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{n-k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left( 1 - \frac{\lambda}{n} \right)^n \left( 1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{-k} \quad (32)$$

Utilizando o resultado visto em 31 e trocando de posição os denominadores das duas primeiras frações, teremos:

$$\mathbb{P}(X = k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}^{k \text{ termos}}}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \left( 1 - \frac{\lambda}{n} \right)^n \left( 1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{-k} \quad (33)$$

Observe que a quantidade  $\frac{\lambda^k}{k!}$  não depende de  $n$  e pode “sair” do limite. Vamos também utilizar o fato que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  (o limite do produto é o produto dos limites) e reescrever 33 como:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}^{\text{polinômio do tipo } n^k + \text{outras coisas}}}{n^k}}_1 \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{\lambda}{n} \right)^n}_{e^{-\lambda}} \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{-k}}_1 \quad (34)$$

De onde temos:

<sup>19</sup>Para um exemplo com números, veja o vídeo disponível em <https://goo.gl/zMAzu2> a partir dos 10 minutos de gravação.

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (35)$$

que é justamente a expressão dada em 39. Observe que embora a distribuição de Poisson pareça abstrata, ela nada mais é do que o limite de uma distribuição Binomial quando  $n \rightarrow \infty$  e  $p = \frac{\lambda}{n}$ .

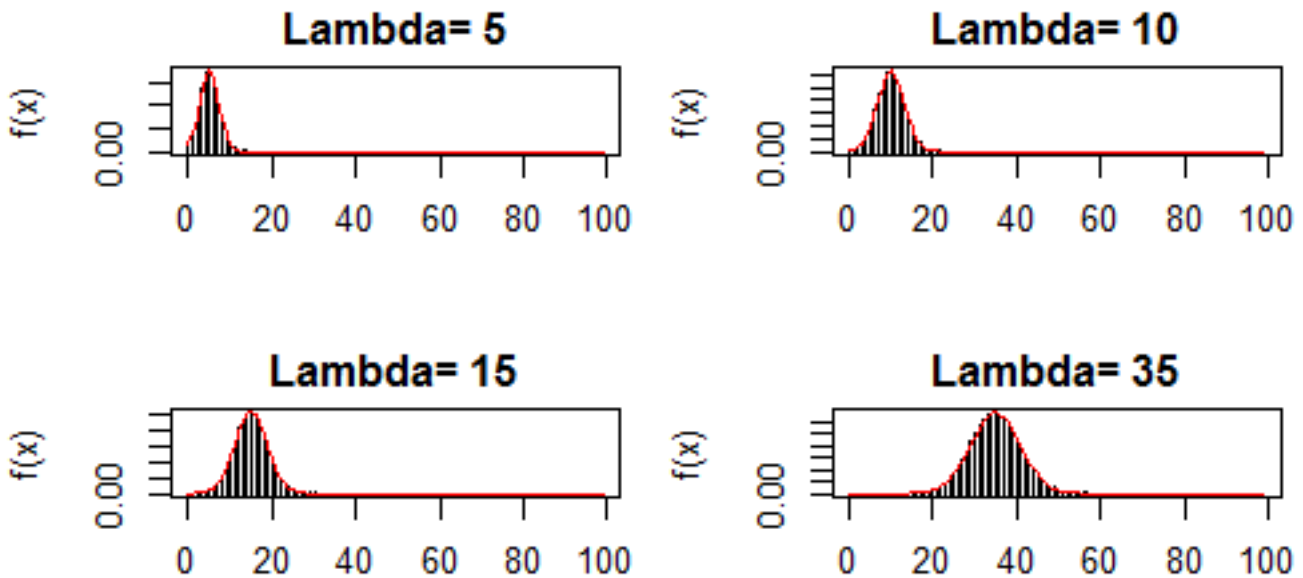
### Aproximação da Poisson para a Normal

Assim como a Binomial pode ser aproximada por uma distribuição Normal, podemos aproximar a Poisson para valores suficientemente grandes de  $\lambda$  para uma distribuição normal. Se  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ , podemos aproximá-la por uma variável  $Y \sim \text{Normal}(\lambda, \sqrt{\lambda})$ . Utilizando a padronização da Normal, teremos que:

$$\mathbb{P}(X \geq x) \approx \mathbb{P}(Y > \underbrace{x - 0,5}_{\text{correção de continuidade}}) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{(x - 0,5) - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad (36)$$

Na figura 2 observamos a aproximação utilizando  $\lambda = \{5, 10, 15, 35\}$ . O histograma preto representa a f.m.p. da Poisson para valores de 1 a 100 e a linha vermelha a distribuição Normal com média  $\lambda$  e desvio padrão igual a  $\sqrt{\lambda}$ .

Figura 2: Aproximação da Poisson pela Distribuição Normal para diferentes valores de  $\lambda$



O exemplo 2 foi retirado de <https://onlinecourses.science.psu.edu/stat414/node/180> e mostra uma aplicação desta aproximação.

**Exemplo 2.5.16.** 2 O número anual de terremotos com pelo menos 2.5 pontos na Escala Richter e com epicentro de até 40 milhas do centro de Memphis segue uma distribuição de Poisson com  $\lambda = 6.5$ . Qual a probabilidade de que pelo menos 9 terremotos desses atinjam a região no próximo ano?

**Solução:** Poderíamos utilizar a f.m.p. da Poisson para obter a probabilidade exata:

$$\mathbb{P}(X \geq 9) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 8) = 1 - [\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \cdots + \mathbb{P}(X = 8)] \approx 0,208$$

Usando a normal, obtemos o seguinte resultado:

$$\mathbb{P}(X \geq 9) \approx \mathbb{P}(Y \geq 9 - 0,5) = \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{8,5 - 6,5}{\sqrt{6,5}}\right) = \mathbb{P}(Z \geq 0,78) \approx 0,218$$

O nosso erro, neste exemplo, fica na segunda casa decimal. Quanto maior o valor de  $\lambda$ , menor será esse erro de aproximação.

## 2.5.4 Principais distribuições discretas

O seguinte resumo foi retirado de [Stern and Izbicki \(2016\)](#).

### 1. Variável Aleatória Binomial - $X \sim \text{Binomial}(n, p)$ .

$X$  conta o número de sucessos em  $n$  experimentos independentes (Bernoulli), cada um com probabilidade de “sucesso”  $p$ . Para uma animação sobre a distribuição Binomial, acesse: <https://istats.shinyapps.io/BinomialD>

### 2. Variável Aleatória Geométrica - $X \sim \text{Geom}(p)$ .

Considere uma série de experimentos independentes (Bernoulli), cada um com probabilidade de “sucesso”  $p$ .  $X$  é o número de experimentos até o primeiro “sucesso”.

### 3. Variável Aleatória Binomial Negativa - $X \sim \text{Binomial Negativa}(r, p)$ .

Considere uma série de experimentos independentes (Bernoulli), cada um com probabilidade de “sucesso”  $p$ .  $X$  é o número de experimentos até obtermos  $r$  “sucessos”. Por definição, Binomial Negativa( $1, p$ ) é o mesmo que  $\text{Geom}(p)$ .

### 4. Variável Aleatória Hipergeométrica - $X \sim \text{Hipergeométrica}(N, n, k)$ .

Uma amostra de tamanho  $n$  é escolhida (sem reposição) de um grupo de tamanho  $N$  que tem  $k$  “sucessos” (e  $N - k$  “falhas”).  $X$  é o número de “sucessos” na amostra.

### 5. Variável Aleatória Poisson - $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ .

A família de distribuições de Poisson frequentemente dá um bom modelo para o número de eventos (em particular, eventos raros) que ocorrem num período de tempo fixo (ou outra unidade fixa). Por exemplo, o número de clientes chegando em uma hora, número de reivindicações de seguro em um mês, número de terremotos num ano, número de erros de digitação numa página.  $\lambda$  é o número médio de eventos.

## Exercícios:

**Exercício 27.** (Retirado de [Stern and Izbicki \(2016\)](#))

Seja  $X$  uma v.a. tal que  $X \in \mathbb{N}$  e  $p_X(i) = c \cdot 2^{-i}$ . Encontre o valor de  $c$ .

**Resposta:** Exercício resolvido na aula,  $c = 1/2$ .

**Exercício 28.** (Retirado de [Stern and Izbicki \(2016\)](#))

Considere que você lança 3 vezes uma moeda com probabilidade de cara igual a  $p$ . Seja  $X$  a variável aleatória que representa o número de caras observadas. Encontre a *f.m.p.* de  $X$ .

**Exercício feito em aula.**

**Exercício 29.** (Retirado de [Stern and Izbicki \(2016\)](#))

Você lança duas vezes um dado de quatro lados.  $X_1$  e  $X_2$  são v.a.'s que denotam os resultados do primeiro e segundo



lançamento, respectivamente. Seja  $Y = X_1 + X_2$ . Encontre a f.m.p. de  $Y$  e de  $2X_1$ . Observe que a f.m.p. da soma dos dois lançamentos é diferente da f.m.p. obtida ao multiplicar o resultado do primeiro lançamento por 2.

**Ainda sem gabarito.**

**Exercício 30.** (Retirado de [Stern and Izbicki \(2016\)](#))

Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias discretas independentes. Verifique se  $e^X$  e  $e^Y$  também são independentes.

**Sim.**

**Exercício 31.** (Retirado de [Stern and Izbicki \(2016\)](#))

Uma moeda com probabilidade  $p$  de cara é lançada 5 vezes. Qual a probabilidade de se obter 3 caras?

**Resposta:**  $10p^3(1-p)^2$ .

**Exercício 32.** (Retirado de [Stern and Izbicki \(2016\)](#))

Uma moeda honesta é lançada 7 vezes. Calcule a probabilidade de se obter 1 ou mais caras.

**Resposta:** Genericamente (usando como probabilidade  $p$ ), temos  $1 - (1-p)^7$ .

**Exercício 33.** (Retirado de [Stern and Izbicki \(2016\)](#))

Considere que uma caixa contém  $\theta \geq 1$  bolas laranjas e  $p \geq 1$  bolas rosas. Considere que duas bolas são removidas sem reposição da caixa. Seja  $X$  o número de bolas rosas em duas retiradas.  $X$  tem distribuição binomial? Se sim, informe os parâmetros.

**Não.**

**Exercício 34.** (Retirado de [Viali \(2004a\)](#))

Se  $X \sim \text{Poisson}(\alpha)$  e  $\mathbb{P}(X = 0) = 0,2$ , calcule  $\mathbb{P}(X > 2)$ .

**Ainda sem gabarito**

**Exercício 35.** (Adaptado de [Schmidt \(2011\)](#))

Suponha que o número de Pokémons que uma pessoa captura utilizando o novo *app Pokémon GO* seja modelado por uma variável aleatória com distribuição de Poisson com média igual a 2 pokémons por semana. Adicionalmente, suponha o uso do item *incenso* aumente o número esperado de pokémons capturados para 4 por semana, mas ele somente funciona para 80% dos jogadores, sem ter efeito nos 20% restantes. Suponha ainda que todos os jogadores em uma dada semana estão utilizando o incenso. Julgue as seguintes afirmativas como verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas:

- A probabilidade de um indivíduo não se beneficia do incenso capturar 2 Pokémons na semana é de  $4e^{-2}$ .
- A probabilidade de um indivíduo que se beneficia do incenso capturar dois Pokémons em uma semana é de  $8e^{-2}$ .
- A probabilidade de um indivíduo que não se beneficia do incenso pegar no máximo dois pokémons em uma semana é de  $13e^{-4}$ .
- Suponha que um jogador escolhido aleatoriamente tenha capturado dois pokémons na semana em que ele utilizou o incenso. A probabilidade dele fazer parte do grupo de jogadores que se beneficiam dos efeitos do item é de  $(1+e^{-4})^{-1}$ .

**Exercício 36.** (Adaptado de [Ross \(2010\)](#)) Suponha que o número de capivaras que atravessam determinada rua possa ser modelado por uma distribuição de Poisson com parâmetro  $\lambda = 3$ .

- Encontre a probabilidade de que 3 ou mais capivaras atravessem a rua hoje.
- Repita o item (a) supondo que ao menos uma capivara já atravessou a rua hoje.

**Exercício 37.** 3 (adaptado de Schmidt (2011)) Seja  $Y_i, i = 1, 2, \dots, n$  uma v.a. tal que  $Y_i = 1$  com probabilidade  $1 - p$  e  $Y_i = 0$  com probabilidade  $p$ . Defina  $X = \sum_{i=1}^n Y_i$ . Responda se cada uma das afirmativas abaixo é verdadeira, falsa ou indeterminada, justificando suas respostas:

- $Y_i, i = 1, 2, \dots, n$  possui distribuição Poisson com parâmetro  $\lambda = np$ .
- $X$  possui distribuição binomial com parâmetros  $n$  e  $p$ .
- A distribuição assintótica de  $X$  é  $\text{Poisson}(\lambda)$ , com  $\lambda = np$ .
- $\text{Var}[Y_i] = \frac{\text{Var}[X]}{n} = (1 - p)p$ .
- Se  $n \rightarrow +\infty$  e  $p$  permanece fixo, então  $\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$  converge para a distribuição normal padrão.
- $E[Y_i^2] = p^2$
- Se  $\bar{X} = \frac{X}{n}$ , então  $E[\bar{X}] = p$ .

### 2.5.5 Variáveis aleatórias contínuas

**Definição 2.5.17. Variável aleatória contínuas** (Retirado de James (2010))

A variável aleatória  $X$  é dita contínua se existe uma função  $f(x) \geq 0$  tal que:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

As variáveis aleatórias contínuas são tais que a função densidade em um ponto é igual a zero.

Uma definição alternativa é (retirado de Stern and Izbicki (2016)):

**Definição 2.5.18.** Seja  $X$  uma variável aleatória contínua. Denotamos a função de densidade de probabilidade de  $X$  por  $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Ela satisfaz as seguintes propriedades:

- $f_X(x) \geq 0$ .
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ .
- $\int_a^b f_X(x)dx = \mathbb{P}(a \leq X \leq b)$ .

Como propriedade, temos que as probabilidades de uma variável aleatória contínua são as integrais sob a curva  $f(\cdot)$  em determinados intervalos.

**Definição 2.5.19. f.d.a. de uma v.a. contínua** (Retirado de Mittelhammer (2013))

A função distribuição acumulada de uma variável aleatória  $X$ , se  $X$  for contínua, é dada por

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

**Lema 2.5.20.** Seja  $X$  uma variável aleatória contínua com a função de distribuição acumulada  $F_X$ . Para  $b \geq a$ ,  $F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b)$ .

