

Revisão de Probabilidade e Estatística

Aula 1 - Parte 1

Aishameriane Schmidt

PPGECO/UFSC

Fevereiro de 2018.



Apresentação

Aisha? Caixa? Baixa?

- ▶ Mestranda do PPGECON/UFSC (2017-2019)

Apresentação

Aisha? Caixa? Baixa?

- ▶ Mestranda do PPGECON/UFSC (2017-2019)
 - ▶ *Mascote* Monitora de Econometria Bayesiana

Apresentação

Aisha? Caixa? Baixa?

- ▶ Mestranda do PPGECON/UFSC (2017-2019)
 - ▶ *Mascote* Monitora de Econometria Bayesiana
- ▶ Graduada em Economia na UDESC (2015-?)

Apresentação

Aisha? Caixa? Baixa?

- ▶ Mestranda do PPGECON/UFSC (2017-2019)
 - ▶ *Mascote* Monitora de Econometria Bayesiana
- ▶ Graduanda em Economia na UDESC (2015-?)
- ▶ Bacharel em Estatística pela UFRGS (2004-2009)

Funcionamento das aulas

- ▶ Aulas segunda (26), terça (27), quinta (01) e sexta (02) - sala 203 do prédio da pós - terça feira vai ser no miniauditório.
 - ▶ *Pipi-break* no meio da tarde, conforme demanda - preferencialmente **antes/depois** do intervalo das aulas da graduação.

Funcionamento das aulas

- ▶ Aulas segunda (26), terça (27), quinta (01) e sexta (02) - sala 203 do prédio da pós - terça feira vai ser no miniauditório.
 - ▶ *Pipi-break* no meio da tarde, conforme demanda - preferencialmente **antes/depois** do intervalo das aulas da graduação.
- ▶ Aulas expositivas - com **bastante espaço para interação**;
 - ▶ **Slides** + quadro.
 - ▶ Conteúdos do apêndice do Greene - porém a bibliografia utilizada é bem diversa.
 - ▶ Notas de aula e slides serão disponibilizados no github (acompanhe pelas datas a versão): <https://github.com/aishameriane/Econometria-Bayesiana/tree/master/Revisao-prob>.

Funcionamento das aulas

- ▶ Aulas segunda (26), terça (27), quinta (01) e sexta (02) - sala 203 do prédio da pós - terça feira vai ser no miniauditório.
 - ▶ *Pipi-break* no meio da tarde, conforme demanda - preferencialmente **antes/depois** do intervalo das aulas da graduação.
- ▶ Aulas expositivas - com **bastante espaço para interação**;
 - ▶ **Slides** + quadro.
 - ▶ Conteúdos do apêndice do Greene - porém a bibliografia utilizada é bem diversa.
 - ▶ Notas de aula e slides serão disponibilizados no github (acompanhe pelas datas a versão): <https://github.com/aishameriane/Econometria-Bayesiana/tree/master/Revisao-prob>.
- ▶ É uma *revisão* - **relembrar é viver**!
 - ▶ Mas, se estiver **muito** repetitivo, melhor usar seu tempo de outra forma.

Funcionamento das aulas

- ▶ Aulas segunda (26), terça (27), quinta (01) e sexta (02) - sala 203 do prédio da pós - terça feira vai ser no miniauditório.
 - ▶ *Pipi-break* no meio da tarde, conforme demanda - preferencialmente **antes/depois** do intervalo das aulas da graduação.
- ▶ Aulas expositivas - com **bastante espaço para interação**;
 - ▶ **Slides** + quadro.
 - ▶ Conteúdos do apêndice do Greene - porém a bibliografia utilizada é bem diversa.
 - ▶ Notas de aula e slides serão disponibilizados no github (acompanhe pelas datas a versão): <https://github.com/aishameriane/Econometria-Bayesiana/tree/master/Revisao-prob>.
- ▶ É uma *revisão* - **relembrar é viver**!
 - ▶ Mas, se estiver **muito** repetitivo, melhor usar seu tempo de outra forma.
 - ▶ Em geral, a Aisha **não** pressupõe que as pessoas saibam as coisas - *isso pode tornar o processo meio maçante*.

Funcionamento das aulas

- ▶ Aulas segunda (26), terça (27), quinta (01) e sexta (02) - sala 203 do prédio da pós - terça feira vai ser no miniauditório.
 - ▶ *Pipi-break* no meio da tarde, conforme demanda - preferencialmente **antes/depois** do intervalo das aulas da graduação.
- ▶ Aulas expositivas - com **bastante espaço para interação**;
 - ▶ **Slides** + quadro.
 - ▶ Conteúdos do apêndice do Greene - porém a bibliografia utilizada é bem diversa.
 - ▶ Notas de aula e slides serão disponibilizados no github (acompanhe pelas datas a versão): <https://github.com/aishameriane/Econometria-Bayesiana/tree/master/Revisao-prob>.
- ▶ É uma *revisão* - **relembrar é viver!**
 - ▶ Mas, se estiver **muito** repetitivo, melhor usar seu tempo de outra forma.
 - ▶ Em geral, a Aisha **não** pressupõe que as pessoas saibam as coisas - *isso pode tornar o processo meio maçante*.
- ▶ O programa das aulas foi feito baseado nas orientações dos professores de Econometria I e Econometria Bayesiana.

