Integrais impróprias e aplicações em probabilidade

Aishameriane Schmidt

Integrais Impróprias

Em probabilidade, uma quantidade considerável de funções densidade de variáveis aleatórias tem suporte (intervalo onde a variável é definida) em $\mathbb{R}$, o que significa que a v.a. pode assumir valores no intervalo $(-\infty, +\infty)$. Como a probabilidade de variáveis contínuas é a área sob uma curva, calculada através de integrais, se faz necessário o uso de *integrais impróprias*. As integrais impróprias nada mais são do que integrais onde um ou os dois limites de integração são $-\infty$ ou $+\infty$ ou ainda que apresentem uma descotinuidade infinita no intervalo de integração (a função não está definida em um ou mais pontos do intervalo de integração).

Exemplos de integrais impróprias com intervalos de integração infinitos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \qquad \text{(média da } Normal(\mu, \sigma))$$

$$\int_{2}^{+\infty} \lambda \exp^{-\lambda x} dx \qquad \text{(probabilidade de } X \geq 2 \text{ na distribuição } Exponencial(\lambda))$$

Exemplos de integrais impróprias com descontinuidades infinitas no intervalo de integração:

$$\int_{-3}^{+3} \frac{dx}{x^2} \qquad \text{(descontinuidade em } x = 0)$$

$$\int_{0}^{\pi} \tan(x)dx \qquad \text{(descontinuidade em } x = \frac{\pi}{2})$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} \qquad \text{(descontinuidade em } x = 0 \text{ e limite de integração com infinito)}$$

A seguir, serão apresentadas as definições de como resolver integrais impróprias e exercícios sugeridos. Para mais exemplos e explicações detalhadas, sugere-se um livro de cálculo como o que está em [2].

Definição 1. [1] A integral imprópria da função f no intervalo $[a, +\infty)$ é definida por:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx \tag{1}$$

[1] Todas as definições e a maioria dos exemplos desta lista foram retiradas de [2]

No caso onde o limite existe, dizemos que a integral imprópria **converge**, e o limite é definido como sendo o valor da integral. Caso o limite não exista, dizemos que a integral imprópria **diverge** e não atribuímos nenhum valor a ela.

Exemplo 1.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{-1}{2x^2}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2b^2}\right) = \frac{1}{2}$$

Definição 2. A integral imprópria de f no intervalo $(-\infty, b]$ é definida por:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx \tag{2}$$

Dizemos que a integral **converge** se o limite existir e **diverge** caso contrário.

Definição 3. A integral imprópria de f no intervalo $(-\infty, +\infty)$ é definida por:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx \tag{3}$$

Onde c é um número real qualquer (dica: muitas vezes usar o zero ajuda bastante).

Dizemos que a integral **converge** se ambos limites existirem e **diverge** se pelo menos uma delas divergir.

Definição 4. Se f for contínua no intervalo $[a, b]$, exceto por uma descontinuidade infinita em b, então a **integral imprópria de f no intervalo** $[a, b]$ é definida por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{k\to b^-} \int_a^k f(x)dx \tag{4}$$

No caso onde o limite existe, dizemos que a integral imprópria **converge**, e o limite é definido como sendo o valor da integral. Caso o limite não exista, dizemos que a integral imprópria **diverge** e não atribuímos nenhum valor a ela.

Exemplo 2.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{k\to1^-} \int_0^k \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{k\to1^-} \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^k = \lim_{k\to1^-} [-2\sqrt{1-k} + 2] = 2$$

Definição 5. Se f for contínua no intervalo $[a, b]$, exceto por uma descontinuidade infinita em a, então a **integral imprópria de f no intervalo** $[a, b]$ é definida por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{k\to a^+} \int_k^b f(x)dx \tag{5}$$

Dizemos que a integral **converge** se o limite existir e **diverge** caso contrário.

Definição 6. Se f for contínua no intervalo $[a, b]$, exceto por uma descontinuidade infinita em um ponto c em (a, b), então a **integral imprópria de f no intervalo** $[a, b]$ é definida por:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{6}$$

Dizemos que a integral **converge** se ambas parcelas convergirem e **diverge** se alguma delas divergir.