*Demonstração.* Usando a definição de fda

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \int_{-\infty}^b f_X(x)dx - \int_{-\infty}^a f_X(x)dx \\ &= \int_a^b f_X(x)dx = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) \end{aligned}$$

□

As funções densidade/massa e distribuição acumulada tem uma relação direta, como é possível perceber nas definições, tanto para o caso discreto como para o caso contínuo. Os próximos dois resultados formalizam essa relação e foram retirados de [Mittelhammer \(2013\)](#):

**Teorema 2.5.21.** *Sejam  $x_1 < x_2 < x_3$  um conjunto contável de resultados possíveis da variável aleatória discreta  $X$ . Então, a função massa de probabilidade de  $X$  pode ser definida por:*

$$\begin{aligned} f(x_1) &= F(x_1) \\ f(x_i) &= F(x_i) - F(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, 3, \dots \\ f(x) &= 0 \quad \text{para } x \text{ que não esteja na imagem de } X \end{aligned}$$

*Demonstração.* A demonstração segue diretamente das definições das funções massa e acumulada de variáveis aleatórias.

□

**Teorema 2.5.22.** *Sejam  $f(x)$  e  $F(x)$  as f.d.p. e f.d.a. de uma variável aleatória contínua  $X$ . A função densidade de  $X$  pode ser definida como*

$$f(x) = \frac{d}{dx}[F(x)]$$

*em todo ponto onde  $f(x)$  é contínua e será igual a zero em todos outros pontos.*

*Demonstração.* Pelo teorema fundamental do cálculo, temos que:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d \int_{-\infty}^x f(t)dt}{dx} = f(x)$$

Sempre que  $f(x)$  for contínua, o que prova a primeira parte do teorema.

Uma vez que  $X$  é uma v.a. contínua, então  $\mathbb{P}(X \leq b) = F(b) = \int_{-\infty}^b f(x)dx$  está definida para qualquer valor de  $b$ . Como mudar o valor deste integrando nos pontos de descontinuidade não irá afetar o valor de  $F(b)$ , então  $f(x)$  pode ser definida de forma arbitrária nestes pontos<sup>20</sup>.

□

## 2.5.6 Principais modelos contínuos

### 1. A Variável Aleatória Uniforme - $X \sim U(a, b)$ .

Todos os subconjuntos de  $(a, b)$  com o mesmo comprimento são equiprováveis. A distribuição é normalmente usada quando todos os pontos em  $(a, b)$  são “igualmente prováveis”.

<sup>20</sup>Uma discussão mais formal a respeito disso está na página 67 de [Mittelhammer \(2013\)](#)

## 2. A Variável Aleatória Exponencial - $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ .

Esta distribuição é usada, frequentemente, para modelar o tempo até um certo evento ocorrer. É a única distribuição contínua com propriedade de perda de memória.

## 3. A Variável Aleatória Gama - $X \sim \text{Gama}(k, \lambda)$ .

A  $\text{Gama}(1, \lambda)$  é uma  $\text{Exponencial}(\lambda)$  e, assim, a distribuição Gama é a generalização da Exponencial. Se  $k$  é um número natural,  $X = \sum_{i=1}^k Y_i$ , onde  $Y_i$  são variáveis aleatórias independentes e  $Y_i \sim \text{Exponencial}(\lambda)$ .

## 4. A Variável Aleatória Beta - $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ .

Como a distribuição Beta assume valores em  $(0, 1)$ , ela é frequentemente usada para modelar frequências e razões.

## 5. A Variável Aleatória Normal (Gaussiana) - $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

Usando o Teorema do Limite Central, a distribuição Normal é frequentemente usada para aproximar a distribuição da média de uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Para uma animação sobre a distribuição Normal padrão, acesse: <https://istats.shinyapps.io/NormalDist/>.

## 6. A variável aleatória $t$ - $X \sim t_p$

A distribuição  $t$  recebe este nome em homenagem ao mestre cervejeiro William Gosset, que publicou seus achados utilizando o pseudônimo de Student<sup>21</sup>. A distribuição  $t$  com  $p$  graus de liberdade é definida como o quociente de uma normal padrão pela raiz de uma qui-quadrado com  $p$  graus de liberdade, onde o numerador e o denominador são independentes.

Note que a estatística

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

com  $S$  sendo o desvio padrão amostral, definido como  $S = \sqrt{S^2}$ , e  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ , segue uma distribuição  $t$  com  $n - 1$  graus de liberdade, pois podemos reescrevê-la como:

$$\frac{(\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{S^2/\sigma^2}}$$

O numerador é de fato uma normal padrão e o denominador é  $\sqrt{\chi_{n-1}^2/(n-1)}$  e é independente do numerador. Para uma demonstração sobre a distribuição do denominador, recomendo ver Casella and Berger (2002). Para uma animação em R sobre a distribuição  $t$ , acesse: <https://istats.shinyapps.io/tdist/>. A distribuição  $t$  converge para a distribuição normal (isso significa que os valores ficam cada vez mais próximos) quando a amostra aumenta. Como regra de bolso, costuma-se dizer que para valores de  $n$  acima de 30, é indiferente utilizar a normal padrão ou a  $t$ . Porém, para valores amostrais pequenos, a  $t$  costuma ter mais área nas suas caudas e por isso às vezes usamos a expressão “caudas gordas” para nos referir a ela. A Cauchy é um caso particular da  $t$ :  $t$  com 1 grau de liberdade (ou seja,  $n = 2$ ) é uma Cauchy.

## 7. A variável aleatória $\chi^2$ (qui-quadrado) - $X \sim \chi_p$

---

<sup>21</sup>Para saber mais sobre essa história - depois que passar o semestre - veja: <https://priceconomics.com/the-guinness-brewer-who-revolutionized-statistics/>.

Se  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , então  $Y = X^2$  terá distribuição qui-quadrado com 1 grau de liberdade. Além disso, se  $W \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$  com  $\alpha = p/2$  ( $p$  inteiro) e  $\beta = 2$ , então  $W \sim \chi^2(p)$ . Assim como a  $t$ , a qui-quadrado tem apenas um parâmetro, que é o número de graus de liberdade. Para uma animação sobre a qui-quadrado, acesse: <https://istats.shinyapps.io/ChisqDist/>.

#### 8. A variável aleatória com distribuição $F$ de Snedecor - $X \sim F_{p,q}$ .

Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de uma população com distribuição  $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  e  $Y_1, \dots, Y_m$  uma amostra aleatória de uma população com  $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ . A variável aleatória  $F = (S_X^2/\sigma_X^2)/(S_Y^2/\sigma_Y^2)$  tem distribuição  $F$  de Snedecor com  $n - 1$  e  $m - 1$  graus de liberdade. Para uma animação da distribuição  $F$ , acesse: <https://istats.shinyapps.io/FDist/>.

O seguinte teorema é útil:

**Teorema 2.5.23.** *a) Se  $X \sim F_{p,q}$ , então  $1/X \sim F_{q,p}$ ; isto é, o recíproco de uma v.a. com distribuição  $F$  também tem distribuição  $F$ , invertendo os graus de liberdade do numerador e do denominador;*

*b) Se  $X \sim t_q$ , então  $X^2 \sim F_{1,q}$  - uma variável aleatória com distribuição  $t$  quando elevada ao quadrado é uma variável aleatória com distribuição  $F$  com 1 grau de liberdade no numerador e  $q$  graus de liberdade no denominador;*

*c) Se  $X \sim F_{p,q}$ , então  $(p/q)X/(1 + (p/q)X) \sim \text{Beta}(p/2, q/2)$ .*

## 2.6 Distribuição Normal (retirado de Stern and Izbicki (2016))

**Definição 2.6.1.** Dizemos que  $X$  tem distribuição Normal com parâmetros  $(\mu, \sigma^2)$  e denotamos por  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  se a densidade de  $X$  é

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Se  $\mu = 0$ , e  $\sigma = 1$ , dizemos que  $X$  tem distribuição normal padrão.

**Definição 2.6.2.** Seja  $Z \sim N(0, 1)$ .

$$\phi(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = F_Z(z)$$

$\phi$  não tem solução analítica. As duas formas de obter valores aproximados de  $\phi$  são:

1. Muitas linguagens de programação têm bibliotecas estatísticas com estes valores. Por exemplo,  $R$ , python,  $C$ , ...
2. Consultar uma tabela da normal padrão, disponível em muitos livros de Estatística.

**Lema 2.6.3.** Se  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , então  $\frac{(X-\mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$ .

*Demonstração.* Seja  $Z = \frac{(X-\mu)}{\sigma}$ .

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}\left(\frac{(X-\mu)}{\sigma} \leq z\right) \\ &= \mathbb{P}(X \leq \sigma z + \mu) = F_X(\sigma z + \mu) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 f_Z(z) &= \frac{\partial F_Z(z)}{\partial z} = \frac{\partial F_X(\sigma z + \mu)}{z} && \text{(Lema ??)} \\
 &= \frac{\partial F_X(\sigma z + \mu)}{\partial(\sigma z + \mu)} \cdot \frac{\partial(\sigma z + \mu)}{\partial z} && \text{Regra da Cadeia} \\
 &= f_X(\sigma z + \mu) \cdot \sigma \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sigma z + \mu - \mu)^2}{\sigma^2}} \cdot \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2}
 \end{aligned}$$

□

Segue do Lema 2.6.3 que qualquer parametrização da distribuição normal pode ser obtida com mudança apropriada de escala da normal padrão. A Figura 3 apresenta a densidade da distribuição normal padrão.

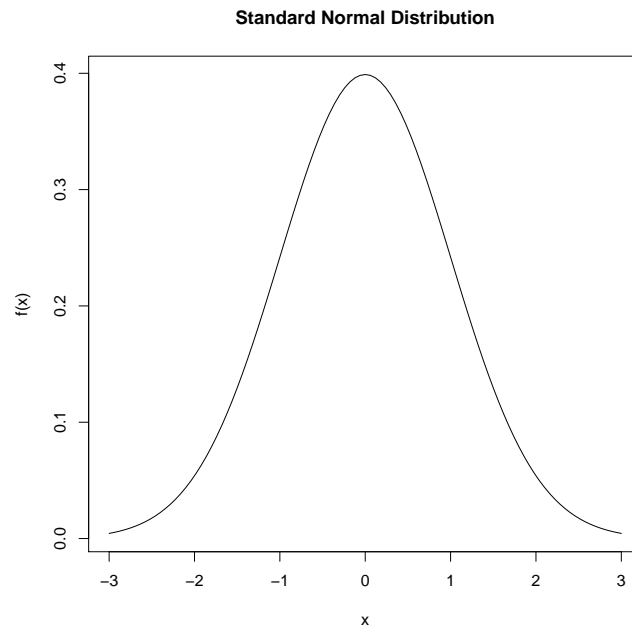


Figura 3

**Lema 2.6.4.** Se  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , então  $\mathbb{E}[X] = \mu$  e  $\text{Var}[X] = \sigma^2$ .

*Demonstração.* Considere que  $X \sim N(0, 1)$ .

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Como  $x e^{-x^2}$  é uma função ímpar,  $\mathbb{E}[X] = 0$ . **Observação:** Na aula vimos como calcular essa integral, quem precisar, pode pedir pra Aisha.

Lembramos que  $Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ . Como  $\mathbb{E}[X] = 0$ ,  $Var[X] = \mathbb{E}[X^2]$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx && \text{integração por partes} \\ &= 0 + 1 && \text{fdp da normal padrão (Definições, 2.5.18 2.6.1)}\end{aligned}$$

A seguir, considere que  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}\left[\sigma \cdot \frac{X - \mu}{\sigma} + \mu\right] \\ &= \sigma \cdot \mathbb{E}\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] + \mu \\ &= \sigma \cdot 0 + \mu = \mu && (\text{Lema 2.6.3})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Var[X] &= Var\left[\sigma \cdot \frac{X - \mu}{\sigma} + \mu\right] \\ &= \sigma^2 \cdot Var\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] \\ &= \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2 && (\text{Lema 2.6.3})\end{aligned}$$

□

**Lema 2.6.5** (Aproximação da Binomial e Teorema do Limite Central). *Considere que  $X \sim \text{Binomial}(n, p)$  e que  $n$  é “grande” ( $n = 30$  frequentemente é suficiente para um bom resultado).*

$$\mathbb{P}\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq z\right) \approx \phi(z)$$

*Esta é uma instância específica de uma regra mais genérica. Se  $X_1, X_2, \dots$  é uma sequência de variáveis aleatórias independentes com a mesma distribuição,  $\mathbb{E}[X_i] = \mu$  e  $Var[X_i] = \sigma^2$ , então, para  $n$  grande,*

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{\sqrt{n}\sigma} \leq z\right) \approx \phi(z)$$

### 2.6.1 Distribuição Exponencial

A distribuição exponencial é utilizada para modelagem de fenômenos onde a variável de interesse assume valores estritamente positivos com decaimento exponencial, como por exemplo tempo até a falha de equipamentos, tempo médio de vida de medicamentos, etc. Muitas distribuições acabam se relacionando com a Exponencial, como a distribuição Gamma, a Normal e outras.

## Caracterização

**Definição 2.6.6.** Seja  $X$  uma v.a.<sup>22</sup> contínua, tomando valores em  $\mathbb{R}_+^*$ . Dizemos que  $X$  tem distribuição Exponencial se sua função densidade de probabilidade (f.d.p.<sup>23</sup>) é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x > 0. \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (37)$$

Observe que a equação 37 de fato representa uma densidade pois sua integral no domínio onde está definida é 1:

*Demonstração.*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Resolvendo a integral imprópria:

$$\int \lambda e^{-\lambda x} dx \Rightarrow \begin{cases} u & = -\lambda x \\ du & = -\lambda dx \end{cases}$$

Fazendo a integral por substituição:

$$- \int e^{\overbrace{-\lambda x}^u} \underbrace{(-\lambda) dx}_{du} = - \int e^u du = -e^u = -e^{-\lambda x}$$

Por fim, avaliamos o resultado nos limites de integração original:

$$-e^{-\lambda x} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} = -e^{-\infty} - (-e^0) = 0 - (-1) = +1$$

□

**Lema 2.6.7.** Se  $X$  tem distribuição Exponencial com parâmetro  $\lambda$ , então  $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$  e  $Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$ .

*Demonstração.* A demonstração fica como exercício. □

Uma outra forma de parametrizar a distribuição exponencial, bastante utilizada na literatura, é escrevendo 37 com  $\lambda = \frac{1}{\beta}$ , de forma que agora seu valor esperado é  $\beta$  e a variância é dada por  $\beta^2$ . Neste caso, escrevemos 37 como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} & \text{se } x > 0. \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (38)$$

A figura 4 tem o gráfico da distribuição exponencial avaliado no intervalo  $x \in (0, 20)$  para diferentes valores de  $\lambda$ . É possível observar que quanto menor o parâmetro  $\lambda$ , mais "achatada" será a distribuição. Já para valores maiores, a distribuição fica mais inclinada, tendendo a zero mais rapidamente.