Funcionamento das aulas

- ▶ Aulas segunda (26), terça (27), quinta (01) e sexta (02) - sala 203 do prédio da pós - terça feira vai ser no miniauditório.
 - ▶ *Pipi-break* no meio da tarde, conforme demanda - preferencialmente **antes/depois** do intervalo das aulas da graduação.
- ▶ Aulas expositivas - com **bastante espaço para interação**;
 - ▶ **Slides** + quadro.
 - ▶ Conteúdos do apêndice do Greene - porém a bibliografia utilizada é bem diversa.
 - ▶ Notas de aula e slides serão disponibilizados no github (acompanhe pelas datas a versão): <https://github.com/aishameriane/Econometria-Bayesiana/tree/master/Revisao-prob>.
- ▶ É uma *revisão* - **relembrar é viver**!
 - ▶ Mas, se estiver **muito** repetitivo, melhor usar seu tempo de outra forma.
 - ▶ Em geral, a Aisha **não** pressupõe que as pessoas saibam as coisas - *isso pode tornar o processo meio maçante*.
- ▶ O programa das aulas foi feito baseado nas orientações dos professores de Econometria I e Econometria Bayesiana.

Você sabe fazer alguma coisa? Passe o conhecimento adiante!

Programa

O que iremos ver?

- ▶ Probabilidade:
 - ▶ Conjuntos, definições básicas de probabilidade e probabilidade de eventos;
 - ▶ Definição e caracterização de variáveis aleatórias;
- ▶ Introdução à Estatística.

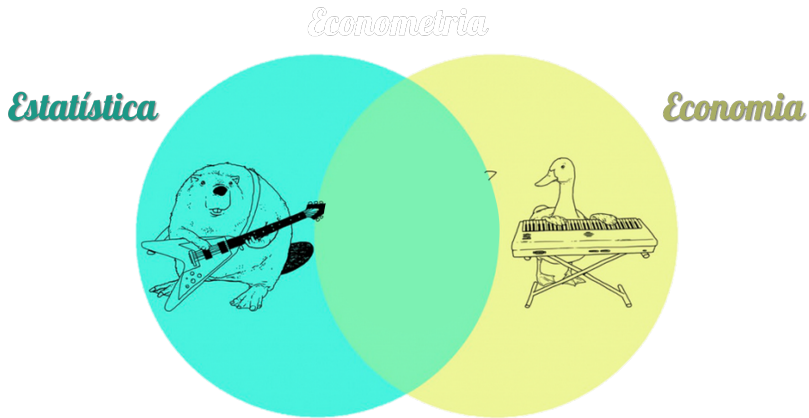
Programa

Aula 1

1. **Teoria dos conjuntos:** Revisão dos principais resultados de teoria dos conjuntos.
2. **Definições de probabilidade:** axiomática, frequentista e subjetiva.
3. **Probabilidade de eventos.**
4. **Independência de eventos, probabilidade condicional e teorema de Bayes.**
5. **Variáveis aleatórias - *de onde vem, onde vivem e como enxergar elas como funções?* -Possivelmente fica para amanhã**

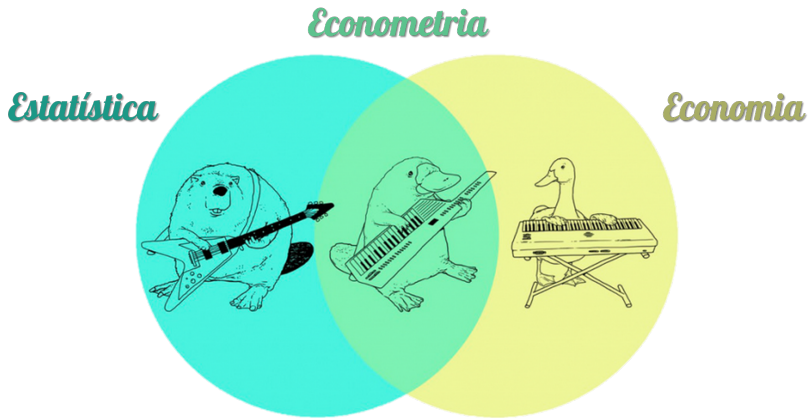
Estatística pra quê?

Motivação



Estatística pra quê?

