Revisão de Probabilidade e Estatística

Aula 2 - Parte 1

Aishameriane Schmidt

PPGECO/UFSC

Fevereiro de 2018.

Programa

Aula 2

1. **Variáveis aleatórias** - ***de onde vem, onde vivem e como enxergar elas como funções?***
2. Função massa, função densidade e função densidade acumulada
3. Esperança, variância e covariância
4. Distribuições tabeladas
5. Função geradora de momentos

Até aqui...
O que vimos

- Conjuntos, operações com conjuntos.
- Eventos.
- Definições de probabilidade.
- Axiomas de Kolmogorov e implicações.
- Probabilidade condicional e independência.

Variáveis aleatórias

Até o momento trabalhamos apenas com probabilidades relacionadas a um espaço de probabilidade, $(\Omega, \gamma, \mathbb{P}(\cdot))$, em que:

- Ω ou *espaço amostral*, é o conjunto de todos os possíveis resultados de um determinado experimento,
- γ é o conjunto de todas coleções de eventos de Ω,
- $\mathbb{P}(\cdot)$ é uma função de probabilidade, que tem como domínio γ e contradomínio o intervalo $[0, 1]$.

Variáveis aleatórias

Em algumas situações, lidar diretamente com o espaço amostral pode ser muito trabalhoso. Por exemplo, seja o lançamento de uma moeda. Sabemos que $\Omega = \{C, K\}$, onde C representa "cara" e K representa "coroa" e, no caso de uma moeda honesta, $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(K)$.

Variáveis aleatórias

Em algumas situações, lidar diretamente com o espaço amostral pode ser muito trabalhoso. Por exemplo, seja o lançamento de uma moeda. Sabemos que $\Omega = \{C, K\}$, onde C representa "cara" e K representa "coroa" e, no caso de uma moeda honesta, $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(K)$.
O que acontece se quisermos saber qual a probabilidade de saírem 5 caras em 7 lançamentos da moeda?

$$\Omega = \{CCCCCCC, CCCCCCK, CCCCCKC, \ldots\}$$

Variáveis aleatórias

Em algumas situações, lidar diretamente com o espaço amostral pode ser muito trabalhoso. Por exemplo, seja o lançamento de uma moeda. Sabemos que $\Omega = \{C, K\}$, onde C representa "cara" e K representa "coroa" e, no caso de uma moeda honesta, $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(K)$.
O que acontece se quisermos saber qual a probabilidade de saírem 5 caras em 7 lançamentos da moeda?

$$\Omega = \{CCCCCCC, CCCCCCK, CCCCCKC, \ldots\}$$

Poderíamos criar um código onde $C = 1$ e $K = 0$, de forma que estaríamos interessados em $\mathbb{P}(5)$.

Variáveis aleatórias

Juju

Suponha que você tem uma moeda chamada Juju e que ela é uma moeda honesta, isto é, a probabilidade de sair cara é igual à probabilidade de sair coroa. Em notação matemática,

$$\mathbb{P}(\{\text{lançar Juju resultou em cara}\}) = \mathbb{P}(\{\text{lançar Juju resultou em coroa}\}) = \frac{1}{2}$$

Variáveis aleatórias

Juju

Suponha que você tem uma moeda chamada Juju e que ela é uma moeda honesta, isto é, a probabilidade de sair cara é igual à probabilidade de sair coroa. Em notação matemática,

$$\mathbb{P}(\{\text{lançar Juju resultou em cara}\}) = \mathbb{P}(\{\text{lançar Juju resultou em coroa}\}) = \frac{1}{2}$$

Observe que Ω, o espaço amostral do experimento *lançar a Juju*, é dado por $\Omega = \{(\text{cara}), (\text{coroa})\}$.

Variáveis aleatórias

Juju

Suponha que você tem uma moeda chamada Juju e que ela é uma moeda honesta, isto é, a probabilidade de sair cara é igual à probabilidade de sair coroa. Em notação matemática,

$$\mathbb{P}(\{\text{lançar Juju resultou em cara}\}) = \mathbb{P}(\{\text{lançar Juju resultou em coroa}\}) = \frac{1}{2}$$

Observe que Ω, o espaço amostral do experimento *lançar a Juju*, é dado por $\Omega = \{(\text{cara}), (\text{coroa})\}$.