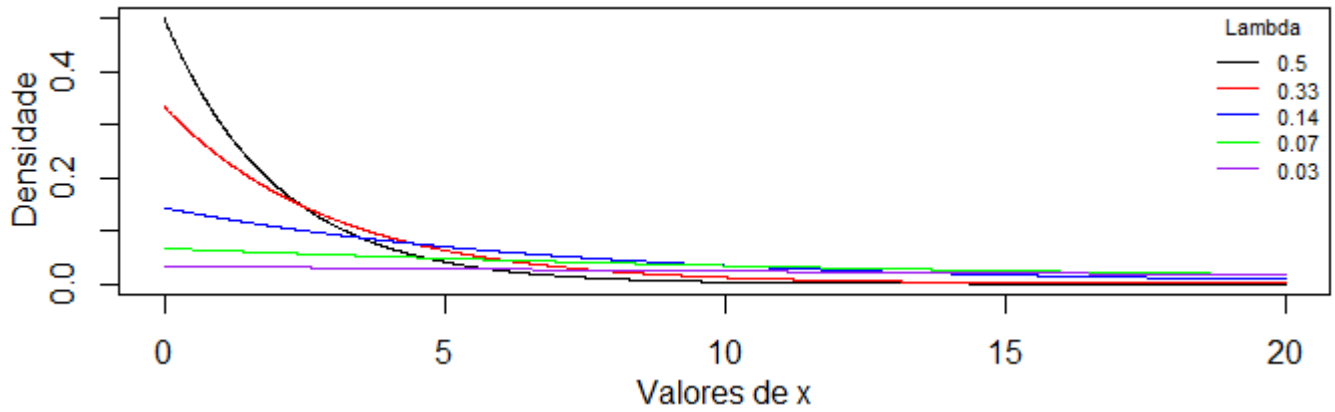
---

<sup>22</sup>v.a. = variável aleatória

<sup>23</sup>Em inglês, a f.d.p. é chamada de p.d.f. (*Probability Density Function*).



Figura 4: Função densidade da distribuição exponencial para diferentes valores de  $\lambda$



**Lema 2.6.8.** Se  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , então sua função densidade acumulada (fda) é dada por  $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ , se  $x > 0$ .

*Demonstração.* A demonstração fica de exercício. □

Observe que como a  $F_X(x)$  representa, por definição,  $\mathbb{P}(X \leq x)$ , então a probabilidade de seu complementar será simplesmente

$$\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - F_X(x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$$

Que é uma quantidade de interesse em muitas aplicações, como por exemplo, a probabilidade de que determinada lâmpada dure mais que 5 anos.

**Lema 2.6.9.** (Falta de memória da distribuição exponencial)

Se  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , então  $X$  não tem memória. Isto é, para  $t, s > 0$ ,

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s)$$

*Demonstração.* Para a demonstração, vamos utilizar a definição de probabilidade condicional, isto é:  $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > t + s | X > t) &= \frac{\mathbb{P}(X > t + s \cap X > t)}{\mathbb{P}(X > t)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X > t + s)}{\mathbb{P}(X > t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda(t)} e^{-\lambda(s)} e^{+\lambda(t)} \\ &= e^{-\lambda(t) + \lambda(t) - \lambda(s)} \\ &= e^{-\lambda(s)} \end{aligned}$$

□

Essa propriedade é mais facilmente compreendida em termos de "tempo de espera". Suponha que o tempo até um cliente chegar em uma agência bancária tem distribuição exponencial de parâmetro  $\lambda$ . A probabilidade de um cliente chegar em

30 minutos após a abertura da agência ou 30 minutos após as primeiras três horas em que ela está em funcionamento é a mesma. Isso significa que na prática, se queremos saber a probabilidade de um evento ocorrer nas próximas  $s$  unidades de tempo, obteremos o mesmo valor se considerarmos que já se passaram  $t$  unidades de tempo ou começamos do zero.

As únicas duas distribuições que apresentam falta de memória são a geométrica e a exponencial. É possível demonstrar, inclusive, que se uma variável aleatória contínua apresenta falta de memória, necessariamente ela segue uma distribuição exponencial (para uma discussão mais detalhada, veja [Meyer \(1973\)](#)).

## Relação entre a Exponencial e a Poisson

A distribuição de Poisson apresenta a probabilidade de ocorrência de um evento discreto em um intervalo contínuo de tempo  $t$ <sup>24</sup> que apresenta  $\lambda$  ocorrências médias. Sua f.m.p. é dada por:

$$p_x = \mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} \quad k \in \{1, 2, 3, \dots\} \quad (39)$$

Observe que se queremos saber a probabilidade de **não** haver ocorrências no intervalo, queremos  $P(X = 0)$ , temos:

$$p_x = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t} \quad (40)$$

E isso é  $P(X > t)$ , como mostrado no lema 2. Isso significa que, se temos uma variável aleatória de Poisson, a probabilidade de não haverem ocorrências em um intervalo de tempo  $t$  será calculada utilizando a distribuição exponencial e calculando a probabilidade de que o tempo até a próxima ocorrência seja maior que  $t$ .

**Exemplo 2.6.10.** (Retirado de [Freeman et al. \(2017\)](#)) Suponha que o número de carros que chegam a um lava-rápido durante uma hora seja descrito por uma distribuição de probabilidade de Poisson. Logo, a probabilidade de  $x$  carros chegarem em por hora é dado por:

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{10^x e^{-10}}{x!}$$

Uma vez que o número médio de carros que chegam ao lava-rápido é 10 por hora, o tempo médio entre a chegada de cada carro é  $\frac{1 \text{ hora}}{10 \text{ carros}} = 0,1 \text{ hora/carro}$ . Desse modo, a distribuição exponencial correspondente que descreve o tempo entre as chegadas dos carros tem uma média de 0,1 hora por carro. Como a média da exponencial é dada por  $\frac{1}{\text{parâmetro}}$ , temos uma exponencial de parâmetro  $\mu = \frac{1}{0,1} = 10$ <sup>25</sup>. A f.d.p. correspondente será dada por:

$$f(x) = 10e^{-10x} \quad (41)$$

**Exemplo 2.6.11.** (Retirado de [Viali \(2004b\)](#)) Suponha que um componente eletrônico tenha um tempo de vida  $T$  (em unidades de 1000 horas) que segue uma distribuição exponencial de parâmetro  $\lambda = 1$ . Suponha que o custo de fabricação seja R\$2,00 e o preço de venda R\$5,00. O fabricante garante total devolução do dinheiro se o aparelho estragar antes de 900 horas. Qual o lucro esperado por item vendido?

**Solução:** Neste caso, tem-se que a f.d.p. da v.a. será dada por:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = 1^x e^{-1x} = e^{-x}$$

Logo, se queremos  $\mathbb{P}(T < 0,9)$ , temos:

<sup>24</sup>Até então tratamos a Poisson como tendo parâmetro  $\lambda$ , considerando que  $t = 1$  unidade de tempo. Em [39](#) consideramos que ainda há a média  $\lambda$ , mas agora por cada  $t$  unidades de tempo sendo que  $t$  assume valores em  $R_+$

<sup>25</sup>Aqui utilizamos  $\mu$  para representar o parâmetro da exponencial para não confundir com a Poisson.

$$\int_0^{0,9} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_{x=0}^{x=0,9} = -e^{-(0,9)} - (-e^0) = 1 - e^{-0,9} = 0,5934 \quad (42)$$

O lucro do fabricante, por unidade, é dado por uma variável aleatória Bernoulli, onde o seu lucro é -R\$2,00 com probabilidade 0,5934 e R\$3,00 com probabilidade  $1 - 0,5934 = 0,4066$ . Logo, seu lucro esperado será:

$$\mathbb{E}[lucro] = -2(0,5934) + 3(0,4066) = 0,03$$

## 2.7 Distribuição Gama (retirado de [Stern and Izbicki \(2016\)](#))

**Definição 2.7.1.**  $\Gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  é chamada de função Gama e é tal que:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

**Lema 2.7.2.** A função Gama ( $\Gamma(\cdot)$ ) satisfaz as seguintes propriedades:

1. Para  $a \geq 1$ ,  $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$
2. Se  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma(n) = (n-1)!$

*Demonstração.*

1.

$$\begin{aligned} \Gamma(a) &= \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \\ &= -t^{a-1} e^{-t} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -(a-1)t^{a-2} e^{-t} dt && \text{Integração por partes} \\ &= 0 + (a-1) \int_0^\infty t^{a-2} e^{-t} dt = (a-1)\Gamma(a-1) && \text{Função Gama (Definição 2.7.1)} \end{aligned}$$

2. Usando o item anterior e iterando em  $n$ , observe que

$$\Gamma(n) = (n-1) \cdot (n-2) \dots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = (n-1)! \cdot \Gamma(1)$$

Assim, basta mostrar que  $\Gamma(1) = 1$ .

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^\infty = 1$$

□

**Definição 2.7.3.** Dizemos que uma variável aleatória  $X$  tem distribuição Gama com parâmetros  $(k, \lambda)$  e denotamos por  $X \sim \text{Gama}(k, \lambda)$  se a densidade de  $X$  é

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(k)\lambda^k} x^{k-1} e^{-\frac{x}{\lambda}} & , \text{ if } x > 0 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

A figura 5 mostra algumas densidades possíveis para a distribuição Gama.

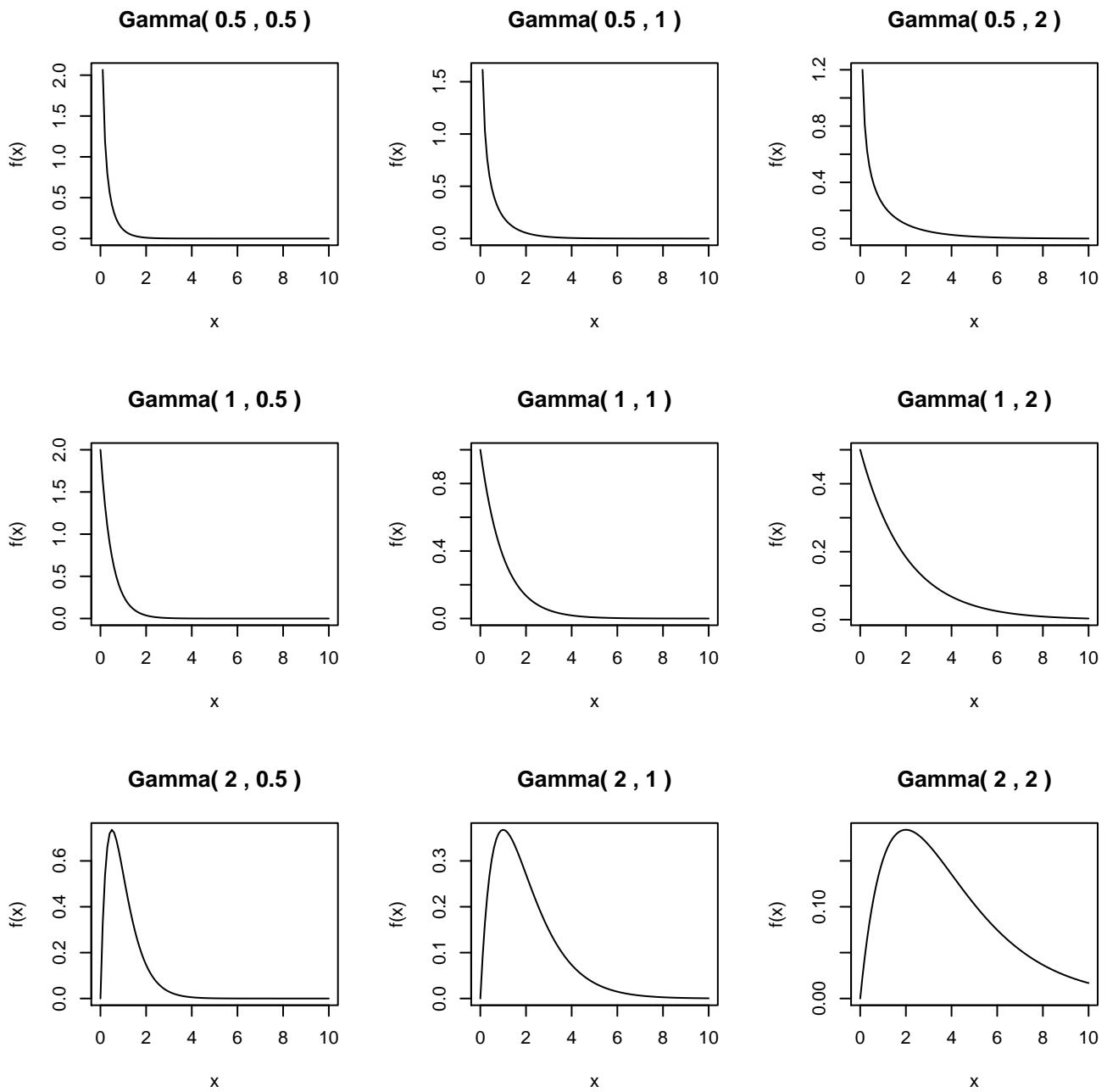


Figura 5: densidades de algumas distribuições Gama

**Lema 2.7.4.** *TA densidade da distribuição Gama integra para 1.*

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(k)\lambda^k} x^{k-1} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx &= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(k)\lambda^k} (\lambda t)^{k-1} e^{-t} \lambda dt && \text{Fazemos } x = \lambda t \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{-t} dt = 1 && \text{Função Gama (Definição 2.7.1)} \end{aligned}$$

□

Observe que, no caso especial em que  $k = 1$ , a distribuição Gama corresponde à distribuição Exponencial.