Motivação



Motivação

Probabilidade VS Estatística

- ▶ Probabilidade é uma área da matemática;
 - ▶ Embora não seja *exata* pois lida com incertezas, **uma vez definido um espaço de probabilidade, os resultados possíveis são todos bem estabelecidos.**

Motivação

Probabilidade VS Estatística

- ▶ Probabilidade é uma área da matemática;
 - ▶ Embora não seja *exata* pois lida com incertezas, **uma vez definido um espaço de probabilidade, os resultados possíveis são todos bem estabelecidos.**
- ▶ A estatística utiliza a probabilidade como uma **ferramenta**:
 - ▶ É similar aos engenheiros, físicos e demais profissões que utilizam cálculo.
- ▶ Para falar de estatística, necessariamente haverá uma **população**.
 - ▶ E, muito possivelmente, uma ou mais **amostras**.

Motivação

Probabilidade VS Estatística

- ▶ Probabilidade é uma área da matemática;
 - ▶ Embora não seja *exata* pois lida com incertezas, **uma vez definido um espaço de probabilidade, os resultados possíveis são todos bem estabelecidos.**
- ▶ A estatística utiliza a probabilidade como uma **ferramenta**:
 - ▶ É similar aos engenheiros, físicos e demais profissões que utilizam cálculo.
- ▶ Para falar de estatística, necessariamente haverá uma **população**.
 - ▶ E, muito possivelmente, uma ou mais **amostras**.

Você pode até tentar “fazer” **estatística sem** conhecer **probabilidade**, mas será igual uma pessoa que quer **construir um prédio sem saber** nada de **engenharia civil**.

Como estudar formalmente um conteúdo?

O que está por vir

A estrutura das aulas será muito similar, independente do assunto (probabilidade/estatística) - é como uma receita de bolo:

- ▶ São apresentadas as **definições** e **axiomas**;
 - ▶ **Definição** é aquilo que descreve um conceito;
 - ▶ **Axioma** é uma verdade geral, não precisa de demonstração.

Como estudar formalmente um conteúdo?

O que está por vir

A estrutura das aulas será muito similar, independente do assunto (probabilidade/estatística) - é como uma receita de bolo:

- ▶ São apresentadas as **definições** e **axiomas**;
 - ▶ **Definição** é aquilo que descreve um conceito;
 - ▶ **Axioma** é uma verdade geral, não precisa de demonstração.
- ▶ A partir disso, podemos construir e provar **proposições**, **lemas**, **teoremas** e **corolários**.

Como estudar formalmente um conteúdo?

O que está por vir

A estrutura das aulas será muito similar, independente do assunto (probabilidade/estatística) - é como uma receita de bolo:

- ▶ São apresentadas as **definições** e **axiomas**;
 - ▶ **Definição** é aquilo que descreve um conceito;
 - ▶ **Axioma** é uma verdade geral, não precisa de demonstração.
- ▶ A partir disso, podemos construir e provar **proposições**, **lemas**, **teoremas** e **corolários**.
 - ▶ Para fazer uma demonstração, precisamos de uma **hipótese** (aquilo que assumimos como verdadeiro) e uma **tese** (aquilo que desejamos provar e que decorre da hipótese, das definições e dos axiomas);
 - ▶ Existem diferentes estratégias de demonstração. Para uma introdução, recomenda-se a leitura de [Velleman, 2006].

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

Definição

Um **conjunto** (ou coleção) é formado por objetos (que são os seus **elementos**). [Lima, 1982]

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

Definição

Um **conjunto** (ou coleção) é formado por objetos (que são os seus **elementos**). [Lima, 1982]

- ▶ A relação básica entre um conjunto e seus elementos é a relação de **pertinência**.
- ▶ Quando x (objeto) é um elemento do conjunto A :
 - ▶ Dizemos “ x *pertence a* A ” e denotamos por $x \in A$.
- ▶ Caso contrário, diremos que “ x *não pertence a* A ” e denotaremos por $x \notin A$.

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

Definição

Um **conjunto** (ou coleção) é formado por objetos (que são os seus **elementos**). [Lima, 1982]

- ▶ A relação básica entre um conjunto e seus elementos é a relação de **pertinência**.
- ▶ Quando x (objeto) é um elemento do conjunto A :
 - ▶ Dizemos “ x *pertence a* A ” e denotamos por $x \in A$.
- ▶ Caso contrário, diremos que “ x *não pertence a* A ” e denotaremos por $x \notin A$.

Atenção

Não confundir \in (**pertence**) com \subset (**contido**)!

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

Definição

Um **conjunto** (ou coleção) é formado por objetos (que são os seus **elementos**). [Lima, 1982]

- ▶ A relação básica entre um conjunto e seus elementos é a relação de **pertinência**.
- ▶ Quando x (objeto) é um elemento do conjunto A :
 - ▶ Dizemos “ x *pertence a* A ” e denotamos por $x \in A$.
- ▶ Caso contrário, diremos que “ x *não pertence a* A ” e denotaremos por $x \notin A$.

