

# Revisão de Probabilidade e Estatística

## *Aula 1 - Parte 1*

Aishameriane Schmidt

PPGECO/UFSC

Fevereiro de 2018.



# Apresentação

Aisha? Caixa? Baixa?

- ▶ Mestranda do PPGECON/UFSC (2017-2019)

# Apresentação

Aisha? Caixa? Baixa?

- ▶ Mestranda do PPGECON/UFSC (2017-2019)
  - ▶ *Mascote* Monitora de Econometria Bayesiana

# Apresentação

Aisha? Caixa? Baixa?

- ▶ Mestranda do PPGECON/UFSC (2017-2019)
  - ▶ *Mascote* Monitora de Econometria Bayesiana
- ▶ Graduada em Economia na UDESC (2015-?)

# Apresentação

Aisha? Caixa? Baixa?

- ▶ Mestranda do PPGECON/UFSC (2017-2019)
  - ▶ *Mascote* Monitora de Econometria Bayesiana
- ▶ Graduanda em Economia na UDESC (2015-?)
- ▶ Bacharel em Estatística pela UFRGS (2004-2009)

# Funcionamento das aulas

- ▶ Aulas segunda (26), terça (27), quinta (01) e sexta (02) - sala 203 do prédio da pós - terça feira vai ser no miniauditório.
  - ▶ *Pipi-break* no meio da tarde, conforme demanda - preferencialmente **antes/depois** do intervalo das aulas da graduação.

# Funcionamento das aulas

- ▶ Aulas segunda (26), terça (27), quinta (01) e sexta (02) - sala 203 do prédio da pós - terça feira vai ser no miniauditório.
  - ▶ *Pipi-break* no meio da tarde, conforme demanda - preferencialmente **antes/depois** do intervalo das aulas da graduação.
- ▶ Aulas expositivas - com **bastante espaço para interação**;
  - ▶ **Slides** + quadro.
  - ▶ Conteúdos do apêndice do Greene - porém a bibliografia utilizada é bem diversa.
  - ▶ Notas de aula e slides serão disponibilizados no github (acompanhe pelas datas a versão): <https://github.com/aishameriane/Econometria-Bayesiana/tree/master/Revisao-prob>.

# Funcionamento das aulas

- ▶ Aulas segunda (26), terça (27), quinta (01) e sexta (02) - sala 203 do prédio da pós - terça feira vai ser no miniauditório.
  - ▶ *Pipi-break* no meio da tarde, conforme demanda - preferencialmente **antes/depois** do intervalo das aulas da graduação.
- ▶ Aulas expositivas - com **bastante espaço para interação**;
  - ▶ **Slides** + quadro.
  - ▶ Conteúdos do apêndice do Greene - porém a bibliografia utilizada é bem diversa.
  - ▶ Notas de aula e slides serão disponibilizados no github (acompanhe pelas datas a versão): <https://github.com/aishameriane/Econometria-Bayesiana/tree/master/Revisao-prob>.
- ▶ É uma *revisão* - **relembrar é viver**!
  - ▶ Mas, se estiver **muito** repetitivo, melhor usar seu tempo de outra forma.



# Funcionamento das aulas

- ▶ Aulas segunda (26), terça (27), quinta (01) e sexta (02) - sala 203 do prédio da pós - terça feira vai ser no miniauditório.
  - ▶ *Pipi-break* no meio da tarde, conforme demanda - preferencialmente **antes/depois** do intervalo das aulas da graduação.
- ▶ Aulas expositivas - com **bastante espaço para interação**;
  - ▶ **Slides** + quadro.
  - ▶ Conteúdos do apêndice do Greene - porém a bibliografia utilizada é bem diversa.
  - ▶ Notas de aula e slides serão disponibilizados no github (acompanhe pelas datas a versão): <https://github.com/aishameriane/Econometria-Bayesiana/tree/master/Revisao-prob>.
- ▶ É uma *revisão* - **relembrar é viver**!
  - ▶ Mas, se estiver **muito** repetitivo, melhor usar seu tempo de outra forma.
  - ▶ Em geral, a Aisha **não** pressupõe que as pessoas saibam as coisas - *isso pode tornar o processo meio maçante*.

# Funcionamento das aulas

- ▶ Aulas segunda (26), terça (27), quinta (01) e sexta (02) - sala 203 do prédio da pós - terça feira vai ser no miniauditório.
  - ▶ *Pipi-break* no meio da tarde, conforme demanda - preferencialmente **antes/depois** do intervalo das aulas da graduação.
- ▶ Aulas expositivas - com **bastante espaço para interação**;
  - ▶ **Slides** + quadro.
  - ▶ Conteúdos do apêndice do Greene - porém a bibliografia utilizada é bem diversa.
  - ▶ Notas de aula e slides serão disponibilizados no github (acompanhe pelas datas a versão): <https://github.com/aishameriane/Econometria-Bayesiana/tree/master/Revisao-prob>.
- ▶ É uma *revisão* - **relembrar é viver**!
  - ▶ Mas, se estiver **muito** repetitivo, melhor usar seu tempo de outra forma.
  - ▶ Em geral, a Aisha **não** pressupõe que as pessoas saibam as coisas - *isso pode tornar o processo meio maçante*.
- ▶ O programa das aulas foi feito baseado nas orientações dos professores de Econometria I e Econometria Bayesiana.

