Revisão de Probabilidade e Estatística

Aula 4 - Parte 1

Aishameriane Schmidt

PPGECO/UFSC

Março de 2018.

Programa

Aula 4

1. Algumas coisas da ~~vida~~ aula passada

Programa

Aula 4

1. Algumas coisas da ~~vida~~ aula passada
2. Função geradora de momentos

Programa

Aula 4

1. Algumas coisas da ~~vida~~ aula passada
2. Função geradora de momentos
3. Distribuição normal multivariada

Programa

Aula 4

1. Algumas coisas da ~~vida~~ aula passada
2. Função geradora de momentos
3. Distribuição normal multivariada
4. Estatística
    - Distribuições amostrais
    - Função de Verossimilhança
    - Estimação pontual
5. Introdução à inferência bayesiana

Coisas da aula passada

Aula 4

Exemplo

- Se $f_{X,Y}(x,y) = \frac{e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}}{y}$ para $0 < x, y < +\infty$, qual é a distribuição de $X|Y = y$?

Coisas da aula passada

Aula 4

Exemplo

- Se $f_{X,Y}(x,y) = \frac{e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}}{y}$ para $0 < x, y < +\infty$, qual é a distribuição de $X|Y = y$?
- Prove que se $X \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ e $Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$ são independentes e $Z = X + Y$, então

$$X|Z = n \sim Binomial\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)$$

Função Geradora de Momentos

Definição

(Função Geradora de Momentos) A função geradora de momentos de uma variável aleatória X é uma função $M_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] \tag{1}$$

Isto é, a função geradora de momentos é calculada através da esperança da função e^{tX}.

Função Geradora de Momentos

Lema

- *Se $X \sim Bernoulli(p)$, então a f.g.m. de X é dada por* $M_x(t) = (1 - p) + e^t \cdot p$;

Função Geradora de Momentos

Lema

- *Se* $X \sim \text{Bernoulli}(p)$*, então a f.g.m. de* X *é dada por* $M_x(t) = (1 - p) + e^t \cdot p$;
- *Se* $X \sim \text{Binomial}(n, p)$*, então a f.g.m. de* X *é dada por* $M_x(t) = \left[(1 - p) + e^t \cdot p\right]^n$;
    - *É possível usar a f.g.m. para provar que soma de Bernoulli é Binomial, mas aqui vamos fazer o caminho inverso e assumir que isso é verdade para encontrar a forma da f.g.m. de forma mais fácil.*

Função Geradora de Momentos

Lema

- *Se* $X \sim Normal(0,1)$, *então a f.g.m. de* X *é dada por* $M_x(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$;

Função Geradora de Momentos

Lema

- *Se* $X \sim Normal(0,1)$, *então a f.g.m. de* X *é dada por* $M_x(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$;
- *Se* $X \sim Normal(\mu, \sigma^2)$, *então a f.g.m. de* X *é dada por* $M_x(t) = e^{t\mu + \frac{(t\sigma)^2}{2}}$;

Função Geradora de Momentos

Lema

- *Se* $X \sim Normal(0, 1)$*, então a f.g.m. de X é dada por* $M_x(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$*;*
- *Se* $X \sim Normal(\mu, \sigma^2)$*, então a f.g.m. de X é dada por* $M_x(t) = e^{t\mu + \frac{(t\sigma)^2}{2}}$*;*
- *Se* $X \sim Normal(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ *e* $Y \sim Normal(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ *(independentes), então a f.g.m. de* $X + Y$ *é dada por* $M_x(t) = e^{t(\mu_X + \mu_Y) + \frac{\left(t\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}\right)^2}{2}}$*;*

Função Geradora de momentos

Lema

- *Se* $X \sim Poisson(\lambda)$, *então a f.g.m. de* X *é dada por* $M_x(t) = exp\left\{\lambda\left(e^t - 1\right)\right\}$;

Função Geradora de momentos

Lema

- *Se* $X \sim Poisson(\lambda)$, *então a f.g.m. de* X *é dada por* $M_x(t) = exp\left\{\lambda\left(e^t - 1\right)\right\}$;
- *Se* $X_i \sim Poisson(\lambda_i)$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$ *e* X_i *é independente de* X_j *(para* $i \neq j$*), então a f.g.m. de* $\sum_{i=1}^n X_i$ *é dada por* $M_x(t) = exp\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i\left(e^t - 1\right)\right\}$;

Função Geradora de momentos

Lema

1. *A f.g.m. (quando pode ser definida) caracteriza unicamente uma distribuição;*