Agora, vamos criar uma função que será definida por:

$$f(\text{Juju}) = \begin{cases} 0 & \text{se o lançamento de Juju deu cara,} \\ 1 & \text{se o lançamento de Juju deu coroa.} \end{cases} \tag{1}$$

Variáveis aleatórias

Juju (cont.)

Vamos chamar essa função de X (ao invés de f). Observe que:

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{\text{lançar Juju resultou em coroa}\}) = \frac{1}{2}$$

E ainda:

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\{\text{lançar Juju resultou em cara}\}) = \frac{1}{2}$$

Variáveis aleatórias

Juju (cont.)

Vamos chamar essa função de X (ao invés de f). Observe que:

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{\text{lançar Juju resultou em coroa}\}) = \frac{1}{2}$$

E ainda:

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\{\text{lançar Juju resultou em cara}\}) = \frac{1}{2}$$

- A probabilidade de que X assuma valor 1 é a mesma probabilidade de sair coroa quando lançamos a Juju e a probabilidade de X ser igual a 0 é a probabilidade de sair cara no lançamento da Juju.

Variáveis aleatórias

Juju (cont.)

Vamos chamar essa função de X (ao invés de f). Observe que:

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{\text{lançar Juju resultou em coroa}\}) = \frac{1}{2}$$

E ainda:

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\{\text{lançar Juju resultou em cara}\}) = \frac{1}{2}$$

- A probabilidade de que X assuma valor 1 é a mesma probabilidade de sair coroa quando lançamos a Juju e a probabilidade de X ser igual a 0 é a probabilidade de sair cara no lançamento da Juju.
- Como X é uma função que "pega" um elemento de Ω e está associando um número real, então X preenche os requisitos para ser chamada de *variável aleatória*.

Variável aleatória

Definição

Informalmente, *variável aleatória* (v.a.) é uma função que associa elementos do espaço amostral Ω ao conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$.

Variável aleatória

Definição

Informalmente, *variável aleatória* (v.a.) é uma função que associa elementos do espaço amostral Ω ao conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$. Formalmente, temos:

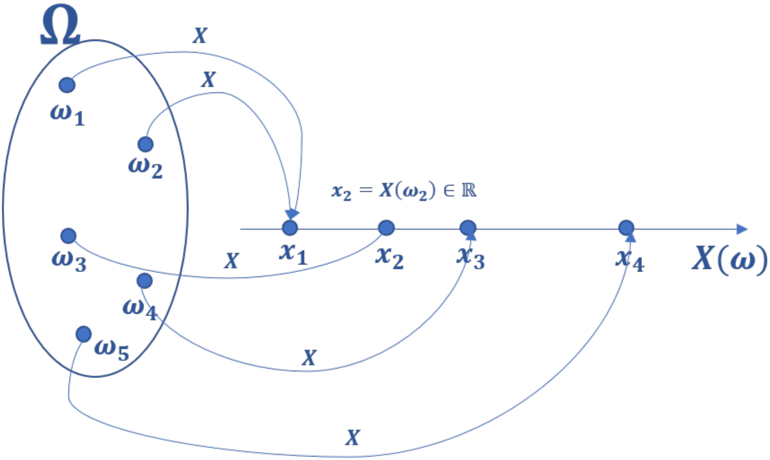
Definição

(Variável Aleatória)
Para um dado espaço de probabilidade $(\Omega, \gamma, P(\cdot))$ uma variável aleatória, denotada por X ou $X(\cdot)$, é uma função com domínio em Ω e contradomínio em $\mathbb{R}$.

Temos Ω como sendo o conjunto de todos resultados possíveis de um experimento (conjunto de todos eventos) e $X(\cdot)$ é uma *função* que associa cada elemento $\omega \in \Omega$ a um número real.
Observação: Em nenhum momento utilizamos a função $\mathbb{P}(\cdot)$!

