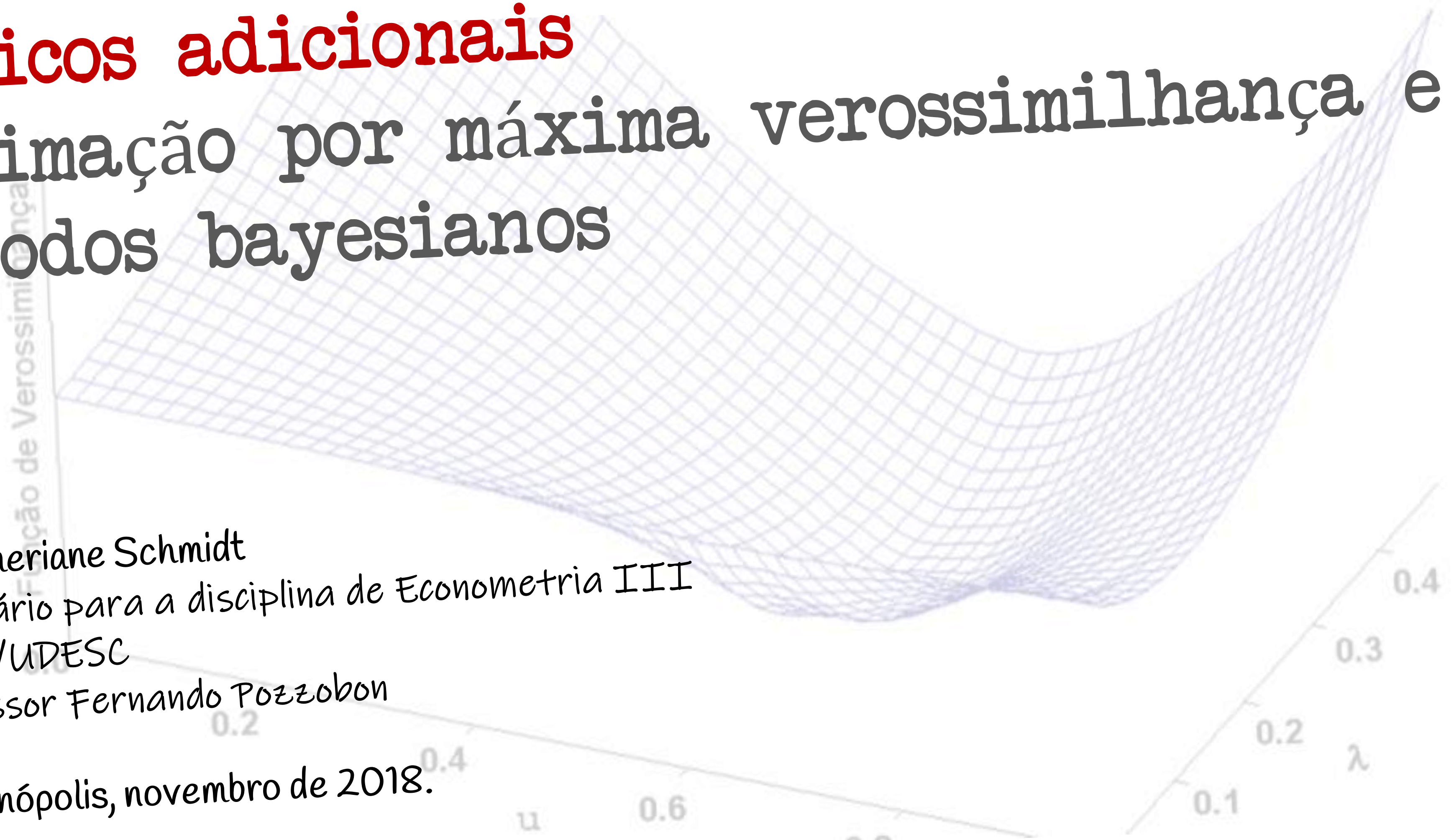
Tópicos adicionais

Estimação por máxima verossimilhança e métodos bayesianos



Aishameriane Schmidt
Seminário para a disciplina de Econometria III
ESAG/UDESC
Professor Fernando Pozzobon

Florianópolis, novembro de 2018.