# Funcionamento das aulas

- ▶ Aulas segunda (26), terça (27), quinta (01) e sexta (02) - sala 203 do prédio da pós - terça feira vai ser no miniauditório.
  - ▶ *Pipi-break* no meio da tarde, conforme demanda - preferencialmente **antes/depois** do intervalo das aulas da graduação.
- ▶ Aulas expositivas - com **bastante espaço para interação**;
  - ▶ **Slides** + quadro.
  - ▶ Conteúdos do apêndice do Greene - porém a bibliografia utilizada é bem diversa.
  - ▶ Notas de aula e slides serão disponibilizados no github (acompanhe pelas datas a versão): <https://github.com/aishameriane/Econometria-Bayesiana/tree/master/Revisao-prob>.
- ▶ É uma *revisão* - **relembrar é viver**!
  - ▶ Mas, se estiver **muito** repetitivo, melhor usar seu tempo de outra forma.
  - ▶ Em geral, a Aisha **não** pressupõe que as pessoas saibam as coisas - *isso pode tornar o processo meio maçante*.
- ▶ O programa das aulas foi feito baseado nas orientações dos professores de Econometria I e Econometria Bayesiana.

**Você sabe fazer alguma coisa? Passe o conhecimento adiante!**

# Programa

## O que iremos ver?

- ▶ Probabilidade:
  - ▶ Conjuntos, definições básicas de probabilidade e probabilidade de eventos;
  - ▶ Definição e caracterização de variáveis aleatórias;
- ▶ Introdução à Estatística.

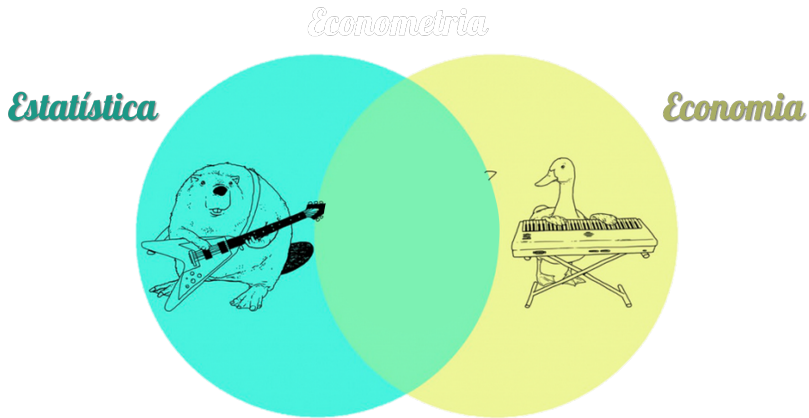
# Programa

## Aula 1

1. **Teoria dos conjuntos:** Revisão dos principais resultados de teoria dos conjuntos.
2. **Definições de probabilidade:** axiomática, frequentista e subjetiva.
3. **Probabilidade de eventos.**
4. **Independência de eventos, probabilidade condicional e teorema de Bayes.**
5. **Variáveis aleatórias - *de onde vem, onde vivem e como enxergar elas como funções?* -Possivelmente fica para amanhã**

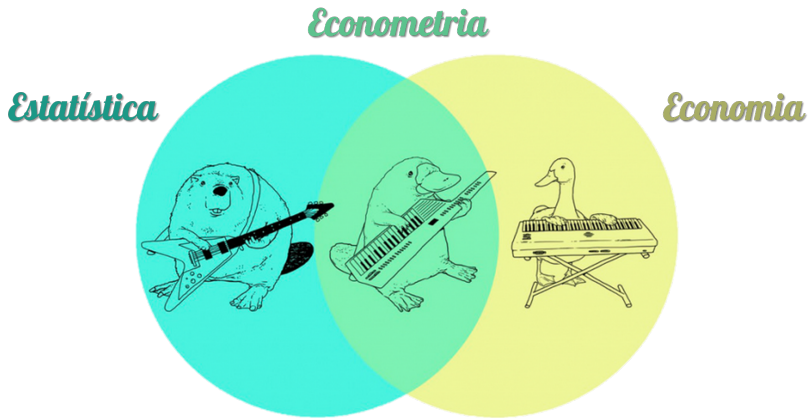
# Estatística pra quê?

Motivação



# Estatística pra quê?

Motivação



# Motivação

## Probabilidade VS Estatística

- ▶ Probabilidade é uma área da matemática;
  - ▶ Embora não seja *exata* pois lida com incertezas, **uma vez definido um espaço de probabilidade, os resultados possíveis são todos bem estabelecidos.**



# Motivação

## Probabilidade VS Estatística

- ▶ Probabilidade é uma área da matemática;
  - ▶ Embora não seja *exata* pois lida com incertezas, **uma vez definido um espaço de probabilidade, os resultados possíveis são todos bem estabelecidos.**
- ▶ A estatística utiliza a probabilidade como uma **ferramenta**:
  - ▶ É similar aos engenheiros, físicos e demais profissões que utilizam cálculo.
- ▶ Para falar de estatística, necessariamente haverá uma **população**.
  - ▶ E, muito possivelmente, uma ou mais **amostras**.