**Lema 2.7.5.** *Para todo  $a > 0$ ,  $\mathbb{E}[X^a] = \frac{\Gamma(k+a)\lambda^a}{\Gamma(k)}$ . If  $X \sim \text{Gama}(k, \lambda)$ , então  $\mathbb{E}[X] = k\lambda$  e  $\text{Var}[X] = k\lambda^2$ .*

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^a] &= \int_0^\infty x^a \frac{1}{\Gamma(k)\lambda^k} x^{k-1} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(k)\lambda^k} x^{k+a-1} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx \\ &= \frac{\Gamma(k+a)\lambda^a}{\Gamma(k)} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(k+a)\lambda^{k+a}} x^{k+a-1} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx && \text{Densidade de uma Gama}(k+a, \lambda) \\ &= \frac{\Gamma(k+a)\lambda^a}{\Gamma(k)} && \text{Propriedades da função Gama (Lema 2.7.2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \frac{\Gamma(k+1)\lambda^1}{\Gamma(k)} = \frac{k\Gamma(k)\lambda^1}{\Gamma(k)} = k\lambda && \text{Use } a = 1 \text{ no item anterior} \\ \mathbb{E}[X^2] &= \frac{\Gamma(k+2)\lambda^2}{\Gamma(k)} = \frac{k(k+1)\Gamma(k)\lambda^2}{\Gamma(k)} = k(k+1)\lambda^2 && \text{Use } a = 2 \text{ no item anterior} \\ \text{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = k(k+1)\lambda^2 - k^2\lambda^2 = k\lambda^2 \end{aligned}$$

□

## 2.8 Distribuição Beta (retirado de Stern and Izbicki (2016))

**Definição 2.8.1.** Dizemos que  $X$  tem distribuição Beta com parâmetros  $(\alpha, \beta)$  e denotamos por  $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$  se a densidade de  $X$  é

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & , \text{ if } 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

**Lema 2.8.2.** *A densidade na Definição 2.8.1 é uma fdp válida. Em particular,*

$$\int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx = 1$$

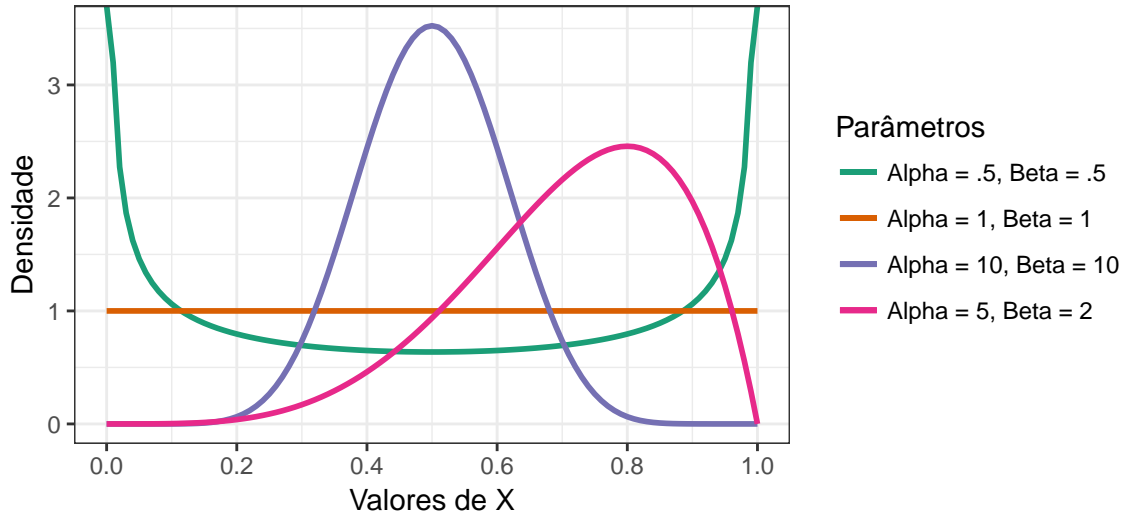


Figura 6: Densidades de algumas distribuições Beta

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}
 \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx \int_0^\infty y^{\beta-1}e^{-y}dy && \text{(Definição 2.7.1)} \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\alpha-1}y^{\beta-1}e^{-(x+y)}dxdy \\
 &= \int_0^\infty \int_0^1 (tu)^{\alpha-1}(t(1-u))^{\beta-1}e^{-t}t \cdot dudt && t = x + y, u = x(x+y)^{-1} \\
 &= \int_0^\infty t^{\alpha+\beta-1}e^{-t}dt \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du \\
 &= \Gamma(\alpha+\beta) \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du && \text{(Definição 2.7.1)}
 \end{aligned}$$

Assim,  $\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} e \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = 1$ . □

Como a distribuição Beta assume valores em  $(0, 1)$ , ela é frequentemente usada para modelar frequências relativas e razões. É uma distribuição flexível e pode assumir muitas formas diferentes. A Figura 6 mostra algumas densidades que a distribuição Beta pode assumir.

**Lema 2.8.3.** Se  $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ , então para todo  $c, d \geq 0$   $\mathbb{E}[X^c(1-X)^d] = \frac{\Gamma(\alpha+c)\Gamma(\beta+d)}{\Gamma(\alpha+\beta+c+d)}$ . Portanto,  $\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$  e  $\text{Var}[X] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$ .

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X^c(1-X)^d] &= \int_{-\infty}^\infty x^c(1-x)^d f_X(x)dx \\
 &= \int_0^1 x^c(1-x)^d \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+c)\Gamma(\beta+d)}{\Gamma(\alpha+\beta+c+d)} \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+\beta+c+d)}{\Gamma(\alpha+c)\Gamma(\beta+d)} x^\alpha(1-x)^{\beta-1}dx \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+c)\Gamma(\beta+d)}{\Gamma(\alpha+\beta+c+d)} \cdot 1 && \text{(Lema 2.8.2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 0)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1 + 0)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + \beta)} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad (\text{Lema 2.7.2}) \\
\mathbb{E}[X^2] &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 2)\Gamma(\beta + 0)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2 + 0)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\alpha(\alpha + 1)\Gamma(\alpha)}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + \beta)} = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)} \quad (\text{Lema 2.7.2}) \\
\text{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\
&= \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha + \beta)^2} \\
&= \frac{(\alpha + \beta)(\alpha + 1)\alpha - \alpha^2(\alpha + \beta + 1)}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2}
\end{aligned}$$

□

## 2.9 Exercícios

**Exercício 38.** Seja  $0 \leq X \leq 1$  uma v.a. contínua tal que

$$f_X(x) = \begin{cases} c, & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Encontre o valor de  $c$ .

**Resposta:**  $c = 1$ .

**Exercício 39.** Seja  $X \geq 0$  uma variável aleatória contínua tal que  $f_X(x) = ce^{-x}$  para  $x \geq 0$ . Encontre o valor de  $c$ .

**Resposta:**  $c = 1$ .

**Exercício 40.** Considere  $X \geq 1$ . Pode haver  $c$  tal que a densidade de probabilidade de  $X$  seja  $f_X(x) = ce^{-x}$ ?

**Resposta:** Não.

**Exercício 41.** Determinar a área limitada pela curva normal padrão em cada um dos casos abaixo:

- Entre  $z = 0$  e  $z = 1, 2$ ;
- Entre  $z = -0, 68$  e  $z = 0$ ;
- Entre  $z = 0, 46$  e  $z = 2, 21$ ;
- Entre  $z = -0, 81$  e  $z = 1, 94$ ;
- À esquerda de  $z = -0, 6$ ;
- À direita de  $z = -1, 23$ ;
- À direita de  $z = 2, 05$  e à esquerda de  $z = 1, 44$ ;
- Entre  $z = -1$  e  $z = +1$ ;
- Entre  $z = -1, 96$  e  $z = +1, 96$ ;

j. Entre  $z = -2,56$  e  $z = +2,56$ .

**Respostas:**

a. 0,3848

b. 0,2517

c. 0,3092

d. 0,7648

e. 0,2743

f. 0,8907

g. 0,9453

h. 0,6826

i. 0,95

j. 0,9896

**Exercício 42.** A altura dos indivíduos de uma população distribui-se normalmente com média de 1,56m e desvio padrão de 0,09m. Qual a porcentagem, nessa população, de indivíduos com altura de 1,8m ou mais?

**Resposta:** 0,39%

**Exercício 43.** O peso médio das reses que se encontram num curral de uma determinada fazenda é de 200kg e o desvio padrão é de 10kg. Em 120 animais retirados ao acaso do curral, quantos pesarão mais de 185kg? Considere que o peso das reses tenha distribuição normal.

**Resposta:** 111 bois

**Exercício 44.** Foi feito um estudo sobre a altura de plantas de milho de certo híbrido, observando-se que ela se distribui normalmente com média igual a 2,20m e desvio padrão igual a 0,20m. Qual a porcentagem de plantas com altura:

a. Entre 2,15m e 2,25m;

b. Entre 2,0m e 2,4m;

c. Acima de 2,3m.

**Respostas:**

a. 0,1974

b. 0,6826

c. 0,3085

**Exercício 45.** Na distribuição normal de média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma^2$ , encontre:

a.  $\mathbb{P}(X < \mu + 2\sigma)$ ;

b.  $\mathbb{P}(|X - \mu| < \sigma)$ ;



c. O número  $a$  tal que  $\mathbb{P}(\mu - a\sigma < X < \mu + a\sigma) = 0,9$ ;

c. O número  $a$  tal que  $\mathbb{P}(X > a) = 0,95$ .

**Respostas:**

a. 0,9772

b. 0,6826

c. 1,645

d.  $\mu - 1,645\sigma$

**Exercício 46.** Seja  $X \sim N(0, 1)$ . Determine:

a.  $\mathbb{P}(-1 < X < 1)$ ;

b.  $\mathbb{P}(-2 < X < 2)$ ;

c.  $\mathbb{P}(-3 < X < 3)$ .

Seja  $Y \sim N(5, 10)$ . Determine:

a.  $\mathbb{P}(-5 < Y < 15)$ ;

b.  $\mathbb{P}(-15 < Y < 25)$ ;

c.  $\mathbb{P}(-25 < Y < 35)$ .

Seja  $W \sim N(\mu, \sigma)$ . Determine:

a.  $\mathbb{P}(\mu - \sigma < W < \mu + \sigma)$ ;

b.  $\mathbb{P}(\mu - 2\sigma < W < \mu + 2\sigma)$ ;

c.  $\mathbb{P}(\mu - 3\sigma < W < \mu + 3\sigma)$ .

Compare os resultados obtidos para  $X$ ,  $Y$  e  $W$ . Que conclusão você pode tirar?

**Respostas:**

a. 0,6826

b. 0,9544

c. 0,9974

As probabilidades de valores distantes da média em desvios-padrões se mantêm. Essa propriedade da normal é muito usada em controle estatístico de qualidade. Para quem quiser saber mais, pode procurar por *six-sigma*.

**Exercício 47.** Prove que se  $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$  então  $E[X] = \frac{1}{\lambda}$   $Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$ .

**Exercício 48.** (Adaptado de Schmidt (2011)) Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variáveis aleatórias com distribuição Exponencial dada por  $f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}$ ,  $0 < x < \infty$ . Considere  $\hat{\lambda} = \frac{c}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , onde  $c$  é um número real. Determine se as seguintes afirmativas são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas:

- a.  $E[\hat{\lambda}] = \lambda$ .
- b.  $Var[\hat{\lambda}] = \frac{c}{\lambda}$ .
- c.  $Var[\hat{\lambda}] + (\lambda - E[\hat{\lambda}])^2 = \lambda^2(2c^2 - 2c + 1)$  e essa quantidade é minimizada quando  $c = 0,5$ .
- d. Se  $c=1$ ,  $E[\hat{\lambda}] = \lambda$ .
- e. Se  $c=1$ ,  $E[\hat{\lambda}] \neq \lambda$  e  $Var[\hat{\lambda}] + (\lambda - E[\hat{\lambda}])^2 = \lambda^2$ .

## 2.10 Esperança, variância e covariância de v.a.'s

### 2.10.1 Definições básicas

**Definição 2.10.1.** Seja  $X$  uma variável aleatória discreta com função massa de probabilidade denotada por  $p_X$  e que assume valores  $x \in \chi$ . O *valor esperado* ou *esperança matemática* ou *média* de  $X$  é definida por:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \chi} x_i p_X(x_i) \quad (43)$$

Se  $X$  é uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade denotada por  $f_X$ , sua esperança será dada por:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (44)$$

**Definição 2.10.2.** O *k-ésimo momento* da variável aleatória  $X$  é dado pela esperança de  $X$  elevada à potência  $k$ , isto é,  $\mathbb{E}[X^k]$  (desde que essa quantidade esteja bem definida), para  $k \in \{1, 2, \dots\}$ . Se a esperança de  $X$  for um número finito  $\mu$ , isto é, se  $\mathbb{E}[X] = \mu < \infty$ , então definimos  $\mathbb{E}[(X - \mu)^k]$  como o *k-ésimo momento central* de  $X$ , desde que essa quantidade esteja bem definida.

**Definição 2.10.3.** Seja  $X$  uma variável aleatória com média finita denotada por  $\mu$ . Sua variância é dada pelo momento central de ordem 2 de  $X$ :

$$Var[X] = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] \quad (45)$$

**Definição 2.10.4.** Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço de probabilidade. A *covariância* entre elas será dada por:

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] \quad (46)$$

### 2.10.2 Propriedades

As seguintes propriedades podem ser demonstradas a partir das definições dadas na página anterior e a maioria pode ser adaptada para o caso de variáveis aleatórias contínuas. Neste caso, ao invés de somatórios, teremos as integrais correspondentes. Para algumas das demonstrações, consulte <https://www.overleaf.com/read/nfzbfjsrwsp> e [https://1drv.ms/b/s!AlHDLj\\_7OjaL1HyxBhvFIbEMhUx0](https://1drv.ms/b/s!AlHDLj_7OjaL1HyxBhvFIbEMhUx0).

Tabela 1: Propriedades do valor esperado

1	Esperança da soma	$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$	É a soma das esperanças
2	Esperança do produto	$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ se $X$ e $Y$ indep.	É o produto das esperanças, desde que $X$ e $Y$ sejam independentes
3	Esperança de um escalar	$\mathbb{E}[\alpha] = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	É o próprio escalar
4	Esperança de $X$ vezes um escalar	$\mathbb{E}[\alpha X] = \alpha \mathbb{E}[X],$ $\alpha \in \mathbb{R}$	É o escalar vezes a esperança de $X$
5	Esperança de um escalar mais $X$	$\mathbb{E}[\beta + X] = \beta + \mathbb{E}[X],$ $\beta \in \mathbb{R}$	É escalar mais a esperança de $X$
6	Esperança de uma função de $X$ <small>Lei do Estatístico Inconsciente</small>	$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x_i) p_X(x_i)$ se $X$ é discreta	$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$ se $X$ é contínua
7	Lei das Expectativas Iteradas	$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X Y]] = \mathbb{E}[X]$	O valor esperado da esperança de $X$ dado $Y$ é a esperança de $X$ .
8	Forma alternativa da esperança	$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq i)$	Se $X$ assume valores positivos.
9	Lei da esperança total	$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X A_i] \cdot \mathbb{P}(A_i)$	Se $A_1, \dots, A_n$ uma partição de $\Omega$ e $X$ uma v.a. discreta.