Função Geradora de momentos

Lema

1. *A f.g.m. (quando pode ser definida) caracteriza unicamente uma distribuição;*
2. *Se $X_1, \ldots, X_n$ são i.i.d.,*

$$M_{\sum X_i}(t) = (M_{X_i}(t))^n$$

(Vamos usar esse resultado hoje)

Função Geradora de momentos

Lema

1. *A f.g.m. (quando pode ser definida) caracteriza unicamente uma distribuição;*
2. *Se $X_1, \dots, X_n$ são i.i.d.,*

$$M_{\sum X_i}(t) = \left(M_{X_i}(t)\right)^n$$

   (Vamos usar esse resultado hoje)

3. *Se $M_X(t)$ é a f.g.m. de X, então,*

$$\left.\frac{\partial^n M_X(t)}{\partial t^n}\right|_{t=0} = \mathbb{E}\left[X^n\right] \quad \forall n \in \{1, 2, \dots, \}.$$

A demonstração do item 2 é sugerida como exercício.

Função Geradora de momentos

Exemplo

Vimos que se $X \sim$ Normal(μ, σ^2), então a f.g.m. de X é dada por $M_x(t) = e^{t\mu + \frac{(t\sigma)^2}{2}}$. Vamos calcular o primeiro e o segundo momento de X usando a f.g.m..

Distribuições Multivariadas

Definição

Seja $\underset{\sim}{X} : (X_1, \ldots, X_j)$ um vetor aleatório. Então:

- Sua esperança é dada por

$$\mathbb{E}[\underset{\sim}{X}] = (\mathbb{E}[X_1], \ldots, \mathbb{E}[X_d])$$

Distribuições Multivariadas

Definição

Seja $\underset{\sim}{X} : (X_1, \ldots, X_j)$ um vetor aleatório. Então:

- Sua esperança é dada por

$$\mathbb{E}[\underset{\sim}{X}] = (\mathbb{E}[X_1], \ldots, \mathbb{E}[X_d])$$

- A matriz de variâncias e covariâncias de um vetor aleatório $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)$, $\mathbb{V}[\underset{\sim}{X}]$, é a matriz $d \times d$ cujo componente (i, j) é dado por $Cov(X_i, X_j)$, isto é,

$$\mathbb{V}[\underset{\sim}{X}] = \begin{bmatrix} Var[X_1] & Cov[X_1, X_2] & \ldots & Cov[X_1, X_j] \\ Cov[X_2, X_1] & Var[X_2] & \ldots & Cov[X_2, X_j] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov[X_1, X_j] & Cov[X_2, X_j] & \ldots & Var[X_j] \end{bmatrix}.$$

- Vimos, utilizando a função geradora de momentos, que a soma de normais independentes segue também uma distribuição normal. Vamos continuar mexendo na distribuição normal, porém usando a versão multivariada da f.g.m.

- Vimos, utilizando a função geradora de momentos, que a soma de normais independentes segue também uma distribuição normal. Vamos continuar mexendo na distribuição normal, porém usando a versão multivariada da f.g.m.

Definição

$\underset{\sim}{X} : (X_1, \ldots, X_n)$ um vetor aleatório. Definimos a f.g.m. de $\underset{\sim}{X}$ por

$$M_{\underset{\sim}{X}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$M_{\underset{\sim}{X}}(t_1, \ldots, t_n) = \mathbb{E}\left[e^{\sum_{i=1}^{n} t_i X_i}\right]$$

Exemplo

1. Sejam X e Y i.i.d. com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. Encontre a distribuição conjunta de $Z = X + Y$ e $W = X - Y$.

Exemplo

1. Sejam X e Y i.i.d. com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. Encontre a distribuição conjunta de $Z = X + Y$ e $W = X - Y$.
2. Se $\underset{\sim}{X} : (X_1, \ldots, X_d) \sim \text{Normal}(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$, então,

$$M_{\underset{\sim}{X}}(t_1, \ldots, t_d) = exp\left\{\underset{\sim}{\mu}\,\underset{\sim}{t} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}\;\Sigma\;\underset{\sim}{t}'\right\}, \qquad \underset{\sim}{t} = (t_1, \ldots, t_d)$$

Exemplo

1. Sejam X e Y i.i.d. com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. Encontre a distribuição conjunta de $Z = X + Y$ e $W = X - Y$.
2. Se $\underset{\sim}{X} : (X_1, \ldots, X_d) \sim \text{Normal}(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$, então,

$$M_{\underset{\sim}{X}}(t_1, \ldots, t_d) = exp\left\{\underset{\sim}{\mu}\underset{\sim}{t} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}\,\Sigma\,\underset{\sim}{t}'\right\}, \qquad \underset{\sim}{t} = (t_1, \ldots, t_d)$$

- Mostre que se Σ é diagonal, as componentes de $\underset{\sim}{X}$ são independentes e diga qual a sua distribuição. O que isso significa?