# Motivação

## Probabilidade VS Estatística

- ▶ Probabilidade é uma área da matemática;
  - ▶ Embora não seja *exata* pois lida com incertezas, **uma vez definido um espaço de probabilidade, os resultados possíveis são todos bem estabelecidos.**
- ▶ A estatística utiliza a probabilidade como uma **ferramenta**:
  - ▶ É similar aos engenheiros, físicos e demais profissões que utilizam cálculo.
- ▶ Para falar de estatística, necessariamente haverá uma **população**.
  - ▶ E, muito possivelmente, uma ou mais **amostras**.

Você pode até tentar “fazer” **estatística sem** conhecer **probabilidade**, mas será igual uma pessoa que quer **construir um prédio sem saber** nada de **engenharia civil**.

# Como estudar formalmente um conteúdo?

O que está por vir

A estrutura das aulas será muito similar, independente do assunto (probabilidade/estatística) - é como uma receita de bolo:

- ▶ São apresentadas as **definições** e **axiomas**;
  - ▶ **Definição** é aquilo que descreve um conceito;
  - ▶ **Axioma** é uma verdade geral, não precisa de demonstração.

# Como estudar formalmente um conteúdo?

O que está por vir

A estrutura das aulas será muito similar, independente do assunto (probabilidade/estatística) - é como uma receita de bolo:

- ▶ São apresentadas as **definições** e **axiomas**;
  - ▶ **Definição** é aquilo que descreve um conceito;
  - ▶ **Axioma** é uma verdade geral, não precisa de demonstração.
- ▶ A partir disso, podemos construir e provar **proposições**, **lemas**, **teoremas** e **corolários**.

# Como estudar formalmente um conteúdo?

## O que está por vir

A estrutura das aulas será muito similar, independente do assunto (probabilidade/estatística) - é como uma receita de bolo:

- ▶ São apresentadas as **definições** e **axiomas**;
  - ▶ **Definição** é aquilo que descreve um conceito;
  - ▶ **Axioma** é uma verdade geral, não precisa de demonstração.
- ▶ A partir disso, podemos construir e provar **proposições**, **lemas**, **teoremas** e **corolários**.
  - ▶ Para fazer uma demonstração, precisamos de uma **hipótese** (aquilo que assumimos como verdadeiro) e uma **tese** (aquilo que desejamos provar e que decorre da hipótese, das definições e dos axiomas);
  - ▶ Existem diferentes estratégias de demonstração. Para uma introdução, recomenda-se a leitura de [Velleman, 2006].

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

## Definição

Um **conjunto** (ou coleção) é formado por objetos (que são os seus **elementos**). [Lima, 1982]

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

## Definição

Um **conjunto** (ou coleção) é formado por objetos (que são os seus **elementos**). [Lima, 1982]

- ▶ A relação básica entre um conjunto e seus elementos é a relação de **pertinência**.
- ▶ Quando  $x$  (objeto) é um elemento do conjunto  $A$ :
  - ▶ Dizemos “ $x$  *pertence a*  $A$ ” e denotamos por  $x \in A$ .
- ▶ Caso contrário, diremos que “ $x$  *não pertence a*  $A$ ” e denotaremos por  $x \notin A$ .

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

## Definição

Um **conjunto** (ou coleção) é formado por objetos (que são os seus **elementos**). [Lima, 1982]

- ▶ A relação básica entre um conjunto e seus elementos é a relação de **pertinência**.
- ▶ Quando  $x$  (objeto) é um elemento do conjunto  $A$ :
  - ▶ Dizemos “ $x$  *pertence a*  $A$ ” e denotamos por  $x \in A$ .
- ▶ Caso contrário, diremos que “ $x$  *não pertence a*  $A$ ” e denotaremos por  $x \notin A$ .

## Atenção

Não confundir  $\in$  (**pertence**) com  $\subset$  (**contido**)!



# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

## Definição

Um **conjunto** (ou coleção) é formado por objetos (que são os seus **elementos**). [Lima, 1982]

- ▶ A relação básica entre um conjunto e seus elementos é a relação de **pertinência**.
- ▶ Quando  $x$  (objeto) é um elemento do conjunto  $A$ :
  - ▶ Dizemos “ $x$  *pertence a*  $A$ ” e denotamos por  $x \in A$ .
- ▶ Caso contrário, diremos que “ $x$  *não pertence a*  $A$ ” e denotaremos por  $x \notin A$ .

## Atenção

Não confundir  $\in$  (**pertence**) com  $\subset$  (**contido**)!

O primeiro diz respeito a **elementos**, enquanto que o segundo refere-se a **conjuntos**!

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- ▶ Um conjunto fica bem especificado (definido) quando há uma **regra clara** que permita avaliar se um elemento qualquer pertence ou não ao conjunto.
  - ▶ *O uso de regras auxilia a **escrever o conjunto sem precisar enumerar todos seus elementos.***

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- ▶ Um conjunto fica bem especificado (definido) quando há uma **regra clara** que permita avaliar se um elemento qualquer pertence ou não ao conjunto.
  - ▶ *O uso de regras auxilia a **escrever o conjunto sem precisar enumerar todos seus elementos.***
- ▶ **Exemplo 1:** A propriedade  $P$  define totalmente o conjunto  $A$ 
  - ▶ Se um objeto  $x$  atende  $P$ , então  $x \in A$ .
  - ▶ Caso contrário,  $x \notin A$ .