## Propriedades da Variância e Covariância

### Propriedades da Esperança

Tabela 2: Propriedades da variância e Covariância

1	Forma alternativa da variância 1	$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$	Variância de $X$ é a esperança de $X$ ao quadrado menos a média de $X$ ao quadrado
2	Forma alternativa da variância 2	$Var[X] = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - (\mathbb{E}[X])^2$	
3	Forma alternativa da variância 3	$Var[X] = \mathbb{E}[(X-d)^2] - (\mathbb{E}[X] - d)^2, d \in \mathbb{R}$	se $Var[X] < \infty$
4	Variância da soma	$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$ Se $X$ e $Y$ indep.	É a soma das variâncias, se $X$ e $Y$ independentes
5.1	Variância da soma (caso geral)	$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] + 2Cov[X, Y]$	É a soma das variâncias mais duas vezes a covariância
5.2	Variância da diferença (caso geral)	$Var[X-Y] = Var[X] + Var[Y] - 2Cov[X, Y]$	É a soma das variâncias menos duas vezes a covariância
6	Variância de um escalar	$Var[\alpha] = 0, \alpha \in \mathbb{R}$	É zero pois um número é sempre ele mesmo (não há variação)
7	Variância de $X$ vezes um escalar	$Var[\beta X] = \beta^2 Var[X], \beta \in \mathbb{R}$	É o escalar ao quadrado vezes a variância de $X$
8	Variância de um escalar mais um escalar vezes $X$	$Var[\alpha + \beta X] = \beta^2 Var[X], \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	
9	Forma alternativa da covariância	$Cov[X, Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$	A covariância de $X$ e $Y$ é a esperança do produto menos o produto das esperanças.
10	Covariância de $X$ com $X$	$Cov[X, X] = Var[X]$	Logo, se $X$ é constante, $Cov[X, X] = 0$
11	Simetria da covariância	$Cov[X, Y] = Cov[Y, X]$	
12	Covariância de um escalar vezes $X$	$Cov[\alpha X, Y] = \alpha Cov[X, Y]$ $Cov[\alpha X, \beta Y] = \alpha \beta Cov[X, Y]$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$	
13	Linearidade na 1ª entrada	$Cov[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha Cov[X, Z] + \beta Cov[Y, Z]$	
13.1	Linearidade na 1ª entrada e multiplicação por escalar	$Cov[\alpha X + \beta Y, \gamma Z + \delta W] = \alpha \gamma Cov[X, Z] + \alpha \delta Cov[X, W] + \beta \gamma Cov[Y, Z] + \beta \delta Cov[Y, W]$	
14	Covariância de sequências de variáveis aleatórias	$Cov[\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i, \sum_{j=1}^m \beta_j Y_j] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j Cov[X_i, Y_j]$	Suponha $\{X_1, \dots, X_n\}$ e $\{Y_1, \dots, Y_m\}$ duas sequências de variáveis aleatórias e $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ sequências de constantes.

As propriedades de esperança são mais difíceis de provar pois requerem que constantemente o espaço amostral com seus eventos seja invocado e a matemática envolvida no processo é um pouco mais cheia de detalhes. A partir do momento que todas as propriedades da esperança estão demonstradas, as da variância e da covariância seguem de maneira mais natural. Algumas das propriedades se encontram demonstradas em [Stern and Izbicki \(2016\)](#). Em especial, a lei do estatístico inconsciente pode ser encontrada também em [Magalhães \(2011\)](#) ou ainda uma versão em vídeo aqui: <https://www.youtube.com/watch?v=uDEHBrsLjzE&t=430s> (a notação do menino é um pouquinho diferente, mas é a mesma ideia).

Antes de avançar, deixo aqui um resultado de covariância (que comentei por cima na terça-feira) que se relaciona com os conceitos de álgebra linear, que é pouco abordado nas aulas tradicionais de estatística e probabilidade (e vai ficar mais claro porque o coeficiente de correlação de Pearson está entre 0 e 1). As próximas definições e resultados foram retirados de [Stern and Izbicki \(2016\)](#).

**Definição 2.10.5.** Seja  $\Omega$  um conjunto enumerável,  $P$  a função probabilidade em  $\Omega$ .

1. Defina  $\mathcal{V} = \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \mathbb{E}[X] = 0\}$ .
2. Para todo  $X \in \mathcal{V}$  e  $Y \in \mathcal{V}$ , nós definimos  $(X + Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $(X + Y)(w) = X(w) + Y(w)$ .
3. Para todo  $X \in \mathcal{V}$  e  $a \in \mathbb{R}$ , nós definimos  $(aX) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $(a \cdot X)(w) = aX(w)$ .

**Lema 2.10.6.**  $(\mathcal{V}, +, \cdot)$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Para provar isso, é suficiente demonstrar os itens abaixo:

1. Como  $\mathbb{E}[0] = 0$ ,  $0 \in \mathcal{V}$ .
2. Se  $X \in \mathcal{V}$  e  $Y \in \mathcal{V}$ ,  $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 0$ . Portanto,  $X + Y \in \mathcal{V}$ .
3. Se  $a \in \mathbb{R}$  e  $X \in \mathcal{V}$ ,  $\mathbb{E}[aX] = a\mathbb{E}[X] = 0$ . Portanto,  $aX \in \mathcal{V}$ .

□

**Lema 2.10.7.**  $Cov$  é um produto interno em  $\mathcal{V}$ . Portanto,  $\sqrt{Var[X]}$  é uma norma em  $\mathcal{V}$ .

*Demonstração.* Da álgebra linear, sabemos que  $\langle X, Y \rangle$  é produto interno se e somente se:

1.  $\langle X, X \rangle \geq 0$  e  $\langle X, X \rangle = 0 \iff x = 0$  (no caso da covariância, isso só vale para os elementos que percentem a  $\mathcal{V}$ , pois outros elementos podem ter covariância negativa);
2.  $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$ ;
3.  $\langle aX + bY, Z \rangle = a\langle X, Z \rangle + b\langle Y, Z \rangle$

Pelas propriedades estudadas na aula passada, segue que a covariância é um produto interno em  $\mathcal{V}$ .

Sabemos ainda que a norma é a raiz do produto interno, isto é,  $\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$ . Logo,  $\|X\| = \sqrt{Cov(X, X)} = \sqrt{Var(X)} = DP(X)$ , o que significa que o desvio padrão de  $X$  é uma norma em  $\mathcal{V}$ . □

**Lema 2.10.8** (Cauchy-Schwarz paravariáveis aleatórias).

$$|Cov[X, Y]| \leq \sqrt{Var[X]} \sqrt{Var[Y]}.$$

A igualdade ocorre se e somente se existem  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $a \neq 0$  tais que  $Y = aX + b$ .

*Demonstração.* Seja  $V = X - \mathbb{E}[X]$  e  $W = Y - \mathbb{E}[Y]$ . Como  $V, W \in \mathcal{V}$  e, como pelo Lema 2.10.7, covariância é um produto interno, segue que

$$\begin{aligned} |Cov[X, Y]| &= |Cov[V, W]| \leq \sqrt{Cov[V, V]} \sqrt{Cov[W, W]} && \text{(desig. de C-S: } \text{https://goo.gl/DYDLbD}) \\ &= \sqrt{Var[V]} \sqrt{Var[W]} && (Var(X - E(X)) = Var(X)) \\ &= \sqrt{Var[X]} \sqrt{Var[Y]} \end{aligned}$$

Agora, da desigualdade de Cauchy-Schwarz sabemos que a igualdade ocorre se e somente se existe  $b \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$ , tal que  $W = bV$ . Em outras palavras, a igualdade ocorre se e somente se existem  $b \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$ , tais que  $Y - \mathbb{E}[Y] = b(X - \mathbb{E}[X])$ , o que conclui a demonstração.  $\square$

**Definição 2.10.9** (Correlação).

$$\text{Corr}[X, Y] = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{Var}[X]}\sqrt{\text{Var}[Y]}}$$

Seja  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  um produto interno e  $\| \cdot \|$  a norma gerada pelo produto interno. Lembramos das aulas de álgebra linear que  $\frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\|\|v_2\|}$  é o cosseno do ângulo entre  $v_1$  e  $v_2$ . Portanto, usando o Lema 2.10.7, podemos interpretar a  $\text{Corr}[X, Y]$  como o cosseno do ângulo entre variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ . Em outras palavras,  $\text{Corr}[X, Y]$  é a medida da associação linear entre  $X$  e  $Y$ .

**Lema 2.10.10.**

$$|\text{Corr}[X, Y]| \leq 1$$

*Demonstração.* Segue diretamente da aplicação do Lema 2.10.8 à Definição 2.10.9.  $\square$

**Lema 2.10.11.** *Seja  $X$  a variável aleatória discreta.*

a. *Seja  $b \in \mathbb{R}$ ,  $\text{Cov}[b, X] = 0$ .*

b. *Seja  $a \neq 0$ ,*

$$\text{Corr}[aX + b, X] = \begin{cases} 1 & , \text{ se } a > 0 \\ -1 & , \text{ se } a < 0 \end{cases}$$

*Demonstração.*

a.  $\text{Cov}[b, X] = E[bX] - E[b]E[X] = bE[X] - bE[X] = 0$

b.

$$\begin{aligned} \text{Corr}[aX + b, X] &= \frac{\text{Cov}[aX + b, X]}{\sqrt{\text{Var}[aX + b]}\sqrt{\text{Var}[X]}} \\ &= \frac{a\text{Cov}[X, X] + \text{Cov}[b, X]}{\sqrt{\text{Var}[aX + b]}\sqrt{\text{Var}[X]}} \\ &= \frac{a\text{Var}[X]}{\sqrt{a^2\text{Var}[X]}\sqrt{\text{Var}[X]}} \\ &= \frac{a}{|a|} \end{aligned}$$

$\square$

### 2.10.3 Exercícios

**Exercício 49.** Demonstre todas as propriedades da tabela 2 (para variáveis aleatórias discretas) exceto a propriedade (14) da covariância.

**Exercício 50.** (Adaptado de Stern and Izbicki (2016))

Calcule a esperança e a variância de  $X$  dos exercícios 37 e 38. Para o exercício (38), calcule ainda  $\mathbb{P}(X \geq 1)$ .

**Exercício 51.** (Retirado de [Schmidt \(2011\)](#))

Suponha que  $X$  seja uma v.a. com densidade dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2(1-x), & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Sendo  $Y = 6X + 10$ , calcule  $Var(Y)$ .

**Resposta: 2.**

**Exercício 52.** Mostre que se  $X$  e  $Y$  são independentes, então  $Cov[X, Y] = 0$ .

**Exercício 53.** Dê um exemplo de duas variáveis  $X$  e  $Y$  que não sejam independentes mas tenham covariância igual a zero.

**Exercício 54.** (Retirado de [Stern and Izbicki \(2016\)](#)) Considere que você lança 200 vezes uma moeda com probabilidade  $p$  de ocorrer cara. Seja  $X$  o número total de caras observadas. Determine  $\mathbb{E}[X]$ . Dica: Denote por  $H_i$  o evento em que o  $i$ -ésimo lançamento resulta em cara. Observe que  $X = \sum_{i=1}^{200} I_{H_i}$ , onde  $I_{H_i}$  é a função indicadora de  $H_i$  e assume valor 1 se  $H_i$  ocorreu e 0 caso contrário.

**Exercício 55.** (Retirado de [Stern and Izbicki \(2016\)](#)) Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma variável aleatória discreta tal que, para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\mathbb{E}[X_i] = \mu \in \mathbb{R}$ .

- Seja  $p_i \geq 0$  tal que  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ . Encontre,  $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^n p_i X_i]$ .
- Seja  $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ , usualmente chamado “média amostral”. Encontre  $\mathbb{E}[\bar{X}]$ .

**Exercício 56.** (Retirado de [Stern and Izbicki \(2016\)](#)) Seja  $X$  o número de caras observadas em dois lançamentos de uma moeda com probabilidade  $p$  de cara. Seja  $H_i$  o evento em que o  $i$ -ésimo lançamento resulta em cara. Calcule  $Var[X]$ .

**Exercício 57.** (Adaptado de [Schmidt \(2011\)](#)) Determine se os itens de (a) a (e) são verdadeiros ou falsos, justificando suas respostas. Considere  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias quaisquer com médias  $\mu_X$  e  $\mu_Y$ , respectivamente.

- $\mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \frac{1}{2}[\mathbb{E}[(X - \mu_X)^2] + \mathbb{E}[(Y - \mu_Y)^2] - \mathbb{E}[(X + Y - \mu_X - \mu_Y)^2]]$
- $Var(Y - X) = Var(Y) - Var(X) - 2Cov(Y, X)$
- Se  $Var(Y + X) = Var(Y) + Var(X)$ , então  $X$  e  $Y$  são independentes.
- Se  $Y$  e  $X$  são independentes, seu coeficiente de correlação linear de Pearson é zero.
- Se  $Cov(X, Y) = 0$  e se  $X$  e  $Y$  têm distribuição conjunta Normal, então  $X$  e  $Y$  são independentes.

**Exercício 58.** (Retirado de [Davidson and MacKinnon \(2009\)](#)) Uma variável aleatória calculada como a razão entre duas variáveis aleatórias independentes com distribuição normal padrão tem distribuição de **Cauchy**. Pode-se demonstrar que a densidade dessa distribuição é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad (47)$$

- Mostre que a distribuição de Cauchy não tem o primeiro momento, o que significa que sua média não está definida.

- b. **Exercício computacional (para depois da ANPEC):** Gere amostras de tamanho  $n = \{10, 100, 1000, 10000\}$  de uma distribuição de Cauchy (e quantas amostras de tamanhos intermediários entre esses valores você conseguir). Para cada amostra, calcule a média amostral. Essas amostras parecem convergir para algum valor conforme o tamanho da amostra aumenta? Repita o exercício para amostras retiradas de uma distribuição normal padrão. A média amostral parece convergir para qual valor?<sup>26</sup>

**Exercício 59.** (Adaptado de Schmidt (2011)) Considere um treinador que tenha no seu time apenas dois Pokémons: Magikarp e Metapod. Determine se as seguintes afirmativas são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas com cálculos:

- Sabendo que, em média, Magikarp vence 10% das partidas que luta e Metapod vence, também em média, 5% de suas partidas e que o treinador utiliza o Magikarp em 40% das partidas e Metapod nas restantes, então o valor esperado do percentual de lutas ganhas é 7,5%;
- Supondo que o fato de um Pokémon vencer uma batalha não influencia o resultado do outro (isto é, as batalhas são independentes) e que a variância das vitórias de Magikarp é 10 e de Metapod é 20, então a variância das vitórias deste time<sup>27</sup> é de 8,8;
- Supondo agora que ambos Pokémons apresentem mesma variância de número de vitórias, o fato do treinador utilizar os dois Pokémons somente reduz sua variância total se a correlação das vitórias de Magikarp com Metapod for negativa.