Atenção

Não confundir \in (**pertence**) com \subset (**contido**)!

O primeiro diz respeito a **elementos**, enquanto que o segundo refere-se a **conjuntos**!

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- ▶ Um conjunto fica bem especificado (definido) quando há uma **regra clara** que permita avaliar se um elemento qualquer pertence ou não ao conjunto.
 - ▶ *O uso de regras auxilia a **escrever o conjunto sem precisar enumerar todos seus elementos.***

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- ▶ Um conjunto fica bem especificado (definido) quando há uma **regra clara** que permita avaliar se um elemento qualquer pertence ou não ao conjunto.
 - ▶ *O uso de regras auxilia a **escrever o conjunto sem precisar enumerar todos seus elementos.***
- ▶ **Exemplo 1:** A propriedade P define totalmente o conjunto A
 - ▶ Se um objeto x atende P , então $x \in A$.
 - ▶ Caso contrário, $x \notin A$.

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- ▶ Um conjunto fica bem especificado (definido) quando há uma **regra clara** que permita avaliar se um elemento qualquer pertence ou não ao conjunto.
 - ▶ *O uso de regras auxilia a **escrever o conjunto sem precisar enumerar todos seus elementos.***
- ▶ **Exemplo 1:** A propriedade P define totalmente o conjunto A
 - ▶ Se um objeto x atende P , então $x \in A$.
 - ▶ Caso contrário, $x \notin A$.

$$A = \{x : x \text{ tem a propriedade } P\}$$

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- ▶ Um conjunto fica bem especificado (definido) quando há uma **regra clara** que permita avaliar se um elemento qualquer pertence ou não ao conjunto.
 - ▶ *O uso de regras auxilia a **escrever o conjunto sem precisar enumerar todos seus elementos**.*
- ▶ **Exemplo 1:** A propriedade P define totalmente o conjunto A
 - ▶ Se um objeto x atende P , então $x \in A$.
 - ▶ Caso contrário, $x \notin A$.

$$A = \{x : x \text{ tem a propriedade } P\}$$

- ▶ **Exemplo 2:** Se queremos nos referir a um conjunto $B \subset A$ (significa que B é subconjunto de A ou, equivalentemente, B está contido em A), podemos escrever:

$$B = \{x \in A : x \text{ tem a propriedade } P\}$$

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- ▶ Um conjunto fica bem especificado (definido) quando há uma **regra clara** que permita avaliar se um elemento qualquer pertence ou não ao conjunto.
 - ▶ *O uso de regras auxilia a **escrever o conjunto sem precisar enumerar todos seus elementos**.*
- ▶ **Exemplo 1:** A propriedade P define totalmente o conjunto A
 - ▶ Se um objeto x atende P , então $x \in A$.
 - ▶ Caso contrário, $x \notin A$.

$$A = \{x : x \text{ tem a propriedade } P\}$$

- ▶ **Exemplo 2:** Se queremos nos referir a um conjunto $B \subset A$ (significa que B é subconjunto de A ou, equivalentemente, B está contido em A), podemos escrever:

$$B = \{x \in A : x \text{ tem a propriedade } P\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x > 10\}$$

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- ▶ Se A e B forem conjuntos, podemos compará-los através da relação de “*inclusão*” (\subset).
 - ▶ Dizemos que B é subconjunto de A se **todo elemento de B também* é elemento de A** e denotamos por $B \subset A$.

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- ▶ Se A e B forem conjuntos, podemos compará-los através da relação de “*inclusão*” (\subset).
 - ▶ Dizemos que B é subconjunto de A se **todo elemento de B também* é elemento de A** e denotamos por $B \subset A$.
 - ▶ **Sinônimos:** B é *parte* de A , B está *incluído* em A ou ainda B está *contido* em A .

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- ▶ Se A e B forem conjuntos, podemos compará-los através da relação de “*inclusão*” (\subset).
 - ▶ Dizemos que B é subconjunto de A se **todo elemento de B também* é elemento de A** e denotamos por $B \subset A$.
 - ▶ **Sinônimos:** B é *parte de* A , B está *incluído* em A ou ainda B está *contido* em A .
- ▶ Em alguns livros encontramos as seguintes **notações**:
 - ▶ $B \subset A$ para indicar que B está *contido* em A (mas não é igual),

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- ▶ Se A e B forem conjuntos, podemos compará-los através da relação de “*inclusão*” (\subset).
 - ▶ Dizemos que B é subconjunto de A se **todo elemento de B também* é elemento de A** e denotamos por $B \subset A$.
 - ▶ **Sinônimos:** B é *parte de* A , B está *incluído* em A ou ainda B está *contido* em A .
- ▶ Em alguns livros encontramos as seguintes **notações**:
 - ▶ $B \subset A$ para indicar que B está contido em A (mas não é igual),
 - ▶ $B \subseteq A$ para indicar que B está contido e pode ser igual a A ,