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- ▶ Um conjunto fica bem especificado (definido) quando há uma **regra clara** que permita avaliar se um elemento qualquer pertence ou não ao conjunto.
  - ▶ *O uso de regras auxilia a **escrever o conjunto sem precisar enumerar todos seus elementos.***
- ▶ **Exemplo 1:** A propriedade  $P$  define totalmente o conjunto  $A$ 
  - ▶ Se um objeto  $x$  atende  $P$ , então  $x \in A$ .
  - ▶ Caso contrário,  $x \notin A$ .

$$A = \{x : x \text{ tem a propriedade } P\}$$

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- ▶ Um conjunto fica bem especificado (definido) quando há uma **regra clara** que permita avaliar se um elemento qualquer pertence ou não ao conjunto.
  - ▶ *O uso de regras auxilia a **escrever o conjunto sem precisar enumerar todos seus elementos**.*
- ▶ **Exemplo 1:** A propriedade  $P$  define totalmente o conjunto  $A$ 
  - ▶ Se um objeto  $x$  atende  $P$ , então  $x \in A$ .
  - ▶ Caso contrário,  $x \notin A$ .

$$A = \{x : x \text{ tem a propriedade } P\}$$

- ▶ **Exemplo 2:** Se queremos nos referir a um conjunto  $B \subset A$  (significa que  $B$  é subconjunto de  $A$  ou, equivalentemente,  $B$  está contido em  $A$ ), podemos escrever:

$$B = \{x \in A : x \text{ tem a propriedade } P\}$$

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- ▶ Um conjunto fica bem especificado (definido) quando há uma **regra clara** que permita avaliar se um elemento qualquer pertence ou não ao conjunto.
  - ▶ *O uso de regras auxilia a **escrever o conjunto sem precisar enumerar todos seus elementos**.*
- ▶ **Exemplo 1:** A propriedade  $P$  define totalmente o conjunto  $A$ 
  - ▶ Se um objeto  $x$  atende  $P$ , então  $x \in A$ .
  - ▶ Caso contrário,  $x \notin A$ .

$$A = \{x : x \text{ tem a propriedade } P\}$$

- ▶ **Exemplo 2:** Se queremos nos referir a um conjunto  $B \subset A$  (significa que  $B$  é subconjunto de  $A$  ou, equivalentemente,  $B$  está contido em  $A$ ), podemos escrever:

$$B = \{x \in A : x \text{ tem a propriedade } P\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x > 10\}$$

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- ▶ Se  $A$  e  $B$  forem conjuntos, podemos compará-los através da relação de “*inclusão*” ( $\subset$ ).
  - ▶ Dizemos que  $B$  é subconjunto de  $A$  se **todo elemento de  $B$  também\* é elemento de  $A$**  e denotamos por  $B \subset A$ .

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- ▶ Se  $A$  e  $B$  forem conjuntos, podemos compará-los através da relação de “*inclusão*” ( $\subset$ ).
  - ▶ Dizemos que  $B$  é subconjunto de  $A$  se **todo elemento de  $B$  também\* é elemento de  $A$**  e denotamos por  $B \subset A$ .
    - ▶ **Sinônimos:**  $B$  é *parte de*  $A$ ,  $B$  está *incluído* em  $A$  ou ainda  $B$  está *contido* em  $A$ .



# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- ▶ Se  $A$  e  $B$  forem conjuntos, podemos compará-los através da relação de “*inclusão*” ( $\subset$ ).
  - ▶ Dizemos que  $B$  é subconjunto de  $A$  se **todo elemento de  $B$  também\* é elemento de  $A$**  e denotamos por  $B \subset A$ .
    - ▶ **Sinônimos:**  $B$  é *parte de*  $A$ ,  $B$  está *incluído* em  $A$  ou ainda  $B$  está *contido* em  $A$ .
- ▶ Em alguns livros encontramos as seguintes **notações**:
  - ▶  $B \subset A$  para indicar que  $B$  está *contido* em  $A$  (mas não é igual),

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- ▶ Se  $A$  e  $B$  forem conjuntos, podemos compará-los através da relação de “inclusão” ( $\subset$ ).
  - ▶ Dizemos que  $B$  é subconjunto de  $A$  se **todo elemento de  $B$  também\* é elemento de  $A$**  e denotamos por  $B \subset A$ .
    - ▶ **Sinônimos:**  $B$  é parte de  $A$ ,  $B$  está incluído em  $A$  ou ainda  $B$  está contido em  $A$ .
- ▶ Em alguns livros encontramos as seguintes **notações**:
  - ▶  $B \subset A$  para indicar que  $B$  está contido em  $A$  (mas não é igual),
  - ▶  $B \subseteq A$  para indicar que  $B$  está contido e pode ser igual a  $A$ ,

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- ▶ Se  $A$  e  $B$  forem conjuntos, podemos compará-los através da relação de “inclusão” ( $\subset$ ).
  - ▶ Dizemos que  $B$  é subconjunto de  $A$  se **todo elemento de  $B$  também\* é elemento de  $A$**  e denotamos por  $B \subset A$ .
    - ▶ **Sinônimos:**  $B$  é parte de  $A$ ,  $B$  está incluído em  $A$  ou ainda  $B$  está contido em  $A$ .
- ▶ Em alguns livros encontramos as seguintes **notações**:
  - ▶  $B \subset A$  para indicar que  $B$  está contido em  $A$  (mas não é igual),
  - ▶  $B \subseteq A$  para indicar que  $B$  está contido e pode ser igual a  $A$ ,
  - ▶  $B \subsetneq A$  para indicar  $B$  está contido mas não é igual a  $A$ .