**Exercício 60.** (Adaptado de Schmidt (2011)) Muambildo esteve em *Ciudad del Leste* onde comprou vários artigos *importados* para revender em sua banca no Camelódromo de Florianópolis. O preço médio pago por Muambildo foi de US\$ 15,00, com desvio padrão de um dólar. Sabendo que Muambildo utilizou uns dólares que havia comprado no passado a uma taxa de câmbio de R\$ 3,00 por dólar, julgue se as seguintes afirmativas são corretas, justificando suas respostas:

- Fazendo a conversão para a moeda brasileira, o preço médio dos produtos foi de quarenta e cinco reais;
- O desvio padrão é R\$3,00;
- Se Muambildo adicionar ao preço original uma margem de lucro de R\$10,00, o novo preço médio será de R\$55,00 com desvio padrão de R\$ 6,00;
- Se a margem de lucro de Muambildo é de 20% sobre o preço da mercadoria em reais, o novo preço médio será de R\$54,00 e o novo desvio padrão é de R\$3,60;
- O coeficiente de variação<sup>28</sup>, calculado em reais, devido à taxa de câmbio, será 3 vezes maior do que aquele calculado utilizando-se os valores em dólar.

**Exercício 61.** (Adaptado de Stern and Izbicki (2016))

- JuJu é lançada 1001 vezes. Encontre a probabilidade de que se observem mais caras do que coroas.

<sup>26</sup>Uma solução no R pode ser encontrada aqui: <https://www.overleaf.com/read/ndjgtmtkkmky>. Tente entender o código e reproduzir no Excel, por exemplo.

<sup>27</sup>A variância das vitórias de um time pode ser calculada como a soma das variâncias das vitórias individuais.

<sup>28</sup>Seja  $X$  uma variável aleatória com média  $\mu_X$  e desvio-padrão  $\sigma_X$ . Então, o coeficiente de variação de  $X$ , denotado por  $CV_X$ , será  $CV_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X}$



**Solução:** Defina  $X$  como a v.a. que representa o número de caras em 1001 lançamentos da Juju. Então,  $X \sim \text{Binomial}(n = 1001, p = \frac{1}{2})$ .

Estamos interessados em  $X \geq 501$ , isto é, que o número de caras seja maior ou igual a 501. Logo, queremos calcular  $\mathbb{P}(X \geq 501)$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 501) &= \sum_{x=501}^{1001} \binom{1001}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{1001-x} \\ &= \sum_{x=501}^{1001} \binom{1001}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{1001-x+x} \\ &= \sum_{x=501}^{1001} \frac{1001!}{x!(1001-x)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{1001}\end{aligned}$$

Chame  $Y = 1001 - x$  e troque o somatório:

$$\sum_{y=0}^{500} \binom{1001}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^{1001}$$

Observe que isso é igual à  $\mathbb{P}(X < 500)$ . Logo,  $\mathbb{P}(X \geq 501) = \mathbb{P}(X < 500)$ .

Por outro lado, temos:

$$\underbrace{\mathbb{P}(X \geq 501)}_A + \underbrace{\mathbb{P}(X < 501)}_{A^c} = 1$$

Assim,

$$\mathbb{P}(X \geq 501) + \mathbb{P}(X > 500) = 1$$

$$\mathbb{P}(X \geq 501) + \mathbb{P}(X \geq 501) = 1$$

$$2\mathbb{P}(X \geq 501) = 1$$

$$\mathbb{P}(X \geq 501) = \frac{1}{2}$$

□

b. Repita o item (a) porém considerando apenas 1000 lançamentos.

**Solução:** Seja  $Y$  uma v.a. que representa o número de caras da Juju em 1000 lançamentos. Então,  $Y \sim \text{Binomial}(1000, \frac{1}{2})$ . Estamos interessados em determinar  $\mathbb{P}(Y \geq 501)$ . Com o raciocínio do item (a), concluímos que  $\mathbb{P}(Y \geq 501) = \mathbb{P}(Y \leq 499)$ , de forma que resta calcular  $\mathbb{P}(Y = 500)$ , então:

$$\mathbb{P}(Y \geq 501) + \mathbb{P}(Y = 500) + \underbrace{\mathbb{P}(Y \leq 499)}_{\mathbb{P}(Y \geq 501)} = 1$$

$$2\mathbb{P}(Y \geq 501) + \mathbb{P}(Y = 500) = 1$$

$$\mathbb{P}(Y \geq 501) = \frac{1 - \mathbb{P}(Y = 500)}{2}$$

$$\mathbb{P}(Y \geq 501) = \frac{1 - \binom{1000}{500} \left(\frac{1}{2}\right)^{1000}}{2}$$

□

**Exercício 62.** 5 (Adaptado de [Stern and Izbicki \(2016\)](#))

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta assumindo valores em  $\{1, 2, \dots\}$ . Definimos a função geradora de probabilidades de  $X$  como  $G_X(z) = \mathbb{E}[z^X]$ .

- a. Mostre que  $\left. \frac{d^k G_X(z)}{dz^k} \right|_{z=0} = k! \mathbb{P}(X = k), \quad \forall \quad k \in \{1, 2, \dots\}$ . Lembre-se que  $0^w$  vale 1 se  $w = 0$  e 0 se  $w \neq 0$ .

**Solução:**

$$\frac{\partial^k [G_X(z)]}{\partial^k z} = \frac{\partial^k [\mathbb{E}[z^X]]}{\partial^k z} = \frac{\partial^k}{\partial^k z} \left[ \sum_{i=0}^k z^i f_X(i) \right]$$

A primeira derivada, quando  $i = 0$  será  $i \cdot z^{i-1} f_X(i) = 0$ .

Quando  $i > 0$ , teremos a soma das derivadas nos pontos  $i = 1, i = 2, \dots, i = k$ . Note que cada vez que uma derivada é feita, o expoente de  $z$  diminui e será eventualmente zero se  $i > k$ .

Note ainda que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k}{\partial^k z} \left[ \sum_{i=0}^k z^i f_X(i) \right] &= \sum_{i=0}^k \frac{\partial^k}{\partial^k z} [z^i f_X(i)] = i! z^{i-k} f_X(i) = \\ &= 0 + 1z^{1-k} f_X(1) + 2 \cdot 1z^{2-k} f_X(2) + \dots + k(k-1)! z^0 f_X(k) \end{aligned}$$

Mas se  $z = 0$ , todos os termos com  $z$  na expressão acima serão iguais a zero e com isso teremos apenas o último termo,  $k(k-1)! f_X(k)$  que é exatamente  $k! \mathbb{P}(X = k)$ . □

- b. Você acha que  $G_X(z)$  caracteriza a distribuição de  $X$  de maneira única, isto é, você acha que dada uma  $G_X(z)$  específica é possível dizer qual a distribuição e os parâmetros de  $X$ ? Justifique.

**Solução:** A f.g.m. é única para cada  $F_X(x)$  e por isso caracteriza uma v.a. . Como a função geradora de probabilidades está definida apenas para v.a.'s discretas ela também define unicamente a variável aleatória. Note que esse não seria o caso se estivesse definida para variáveis aleatórias contínuas, pois neste caso, uma vez que a integral no ponto é sempre 0, podemos ter infinitas  $f_X$  que levam em uma mesma  $F_X$ . □

c. Mostre que a função geradora de probabilidades de  $Y \sim \text{Binomial}(n, p)$  é  $(1 - p + pz)^n$ .

**Solução:** Vamos mostrar a geradora de probabilidades de uma Bernoulli e usar o fato de que a soma de v.a.'s Bernoulli é uma Binomial.

Seja  $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ . Então:

$$\begin{aligned} G_{X_i}(z) &= \mathbb{E}[z^{X_i}] = z^0 \mathbb{P}(X_i = 0) + z^1 \mathbb{P}(X_i = 1) \\ &= (1 - p) + zp \end{aligned}$$

Seja  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ . Então,  $X \sim \text{Binomial}(n, p)$ . Assim:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[z^X] &= \\ &= \mathbb{E} \left[ z^{\sum_{i=1}^n X_i} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^n z^{X_i} \right] \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[z^{X_i}] \\ &= ((1 - p) + zp)^n \end{aligned}$$

□

## 2.11 Distribuição de Vetores Aleatórios

**Definição 2.11.1.** Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias discretas. A fmp conjunta de  $X$  e  $Y$  é  $p_{X,Y}(x, y) := \mathbb{P}(X = x, Y = y)$ . De forma similar, se  $X$  e  $Y$  são duas variáveis aleatórias com distribuições contínuas, a fdp conjunta de  $X$  e  $Y$  é  $f_{X,Y}(x, y)$ . Seja  $A$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\mathbb{P}((X, Y) \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : (X(\omega), Y(\omega)) \in A\}) = \begin{cases} \sum_{(x,y) \in A} p_{X,Y}(x, y) & , \text{ se } X \text{ e } Y \text{ são discretas.} \\ \int_{(x,y) \in A} f_{X,Y}(x, y) d(x, y) & , \text{ se } X \text{ e } Y \text{ são contínuas.} \end{cases}$$

**Exemplo 2.11.2.** Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias contínuas, com a seguinte fdp

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} cxy & , \text{ if } x > 0, y > 0, x + y < 1 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Qual é o valor de  $c$ ? Observe que  $\mathbb{P}((X, Y) \in \mathbb{R}^2) = 1$ . Além disso, observe que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((X, Y) \in \mathbb{R}^2) &= \int_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x, y) d(x, y) \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} cxy dy dx \\ &= c \int_0^1 x \int_0^{1-x} y dy \\ &= c \int_0^1 x \frac{(1-x)^2}{2} dx \\ &= \frac{c}{2} \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) dx \\ &= \frac{c}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{12} = \frac{c}{24} \end{aligned}$$

Conclua que  $c = 24$ .

**Exemplo 2.11.3.** Considere que  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias discretas com a fmp conjunta dada na Tabela 3.

$$\sum_{x \in \{0,1\}} \sum_{y \in \{0,1\}} p_{X,Y}(x, y) = 0.2 + 0.4 + 0.3 + 0.1 = 1$$

Tabela 3: Tabela de  $p_{X,Y}(x, y)$

$X/Y$	0	1
0	0.2	0.4
1	0.3	0.1

Também podemos calcular  $\mathbb{P}(X = 1)$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 1) &= \sum_{\{(x,y) \in \{0,1\}^2 : x=1\}} p_{X,Y}(x,y) \\ &= \sum_{y \in \{0,1\}} p_{X,Y}(1,y) = 0.3 + 0.1 = 0.4\end{aligned}$$

Observe que  $X \sim \text{Bernoulli}(0.4)$ . De forma similar,  $Y \sim \text{Bernoulli}(0.5)$ .

**Exemplo 2.11.4.** Considere Exemplo 2.11.2. Também podemos calcular  $\mathbb{P}(Y < X)$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y < X) &= \int_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x\}} f_{X,Y}(x,y) d(x,y) \\ &= \int_0^{0.5} \int_0^x 24xy dy dx + \int_{0.5}^1 \int_0^{1-x} 24xy dy dx \\ &= \int_0^{0.5} 24x \frac{x^2}{2} dx + \int_{0.5}^1 24x \frac{(1-x)^2}{2} dx \\ &= 3x^4 \Big|_0^{0.5} + \int_{0.5}^1 12(x - 2x^2 + x^3) dx \\ &= \frac{3}{16} + 12 \left( \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{0.5}^1 \\ &= \frac{3}{16} + 1 - 3 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{16} \right) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

**Lema 2.11.5.** Se  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias discretas com distribuição conjunta  $p_{X,Y}(x,y)$ , então a função de massa marginal de  $X$  é  $p_X(x) = \sum_{y \in \text{Im}[Y]} p_{X,Y}(x,y)$ . De forma similar, se  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias contínuas com densidade conjunta  $f_{X,Y}(x,y)$ , então a densidade marginal de  $X$  é  $f_X(x) = \int_{\text{Im}[Y]} f_{X,Y}(x,y) dy$ .

*Demonstração.* Se  $X$  e  $Y$  são discretos,

$$\begin{aligned}p_X(x) &= \mathbb{P}(X = x) \\ &= \mathbb{P}(X = x, Y \in \text{Im}[Y]) \\ &= \sum_{\{(a,b) : a=x, b \in \text{Im}[Y]\}} p_{X,Y}(a,b) && \text{(Definição 2.11.1)} \\ &= \sum_{b \in \text{Im}[Y]} p_{X,Y}(x,b)\end{aligned}$$

A demonstração do caso contínuo é deixada como exercício. □

**Exemplo 2.11.6.** Considere que

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & , \text{ se } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Observe que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy dx &= \int_0^1 \int_0^1 c dy dx \\ &= \int_0^1 cy \Big|_0^1 dx \\ &= \int_0^1 c dx = cx \Big|_0^1 = c\end{aligned}$$

Portanto,  $c = 1$ . Observe que, if  $0 < x < 1$

$$\begin{aligned}F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\ &= \mathbb{P}(X \leq x \cap Y \in \mathbb{R}) \\ &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy dx \\ &= \int_0^x \int_0^1 1 dy dx\end{aligned}$$

De forma similar, se  $x < 0$ , então  $F_X(x) = 0$  e se  $x > 1$ , então  $F_X(x) = 1$ . Portanto  $X \sim \text{Uniform}(0, 1)$ .

Note que a mesma conclusão segue do Lema 2.11.5:

$$f_X(x) = \int_{Im[Y]} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_0^1 1 dy = 1,$$

que é a densidade de uma variável aleatória uniforme em  $(0, 1)$ .

**Definição 2.11.7.** Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias. A distribuição acumulada conjunta de  $(X, Y)$  é

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$$

Lembramos da definição que  $X$  e  $Y$  são independentes se e somente se  $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$ . A independência é definida de forma similar para variáveis aleatórias contínuas:

**Definição 2.11.8.** Duas variáveis aleatórias contínuas  $X$  e  $Y$  são independentes se e somente se  $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ .

**Lema 2.11.9.** Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias.  $X$  e  $Y$  são independentes se e somente se para todos  $A, B \subset \mathfrak{R}$ ,  $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$ .

**Lema 2.11.10.** Duas variáveis contínuas,  $X$  e  $Y$ , são independentes se e somente se a distribuição conjunta pode ser escrita como  $f_{X,Y}(x,y) = g(x)h(y)$  para alguma função  $g$  e  $h$ .