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- ▶ Se A e B forem conjuntos, podemos compará-los através da relação de “inclusão” (\subset).
 - ▶ Dizemos que B é subconjunto de A se **todo elemento de B também* é elemento de A** e denotamos por $B \subset A$.
 - ▶ **Sinônimos:** B é parte de A , B está incluído em A ou ainda B está contido em A .
- ▶ Em alguns livros encontramos as seguintes **notações**:
 - ▶ $B \subset A$ para indicar que B está contido em A (mas não é igual),
 - ▶ $B \subseteq A$ para indicar que B está contido e pode ser igual a A ,
 - ▶ $B \subsetneq A$ para indicar B está contido mas não é igual a A .

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- ▶ Se A e B forem conjuntos, podemos compará-los através da relação de “inclusão” (\subset).
 - ▶ Dizemos que B é subconjunto de A se **todo elemento de B também* é elemento de A** e denotamos por $B \subset A$.
 - ▶ **Sinônimos:** B é parte de A , B está incluído em A ou ainda B está contido em A .
- ▶ Em alguns livros encontramos as seguintes **notações**:
 - ▶ $B \subset A$ para indicar que B está contido em A (mas não é igual),
 - ▶ $B \subseteq A$ para indicar que B está contido e pode ser igual a A ,
 - ▶ $B \subsetneq A$ para indicar B está contido mas não é igual a A .
- ▶ Iremos utilizar $B \subset A$ como “ B está contido em A e eles podem ser iguais”.

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio ~~que nos habita~~ \emptyset

Quando não há elemento de A que satisfaça P , o conjunto B não tem nenhum elemento e é denominado *conjunto vazio* (\emptyset).

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio ~~que nos habita~~ \emptyset

Quando não há elemento de A que satisfaça P , o conjunto B não tem nenhum elemento e é denominado *conjunto vazio* (\emptyset).

Definição

Definimos \emptyset da seguinte forma:

$$\forall x, x \notin \emptyset$$

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio ~~que nos habita~~ \emptyset

Quando não há elemento de A que satisfaça P , o conjunto B não tem nenhum elemento e é denominado *conjunto vazio* (\emptyset).

Definição

Definimos \emptyset da seguinte forma:

$$\forall x, x \notin \emptyset$$

(lê-se: qualquer que seja x , x não pertence ao vazio)

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio ~~que nos habita~~ \emptyset

Quando não há elemento de A que satisfaça P , o conjunto B não tem nenhum elemento e é denominado *conjunto vazio* (\emptyset).

Definição

Definimos \emptyset da seguinte forma:

$$\forall x, x \notin \emptyset$$

(lê-se: qualquer que seja x , x não pertence ao vazio)

Observação: \forall significa “para todo” e \exists significa “existe”. Eles são chamados de *quantificador universal* e *quantificador existencial* e são extremamente importantes na linguagem matemática. Além de [Velleman, 2006], recomenda-se a aula 3 do material disponível em https://1drv.ms/f/s!AlHDLj_70jaL4xES4gUq_N_2gzga.

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio \emptyset e o vazio $\{\emptyset\}$

Uma coisa importante a se notar é que existe diferença entre \emptyset e $\{\emptyset\}$. O primeiro é o conjunto vazio, o segundo é um conjunto cujo único elemento é o conjunto vazio. Para entender melhor a diferença, considere o seguinte exercício:

Exercício 1: Analise se são verdadeiras ou falsas as seguintes sentenças:

1. $\emptyset \in \emptyset$.
2. $\emptyset \in \{\emptyset\}$.
3. $\{\emptyset\} \in \emptyset$.
4. $\emptyset \subset \emptyset$.
5. $\emptyset \subset \{\emptyset\}$.
6. $\{\emptyset\} \subset \emptyset$.

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio \emptyset e o vazio $\{\emptyset\}$

Note que:

- ▶ \emptyset é o conjunto vazio (não contém elementos);
- ▶ $\{\emptyset\}$ é o conjunto cujo único elemento é o vazio.

1. $\emptyset \in \emptyset$ - “O elemento vazio pertence ao conjunto vazio”
2. $\emptyset \in \{\emptyset\}$ - “O vazio é elemento do conjunto que só contém o vazio”
3. $\{\emptyset\} \in \emptyset$ - “O conjunto cujo único elemento é o vazio é elemento do conjunto vazio”
4. $\emptyset \subset \emptyset$ - “O conjunto vazio está contido no conjunto vazio”
5. $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ - “O conjunto que contém o vazio está contido no conjunto cujo único elemento é o vazio”
6. $\{\emptyset\} \subset \emptyset$ - “O conjunto cujo único elemento é o vazio está contido no vazio”

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio \emptyset e o vazio $\{\emptyset\}$

1. $\emptyset \in \emptyset$ - “O elemento vazio pertence ao conjunto vazio”

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio \emptyset e o vazio $\{\emptyset\}$

1. $\emptyset \in \emptyset$ - “O elemento vazio pertence ao conjunto vazio”
Falsa pois o conjunto vazio não tem nenhum elemento.