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- ▶ Se  $A$  e  $B$  forem conjuntos, podemos compará-los através da relação de “inclusão” ( $\subset$ ).
  - ▶ Dizemos que  $B$  é subconjunto de  $A$  se **todo elemento de  $B$  também\* é elemento de  $A$**  e denotamos por  $B \subset A$ .
    - ▶ **Sinônimos:**  $B$  é parte de  $A$ ,  $B$  está incluído em  $A$  ou ainda  $B$  está contido em  $A$ .
- ▶ Em alguns livros encontramos as seguintes **notações**:
  - ▶  $B \subset A$  para indicar que  $B$  está contido em  $A$  (mas não é igual),
  - ▶  $B \subseteq A$  para indicar que  $B$  está contido e pode ser igual a  $A$ ,
  - ▶  $B \subsetneq A$  para indicar  $B$  está contido mas não é igual a  $A$ .
- ▶ Iremos utilizar  $B \subset A$  como “ $B$  está contido em  $A$  e eles podem ser iguais”.

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio ~~que nos habita~~  $\emptyset$

Quando não há elemento de  $A$  que satisfaça  $P$ , o conjunto  $B$  não tem nenhum elemento e é denominado *conjunto vazio* ( $\emptyset$ ).

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio ~~que nos habita~~  $\emptyset$

Quando não há elemento de  $A$  que satisfaça  $P$ , o conjunto  $B$  não tem nenhum elemento e é denominado *conjunto vazio* ( $\emptyset$ ).

## Definição

Definimos  $\emptyset$  da seguinte forma:

$$\forall x, x \neq \emptyset$$

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio ~~que nos habita~~  $\emptyset$

Quando não há elemento de  $A$  que satisfaça  $P$ , o conjunto  $B$  não tem nenhum elemento e é denominado *conjunto vazio* ( $\emptyset$ ).

## Definição

Definimos  $\emptyset$  da seguinte forma:

$$\forall x, x \neq \emptyset$$

(lê-se: qualquer que seja  $x$ ,  $x$  não pertence ao vazio)

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio ~~que nos habita~~  $\emptyset$

Quando não há elemento de  $A$  que satisfaça  $P$ , o conjunto  $B$  não tem nenhum elemento e é denominado *conjunto vazio* ( $\emptyset$ ).

## Definição

Definimos  $\emptyset$  da seguinte forma:

$$\forall x, x \neq \emptyset$$

(lê-se: qualquer que seja  $x$ ,  $x$  não pertence ao vazio)

**Observação:**  $\forall$  significa “para todo” e  $\exists$  significa “existe”. Eles são chamados de *quantificador universal* e *quantificador existencial* e são extremamente importantes na linguagem matemática. Além de [Velleman, 2006], recomenda-se a aula 3 do material disponível em [https://1drv.ms/f/s!AlHDLj\\_70jaL4xES4gUq\\_N\\_2gzga](https://1drv.ms/f/s!AlHDLj_70jaL4xES4gUq_N_2gzga).



# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio  $\emptyset$  e o vazio  $\{\emptyset\}$

Uma coisa importante a se notar é que existe diferença entre  $\emptyset$  e  $\{\emptyset\}$ . O primeiro é o conjunto vazio, o segundo é um conjunto cujo único elemento é o conjunto vazio. Para entender melhor a diferença, considere o seguinte exercício:

**Exercício 1:** Analise se são verdadeiras ou falsas as seguintes sentenças:

1.  $\emptyset \in \emptyset$ .
2.  $\emptyset \in \{\emptyset\}$ .
3.  $\{\emptyset\} \in \emptyset$ .
4.  $\emptyset \subset \emptyset$ .
5.  $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ .
6.  $\{\emptyset\} \subset \emptyset$ .

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio  $\emptyset$  e o vazio  $\{\emptyset\}$

Note que:

- ▶  $\emptyset$  é o conjunto vazio (não contém elementos);
  - ▶  $\{\emptyset\}$  é o conjunto cujo único elemento é o vazio.
- 
1.  $\emptyset \in \emptyset$  - “O elemento vazio pertence ao conjunto vazio”
  2.  $\emptyset \in \{\emptyset\}$  - “O vazio é elemento do conjunto que só contém o vazio”
  3.  $\{\emptyset\} \in \emptyset$  - “O conjunto cujo único elemento é o vazio é elemento do conjunto vazio”
  4.  $\emptyset \subset \emptyset$  - “O conjunto vazio está contido no conjunto vazio”
  5.  $\emptyset \subset \{\emptyset\}$  - “O conjunto que contém o vazio está contido no conjunto cujo único elemento é o vazio”
  6.  $\{\emptyset\} \subset \emptyset$  - “O conjunto cujo único elemento é o vazio está contido no vazio”

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio  $\emptyset$  e o vazio  $\{\emptyset\}$

1.  $\emptyset \in \emptyset$  - “O elemento vazio pertence ao conjunto vazio”

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio  $\emptyset$  e o vazio  $\{\emptyset\}$

1.  $\emptyset \in \emptyset$  - “O elemento vazio pertence ao conjunto vazio”  
**Falsa** pois o conjunto vazio não tem nenhum elemento.