*Demonstração.* Se  $X$  e  $Y$  são independentes por definição  $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ , que prova a condição suficiente. Além disso, se  $f_{X,Y}(x,y) = g(x)h(y)$ , então  $f_X(x) = \int f_{X,Y}(x,y) dy = \int g(x)h(y) dy = g(x)C$ , onde  $C$  não depende de  $x$ . Como  $g(x)C$  deve integrar para um, segue que  $g(x)$  é proporcional à densidade de  $X$ . De forma similar,  $h(y)$  deve ser proporcional a densidade de  $Y$ . Segue que  $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$  e portanto  $X$  e  $Y$  são independentes. **Observação:** Fizemos em aula uma versão mais detalhada dessa demonstração, se alguém precisar pode pedir para a Aisha.  $\square$

Em geral, um vetor aleatório é uma função  $\mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$  que é tipicamente representada como  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ . Isto é, cada coordenada é uma variável aleatória. Um vetor aleatório é caracterizado quanto pela sua função de distribuição acumulada, tanto pela sua função de densidade (multivariada):

**Definição 2.11.11.** A distribuição acumulada conjunta de  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$  é

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) := \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d),$$

onde  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ . Se as componentes de  $\mathbf{X}$  são contínuas, a fdp de  $\mathbf{X}$ ,  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ , é uma função não negativa tal que

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} \in B) = \int_B f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d$$

para qualquer conjunto  $B \subset \mathbb{R}^d$ . Além disso, se as componentes de  $\mathbf{X}$  são discretas, a fmp de  $\mathbf{X}$ ,  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ , é uma função não negativa tal que

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} \in B) = \sum_{(x_1, \dots, x_d) \in B} p_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_d)$$

para qualquer conjunto  $B \subset \mathbb{R}^d$ .

Temos a seguinte versão da lei do estatístico inconsciente para vetores aleatórios:

**Lema 2.11.12.** Seja  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$  um vetor aleatório. Definimos a função  $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ . Então  $g(\mathbf{X})$  é uma variável aleatória com esperança

$$\mathbb{E}[g(\mathbf{X})] = \sum_{\mathbf{x} \in \chi} g(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$$

se  $\mathbf{X}$  tem distribuição discreta (onde  $\chi \subset \mathbb{R}^d$  denotam os valores que  $\mathbf{x}$  assume), e

$$\mathbb{E}[g(\mathbf{X})] = \int \dots \int g(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_n$$

*Demonstração.* Vamos provar o lema para o caso discreto. Da definição de esperança temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(\mathbf{X})] &= \sum_{w \in \Omega} g(\mathbf{X}(w)) \mathbb{P}(\{w\}) = \\ &= \sum_{\mathbf{x} \in \chi} \sum_{w: \mathbf{X}(w) = \mathbf{x}} g(\mathbf{X}(w)) \mathbb{P}(\{w\}) \\ &= \sum_{\mathbf{x} \in \chi} g(\mathbf{x}) \sum_{w: \mathbf{X}(w) = \mathbf{x}} \mathbb{P}(\{w\}) \\ &= \sum_{\mathbf{x} \in \chi} g(\mathbf{x}) \cdot p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

□

**Definição 2.11.13.** Se  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias discretas, definimos a *massa de probabilidade condicional* de  $X$  dado que  $Y = y$  por

$$p_{X|Y}(x|y) = \mathbb{P}(X = x | Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)},$$

para todos os valores de  $y$  tais que  $\mathbb{P}(Y = y) > 0$ .

Note que, para um dado  $y$ ,  $g(x) = p_{X|Y}(x|y)$  é uma fmp n sentido em que a estudamos antes.

**Exemplo 2.11.14.** No Exemplo 2.11.3,

$$p_{X|Y}(0|0) = \frac{0.2}{0.5} = 0.4 = 1 - p_{X|Y}(1|0)$$

e

$$p_{X|Y}(0|1) = \frac{0.4}{0.5} = 0.8 = 1 - p_{X|Y}(1|1).$$

*Remark:* Podemos estender de forma trivial a Definição 2.11.13 para vetores aleatórios.

**Definição 2.11.15.** Se  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias contínuas com densidade conjunta  $f(x, y)$ , definimos a *densidade de probabilidade condicional* de  $X$  dado  $Y = y$  por

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)},$$

para todos os valores de  $y$  tais que  $f_Y(y) > 0$ .

Note que, para um dado  $y$ ,  $g(x) = f_{X|Y}(x|y)$  é uma fdp no sentido em que a estudamos antes.

**Exemplo 2.11.16.** Seja densidade conjunta de  $X$  e  $Y$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{15}{2}x(2 - x - y) & \text{se } 0 < x, y < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para calcular a densidade condicional de  $X|Y = y$  quando  $0 < y < 1$ , primeiro observamos que

$$f_Y(y) = \int_0^1 f(x, y)dx = \int_0^1 \frac{15}{2}x(2 - x - y)dx = \frac{15}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{y}{2}\right).$$

Segue da Definição 2.11.15 que, para  $0 < x, y < 1$ ,

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{x(2 - x - y)}{\frac{2}{3} - \frac{y}{2}} = \frac{6x(2 - x - y)}{4 - 3y}.$$

Distribuições condicionais podem ser usadas para checar independência:

**Lema 2.11.17.** *Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias discretas.  $X$  é independente de  $Y$  se e somente se  $\mathbb{P}(X = x|Y = y) = \mathbb{P}(X = x)$  para todos  $x$  e  $y$ . Analogamente, sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias contínuas.  $X$  é independente de  $Y$  se e somente se  $f(x|y) = f(x)$  para todos  $x$  e  $y$ .*

O Teorema de Bayes também pode ser usado para variáveis discretas e contínuas:

**Lema 2.11.18.** *Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias contínuas, e  $N$  e  $M$  variáveis aleatórias discretas. Então valem as seguintes versões do Teorema de Bayes:*

1.

$$\mathbb{P}(N = n|M = m) = \frac{\mathbb{P}(M = m|N = n)\mathbb{P}(N = n)}{\sum_n \mathbb{P}(M = m|N = n)\mathbb{P}(N = n)}$$

2.

$$f(x|y) = \frac{f(y|x)f(x)}{\int_{\mathbb{R}} f(y|x)f(x)dx}$$



Também é possível falar sobre distribuições condicionais de vetores aleatórios que são parcialmente contínuos e parcialmente discretos. Assim, se  $X$  é contínua e  $N$  é discreta, então

$$f(x|N = n) = \frac{\mathbb{P}(N = n|X = x)f(x)}{\int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(N = n|X = x)f(x)dx}$$

e

$$\mathbb{P}(N = n|X = x) = \frac{f(x|N = n)\mathbb{P}(N = n)}{\sum_n f(x|N = n)\mathbb{P}(N = n)}.$$

Observe que  $\mathbb{P}(N = n) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(N = n|X = x)f(x)dx$  e  $f(y) = \int_{\mathbb{R}} f(y|X = x)f(x)dx$  são versões contínuas da Lei das Probabilidades Totais.

Como as probabilidades condicionais também são probabilidades, também vale que, para toda variável aleatória  $Z$ ,  $\mathbb{P}(N = n|Z = z) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(N = n|Z = z, X = x)f(x|Z = z)dx$  e  $f(y|Z = z) = \int_{\mathbb{R}} f(y|Z = z, x)f(x|Z = z)dx$ .

**Exemplo 2.11.19.** Assuma que escolhemos um número  $U \sim \text{Unif}(0, 1)$ . Então lançamos uma moeda com probabilidade de cara  $U$ . Seja  $X$  o indicador de cara. Temos que

$$\mathbb{P}(X = 1) = \int_0^1 \mathbb{P}(X = 1|u)f(u)du = \int_0^1 u \cdot 1 du = 1/2.$$

Segue do Teorema de Bayes que

$$f(u|X = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 1|u)f(u)}{1/2} = 2u.$$

Isto é,  $U|X = 1 \sim \text{Beta}(2, 1)$

*Observação:* Note que na verdade não precisamos calcular o denominador no Teorema de Bayes para encontrar a distribuição de  $U|X = 1$  no último exemplo. Isso ocorre pois o Teorema afirma que  $f(u|x) = C\mathbb{P}(X = x|u)f(u)$ , onde  $C$  é constante em  $u$  (mais precisamente, é a única constante que faz com que  $f(u|x)$  seja uma densidade genuína que integra para um). segue que  $f(u|x) = c \cdot u$ , e a única constante que faz com que esta densidade integre para um é 2.

Também é possível definir independência condicional de variáveis aleatórias:

**Definição 2.11.20.** Dizemos que duas variáveis aleatórias discretas  $X$  e  $Y$  são independentes dado uma variável aleatória  $Z$  se  $\mathbb{P}(X = x, Y = y|Z = z) = \mathbb{P}(X = x|Z = z)\mathbb{P}(Y = y|Z = z)$

A independência condicional é definida de forma análoga para vetores aleatórios contínuos.

**Exemplo 2.11.21.** Considere Exemplo 2.11.19 novamente, mas agora lançando a moeda duas vezes. Sejam  $X_1$  e  $X_2$  as indicadoras de que o resultado é caras. É razoável assumir que  $X_1$  é independente de  $X_2$  dado que a probabilidade de caras é  $U = u$ . Segue que

$$\mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 1) = \int_0^1 \mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 1, u)f(u|X_1 = 1)du.$$

Segue do Exercício 2.11.19 que

$$\mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 1) = \int_0^1 u^2 u du = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{2} = \int_0^1 \mathbb{P}(X_2 = 1|u)f(u)du = \mathbb{P}(X_2 = 1),$$

i.e.,  $X_1$  e  $X_2$  não são independentes.

### 2.11.1 Esperança Condicional de Variáveis Aleatórias

Aplicando a Definição a variáveis aleatórias, temos que a esperança condicional de uma variável aleatória discreta  $X$  que assume valores em  $\chi$  dado que outra variável aleatória discreta  $Y$  assume o valor  $y$  é dada por

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X|Y=y] &:= \sum_{w \in \Omega} X(w)P(\{w\}|Y=y) = \sum_{x \in \chi} \sum_{w: X(w)=x} X(w)P(\{w\}|Y=y) \\ &= \sum_{x \in \chi} x \sum_{w: X(w)=x} P(\{w\}|Y=y) = \sum_{x \in \chi} xP(X=x|Y=y) \\ &= \sum_{x \in \chi} xp_{X|Y}(x|y)\end{aligned}$$

De forma análoga, quando  $X$  e  $Y$  são contínuas,

$$\mathbb{E}[X|Y=y] = \int_{x \in \chi} xf_{X|Y}(x|y)dx$$

**Exemplo 2.11.22.** Assuma que a densidade conjunta de  $X$  e  $Y$  é dada por  $f_{X,Y}(x,y) = e^{-x/y}e^{-y}/y$  para  $0 < x, y < \infty$ . A densidade condicional de  $X$  dado que  $Y = y$  é dada por

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{e^{-x/y}e^{-y}/y}{\int_0^\infty e^{-x/y}e^{-y}/y dx} = \frac{e^{-x/y}e^{-y}/y}{e^{-y}/y \int_0^\infty e^{-x/y} dx} = 1/ye^{-x/y}.$$

Segue que  $\mathbb{E}[X|Y=y] = \int_0^\infty x1/ye^{-x/y}dx = y$ . Note que  $X|Y=y \sim \text{Exp}(1/y)$ .

Usamos a notação  $\mathbb{E}[X|Y]$  para denotar a função em  $Y$  dada por  $g(y) = \mathbb{E}[X|Y=y]$ . Como  $Y$  é uma variável aleatória,  $g(Y) = \mathbb{E}[X|Y]$  também o é. Um resultado muito útil para calcular esperanças é o seguinte

**Teorema 2.11.23.** *Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias. Então  $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]$ .*

*Demonstração.* Provaremos o teorema no caso de  $X$  discreto. Lembramos que

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i \mathbb{E}[X|A_i] \cdot \mathbb{P}(A_i)$$

onde  $(A_i)_i$  é a partição de  $\Omega$ . Agora, seja  $A_i = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = i\}$  para todo  $i \in \chi$ , a imagem de  $Y$ . Como  $(A_i)_i$  é uma partição de  $\Omega$ ,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i \mathbb{E}[X|A_i] \cdot \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i \in \chi} \mathbb{E}[X|Y=i]p_Y(i),$$

o que conclui a prova (pense um pouco a respeito.). □

**Exemplo 2.11.24.**  $N$  pessoas decidem doar dinheiro a uma instituição. Seja  $X_i$  a quantia doada pela  $i$ -ésima pessoa. Assumindo que  $X_i$  é binomial com parâmetros  $n_B$  e  $p_B$ , que  $N$  é geométrica com parâmetro  $p_G$ , e que todas as variáveis aleatórias são independentes, podemos calcular a soma esperada de dinheiro que a instituição vai receber,  $T := \sum_{i=1}^N X_i$  usando o Teorema 2.11.23. Primeiro, determinamos a esperança condicional

$$\mathbb{E}[T|N=n] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N X_i|N=n\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i|N=n\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i|N=n] = nn_Bp_B.$$

Assim  $\mathbb{E}[T|N] = Nn_Bp_B$ . Segue que

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[T|N]] = n_Bp_B\mathbb{E}[N] = \frac{n_Bp_B}{p_G}$$

**Definição 2.11.25. (Função Geradora de Momentos)** A função geradora de momentos de uma variável aleatória  $X$  é uma função  $M_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] \quad (48)$$

Isto é, a função geradora de momentos é calculada através da esperança da função  $e^{tX}$ .

#### Lembrete - esperança de funções de variáveis aleatórias:

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta com função massa de probabilidade  $p_X$  e que assume valores em  $\chi$ , então:

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{x \in \chi} f(x)p_X(x) \quad (49)$$

E dada uma variável aleatória contínua  $X$  com densidade  $f_X(x)$ , o valor esperado de  $g(X)$  é:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx \quad (50)$$

Voltando à função geradora de momentos, a f.m.g. de uma variável aleatória  $X \sim \text{Bernoulli}(p)$  é dada por  $(1-p)+e^tp$ <sup>29</sup>.

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{tX}] &= \sum_{i=\{0,1\}} e^{tx_i}p_X(x_i) = \\ &= e^{t0} * \mathbb{P}(X = 0) + e^{t1} * \mathbb{P}(X = 1) = \\ &= 1 * (1 - p) + e^t * p = (1 - p) + e^tp \end{aligned}$$

□

Sabemos que se  $Y \sim \text{Binomial}(n, p)$  então podemos escrever  $Y$  como a soma de  $n$  variáveis com distribuição Bernoulli, isto é:

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i \quad (51)$$

com  $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ .

Então podemos calcular a f.g.m. de  $Y$  apenas utilizando propriedades de esperança e da função exponencial<sup>30</sup>.

<sup>29</sup>É possível demonstrar que a função geradora de momentos está definida de forma única para cada variável aleatória, sendo assim, se duas variáveis aleatórias tem a mesma f.g.m., obrigatoriamente elas são a mesma variável. A f.g.m. então é uma forma de caracterizar variáveis aleatórias, assim como as funções massa, densidade e acumuladas. Uma limitação é que nem sempre a função geradora de momentos está bem definida, como no caso da distribuição de Cauchy, mas este é um caso que não será abordado nessa disciplina.

<sup>30</sup>É possível também calcular utilizando a definição, porém é um pouco mais trabalhoso.