Exemplo

1. Sejam X e Y i.i.d. com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. Encontre a distribuição conjunta de $Z = X + Y$ e $W = X - Y$.
2. Se $\underset{\sim}{X} : (X_1, \ldots, X_d) \sim \text{Normal}(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$, então,

$$M_{\underset{\sim}{X}}(t_1, \ldots, t_d) = exp\left\{\underset{\sim}{\mu}\underset{\sim}{t} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}\;\Sigma\;\underset{\sim}{t}'\right\}, \qquad \underset{\sim}{t} = (t_1, \ldots, t_d)$$

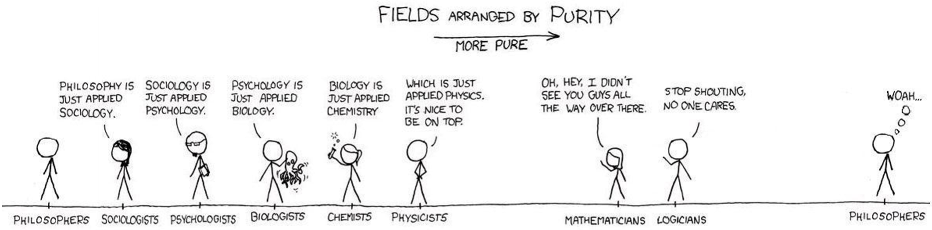
- Mostre que se Σ é diagonal, as componentes de $\underset{\sim}{X}$ são independentes e diga qual a sua distribuição. O que isso significa?
- A Normal é um dos poucos casos onde ausência de correlação implica independência!

Estatística

- Enquanto a probabilidade é uma *área* da matemática, a estatística é considerada uma **ciência**;

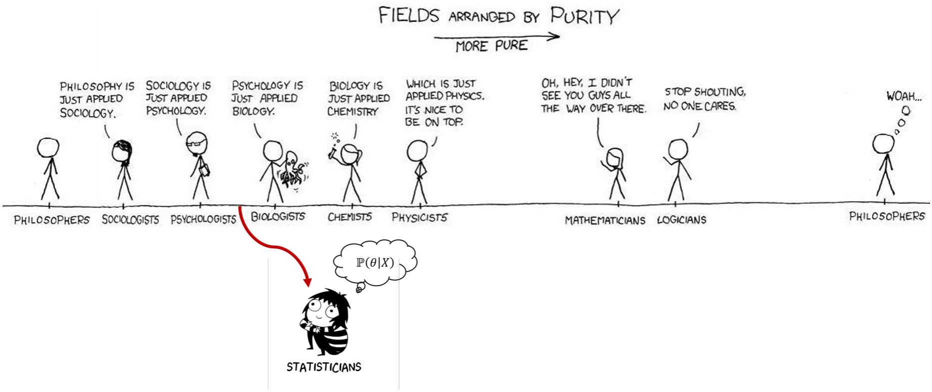
Estatística

- Enquanto a probabilidade é uma *área* da matemática, a estatística é considerada uma **ciência**;



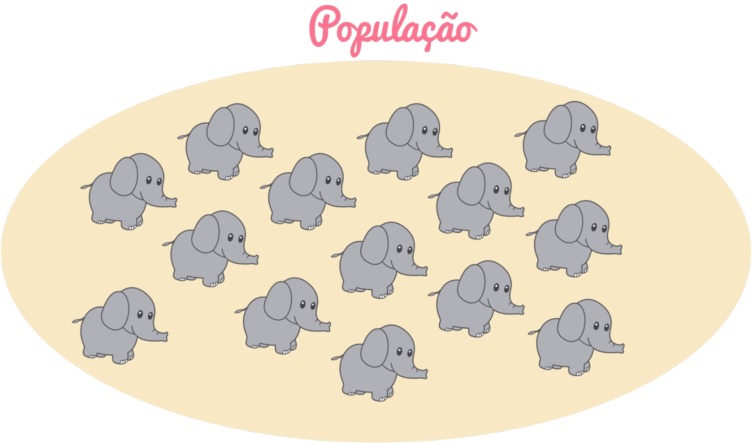
Estatística

- Enquanto a probabilidade é uma *área* da matemática, a estatística é considerada uma **ciência**;