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio  $\emptyset$  e o vazio  $\{\emptyset\}$

1.  $\emptyset \in \emptyset$  - “O elemento vazio pertence ao conjunto vazio”  
**Falsa** pois o conjunto vazio não tem nenhum elemento.
2.  $\emptyset \in \{\emptyset\}$  - “O vazio é elemento do conjunto que só contém o vazio”

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio  $\emptyset$  e o vazio  $\{\emptyset\}$

1.  $\emptyset \in \emptyset$  - “O elemento vazio pertence ao conjunto vazio”  
**Falsa** pois o conjunto vazio não tem nenhum elemento.
2.  $\emptyset \in \{\emptyset\}$  - “O vazio é elemento do conjunto que só contém o vazio”  
**Verdadeira** - no lado esquerdo estamos listando todos os elementos do conjunto à direita, que neste caso só contém o vazio.

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio  $\emptyset$  e o vazio  $\{\emptyset\}$

1.  $\emptyset \in \emptyset$  - “O elemento vazio pertence ao conjunto vazio”  
**Falsa** pois o conjunto vazio não tem nenhum elemento.
2.  $\emptyset \in \{\emptyset\}$  - “O vazio é elemento do conjunto que só contém o vazio”  
**Verdadeira** - no lado esquerdo estamos listando todos os elementos do conjunto à direita, que neste caso só contém o vazio.
3.  $\{\emptyset\} \in \emptyset$  - “O conjunto cujo único elemento é o vazio é elemento do conjunto vazio”

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio  $\emptyset$  e o vazio  $\{\emptyset\}$

1.  $\emptyset \in \emptyset$  - “O elemento vazio pertence ao conjunto vazio”  
**Falsa** pois o conjunto vazio não tem nenhum elemento.
2.  $\emptyset \in \{\emptyset\}$  - “O vazio é elemento do conjunto que só contém o vazio”  
**Verdadeira** - no lado esquerdo estamos listando todos os elementos do conjunto à direita, que neste caso só contém o vazio.
3.  $\{\emptyset\} \in \emptyset$  - “O conjunto cujo único elemento é o vazio é elemento do conjunto vazio”  
**Falsa** - pela definição do conjunto vazio, sabemos que ele não contém elemento.



# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio  $\emptyset$  e o vazio  $\{\emptyset\}$

4.  $\emptyset \subset \emptyset$  - “O conjunto vazio está contido no conjunto vazio”

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio  $\emptyset$  e o vazio  $\{\emptyset\}$

4.  $\emptyset \subset \emptyset$  - “O conjunto vazio está contido no conjunto vazio”

**Verdadeira** pois todo conjunto contém o conjunto vazio (dizemos que é verdadeira por vacuidade).

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio  $\emptyset$  e o vazio  $\{\emptyset\}$

- 4.  $\emptyset \subset \emptyset$  - “O conjunto vazio está contido no conjunto vazio”  
**Verdadeira** pois todo conjunto contém o conjunto vazio (dizemos que é verdadeira por vacuidade).
- 5.  $\emptyset \subset \{\emptyset\}$  - “O conjunto que contém o vazio está contido no conjunto cujo único elemento é o vazio”

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio  $\emptyset$  e o vazio  $\{\emptyset\}$

4.  $\emptyset \subset \emptyset$  - “O conjunto vazio está contido no conjunto vazio”

**Verdadeira** pois todo conjunto contém o conjunto vazio (dizemos que é verdadeira por vacuidade).

5.  $\emptyset \subset \{\emptyset\}$  - “O conjunto que contém o vazio está contido no conjunto cujo único elemento é o vazio”

**Verdadeira** pois quando comparamos dois conjuntos, precisamos verificar se os elementos de um estão contidos no outro. Como o lado esquerdo não contém elementos, significa, por vacuidade, que todo elemento pertence ao conjunto do lado direito.

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio  $\emptyset$  e o vazio  $\{\emptyset\}$

4.  $\emptyset \subset \emptyset$  - “O conjunto vazio está contido no conjunto vazio”

**Verdadeira** pois todo conjunto contém o conjunto vazio (dizemos que é verdadeira por vacuidade).

5.  $\emptyset \subset \{\emptyset\}$  - “O conjunto que contém o vazio está contido no conjunto cujo único elemento é o vazio”

**Verdadeira** pois quando comparamos dois conjuntos, precisamos verificar se os elementos de um estão contidos no outro. Como o lado esquerdo não contém elementos, significa, por vacuidade, que todo elemento pertence ao conjunto do lado direito.

6.  $\{\emptyset\} \subset \emptyset$  - “O conjunto cujo único elemento é o vazio está contido no vazio”

# Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio  $\emptyset$  e o vazio  $\{\emptyset\}$

4.  $\emptyset \subset \emptyset$  - “O conjunto vazio está contido no conjunto vazio”

**Verdadeira** pois todo conjunto contém o conjunto vazio (dizemos que é verdadeira por vacuidade).

5.  $\emptyset \subset \{\emptyset\}$  - “O conjunto que contém o vazio está contido no conjunto cujo único elemento é o vazio”

**Verdadeira** pois quando comparamos dois conjuntos, precisamos verificar se os elementos de um estão contidos no outro. Como o lado esquerdo não contém elementos, significa, por vacuidade, que todo elemento pertence ao conjunto do lado direito.