O material está disponível em:

https://tinyurl.com/econometria-udesc

Para falar com a Aisha, utilize o aishamail:

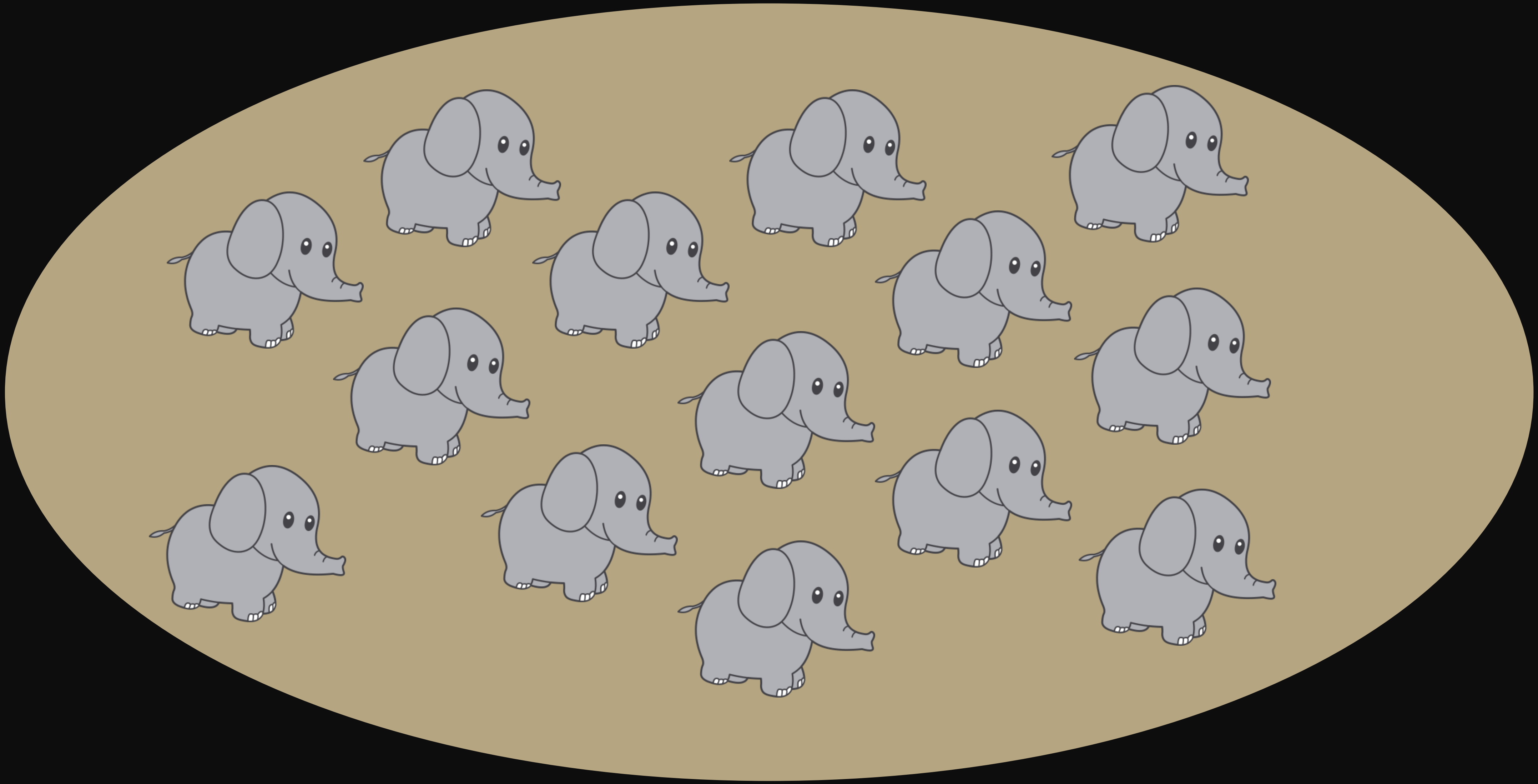
aishameriane@gmail.com

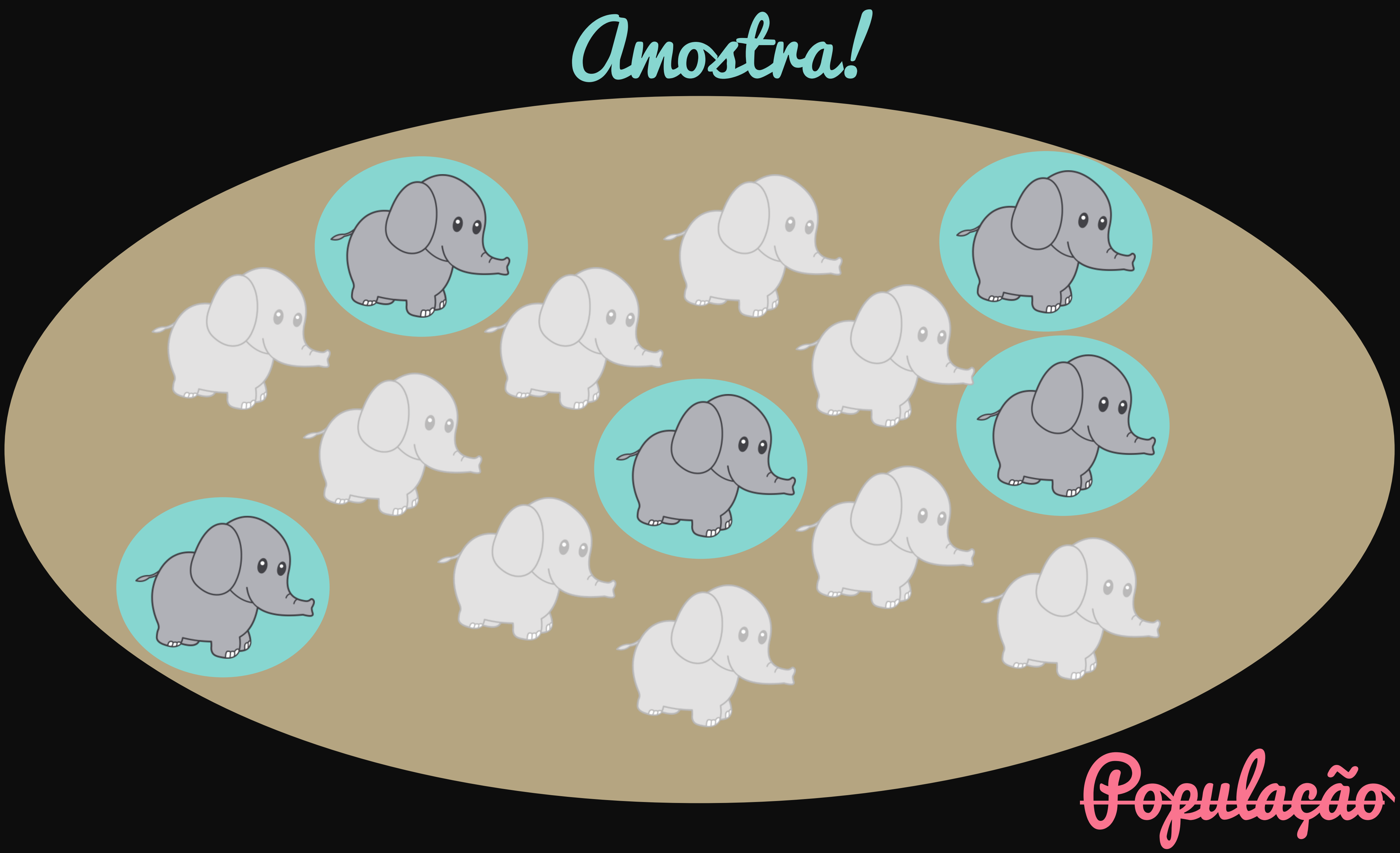
Um tour do que vamos ver hoje

- O que é fazer inferência estatística?
- Relembrando o EMV e suas propriedades
- Quando o MLE dá ruim?
- O que é inferência Bayesiana?
  - Definições básicas: verossimilhança, priori e posteriori.
- Estimando a probabilidade de cara em uma moeda