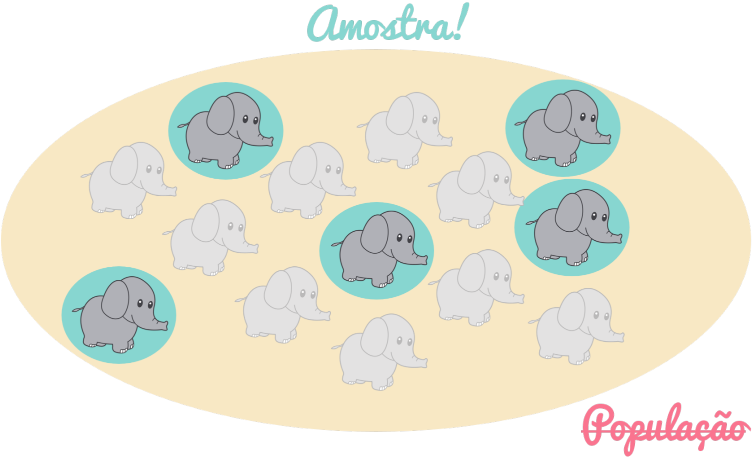
Estatística

O problema fundamental da estatística



Estatística

O problema fundamental da estatística



Estatística

O problema fundamental da estatística

Usamos os dados da *amostra*

↓

Em conjunto com *estimadores*

↓

Para obter *estimativas*

↓

Dos *parâmetros populacionais*

Amostras aleatórias

Definição

(Amostra Aleatória) Sejam as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ com densidade conjunta dada por $f_{X_1,X_2,\cdots,X_n}(\cdot, \ldots, \cdot)$ que pode ser escrita da seguinte forma:

$$f_{X_1,X_2,\cdots,X_n}(\cdot, \ldots, \cdot) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n)$$

onde $f(\cdot)$ é a densidade de cada X_i. Então, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é definida como sendo *uma amostra aleatória* de tamanho n de uma população com densidade $f(\cdot)$.

Amostras aleatórias

Oi, você por aqui?

Definição

(Amostra Aleatória) Sejam as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ com densidade conjunta dada por $f_{X_1,X_2,\cdots,X_n}(\cdot, \ldots, \cdot)$ que pode ser escrita da seguinte forma:

$$f_{X_1,X_2,\cdots,X_n}(\cdot, \ldots, \cdot) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n)$$

onde $f(\cdot)$ é a densidade de cada X_i. Então, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é definida como sendo *uma amostra aleatória* de tamanho n de uma população com densidade $f(\cdot)$.

Observação 1: Note que necessariamente os X_i precisarão ser amostrados ***COM*** reposição.
Observação 2: Para ser uma a.a., precisa ser i.i.d..

Amostras aleatórias

Oi, você por aqui?

Exemplo

a.a. com $n = 2$ **de uma Bernoulli**

Suponha que X só pode assumir dois valores, 0 e 1, com probabilidades p e $q = 1 - p$, respectivamente. Isto é, X é uma variável aleatória discreta com distribuição de Bernoulli:

$$p_X(x) = p^x q^{1-x} \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x)$$

Onde $\mathbb{I}$ é a função *indicadora*, que será igual a 1 se $x = 0$ ou $x = 1$ e será igual a 0 em todos os outros casos.

Exemplo

a.a. com $n = 2$ de uma Bernoulli

Suponha que X só pode assumir dois valores, 0 e 1, com probabilidades p e $q = 1 - p$, respectivamente. Isto é, X é uma variável aleatória discreta com distribuição de Bernoulli:

$$p_X(x) = p^x q^{1-x} \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x)$$

Onde $\mathbb{I}$ é a função *indicadora*, que será igual a 1 se $x = 0$ ou $x = 1$ e será igual a 0 em todos os outros casos.

A função densidade conjunta para uma amostra aleatória da $f(\cdot)$ que tenha 2 valores é:

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2) = p^{x_1+x_2} q^{2-x_1-x_2} \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x_1)\mathbb{I}_{\{0,1\}}(x_2)$$

Exemplo

Distribuição amostral da exponencial (Retirado de [Casella and Berger, 2002])

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de uma população com distribuição exponencial de parâmetro λ. Então, a densidade conjunta é dada por:

Amostras aleatórias

Oi, você por aqui?