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio \emptyset e o vazio $\{\emptyset\}$

1. $\emptyset \in \emptyset$ - “O elemento vazio pertence ao conjunto vazio”
Falsa pois o conjunto vazio não tem nenhum elemento.
2. $\emptyset \in \{\emptyset\}$ - “O vazio é elemento do conjunto que só contém o vazio”

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio \emptyset e o vazio $\{\emptyset\}$

1. $\emptyset \in \emptyset$ - “O elemento vazio pertence ao conjunto vazio”
Falsa pois o conjunto vazio não tem nenhum elemento.
2. $\emptyset \in \{\emptyset\}$ - “O vazio é elemento do conjunto que só contém o vazio”
Verdadeira - no lado esquerdo estamos listando todos os elementos do conjunto à direita, que neste caso só contém o vazio.

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio \emptyset e o vazio $\{\emptyset\}$

1. $\emptyset \in \emptyset$ - “O elemento vazio pertence ao conjunto vazio”
Falsa pois o conjunto vazio não tem nenhum elemento.
2. $\emptyset \in \{\emptyset\}$ - “O vazio é elemento do conjunto que só contém o vazio”
Verdadeira - no lado esquerdo estamos listando todos os elementos do conjunto à direita, que neste caso só contém o vazio.
3. $\{\emptyset\} \in \emptyset$ - “O conjunto cujo único elemento é o vazio é elemento do conjunto vazio”

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio \emptyset e o vazio $\{\emptyset\}$

1. $\emptyset \in \emptyset$ - “O elemento vazio pertence ao conjunto vazio”
Falsa pois o conjunto vazio não tem nenhum elemento.
2. $\emptyset \in \{\emptyset\}$ - “O vazio é elemento do conjunto que só contém o vazio”
Verdadeira - no lado esquerdo estamos listando todos os elementos do conjunto à direita, que neste caso só contém o vazio.
3. $\{\emptyset\} \in \emptyset$ - “O conjunto cujo único elemento é o vazio é elemento do conjunto vazio”
Falsa - pela definição do conjunto vazio, sabemos que ele não contém elemento.

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio \emptyset e o vazio $\{\emptyset\}$

4. $\emptyset \subset \emptyset$ - “O conjunto vazio está contido no conjunto vazio”

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio \emptyset e o vazio $\{\emptyset\}$

4. $\emptyset \subset \emptyset$ - “O conjunto vazio está contido no conjunto vazio”

Verdadeira pois todo conjunto contém o conjunto vazio (dizemos que é verdadeira por vacuidade).

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio \emptyset e o vazio $\{\emptyset\}$

4. $\emptyset \subset \emptyset$ - “O conjunto vazio está contido no conjunto vazio”
Verdadeira pois todo conjunto contém o conjunto vazio (dizemos que é verdadeira por vacuidade).
5. $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ - “O conjunto que contém o vazio está contido no conjunto cujo único elemento é o vazio”

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio \emptyset e o vazio $\{\emptyset\}$

4. $\emptyset \subset \emptyset$ - “O conjunto vazio está contido no conjunto vazio”

Verdadeira pois todo conjunto contém o conjunto vazio (dizemos que é verdadeira por vacuidade).

5. $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ - “O conjunto que contém o vazio está contido no conjunto cujo único elemento é o vazio”

Verdadeira pois quando comparamos dois conjuntos, precisamos verificar se os elementos de um estão contidos no outro. Como o lado esquerdo não contém elementos, significa, por vacuidade, que todo elemento pertence ao conjunto do lado direito.

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio \emptyset e o vazio $\{\emptyset\}$

4. $\emptyset \subset \emptyset$ - “O conjunto vazio está contido no conjunto vazio”

Verdadeira pois todo conjunto contém o conjunto vazio (dizemos que é verdadeira por vacuidade).

5. $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ - “O conjunto que contém o vazio está contido no conjunto cujo único elemento é o vazio”

Verdadeira pois quando comparamos dois conjuntos, precisamos verificar se os elementos de um estão contidos no outro. Como o lado esquerdo não contém elementos, significa, por vacuidade, que todo elemento pertence ao conjunto do lado direito.

6. $\{\emptyset\} \subset \emptyset$ - “O conjunto cujo único elemento é o vazio está contido no vazio”

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio \emptyset e o vazio $\{\emptyset\}$

4. $\emptyset \subset \emptyset$ - “O conjunto vazio está contido no conjunto vazio”

Verdadeira pois todo conjunto contém o conjunto vazio (dizemos que é verdadeira por vacuidade).