6.  $\{\emptyset\} \subset \emptyset$  - “O conjunto cujo único elemento é o vazio está contido no vazio”

**Falsa**, pois o conjunto do lado esquerdo contém um elemento, enquanto que o conjunto do lado direito não tem elemento, por definição. O único subconjunto do vazio é ele próprio, isto é,  $\emptyset \subset \emptyset$ .

# Eventos

Vamos preencher o vazio...

- ▶ **Eventos** são objetos de interesse na probabilidade e, como vamos ver, eles tem uma correspondência com teoria dos conjuntos.
- ▶ Experimentos que ao serem repetidos sob as mesmas condições não produzem os mesmos resultados são chamados de **experimentos aleatórios**.
  - ▶ Como só nos ocuparemos deles, toda vez que aparecer um **experimento**, estamos falando de um *experimento aleatório*.

## Definição

O conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento particular é chamado de **Espaço Amostral** e é denotado por  $\Omega$ . Este conjunto pode ser: enumerável, finito ou infinito, se houver uma bijeção  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  ou ainda, pode ser não enumerável (por exemplo, no caso de  $\Omega = \mathbb{R}$ ).

# Eventos

## Espaços amostrais

### Exemplo 1: Espaço amostral do lançamento de uma moeda

Imagine que você faz o experimento de lançar uma moeda. Considere que  $K$  significa que o resultado foi cara e  $C$  significa que o resultado foi coroa.

Então,  $\Omega = \{K, C\}$  é o espaço amostral do experimento.



# Eventos

## Espaços amostrais

### **Exemplo 1:** Espaço amostral do lançamento de uma moeda

Imagine que você faz o experimento de lançar uma moeda. Considere que  $K$  significa que o resultado foi cara e  $C$  significa que o resultado foi coroa.

Então,  $\Omega = \{K, C\}$  é o espaço amostral do experimento.

### **Exemplo 2:** Espaço amostral do tempo até uma lâmpada queimar

Considere agora o seguinte experimento: você observa uma lâmpada e está interessado no tempo, em minutos, até a lâmpada queimar\*.

Então,  $\Omega = [0, +\infty)$ .

# Eventos

## Definição

Um *evento* é qualquer coleção de possíveis resultados de um experimento, isto é, qualquer subconjunto de  $\Omega$  (incluindo o próprio  $\Omega$ ) é um evento.

# Eventos

## Definição

Um *evento* é qualquer coleção de **possíveis resultados de um experimento**, isto é, qualquer subconjunto de  $\Omega$  (incluindo o próprio  $\Omega$ ) é um evento.

## Definição

### Relação entre eventos

$$A \subset B \iff x \in A \Rightarrow x \in B \quad (1)$$

# Eventos

## Definição

Um *evento* é qualquer coleção de **possíveis resultados de um experimento**, isto é, qualquer subconjunto de  $\Omega$  (incluindo o próprio  $\Omega$ ) é um evento.

## Definição

### Relação entre eventos

$$A \subset B \iff x \in A \Rightarrow x \in B \quad (1)$$

$$A = B \iff A \subset B \text{ e } B \subset A \quad (2)$$

# Eventos

## Operações entre eventos

### Definição

#### União de dois eventos

A união de dois eventos  $A$  e  $B$ , representada por  $A \cup B$ , é o conjunto de elementos que pertencem a  $A$ ,  $B$  ou ambos:

# Eventos

## Operações entre eventos

### Definição

#### União de dois eventos

A união de dois eventos  $A$  e  $B$ , representada por  $A \cup B$ , é o conjunto de elementos que pertencem a  $A$ ,  $B$  ou ambos:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\} \quad (3)$$

# Eventos

## Operações entre eventos

### Definição

#### União de dois eventos

A união de dois eventos  $A$  e  $B$ , representada por  $A \cup B$ , é o conjunto de elementos que pertencem a  $A$ ,  $B$  ou ambos:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\} \quad (3)$$

De maneira mais geral, seja  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de conjuntos.  $x \in \Omega$  é um elemento da união de  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , denotada por  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ , se e somente se existe um  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in A_n$ . Isto é,

# Eventos

## Operações entre eventos

### Definição

#### União de dois eventos

A união de dois eventos  $A$  e  $B$ , representada por  $A \cup B$ , é o conjunto de elementos que pertencem a  $A$ ,  $B$  ou ambos:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\} \quad (3)$$

De maneira mais geral, seja  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de conjuntos.  $x \in \Omega$  é um elemento da união de  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , denotada por  $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ , se e somente se existe um  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in A_n$ . Isto é,

$$\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \in \Omega : \textbf{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \in A_n\}$$



# Eventos

## Operações entre eventos

### Definição

#### Interseção de dois eventos

A interseção de dois eventos  $A$  e  $B$ , representada por  $A \cap B$ , é o conjunto de elementos que pertencem a  $A$  e, ao mesmo tempo,  $B$ :

# Eventos

## Operações entre eventos

### Definição

#### Interseção de dois eventos

A interseção de dois eventos  $A$  e  $B$ , representada por  $A \cap B$ , é o conjunto de elementos que pertencem a  $A$  e, ao mesmo tempo,  $B$ :

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\} \quad (4)$$

Dizemos ainda que  $A$  e  $B$  são conjuntos disjuntos se, e somente se,  $A \cap B = \emptyset$ .