Variável aleatória

Definição



Definição

Imagem de uma v.a. A imagem de uma v.a. representa a transformação do espaço amostral original para um espaço amostral com valores reais. Formalmente, a imagem de uma v.a. é definida por:

$$R(X) = \{x \in \mathbb{R} : x = X(w), w \in \Omega\}$$

Variável aleatória

O espaço de probabilidade induzido por uma v.a.

- Precisaremos de um novo espaço de probabilidade para associar probabilidades a subconjuntos do novo espaço amostral real definido pela imagem da v.a.

Variável aleatória

O espaço de probabilidade induzido por uma v.a.

- Precisaremos de um novo espaço de probabilidade para associar probabilidades a subconjuntos do novo espaço amostral real definido pela imagem da v.a.
- O espaço $(\Omega, \gamma, \mathbb{P}(\cdot))$ nos permite determinar uma probabilidade para eventos em Ω, porém não sabemos a probabilidade de que um resultado da v.a. X fique no subconjunto $A \subset R(X)$.

Variável aleatória

O espaço de probabilidade induzido por uma v.a.

- Precisaremos de um novo espaço de probabilidade para associar probabilidades a subconjuntos do novo espaço amostral real definido pela imagem da v.a.
- O espaço $(\Omega, \gamma, \mathbb{P}(\cdot))$ nos permite determinar uma probabilidade para eventos em Ω, porém não sabemos a probabilidade de que um resultado da v.a. X fique no subconjunto $A \subset R(X)$.
- Como X é um mapa de Ω para a reta real, é possível definir o evento B em Ω tal que o evento B ocorre se e somente se $A \subset R(X)$ ocorre.

Variável aleatória

O espaço de probabilidade induzido por uma v.a.

- Precisaremos de um novo espaço de probabilidade para associar probabilidades a subconjuntos do novo espaço amostral real definido pela imagem da v.a.
- O espaço $(\Omega, \gamma, \mathbb{P}(\cdot))$ nos permite determinar uma probabilidade para eventos em Ω, porém não sabemos a probabilidade de que um resultado da v.a. X fique no subconjunto $A \subset R(X)$.
- Como X é um mapa de Ω para a reta real, é possível definir o evento B em Ω tal que o evento B ocorre se e somente se $A \subset R(X)$ ocorre.
- Uma vez que os eventos A e B ocorrem simultaneamente, a probabilidade deles deve ser a mesma, ou seja, $\mathbb{P}_X(A) \equiv \mathbb{P}(B)$, onde $\mathbb{P}_X(\cdot)$ denota a medida de probabilidade que atribui a resultados de X suas probabilidades.

Variável aleatória

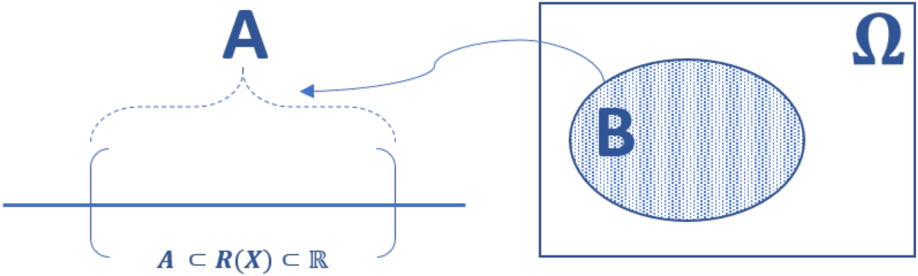
O espaço de probabilidade induzido por uma v.a.

- Precisaremos de um novo espaço de probabilidade para associar probabilidades a subconjuntos do novo espaço amostral real definido pela imagem da v.a.
- O espaço $(\Omega, \gamma, \mathbb{P}(\cdot))$ nos permite determinar uma probabilidade para eventos em Ω, porém não sabemos a probabilidade de que um resultado da v.a. X fique no subconjunto $A \subset R(X)$.
- Como X é um mapa de Ω para a reta real, é possível definir o evento B em Ω tal que o evento B ocorre se e somente se $A \subset R(X)$ ocorre.
- Uma vez que os eventos A e B ocorrem simultaneamente, a probabilidade deles deve ser a mesma, ou seja, $\mathbb{P}_X(A) \equiv \mathbb{P}(B)$, onde $\mathbb{P}_X(\cdot)$ denota a medida de probabilidade que atribui a resultados de X suas probabilidades.
  - Se dois eventos ocorrem sempre simultaneamente, eles são ditos equivalentes e ocorrem em espaços de probabilidades distintos, pois se ocorressem no mesmo espaço, eles seriam o mesmo evento. Logo,

$$\mathbb{P}_X(A) \equiv \mathbb{P}(B) \text{ para } B = \{w : X(w) \in A, w \in \Omega\}$$

Variável aleatória

O espaço de probabilidade induzido por uma v.a.

