O problema dos pontos e o início da Teoria da Probabilidade

Aishameriane Venes Schmidt and Gilles Gonçalves de Castro

RESUMO. Mostramos como um problema aparentemente simples, que ficou conhecido como o problema dos pontos, motivou o desenvolvimento da teoria da probabilidade. Também apresentamos soluções desenvolvidas por Fermat e Pascal, que foram as primeiras pessoas a resolverem de forma correta o problema dos pontos.

1. Introdução

Maria e Pedro estão jogando cara ou coroa quando Pedro faz a seguinte proposta: *“Eu aposto 5 reais que irão cair 10 caras primeiro. Se isso acontecer, eu levo 10 reais para casa. Se saírem 10 coroas antes de saírem 10 caras, você fica com os 10 reais”*. Maria concordou e os dois começaram a jogar a moeda.

Após 9 rodadas, caíram 6 caras e 3 coroas. Nesse momento, a mãe de Pedro o chama para jantar. Como ele estava ganhando a aposta, pegou o dinheiro e ia para casa quando Maria disse: *”Espera, Pedro! Se a gente continuasse jogando eu tenho certeza que eu iria ganhar!”*. Será que existe alguma forma para Pedro e Maria dividirem os 10 reais sem que precisem jogar até o final?

Neste artigo iremos abordar sobre esse problema, que ficou conhecido por *Problema dos Pontos.* Mostraremos sua história e relacionaremos a resolução com o desenvolvimento da teoria da probabilidade. Ao final, utilizaremos uma das possíveis soluções do problema para resolver a aposta de Maria e Pedro.

2. Jogos, azar e risco: da sorte ao desenvolvimento da Probabilidade

Os jogos de azar[1] existem desde os tempos mais primitivos e fizeram parte de diversas culturas: evidências arqueológicas indicam que na época dos egípcios já haviam jogos de apostas. Um dos mais antigos que se tem conhecimento é o *astragalus*, uma espécie de jogo de dados, onde um osso com forma quadrada retirado do calcanhar de uma ovelha ou cervo era jogado. Mas qual a relação de um jogo de azar com probabilidades?

Ao contrário de jogos que dependem unicamente das habilidades de seus jogadores, os resultados dos jogos de azar envolvem fatores que não podem ser controlados. Por exemplo, em um jogo de cara ou coroa, sabemos que o resultado pode ser tanto cara como coroa (em uma moeda honesta essas duas ocorrências tem a mesma "chance"de acontecer) e isso não depende da qualidade do arremesso ou da experiência das pessoas envolvidas. Sendo assim, por muito tempo os resultados de jogos não eram tidos como mensuráveis, mas sim como obras do acaso que poderiam até ser influenciados por deuses. Por séculos, enquanto a matemática e algumas outras áreas se desenvolveram como fruto dos filósofos e pensadores de suas épocas, os assuntos relacionados à probabilidade eram tratados nos oráculos, com previsões feitas por videntes.

Uma das possíveis explicações para a demora no desenvolvimento da probabilidade (muito embora o conceito de probabilidade exista desde a época de Sócrates) é a de que somente no Renascimento, com o advento da indústria, cálculo infinitesimal e a mudança de uma visão teocentrista para heliocentrista, os homens passaram a se enxergar como seres dotados de livre arbítrio sendo responsáveis por suas próprias escolhas. Isso pôde ser observado nas artes, nas grandes navegações e nas ciências, como as descobertas astronômicas e o desenvolvimento da medicina, que teve avanços importantes.

No ano de 1494 o monge franciscano Luca Paccioli publicou seu livro "Summa de arithmetic, geometria et proportionalità", que continha princípios básicos de álgebra além de introduzir o sistema de partidas

[1]Em inglês, estes jogos são chamados de *hazard games*, sendo que a palavra *hazard* vem do árabe *al zahr*, que significa dado. A palavra em português azar tem a mesma etimologia, porém foi atribuída uma conotação mais negativa, ao passo que seus correspondentes em espanhol (azar) e francês (hasard) tem um significado de "acaso, chance".

dobradas, até hoje utilizado em contabilidade [2]. Ao longo da sua obra, Paccioli propôs o seguinte problema:

"Dois jogadores, A e B, estão jogando uma partida honesta de *balla*[3]. Eles combinam de jogar até que um deles ganhe seis rodadas, porém eles tem que encerrar o jogo quando A estava ganhando por cinco a três de B. Como o dinheiro da aposta deve ser dividido?"[4]

Este problema ficou conhecido como "problema dos pontos" e ele (ou suas variações) voltou a aparecer ao longo dos séculos XVI e XVII em diversos manuscritos da matemática. Embora simples, o problema envolve quantificar um evento que não ocorreu e fazer uma divisão que contemple as chances que cada jogador teria de ganhar o jogo no momento que a partida é interrompida. Algumas soluções foram propostas ao problema, mas somente em 1654 a solução definitiva para o problema dos pontos seria apresentada.

Blaise Pascal, um francês nascido em 1623 foi um dos responsáveis pela solução do problema dos pontos, embora esse seja apenas um de seus grandes feitos. Quando criança, ele deduziu sozinho uma boa parte da geometria Euclidiana, tendo desenhado nas paredes do seu quarto as suas descobertas. Na adolescência ele desenvolveu e patenteou uma máquina de calcular, que mais tarde daria origem à calculadora que conhecemos nos dias atuais. Após a morte de seu pai, quando já tinha por volta de 30 anos, Pascal conheceu o cavaleiro de Meré, conhecido por suas habilidades matemáticas e seu gosto por jogos. Embora Pascal diminuísse o cavaleiro por sua inabilidade com geometria, reconhecia em seu companheiro uma capacidade grande de lidar com probabilidades [5]. Na época em que se conheceram, o cavaleiro de Meré estava intrigado com o problema dos pontos proposto mais de um século antes por Paccioli e buscava matemáticos que pudessem ser capazes de apresentar uma solução ao enigma.

Pascal, apesar de suas habilidades matemáticas, não se sentiu confiante para abordar o problema dos pontos sozinho e por isso procurou seus conhecidos de um grupo de matemáticos para ter indicações de alguém que pudesse ter interesse em colaborar no problema. Na época, essa era a abordagem tradicional de trabalho dos cientistas e matemáticos: trocar cartas. Através de um conhecido em comum, Pascal chegou ao nome de Pierre de Fermat, um advogado francês que residia na cidade de Toulouse, na França. Fermat foi uma pessoa de

[2]Diversas técnicas matemáticas foram desenvolvidas para a resolução de problemas práticos, muitas vezes envolvendo contagem de bens ou registro de estoques. Naquela época não havia uma distinção exata da economia, contabilidade e matemática como temos nos dias de hoje e por isso as publicações na época de Paccioli hoje seriam vistas como multidisciplinares.

[3]Jogo de azar da época

[4]Tradução livre de [**1**], página 43.

[5]Apesar de não ter um conhecimento formal, de Meré tinha noções intuitivas muito boas a respeito de probabilidade que ele utilizava em jogos de cartas e dados

notável conhecimento: além de falar os principais idiomas europeus da época (a ponto de escrever poesias em outras línguas), ele tinha conhecimentos profundos em matemática. Foi um pesquisador independente da área de geometria analítica, deu contribuições para o início do desenvolvimento do cálculo, pesquisou sobre como mensurar o peso da Terra e trabalhava na área de refração de luz e ótica. Uma de suas maiores contribuições (ou pelo menos a mais conhecida) é chamada de "último teorema de Fermat", que intrigou matemáticos do mundo inteiro até sua demonstração no ano de 1994[6] (aproximadamente 300 anos depois de Fermat ter escrito seu enunciado).

A solução do problema dos pontos proposta por Fermat e Pascal se inicia determinando qual dos dois jogadores tem mais pontos (ou partidas ganhas) no momento que o jogo é interrompido. A troca de correspondências entre os dois, feita em 1654, foi um marco no desenvolvimento da probabilidade e, consequentemente, da estatística. Enquanto Fermat utilizou ferramentas de álgebra pura, Pascal buscou uma solução mais inovadora, que apesar de não ser de sua autoria, mais tarde ficou conhecido como triângulo de Pascal.