Problema fundamental da estatística

População




Amostra!
~~População~~

Usamos os dados da *amostra*

↓

Em conjunto com *estimadores*

↓

Para obter *estimativas*

↓

Dos *parâmetros populacionais*

Usamos os dados da *amostra*

Em conjunto com *estimadores*

Para obter *estimativas*

Dos *parâmetros populacionais*

Precisamos de métodos de encontrar estimadores como GMM, MLE, MQO, etc

Usamos os dados da *amostra*

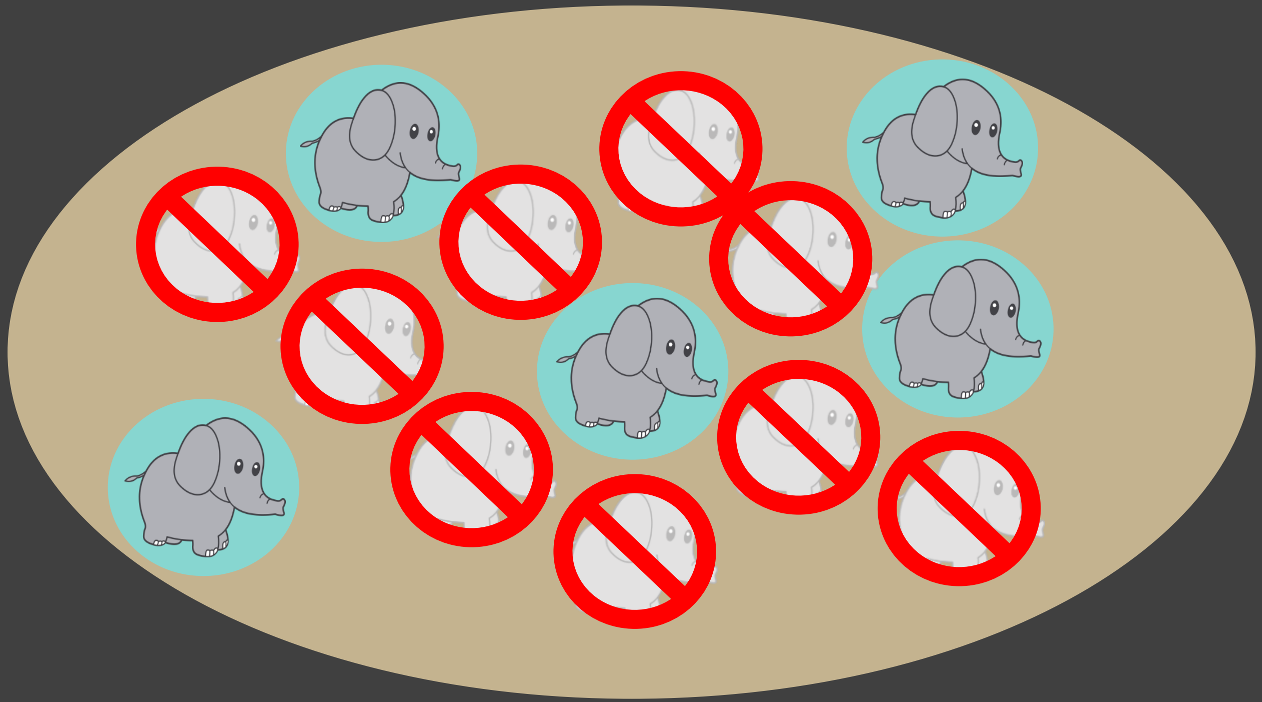
Em conjunto com *estimadores*

Para obter *estimativas*