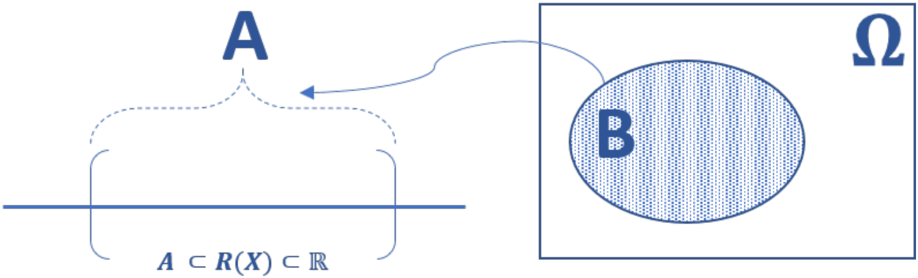


Probabilidades definidas para eventos em Ω são transferidas para eventos em $R(X)$ através da relação funcional que define uma v.a., $x_i = X(w_i)$.

Então, sabendo que o domínio de $\mathbb{P}(\cdot)$ é γ (espaço de eventos), qual é o domínio de $\mathbb{P}_X(\cdot)$?

Variável aleatória

O espaço de probabilidade induzido por uma v.a.



Probabilidades definidas para eventos em Ω são transferidas para eventos em $R(X)$ através da relação funcional que define uma v.a., $x_i = X(w_i)$.

Então, sabendo que o domínio de $\mathbb{P}(\cdot)$ é γ (espaço de eventos), qual é o domínio de $\mathbb{P}_X(\cdot)$? Podemos dizer informalmente que γ_X é o espaço de eventos do espaço de probabilidade associado à variável aleatória X e é dado por todos os subconjuntos da imagem de X, $R(X)$.

Definição

(Função distribuição acumulada de uma v.a.)
Seja X uma v.a.. A *função distribuição acumulada* de X, denotada por $F_X(\cdot)$, é definida como a função com domínio em $\mathbb{R}$ e contradomínio no intervalo fechado $[0, 1]$ que satisfaz

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \in (-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}[\{\omega : X(\omega) \leq x\}]$$

para todo número real x.

- A função acumulada de X é a função que calcula as probabilidades de X assumir valores menores ou iguais a um valor específico x;

Variáveis aleatórias

Função acumulada

- A função acumulada de X é a função que calcula as probabilidades de X assumir valores menores ou iguais a um valor específico x;
    - Para tanto, ela avalia os valores ω do espaço amostral tais que $X(\omega)$ é menor ou igual que x.

Variáveis aleatórias

Função acumulada

- A função acumulada de X é a função que calcula as probabilidades de X assumir valores menores ou iguais a um valor específico x;
  - Para tanto, ela avalia os valores ω do espaço amostral tais que $X(\omega)$ é menor ou igual que x.
- Essa função é importante pois ela define de forma única uma variável aleatória.

Variáveis aleatórias

Função acumulada

- A função acumulada de X é a função que calcula as probabilidades de X assumir valores menores ou iguais a um valor específico x;
  - Para tanto, ela avalia os valores ω do espaço amostral tais que $X(\omega)$ é menor ou igual que x.
- Essa função é importante pois ela define de forma única uma variável aleatória.
- Note também que mesmo que X só assuma valores em um subconjunto dos reais, a função de distribuição é bem definida em toda a reta.

- A função acumulada de X é a função que calcula as probabilidades de X assumir valores menores ou iguais a um valor específico x;
  - Para tanto, ela avalia os valores ω do espaço amostral tais que $X(\omega)$ é menor ou igual que x.
- Essa função é importante pois ela define de forma única uma variável aleatória.
- Note também que mesmo que X só assuma valores em um subconjunto dos reais, a função de distribuição é bem definida em toda a reta.
- Quando não houver a possibilidade de confusão, a notação será apenas F ao invés de F_X.