3. Solução do problema dos pontos

Nesta seção, apresentaremos algumas das soluções mais básicas do problema dos pontos apresentadas no artigo [**3**]. Primeiro vamos reformular o problema de uma maneira mais abstrata e mudando ligeiramente o enunciado apresentado na introdução. Ao resolver este problema, percebe-se que a informação importante é a quantidade de rodadas que cada um precisa para ganhar o jogo.

No problema inicial, das 10 vitórias necessárias para ganhar o jogo, Pedro estava com 6 e Maria com 3, ou seja, faltavam 4 vitórias e 7 para Maria. Suponha agora, que ao invés de 10 vitórias, eles estivessem apostando em 20 vitórias e Pedro estivesse com 16 e Maria com 13. Note que o número de jogos que cada um precisa ganhar é o mesmo que antes. Sendo assim, a maneira de dividir o dinheiro em ambos os casos é a mesma e depende apenas de quantas rodadas cada um deles precisa ganhar.

Podemos então formular o problema da seguinte forma:

> Dois jogadores apostam uma certa quantia em várias rodadas de um jogo justo (isto é, ambos tem a mesma chance de ganhar) até que um deles atinja um certo número de vitórias. Depois de algumas rodadas, faltam r_1 rodadas para o primeiro jogador ganhar e r_2 para o segundo, quando eles são interrompidos. Qual a maneira mais justa de dividir o dinheiro?

[6]Ver [**5**] para uma história a respeito do último teorema de Fermat até sua demonstração.

3.1. Método da enumeração. Em uma carta enviada para Pascal, Fermat propõe uma solução para o problema quando o número de rodadas restantes é pequeno. Para exemplificar o método da enumeração, vamos supor que $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$. Fermat observou que, em no máximo quatro rodadas, o jogo está decidido. Note que o maior número de rodadas acontece quando ambos o jogadores ficam a uma rodada da vitória. No exemplo que estamos tratando, isso ocorre se o primeiro jogador ganha mais uma rodada e o segundo ganha mais duas, totalizando três. Na rodada seguinte, um dos jogadores é necessariamente o vencedor.

Passamos à descrição de todas as possibilidade de quatro rodadas de jogo. Vamos denotar por 1 se o primeiro jogador ganhou a rodada e 2 se foi o segundo. Por exemplo, 1211 significa que o primeiro jogador ganhou uma, em seguida, o segundo ganhou uma e finalmente, o primeiro ganhou as últimas duas. Temos as seguintes possibilidades

$$\{1111, 1112, 1121, 1122, 1211, 1212, 1221, 1222,$$

$$2111, 2112, 2121, 2122, 2211, 2212, 2221, 2222\}$$

totalizando 16 casos.

Agora, listamos em quais possibilidade cada um dos jogadores ganha. Para o primeiro jogador temos

$$\{1111, 1112, 1121, 1122, 1211, 1212, 1221, 2111, 2112, 2121, 2211\}$$

que são todas as ocorrências onde aparecem pelo menos dois 1's (11 casos dos 16 totais); e para o segundo

$$\{1222, 2122, 2212, 2221, 2222\}$$

que são os resultados onde aparecem pelo menos três 2's (5 casos dos 16 totais).

Com isso, Fermat concluiu que o primeiro jogador deve levar $11/16$ da quantia total apostada, enquanto o segundo jogador deve levar $5/16$ do total.

Alguém poderia desconfiar deste método já que, por exemplo, o a sequência de rodadas 1111 não pode ocorre, pois após os dois primeiros 1's, o vencedor já está determinado. Usando a linguagem atual de probabilidade, vemos que isso não é um problema. A probabilidade de ocorrer a sequência de dois 1's é de $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$ que é exatamente a razão do número de sequências que começam com 11 (1111, 1112, 1121, 1122) pelo número todas as sequências de quatro rodadas. A probabilidade de uma sequência em que o jogo foi finalizado com a vitória de um dos jogadores é igual a razão entre todas as continuações possíveis até quatro rodadas e o número total de sequências com quatro rodadas.