Nossos estimadores devem produzir estimativas com propriedades boas

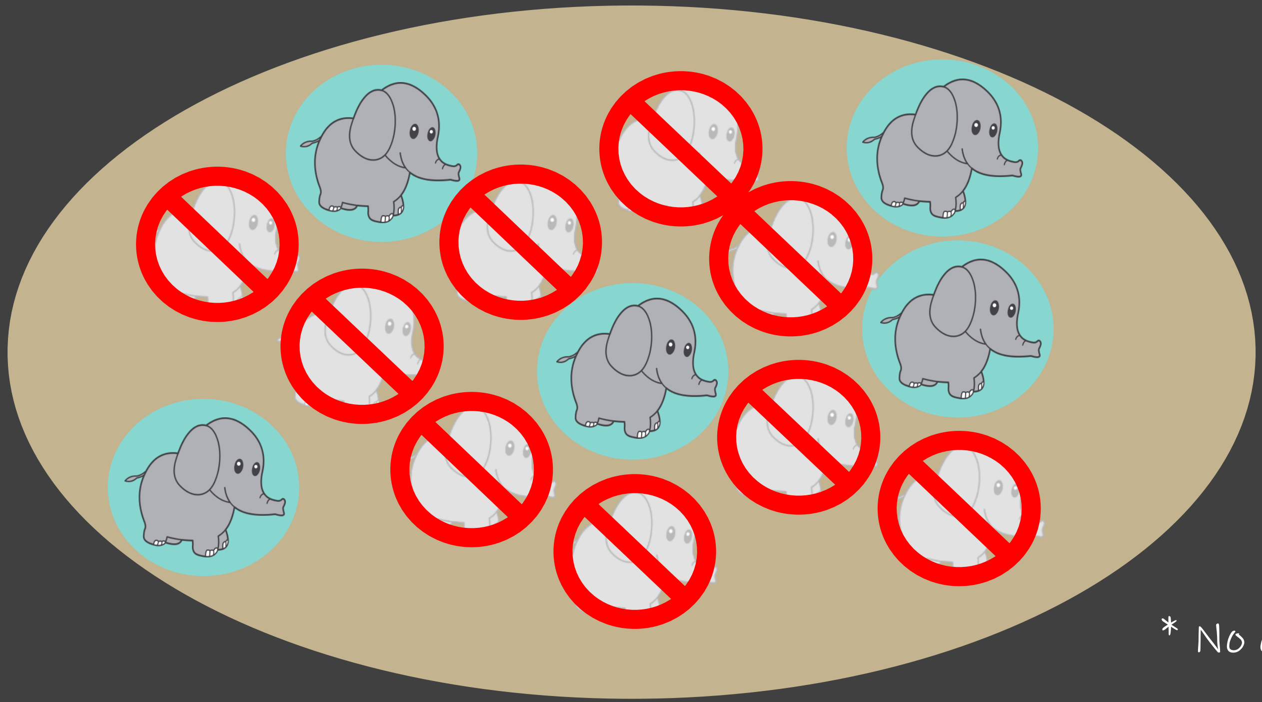
Dos *parâmetros populacionais*

No "mundo real", nós geralmente **não temos como coletar mais dados** para comparar estimativas a partir de várias amostras.



No "mundo real", nós geralmente **não temos como coletar mais dados** para comparar estimativas a partir de várias amostras.

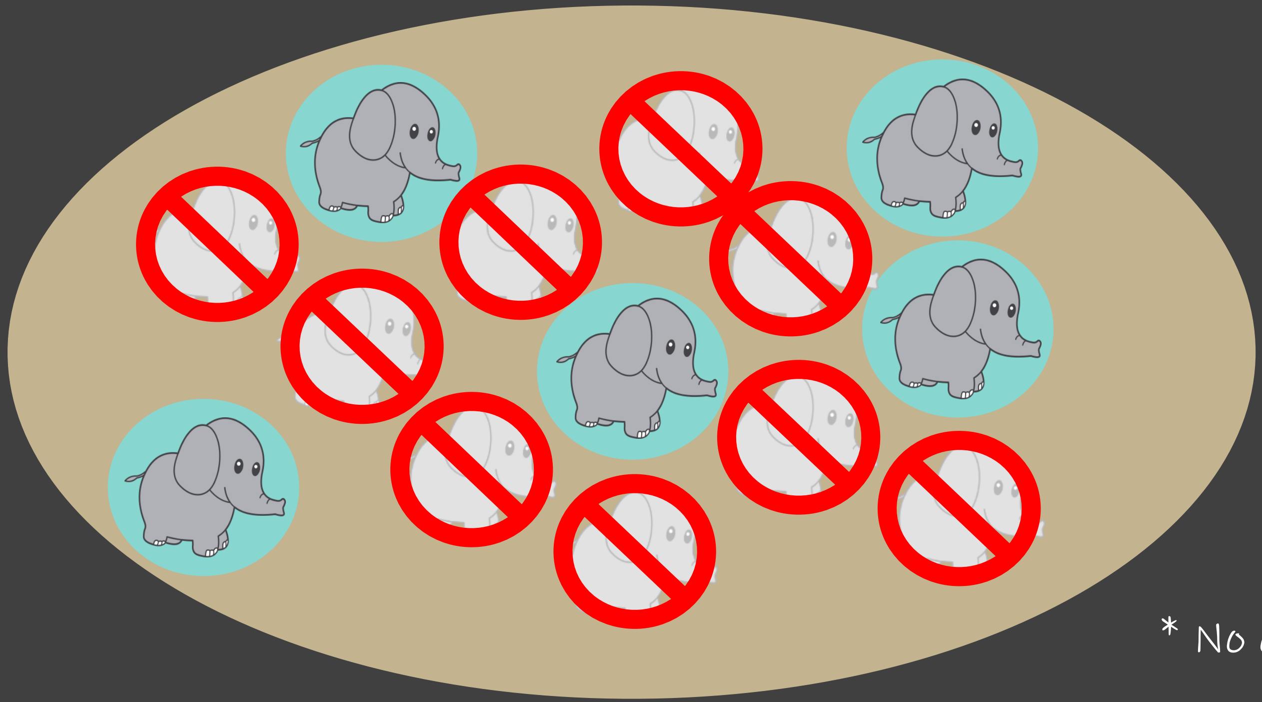
Nosso estimador irá produzir um número* (ou intervalo) e teremos que confiar que ele está sendo informativo a respeito da população de interesse.