Teorema

(Propriedades da função distribuição acumulada** $F_X(\cdot)$**)
As seguintes propriedades precisam ser atendidas para que possamos considerar uma função como sendo a função distribuição acumulada. Este teorema não será demonstrado, mas uma parte da prova pode ser encontrada em [Mood and Graybill, 1963] ou em [Magalhães, 2011].

i. $F_X(-\infty) \equiv \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ *e* $F_X(+\infty) \equiv \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$*;*

ii. $F_X(\cdot)$ *é uma função monótona não-decrescente; isto é,* $F_X(a) < F_X(b)$ *para* $a < b$*;*

iii. $F_X(\cdot)$ *é contínua à direita; isto é,*

$$\lim_{h \to 0^+} F_X(x + h) = F_X(x)$$

Definição

Variável aleatória discreta

Uma variável aleatória é dita *discreta* se a sua imagem consiste de um número contável de elementos, isto é, sua imagem pode ser colocada em correspondência com um subconjunto (próprio ou não) de $\mathbb{N}$.

Variáveis aleatórias

Definição

Variável aleatória discreta

Uma variável aleatória é dita *discreta* se a sua imagem consiste de um número contável de elementos, isto é, sua imagem pode ser colocada em correspondência com um subconjunto (próprio ou não) de $\mathbb{N}$.

Em outras palavras, uma v.a. é dita discreta se ela assume um número finito ou enumerável de valores.

Definição

(Função massa de probabilidade de uma v.a. discreta)
Se X é uma v.a. discreta (X assume valores em um subconjunto de $\mathbb{N}$) que assume valores distintos $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ então a função densidade de X, denotada $f_X(\cdot)$ é definida por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x_i) & \text{se } x = x_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2}$$

Definição

(Função massa de probabilidade de uma v.a. discreta)
Se X é uma v.a. discreta (X assume valores em um subconjunto de $\mathbb{N}$) que assume valores distintos $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ então a função densidade de X, denotada $f_X(\cdot)$ é definida por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x_i) & \text{se } x = x_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2}$$

- Outros nomes comumente dados à $f_X(x)$ são: função massa de probabilidade, função de frequência discreta e função de probabilidade.

Definição

(Função massa de probabilidade de uma v.a. discreta)
Se X é uma v.a. discreta (X assume valores em um subconjunto de $\mathbb{N}$) que assume valores distintos $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ então a função densidade de X, denotada $f_X(\cdot)$ é definida por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x_i) & \text{se } x = x_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2}$$

- Outros nomes comumente dados à $f_X(x)$ são: função massa de probabilidade, função de frequência discreta e função de probabilidade.
- A notação $p_X(x)$ também é usada para diferenciar quando se trata de uma variável aleatória discreta e usualmente usa-se a notação $f_X(x)$ para as contínuas.

Lema

Se X é uma v.a. discreta e $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ é o conjunto de valores que ela pode assumir, então

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} p_X^{(x)} = 1$$

Definição

f.d.a. de uma v.a. discreta (Retirado de [Mittelhammer, 2013])
A função distribuição acumulada de uma variável aleatória X, se X for discreta, é dada por

$$F_X(x) = \sum_{X \leq x,\ f(x) > 0} f(x),\ \ x \in (-\infty, +\infty)$$

Definição

Função Indicadora

Considere um evento $A \in \Omega$. A *função indicadora* de A é a variável aleatória definida por:

$$\mathbb{I}_A : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in A \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definição

Função Indicadora

Considere um evento $A \in \Omega$. A *função indicadora* de A é a variável aleatória definida por:

$$\mathbb{I}_A : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in A \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo:

- Para o evento de uma lâmpada durar mais de 10 segundos, podemos criar a função indicadora que assume valor 0 se a lâmpada queimar em 10 segundos ou menos e assume valor 1 caso ela dure mais que 10 segundos.