Exemplo

Distribuição amostral da exponencial (Retirado de [Casella and Berger, 2002])

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de uma população com distribuição exponencial de parâmetro λ. Então, a densidade conjunta é dada por:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, \ldots, x_n|\lambda) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\lambda) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x_i}{\lambda}} \\
&= \frac{1}{\lambda^n} e^{-\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda^n} e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i}
\end{aligned}
$$

Amostras aleatórias

Oi, você por aqui?

Exemplo

Distribuição amostral da exponencial (Retirado de [Casella and Berger, 2002])

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de uma população com distribuição exponencial de parâmetro λ. Então, a densidade conjunta é dada por:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, \ldots, x_n|\lambda) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\lambda) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x_i}{\lambda}} \\
&= \frac{1}{\lambda^n} e^{-\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda^n} e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i}
\end{aligned}
$$

Podemos usar a f.g.m. para calcular densidades de a.a.!

Estatística

Definição

Estatística

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de tamanho n de uma população e seja $T(X_1, \ldots, X_n)$ uma função real (ou um vetor de funções reais) cujo domínio inclui o espaço amostral de $(X_1, \ldots, X_n)$. Então a v.a. ou o vetor aleatório $Y = T(X_1, \ldots, X_n)$ é chamado de *estatística*. A função densidade de probabilidade de uma estatística Y é chamada de *distribuição amostral de* Y.

Observação: Note que a definição de estatística é bastante abrangente e não necessariamente Y irá ser uma função do parâmetro populacional θ.

Exemplo

Distribuição amostral de $\bar{X}$ para a distribuição Normal

Considere uma a.a. de tamanho n de uma população com distribuição Normal de média μ e variância σ^2, isto é, $X_1, \ldots, X_n$ são i.i.d. com $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Defina a estatística $\bar{X}$ como sendo:

$$\bar{X} := \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$$

Exemplo

Distribuição amostral de $\bar{X}$ para a distribuição Normal

Considere uma a.a. de tamanho n de uma população com distribuição Normal de média μ e variância σ^2, isto é, $X_1, \dots, X_n$ são i.i.d. com $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Defina a estatística $\bar{X}$ como sendo:

$$\bar{X} := \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$$

Utilizando a função geradora de momentos, podemos encontrar qual a densidade de $\bar{X}$!

Função de Verossimilhança

Definição

Função de Verossimilhança

Seja $f(\boldsymbol{x}|\theta)$ a densidade conjunta de uma amostra $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. Então, dado que $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$ foi observada, a função de $\boldsymbol{\theta}$ definida como

$$L(\theta|\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}|\theta)$$

é chamada de *função de verossimilhança*.

Em particular, se $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória, então:

$$L(\theta|\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\boldsymbol{\theta})$$

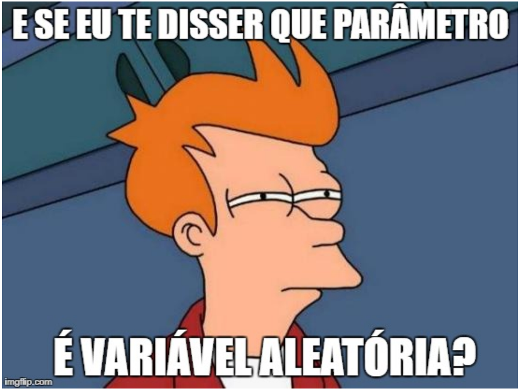
Função de Verossimilhança

- A função de verossimilhança contém toda a informação que a amostra tem sobre θ.
  - Se houver um escalar α tal que, para duas observações de uma distribuição com parâmetro θ, denotadas por X_1 e X_2, seja possível escrever $\ell(\theta|X_1) = \alpha \cdot \ell(\theta|X_2)$ para todo θ, então X_1 e X_2 levam às mesmas conclusões no processo de inferência.

Função de Verossimilhança

- A função de verossimilhança contém toda a informação que a amostra tem sobre θ.
  - Se houver um escalar α tal que, para duas observações de uma distribuição com parâmetro θ, denotadas por X_1 e X_2, seja possível escrever $\ell(\theta|X_1) = \alpha \cdot \ell(\theta|X_2)$ para todo θ, então X_1 e X_2 levam às mesmas conclusões no processo de inferência.
  - Ela **NÃO** é uma densidade!

Estatística Bayesiana



Referências I

Casella, G. and Berger, R. (2002).
Statistical inference.
Duxbury, 2nd edition.