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{tY}] &\stackrel{(51)}{=} \mathbb{E}[e^{t \sum_{i=1}^n X_i}] = \\
&\stackrel{\text{Propriedade Soma}}{=} \mathbb{E}[e^{\sum_{i=1}^n tX_i}] = \\
&\stackrel{\text{Propriedade Exponencial}}{=} \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n e^{tX_i}\right] = \\
&\stackrel{\text{Propriedade Esperança}}{=} \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{tX_i}] = \\
&\stackrel{\text{f.g.m Bernoulli}}{=} \prod_{i=1}^n M_X(t) = \\
&\stackrel{\text{Prop. Produtório}}{=} (M_X(t))^n = \\
&\stackrel{\text{Exemplo anterior}}{=} ((1-p) + e^tp)^n
\end{aligned}$$

□

Agora considere  $Z \sim \text{Normal}(0, 1)$ . Vamos calcular a f.g.m. de  $Z$ .

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}
M_Z(t) &= \mathbb{E}[e^{tz}] = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz} f_Z(z) dz = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = && \text{(Densidade da Normal)} \\
&= e^{\frac{t^2}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = && \text{(T.M.Q.D.C.)} \\
&= e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2} + \frac{2zt}{2} - \frac{t^2}{2}} dz = && \text{(Propriedade Exponencial)} \\
&= e^{\frac{t^2}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-t)^2}{2}} dz}_{\text{Densidade da Normal}(t,1)} = \\
&= e^{\frac{t^2}{2}}
\end{aligned}$$

□

**Exercícios (justifique suas respostas apresentando os devidos cálculos):**

- Seja  $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$ . Calcule  $M_X(t)$ .<sup>31</sup>
- Mostre, usando função geradora de momentos, que se  $X \sim \text{Normal}(\mu_1, \sigma_1^2)$  e  $Y \sim \text{Normal}(\mu_2, \sigma_2^2)$  e  $X$  e  $Y$  são independentes, então  $X + Y \sim \text{Normal}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ .
- (Adaptado de ANPEC, 2016) Verdadeiro ou Falso? *Sejam  $Y_1$  e  $Y_2$  variáveis aleatórias independentes, cada uma delas com distribuição normal padrão. Então podemos dizer que a v.a.  $X = Y_1 + Y_2$  tem distribuição normal padrão.*

<sup>31</sup>Dica: Se  $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$  então  $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \text{Normal}(0, 1)$ .

- d. (Adaptado de ANPEC, 2015) Verdadeiro ou Falso? Sejam  $X_1$  e  $X_2$  variáveis aleatórias independentes com médias  $\mu_1$  e  $\mu_2$  e variâncias  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$ , respectivamente, e considere a combinação linear  $Y = aX_1 + bX_2$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes reais. Então,  $Y \sim \text{Normal}(a\mu_1 + b\mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ .
- e. Seja  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ , isto é,  $\mathbb{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ . Encontre  $M_X(t)$ .<sup>32</sup> Se  $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$  para  $i = 1, \dots, n$ , e os  $X_i$  são independentes, qual a distribuição de  $\sum_{i=1}^n X_i$ ?
- f. Sejam  $X_1, \dots, X_n$  independentes e identicamente distribuídas. Mostre que  $M_Y(t) = (M_X(t))^n$ , onde  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ .

### Soluções

- a. Se  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , sabemos que  $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ . Queremos calcular  $E[e^{tx}]$ .

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[e^{tx}] &= & (\text{Soma e subtrai } \mu) \\
 \mathbb{E}[e^{t(x-\mu+\mu)}] &= & (\text{Multiplica e divide por } \sigma) \\
 \mathbb{E}[e^{t(\frac{(x-\mu)\sigma}{\sigma} + \mu)}] &= & (\text{Substitui } Z = \frac{X - \mu}{\sigma}) \\
 \mathbb{E}[e^{t(Z\sigma + \mu)}] &= & (\text{Propriedade da função exponencial}) \\
 \mathbb{E}[e^{t(Z\sigma)} e^{t\mu}] &= & (\text{Propriedade do valor esperado}) \\
 e^{t\mu} \mathbb{E}[e^{t(Z\sigma)}] &= & (\text{Definição}) \\
 e^{t\mu} M_Z(t\sigma) &= & (\text{Exemplo anterior}) \\
 e^{t\mu} e^{\frac{(t\sigma)^2}{2}} &= & (\text{Propriedade da exponencial}) \\
 e^{t\mu + \frac{(t\sigma)^2}{2}}
 \end{aligned}$$

□

- b. Considere  $W = X + Y$ . Queremos calcular  $M_W(t)$ .

<sup>32</sup>Dica:  $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{tW}] &= && \text{(Substitui W por } X + Y) \\
\mathbb{E}[e^{t(X+Y)}] &= && \text{(Propriedade distributiva)} \\
\mathbb{E}[e^{tX+tY}] &= && \text{(Propriedade função exponencial)} \\
\mathbb{E}[e^{tX} e^{tY}] &= && \text{(Independência de } X \text{ e } Y) \\
\mathbb{E}[e^{tX}] \mathbb{E}[e^{tY}] &= && \text{(Definição)} \\
M_X(t) M_Y(t) &= && \text{(Exercício a.)} \\
e^{t\mu_1 + \frac{(t\sigma_1)^2}{2}} e^{t\mu_2 + \frac{(t\sigma_2)^2}{2}} &= && \text{(Propriedade f. exponencial)} \\
e^{t\mu_1 + \frac{(t\sigma_1)^2}{2} + t\mu_2 + \frac{(t\sigma_2)^2}{2}} &= && \text{(Propriedade f. exponencial)} \\
e^{t\mu_1 + t\mu_2 + \frac{(t\sigma_1)^2}{2} + \frac{(t\sigma_2)^2}{2}} &= && \text{(Propriedade f. exponencial)} \\
e^{t(\mu_1 + \mu_2) + \frac{t^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{2}} &= && \text{(Manipulação no expoente)} \\
e^{t(\mu_1 + \mu_2) + \frac{(t\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})^2}{2}} &= && 
\end{aligned}$$

□

Note que essa é a f.g.m. de uma variável com distribuição normal com média  $\mu_1 + \mu_2$  e variância  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$  (isso decorre diretamente do fato de que a função geradora de momentos caracteriza unicamente uma v.a., conforme falado anteriormente). Como as variáveis são independentes, esse resultado condiz com o que esperaríamos, pois lembre-se que para quaisquer v.a.'s  $X_1, \dots, X_n$  (independentes ou não), teremos:

$$\mathbb{E}[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \dots + \mathbb{E}[X_n] \quad \text{(linearidade do valor esperado)}$$

E ainda, se  $X_1, \dots, X_n$  forem independentes, teremos:

$$Var[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = Var[X_1] + Var[X_2] + \dots + Var[X_n]$$

(as provas para o caso discreto com duas variáveis são sugeridas como exercício).

**c.** A alternativa é falsa.

Sabemos que  $X \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$  se  $X = Y_1 + Y_2$  com  $Y_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$  e  $Y_1$  é independente de  $Y_2$ . Se ambas variáveis tem distribuição normal-padrão, então  $\mu_1 = \mu_2 = 0$  e  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ . Logo,  $\mu_1 + \mu_2 = 0$  como o exercício sugere, porém  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 1 + 1 = 2 \neq 1$  e, portanto,  $Y_1 + Y_2 \sim N(0, 2)$ .

**d.** A alternativa é falsa.

Das propriedades de valor esperado e variância, temos:

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[aX_1 + bX_2] = \mathbb{E}[aX_1] + \mathbb{E}[bX_2] = a\mathbb{E}[X_1] + b\mathbb{E}[X_2] = a\mu_1 + b\mu_2$$

$$Var[Y] = Var[aX_1 + bX_2] \stackrel{\text{Indep.}}{=} Var[aX_1] + Var[bX_2] = a^2 Var[X_1] + b^2 Var[X_2] = a^2 \sigma_1^2 + b^2 \sigma_2^2$$

Sabemos ainda, dos exercícios anteriores, que a soma de variáveis aleatórias independentes com distribuição normal tam-

bém tem distribuição normal.

Então,  $Y \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$ .

**e.**

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[e^{tX}] &= && \text{(Def. esperança)} \\
 \sum_{x=0}^{+\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} &= && \text{(Reescrevendo)} \\
 e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{+\infty} (e^t)^x \frac{\lambda^x}{x!} &= && \text{(Juntando termos)} \\
 e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} &= && \text{(Expansão de Taylor de } e^{\lambda e^t} \text{)} \\
 e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} &= && \text{(Prop. Exponencial)} \\
 e^{-\lambda + \lambda e^t} &= && \text{(Manip. algébrica)} \\
 e^{\lambda(e^t - 1)} &= && 
 \end{aligned}$$

Agora considere  $W = \sum_{i=1}^n X_i$ . Então,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[e^{tX}] &= \mathbb{E}[e^{t \sum_{i=1}^n X_i}] = \mathbb{E}[e^{\sum_{i=1}^n tX_i}] = \\
 \mathbb{E}[\prod_{i=1}^n e^{tX_i}] &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{tX_i}] = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t) = \\
 \prod_{i=1}^n (e^{\lambda_i(e^t - 1)}) &= (e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i(e^t - 1)})
 \end{aligned}$$

Logo,  $W \sim \text{Poisson}(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$ .

**f.**

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[e^{tX}] &= \mathbb{E}[e^{t \sum_{i=1}^n X_i}] = \mathbb{E}[e^{\sum_{i=1}^n tX_i}] = \\
 \mathbb{E}[\prod_{i=1}^n e^{tX_i}] &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{tX_i}] = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t) = \\
 \prod_{i=1}^n M_X(t) &= (M_X(t))^n
 \end{aligned}$$

Como os  $X_i$  são indenticamente distribuídas, temos que  $M_{X_1}(t) = M_{X_2}(t) = \dots = M_{X_n}(t)$ , isto é,  $M_X(t)$  não depende de  $i$ . Isso é diferente do exercício anterior onde os parâmetros  $\lambda_i$  eram diferentes para cada  $X_i$ .

Um último tópico que eu comentei na aula de quinta feira mas ainda não estava formalizado aqui é sobre *núcleo de distribuições*. Na aula, vimos como utilizar o núcleo de uma  $\text{Gama}(k + a, \lambda)$  para fazer aparecer a densidade e com isso simplificar a integral que estava no meio das nossas contas. Essa operação, de multiplicar e dividir pela constante para que

uma densidade apareça, é bastante comum.

De acordo com [Bauwens et al. \(2000\)](#), a noção de núcleo foi introduzida por [Schlaifer and Raiffa \(1961\)](#). Informalmente, o núcleo de uma distribuição e/ou de uma verossimilhança é tudo que resta da função após remover as constantes. Formalmente, temos a definição a seguir:

**Definição 2.11.26. Núcleo de uma distribuição** (Adaptado de [Bauwens et al. \(2000\)](#))

O núcleo (em inglês *Kernel*) de uma densidade  $f_x(\cdot)$  é uma função  $K(x)$  tal que

$$f_X(\cdot) = \frac{K(x)}{\int K(x)dx} \quad (52)$$

O núcleo inclui todos os fatores da densidade  $f_X(\cdot)$  que dependente de  $x$ . Uma implicação direta da definição 52 é que  $\frac{K(x)}{f_X(\cdot)}$  é uma constante em relação a  $x$ . Será conveniente utilizar o símbolo de proporcionalidade ( $\propto$ ) para escrever:

$$f_X(\cdot) \propto K(x) \quad (53)$$

(significa “ $f_X(\cdot)$  é proporcional a  $K(x)$ ”). A notação em (53) nos ajuda a explicitar a relação funcional entre a densidade e o núcleo sem precisar ficar “carregando” junto a constante de integração. Note que dependendo do que se inclui no núcleo, é possível que ele não seja único, uma vez que na definição 52, se multiplicarmos numerador e denominador pela mesma constante, a igualdade se mantém. Então, para não haver nenhuma ambiguidade, vamos falar de núcleo sem que hajam constantes desnecessárias nele (e dessa forma teremos que o núcleo é um só).



## Referências

- Luc Bauwens, Michel Lubrano, and Jean-Francois Richard. *Bayesian inference in dynamic econometric models*. OUP Oxford, 2000. [80](#)
- George Casella and Roger Berger. *Statistical inference*. Duxbury, 2nd edition, 2002. [44](#)
- Russell Davidson and James Gordon. MacKinnon. *Econometric theory and methods*. Oxford University Press, 2009. [63](#)
- Jim Freeman, Edward Shoesmith, Dennis J. Sweeney, David Ray Anderson, and Thomas Arthur Williams. *Statistics for business and economics*. Cengage Learning, 2017. [50](#)
- Barry R. James. *Probabilidade: um curso em nivel intermediario*. IMPA, 2010. [13](#), [42](#)
- Elon Lages Lima. *Curso de analise: volume 1*, volume 1. Instituto de Matematica Pura e Aplicada, 1982. [4](#)
- Marcos Nascimento Magalhães. *Probabilidade e variáveis aleatórias*. Edusp, 2011. [28](#), [29](#), [32](#), [60](#)
- Sharon Bertsch McGrayne. *The theory that would not die: how Bayes' rule cracked the enigma code, hunted down Russian submarines and emerged triumphant from two centuries of Controversy*. Yale University Press, 2011. [19](#)
- P. L. Meyer. *Probabilidade aplicacoes a estatistica*. Livros Tecnicos e Cientificos, 1973. [28](#), [50](#)
- Ron Mittelhammer. *Mathematical statistics for economics and business*. Springer, 2013. [13](#), [33](#), [35](#), [42](#), [43](#)
- Alexander M. Mood and Franklin A. Graybill. *Introduction to the theory of statistics*. 1963. [32](#)
- Sheldon M. Ross. *A first course in probability*. Pearson Prentice Hall, 2010. [18](#), [41](#)
- Robert Schlaifer and Howard Raiffa. *Applied statistical decision theory*. 1961. [80](#)
- Cristiane Alkmin Junqueira Schmidt. *Estatística - Questões comentadas dos concursos de 2002 a 2011. Coleção ANPEC*. Elsevier, 2011. [29](#), [41](#), [42](#), [57](#), [63](#), [64](#)
- Rafael Stern and Rafael Izbicki. *Introducao à Teoria das Probabilidades e Processos Aleatorios*. UFSCAR, 2016. [2](#), [6](#), [27](#), [35](#), [40](#), [41](#), [42](#), [45](#), [51](#), [53](#), [60](#), [61](#), [62](#), [63](#), [64](#), [66](#)
- Lori Viali. *Probabilidade Univariada I - Enfoque Exatas (Apostila)*. 2004a. [41](#)
- Lori Viali. *Probabilidade Univariada II - Enfoque Exatas (Apostila)*. 2004b. [50](#)
- Lori Viali. *Probabilidade - Introdução (Apostila)*. Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), 2004c. [26](#), [27](#), [28](#), [36](#)