Vídeos sugeridos

A seguinte playlists disponível no Khan Academy (`www.khanacademy.org`) tem conteúdos que estão relacionados com esta lista e exercícios de fixação. Não é necessário assistir a todos os vídeos, fica a critério de cada aluno conforme sua necessidade pessoal. Nem todos os vídeos estão disponíveis na plataforma em português, então é possível que para o link funcionar você precise mudar a configuração da sua conta para o idioma inglês (mas ainda assim tem legendas em português na maioria dos vídeos):

- Integrais impróprias: `https://goo.gl/6HrHTL`
- Integral imprópria com dois limites de integração infinitos: `https://goo.gl/9HBLWt`
- Integral imprópria divergente: `https://goo.gl/XjXHa4`
- Exercício: `https://goo.gl/Gu9gPe`
- Desafio (acerte 5 exercícios em sequência sem utilizar dicas): `https://goo.gl/zKJXuA`
- Conteúdo completo de integrais: `https://www.khanacademy.org/math/calculus-home/integral-calculus`

Exercícios propostos

Exercício 1. (Retirado de [1]) Seja $X \geq 0$ uma variável aleatória contínua de tal forma que $f_X(x) = ce^{-x}$ para $x \geq 0$. Encontre o valor de c, $\mathbb{E}[X]$, $Var[X]$ e $\mathbb{P}(X \geq 1)$.

Exercício 2. Considere $X \geq 1$. Pode haver $c > 0$ tal que a densidade de X seja $f_X(x) = cx^{-1}$, para $x \geq 1$?

Exercício 3. Seja uma variável aleatória $X \geq 0$ tal que sua densidade é dada por

$$f_X(x) = \lambda^{-1}e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

Calcule $\mathbb{E}[X]$ e $Var[X]$.

Exercício 4. Calcule a média e a variância da distribuição normal padrão[2]. Você consegue pensar em uma forma de calcular a média e a variância, a partir do que você fez, para uma distribuição $Normal(\mu, \sigma)$? Dica: Para a segunda parte é possível fazer o cálculo sem utilizar integrais.

Exercício 5. Calcule o terceiro momento (não central) da distribuição normal, isto é, calcule $\mathbb{E}[X^3]$.

Exercício 6. (Retirado de [3])[3] Uma variável aleatória calculada como a razão entre duas variáveis aleatórias independentes com distribuição normal padrão tem distribuição de **Cauchy**. Pode-se demonstrar que a densidade dessa distribuição é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \tag{7}$$

Mostre que a distribuição de Cauchy não tem média.

[2] A densidade está no exemplo 1, basta substituir $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

[3] Este exercício está na lista de propriedades de Esperança, Variância e Covariância, mas é sugerido novamente para treino.

Respostas

Questão 1 $c = 1$, $\mathbb{E}[X] = 1$, $Var[X] = 1$, $\mathbb{P}(X \geq 1) = e^{-1}$. Observe que é a densidade de uma variável aleatória com distribuição $Exponencial(1)$ e os resultados são condizentes com o esperado.

Questão 2 Não.

Questão 3 $\mathbb{E}[X] = \lambda$ e $Var[X] = \lambda^2$. Esta é uma forma alternativa de parametrização da distribuição exponencial.

Questão 4 A normal padrão tem média 0 e variância unitária. Uma $Normal(\mu, \sigma)$ tem média igual a μ e variância dada por σ, que são chamados parâmetros de localização e escala, respectivamente.

Questão 5 $\mathbb{E}[X^3] = 3\sigma^2\mu + \mu^3$.

Referências

[1] STERN, Rafael B., IZBICKI, Rafael. *Introdução à Teoria das Probabilidades e Processos Aleatórios.* Notas de aula. UFSCAR, 2016.

[2] ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen Paul. *Cálculo Volume 1.* 8. ed. São Paulo: Artmed, 2002. 2 v.

[3] DAVIDSON, Russell, MACKINNON, James G. *Econometric Theory and Methods.* New York: Oxford University Press, 2003.