5. $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ - “O conjunto que contém o vazio está contido no conjunto cujo único elemento é o vazio”

Verdadeira pois quando comparamos dois conjuntos, precisamos verificar se os elementos de um estão contidos no outro. Como o lado esquerdo não contém elementos, significa, por vacuidade, que todo elemento pertence ao conjunto do lado direito.

6. $\{\emptyset\} \subset \emptyset$ - “O conjunto cujo único elemento é o vazio está contido no vazio”

Falsa, pois o conjunto do lado esquerdo contém um elemento, enquanto que o conjunto do lado direito não tem elemento, por definição. O único subconjunto do vazio é ele próprio, isto é, $\emptyset \subset \emptyset$.

Eventos

Vamos preencher o vazio...

- ▶ **Eventos** são objetos de interesse na probabilidade e, como vamos ver, eles tem uma correspondência com teoria dos conjuntos.
- ▶ Experimentos que ao serem repetidos sob as mesmas condições não produzem os mesmos resultados são chamados de **experimentos aleatórios**.
 - ▶ Como só nos ocuparemos deles, toda vez que aparecer um **experimento**, estamos falando de um *experimento aleatório*.

Definição

O conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento particular é chamado de **Espaço Amostral** e é denotado por Ω . Este conjunto pode ser: enumerável, finito ou infinito, se houver uma bijeção $f : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ ou ainda, pode ser não enumerável (por exemplo, no caso de $\Omega = \mathbb{R}$).

Eventos

Espaços amostrais

Exemplo 1: Espaço amostral do lançamento de uma moeda

Imagine que você faz o experimento de lançar uma moeda. Considere que K significa que o resultado foi cara e C significa que o resultado foi coroa.

Então, $\Omega = \{K, C\}$ é o espaço amostral do experimento.

Eventos

Espaços amostrais

Exemplo 1: Espaço amostral do lançamento de uma moeda

Imagine que você faz o experimento de lançar uma moeda. Considere que K significa que o resultado foi cara e C significa que o resultado foi coroa.

Então, $\Omega = \{K, C\}$ é o espaço amostral do experimento.

Exemplo 2: Espaço amostral do tempo até uma lâmpada queimar

Considere agora o seguinte experimento: você observa uma lâmpada e está interessado no tempo, em minutos, até a lâmpada queimar*.

Então, $\Omega = [0, +\infty)$.

Eventos

Definição

Um *evento* é qualquer coleção de possíveis resultados de um experimento, isto é, qualquer subconjunto de Ω (incluindo o próprio Ω) é um evento.

Eventos

Definição

Um *evento* é qualquer coleção de **possíveis resultados de um experimento**, isto é, qualquer subconjunto de Ω (incluindo o próprio Ω) é um evento.

Definição

Relação entre eventos

$$A \subset B \iff x \in A \Rightarrow x \in B \quad (1)$$

Eventos

Definição

Um *evento* é qualquer coleção de **possíveis resultados de um experimento**, isto é, qualquer subconjunto de Ω (incluindo o próprio Ω) é um evento.

Definição

Relação entre eventos

$$A \subset B \iff x \in A \Rightarrow x \in B \quad (1)$$

$$A = B \iff A \subset B \text{ e } B \subset A \quad (2)$$

Eventos

Operações entre eventos

Definição

União de dois eventos

A união de dois eventos A e B , representada por $A \cup B$, é o conjunto de elementos que pertencem a A , B ou ambos:

Eventos

Operações entre eventos

Definição

União de dois eventos

A união de dois eventos A e B , representada por $A \cup B$, é o conjunto de elementos que pertencem a A , B ou ambos:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\} \quad (3)$$

Eventos

Operações entre eventos

Definição

União de dois eventos

A união de dois eventos A e B , representada por $A \cup B$, é o conjunto de elementos que pertencem a A , B ou ambos:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\} \quad (3)$$

De maneira mais geral, seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos. $x \in \Omega$ é um elemento da união de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, denotada por $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, se e somente se existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_n$. Isto é,

Eventos

Operações entre eventos

Definição

União de dois eventos

A união de dois eventos A e B , representada por $A \cup B$, é o conjunto de elementos que pertencem a A , B ou ambos:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\} \quad (3)$$

De maneira mais geral, seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos. $x \in \Omega$ é um elemento da união de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, denotada por $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, se e somente se existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_n$. Isto é,

$$\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \in \Omega : \textbf{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \in A_n\}$$

Eventos

Operações entre eventos

Definição

Interseção de dois eventos

A interseção de dois eventos A e B , representada por $A \cap B$, é o conjunto de elementos que pertencem a A e, ao mesmo tempo, B :

Eventos

Operações entre eventos

Definição

Interseção de dois eventos

A interseção de dois eventos A e B , representada por $A \cap B$, é o conjunto de elementos que pertencem a A e, ao mesmo tempo, B :

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\} \quad (4)$$

Dizemos ainda que A e B são conjuntos disjuntos se, e somente se, $A \cap B = \emptyset$.