# Eventos

## Operações entre eventos

### Definição

#### Interseção de dois eventos

A interseção de dois eventos  $A$  e  $B$ , representada por  $A \cap B$ , é o conjunto de elementos que pertencem a  $A$  e, ao mesmo tempo,  $B$ :

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\} \quad (4)$$

Dizemos ainda que  $A$  e  $B$  são conjuntos disjuntos se, e somente se,  $A \cap B = \emptyset$ .

De maneira mais geral, seja  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de conjuntos.  $x \in \Omega$  é um elemento da interseção de  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , denotada por  $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ , se e somente se para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in A_n$ . Isto é,

# Eventos

## Operações entre eventos

### Definição

#### Interseção de dois eventos

A interseção de dois eventos  $A$  e  $B$ , representada por  $A \cap B$ , é o conjunto de elementos que pertencem a  $A$  e, ao mesmo tempo,  $B$ :

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\} \quad (4)$$

Dizemos ainda que  $A$  e  $B$  são conjuntos disjuntos se, e somente se,  $A \cap B = \emptyset$ .

De maneira mais geral, seja  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de conjuntos.  $x \in \Omega$  é um elemento da interseção de  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , denotada por  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ , se e somente se para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in A_n$ . Isto é,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \in \Omega : \text{para todo } n \in \mathbb{N}, x \in A_n\}$$

# Eventos

## Complementar

### Definição

#### Complementar de um evento

Seja  $A$  um conjunto.  $x$  é um elemento de  $A^c$  se e somente se  $x \notin A$ . Isto é, o complemento de  $A$  é definido formalmente como

$$A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\}.$$

# Eventos

## Complementar

### Definição

#### Complementar de um evento

Seja  $A$  um conjunto.  $x$  é um elemento de  $A^c$  se e somente se  $x \notin A$ . Isto é, o complemento de  $A$  é definido formalmente como

$$A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\}.$$

### Exemplo

#### Complementar do espaço amostral

O complementar do espaço amostral ( $\Omega$ ) é o conjunto vazio,  $\emptyset$ , pois:

- ▶ Como o conjunto  $\emptyset$  não possui elementos,  $\forall \omega \in \Omega$  temos que  $\omega \notin \emptyset$ ;
- ▶ Uma vez que  $\emptyset$  não possui elementos, não há elemento de  $\emptyset$  que pertença a  $\Omega$  (dizemos que isso ocorre por *vacuidade*).

# Eventos

## Complementar

### Definição

#### Complementar de um evento

Seja  $A$  um conjunto.  $x$  é um elemento de  $A^c$  se e somente se  $x \notin A$ . Isto é, o complemento de  $A$  é definido formalmente como

$$A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\}.$$

### Exemplo

#### Complementar do espaço amostral

O complementar do espaço amostral ( $\Omega$ ) é o conjunto vazio,  $\emptyset$ , pois:

- ▶ Como o conjunto  $\emptyset$  não possui elementos,  $\forall \omega \in \Omega$  temos que  $\omega \notin \emptyset$ ;
- ▶ Uma vez que  $\emptyset$  não possui elementos, não há elemento de  $\emptyset$  que pertença a  $\Omega$  (dizemos que isso ocorre por *vacuidade*).

**Atenção:** Também por vacuidade temos que  $\emptyset \subset \Omega$ .

# Eventos

## Exercícios (yay)

Prove as seguintes propriedades:

a. Comutatividade

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

b. Associatividade

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

c. Leis distributivas

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

d. Leis de De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$



# Eventos

## Exercícios (yay)

Mostre que  $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ .

**Observação:** Este exercício é útil para conseguirmos escrever um conjunto como a união de conjuntos disjuntos.

# Eventos

## Exercícios (yay)

Considere  $A$  e  $B$  dois subconjuntos de  $\Omega$ . A *diferença simétrica* entre  $A$  e  $B$  é o conjunto de todos elementos que estão em  $A$  ou em  $B$  mas que não estão em ambos.

- ▶ Escreva a diferença simétrica formalmente utilizando as operações de união, intersecção e/ou complementar.
- ▶ Mostre que a diferença simétrica entre  $A$  e  $B$  é igual à diferença simétrica entre  $A^c$  e  $B^c$ .

# Eventos

## Teorema (Leis de De Morgan)

Seja  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de subconjuntos de  $\Omega$ . Então, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\blacktriangleright \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$$

$$\blacktriangleright \left( \bigcap_{i=1}^n A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c$$

Além disso,

$$\blacktriangleright \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i^c$$

$$\blacktriangleright \left( \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i^c$$

# Eventos

## Teorema (Leis de De Morgan)

Seja  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de subconjuntos de  $\Omega$ . Então, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\triangleright \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$$

$$\triangleright \left( \bigcap_{i=1}^n A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c$$

Além disso,

$$\triangleright \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i^c$$

$$\triangleright \left( \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i^c$$

## Definição (Partição)

Seja  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de conjuntos. Dizemos que  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  particiona  $\Omega$  se:

$\triangleright$  para todo  $i, j \in \mathbb{N}$  tal que  $i \neq j$ ,  $A_i$  e  $A_j$  são disjuntos.

$\triangleright \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$ .

# Referências I



Lima, E. L. (1982).

*Curso de analise: volume 1*, volume 1.  
Instituto de Matematica Pura e Aplicada.



Velleman, D. J. (2006).

*How to prove it: A structured approach*.  
Cambridge University Press.