Variáveis aleatórias

Definição

Independência de v.a.'s discretas
Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s discretas. dizemos que $X_1, \ldots, X_n$ são independentes se $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Variáveis aleatórias

Definição

Independência de v.a.'s discretas

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s discretas. dizemos que $X_1, \ldots, X_n$ são independentes se $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Observação:

- $\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$ denota a interseção, isto é,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) \equiv \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} X_i = x_i) = \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} \{\omega : X_i(\omega) = x_i\})$$

Variáveis aleatórias

Independência de v.a.'s

Exercício:

Sejam X e Y duas v.a.'s independentes. Será que $Z = e^{x}$ e $W = e^{Y}$ são independentes?

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta com função massa de probabilidade denotada por p_X e que assume valores $x \in \chi$. O *valor esperado* ou *esperança matemática* ou *média* de X é definida por:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \chi} x_i p_X(x_i) \tag{3}$$

Definição

O *k-ésimo momento* da variável aleatória X é dado pela esperança de X elevada à potência k, isto é, $\mathbb{E}[X^k]$ (desde que essa quantidade esteja bem definida), para $k \in \{1, 2, \cdots\}$. Se a esperança de X for um número finito μ, isto é, se $\mathbb{E}[X] = \mu < \infty$, então definimos $\mathbb{E}[(X - \mu)^k]$ como o *k-ésimo momento central de X*, desde que essa quantidade esteja bem definida.

Variáveis aleatórias

Variância

Definição

Seja X uma variável aleatória com média finita denotada por μ. Sua variância é dada pelo momento central de ordem 2 de X:

$$Var[X] = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] \tag{4}$$

Definição

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço de probabilidade. A *covariância* entre elas será dada por:

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] \tag{5}$$

Definição

Variável aleatória contínuas (Retirado de [James, 2010])
A variável aleatória X é dita contínua se existe uma função $f(x) \geq 0$ tal que:

$$F_X(x) = \int_{\infty}^{x} f(t)dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

As variáveis aleatórias contínuas são tais que a função densidade em um ponto é igual a zero.

Definição

Def alternativa [Stern and Izbicki, 2016] Seja X uma variável aleatória contínua. Denotamos a função de densidade de probabilidade de X por $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ela satisfaz as seguintes propriedades:

1. $f_X(x) \geq 0$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$.
3. $\int_{a}^{b} f_X(x)dx = \mathbb{P}(a \leq X \leq b)$.

Variáveis aleatórias

v.a.'s contínuas

Definição

Def alternativa [Stern and Izbicki, 2016] Seja X uma variável aleatória contínua. Denotamos a função de densidade de probabilidade de X por $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ela satisfaz as seguintes propriedades:

1. $f_X(x) \geq 0$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$.
3. $\int_a^b f_X(x)dx = \mathbb{P}(a \leq X \leq b)$.

Como propriedade, temos que as probabilidades de uma variável aleatória contínua são as integrais sob a curva $f(\cdot)$ em determinados intervalos.

Definição

f.d.a. de uma v.a. contínua (Retirado de [Mittelhammer, 2013])
A função distribuição acumulada de uma variável aleatória X, se X for contínua, é dada por

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx, \; x \in (-\infty, +\infty)$$

Lema

Seja X uma variável aleatória contínua com a função de distribuição acumulada F_X. Para $b \geq a$, $F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b)$.

Variáveis aleatórias

v.a.'s contínuas

Teorema

Sejam $f(x)$ e $F(x)$ as f.d.p. e f.d.a. de uma variável aleatória contínua X. A função densidade de X pode ser definida como

$$f(x) = \frac{d}{dx}[F(x)]$$

em todo ponto onde $f(x)$ é contínua e será igual a zero em todos outros pontos.

Referências I

James, B. R. (2010).
Probabilidade: um curso em nivel intermediario.
IMPA.

Magalhães, M. N. (2011).
Probabilidade e variáveis aleatórias.
Edusp.

Mittelhammer, R. (2013).
Mathematical statistics for economics and business.
Springer.

Mood, A. M. and Graybill, F. A. (1963).
Introduction to the theory of statistics.

Stern, R. and Izbicki, R. (2016).
Introducao à Teoria das Probabilidades e Processos Aleatorios.
UFSCAR.