Eventos

Operações entre eventos

Definição

Interseção de dois eventos

A interseção de dois eventos A e B , representada por $A \cap B$, é o conjunto de elementos que pertencem a A e, ao mesmo tempo, B :

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\} \quad (4)$$

Dizemos ainda que A e B são conjuntos disjuntos se, e somente se, $A \cap B = \emptyset$.

De maneira mais geral, seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos. $x \in \Omega$ é um elemento da interseção de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, denotada por $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, se e somente se para todo $n \in \mathbb{N}$, $x \in A_n$. Isto é,

Eventos

Operações entre eventos

Definição

Interseção de dois eventos

A interseção de dois eventos A e B , representada por $A \cap B$, é o conjunto de elementos que pertencem a A e, ao mesmo tempo, B :

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\} \quad (4)$$

Dizemos ainda que A e B são conjuntos disjuntos se, e somente se, $A \cap B = \emptyset$.

De maneira mais geral, seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos. $x \in \Omega$ é um elemento da interseção de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, denotada por $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, se e somente se para todo $n \in \mathbb{N}$, $x \in A_n$. Isto é,

$$\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \in \Omega : \text{para todo } n \in \mathbb{N}, x \in A_n\}$$

Eventos

Complementar

Definição

Complementar de um evento

Seja A um conjunto. x é um elemento de A^c se e somente se $x \notin A$. Isto é, o complemento de A é definido formalmente como

$$A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\}.$$

Eventos

Complementar

Definição

Complementar de um evento

Seja A um conjunto. x é um elemento de A^c se e somente se $x \notin A$. Isto é, o complemento de A é definido formalmente como

$$A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\}.$$

Exemplo

Complementar do espaço amostral

O complementar do espaço amostral (Ω) é o conjunto vazio, \emptyset , pois:

- ▶ Como o conjunto \emptyset não possui elementos, $\forall \omega \in \Omega$ temos que $\omega \notin \emptyset$;
- ▶ Uma vez que \emptyset não possui elementos, não há elemento de \emptyset que pertença a Ω (dizemos que isso ocorre por *vacuidade*).

Eventos

Complementar

Definição

Complementar de um evento

Seja A um conjunto. x é um elemento de A^c se e somente se $x \notin A$. Isto é, o complemento de A é definido formalmente como

$$A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\}.$$

Exemplo

Complementar do espaço amostral

O complementar do espaço amostral (Ω) é o conjunto vazio, \emptyset , pois:

- ▶ Como o conjunto \emptyset não possui elementos, $\forall \omega \in \Omega$ temos que $\omega \notin \emptyset$;
- ▶ Uma vez que \emptyset não possui elementos, não há elemento de \emptyset que pertença a Ω (dizemos que isso ocorre por *vacuidade*).

Atenção: Também por vacuidade temos que $\emptyset \subset \Omega$.

Eventos

Exercícios (yay)

Prove as seguintes propriedades:

a. Comutatividade

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

b. Associatividade

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

c. Leis distributivas

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

d. Leis de De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Eventos

Exercícios (yay)

Mostre que $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$.

Observação: Este exercício é útil para conseguirmos escrever um conjunto como a união de conjuntos disjuntos.

Eventos

Exercícios (yay)

Considere A e B dois subconjuntos de Ω . A *diferença simétrica* entre A e B é o conjunto de todos elementos que estão em A ou em B mas que não estão em ambos.

- ▶ Escreva a diferença simétrica formalmente utilizando as operações de união, intersecção e/ou complementar.
- ▶ Mostre que a diferença simétrica entre A e B é igual à diferença simétrica entre A^c e B^c .

Eventos

Teorema (Leis de De Morgan)

Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos de Ω . Então, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\blacktriangleright \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$$

$$\blacktriangleright \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c$$

Além disso,

$$\blacktriangleright \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i^c$$

$$\blacktriangleright \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i^c$$

Eventos

Teorema (Leis de De Morgan)

Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos de Ω . Então, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\triangleright \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$$

$$\triangleright \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c$$

Além disso,

$$\triangleright \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i^c$$

$$\triangleright \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i^c$$

Definição (Partição)

Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos. Dizemos que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ particiona Ω se:

- \triangleright para todo $i, j \in \mathbb{N}$ tal que $i \neq j$, A_i e A_j são disjuntos.
- $\triangleright \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$.

Referências I



Lima, E. L. (1982).

Curso de analise: volume 1, volume 1.
Instituto de Matematica Pura e Aplicada.



Velleman, D. J. (2006).

How to prove it: A structured approach.
Cambridge University Press.