O método da enumeração não é muito prático quando o número de rodadas máximas restantes, digamos n, é muito grande pois precisamos analisar 2^n possibilidades. Por exemplo, para o problema da introdução teríamos que analisar 1024 casos!

3.2. Aritmética do triângulo. Pascal, depois de receber a carta de Fermat, começou a desenvolver novos métodos para simplificar a solução proposta por Fermat. Primeiro, Pascal desenvolveu o método da recursão (ver [**3**] para o funcionamento do método) para depois simplificar ainda mais usando o que é hoje em dia conhecido como triângulo de Pascal.[7]

O triângulo é construído usando os coeficientes binomiais $\binom{n}{k}$, também denotado por C_n^k, que representa o número de combinações de n elementos de k em k. Eles são calculados da seguinte forma:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1}$$

Em cada linha colocamos todos os coeficientes binomiais para um determinado n fazendo k crescer de 0 a n. Por exemplo as cinco primeiras linhas do triângulo são:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

que quando calculadas ficam

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}.$$

O triângulo de Pascal tem diversas propriedades interessantes e recomendamos ao leitor procurar mais a respeito dele. Veja, por exemplo [**2**], [**4**].

[7]O triângulo de Pascal já havia sido utilizado séculos antes de Pascal. Ver as referências em [**1**] e [**3**].

Vamos analisar como usar o triângulo de Pascal para resolver o problema dos pontos. Voltando para o método da enumeração da subseção anterior no caso em que $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$, observe que o primeiro jogador ganha em todas as sequências que têm dois, três ou quatro 1's e perde nas demais. O número de sequências de quatro termos que têm exatamente dois 1's (1122,1212,1221,2112,2121,2211) é o mesmo que o número de combinações de quatro elementos tomados dois a dois. Temos igualdades análogas para os demais casos. Entre as dezesseis sequências, o número de casos favoráveis para o primeiro jogador é então:

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 6 + 4 + 1 = 11$$

que é igual a soma dos últimos 3 números da quinta linha do triângulo.

Vamos expandir as ideias acima para o caso geral. Note que no método de enumeração, o número máximo de rodadas restantes é $r_1 + r_2 - 1$. Os coeficientes binomiais da que tem $n = r_1 + r_2 - 1$ na igualdade 1 aparecem na linha $r_1 + r_2$ do triângulo de Pascal. Argumentando como no parágrafo anterior, concluímos que o número de casos favoráveis ao primeiro jogador é portanto

$$\binom{r_1 + r_2 - 1}{r_1} + \binom{r_1 + r_2 - 1}{r_1 + 1} + \cdots + \binom{r_1 + r_2 - 1}{r_1 + r_2 - 1},$$

que é a soma os últimos r_2 termos da linha $r_1 + r_2$ do triângulo.

Agora temos condições de resolver a aposta de Maria e Pedro de uma forma mais eficiente. Vamos substituir $r_1 = 4$ e $r_2 = 7$ no casos geral. Precisamos olhar para a décima primeira linha do triângulo de pascal que é

$$1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1\,.$$

Somando os últimos sete termos, obtemos 848. Concluímos que a razão entre o número de vitórias de Pedro com o número total de partidas será de 848/1024. Multiplicando esse valor pelos 10 reais que é o total apostado, obtemos o valor arredondado de 8,28 reais, que é o quanto Pedro deveria receber numa divisão justa. Maria ficaria com o restante que é 1,72 reais.

Referências

[1] P. Bernstein, *Agains the Gods - The remarkable history of risk*, John Wiley and Sons Inc., 1998.

[2] P. Carvalho, J. de Carvalho, P. Fernandez, A. Morgado, *Análise Combinatória e Probabilidade*, Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

[3] P. Gorroochurn, *Thirteen Correct Solutions to the "Problem of Points"and Their Histories*, The Mathemetical Intelligencer . **8** (2014), 57-64.

[4] R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, *Matemática Concreta - Fundamentos para a ciência da computação*, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1995.

[5] S. Singh, *O último teorema de Fermat*, Editora Record, 2000.

Centro de Ciências da Administração e Socioeconômicas - Universidade do Estado de Santa Catarina

Departamento de Matemática - Universidade Federal de Santa Catarina