* No caso bayesiano obteremos uma densidade de probabilidade e não apenas um número. Já iremos discutir sobre isso.

No "mundo real", nós geralmente **não temos como coletar mais dados** para comparar estimativas a partir de várias amostras.

Nosso estimador irá produzir um número* (ou intervalo) e teremos que confiar que ele está sendo informativo a respeito da população de interesse.



Uma forma de "dormirmos tranquilos" é utilizar **estimadores com boas propriedades teóricas**

(mesmo que isso seja válido apenas sob certas condições de regularidade).

* No caso bayesiano obteremos uma densidade de probabilidade e não apenas um número. Já iremos discutir sobre isso.

O estimador de máxima verossimilhança

✓ Nem sempre é possível garantir que o estimador de MQO é Blue;

Created by Adrien Coquet
from Noun Project

O estimador de máxima verossimilhança

- ✓ Nem sempre é possível garantir que o estimador de MQO é Blue;
- ✓ Nem sempre DÁ para calcular o estimador de MQO (nem tudo na vida é regressão linear): $y_i^\delta = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i,\ \varepsilon_i \sim IID(0, \sigma^2)$

O estimador de máxima verossimilhança

- ✓ Nem sempre é possível garantir que o estimador de MQO é Blue;
- ✓ Nem sempre DÁ para usar o estimador de MQO (nem tudo na vida é regressão linear)
- ✓ Sob algumas condições, o estimador de MQO e o de MV serão iguais;

O estimador de máxima verossimilhança

- ✓ Nem sempre é possível garantir que o estimador de MQO é Blue;
- ✓ Nem sempre DÁ para usar o estimador de MQO (nem tudo na vida é regressão linear)
- ✓ Sob algumas condições, o estimador de MQO e o de MV serão iguais;
- ✓ O EMV é mais geral que o MQO podendo ser calculado para diferentes "modelos"

Created by Adrien Coquet
from Noun Project

O estimador de máxima verossimilhança

- ✓ Nem sempre é possível garantir que o estimador de MQO é Blue;
- ✓ Nem sempre DÁ para usar o estimador de MQO (nem tudo na vida é regressão linear)
- ✓ Sob algumas condições, o estimador de MQO e o de MV serão iguais;
- ✓ O EMV é mais geral que o MQO podendo ser calculado para diferentes "modelos"

Created by Adrien Coquet from Noun Project

O estimador de MV, quando atendidas as hipóteses de regularidade, tem as seguintes propriedades:

- Consistência
- Normalidade assintótica
- Eficiência assintótica
- Invariância

Nem tudo são flores na vida do EMV

- ✓ Precisamos ter especificado **corretamente** o modelo;

Nem tudo são flores na vida do EMV

- ✓ Precisamos ter especificado corretamente o modelo;
- ✓ As propriedades em **amostras finitas** podem ser muito diferentes das propriedades **assintóticas** que tanto gostamos;

Nem tudo são flores na vida do EMV

- ✓ Precisamos ter especificado corretamente o modelo;
- ✓ As propriedades em amostras finitas podem ser muito diferentes das propriedades assintóticas que tanto gostamos;
- ✓ Nem sempre dá para **escrever** facilmente a **função de verossimilhança**

Nem tudo são flores na vida do EMV

- ✓ Precisamos ter especificado corretamente o modelo;
- ✓ As propriedades em amostras finitas podem ser muito diferentes das propriedades assintóticas que tanto gostamos;
- ✓ Nem sempre dá para escrever facilmente a função de verossimilhança
    - ✓ Algumas vezes você até consegue, mas **maximizar é um problema**...

Created by Jessica Scott
from Noun Project

Exemplo

Queremos saber se a moeda é honesta, ou seja,

$$\mathbb{P}(Panda) = \mathbb{P}(Não\ panda) = \frac{1}{2}$$

Vamos definir

$$\mathbb{P}(Panda) \stackrel{\text{def}}{=} \theta$$

Suponha que a moeda foi lançada 3 vezes e foram observados 3 pandas. Qual seria sua estimativa para θ?

Precisamos da f.m.p. de y, o resultado do lançamento da moeda.

Se

$$y \sim Bernoulli(\theta),$$

então

$$\mathrm{p}(\mathrm{y}|\theta) = \theta^{y} \cdot (1-\theta)^{1-y}$$

Precisamos da f.m.p. de y, o resultado do lançamento da moeda.

Se

$$y \sim Bernoulli(\theta),$$

então

$$\mathrm{p}(\mathrm{y}|\theta) = \theta^{y} \cdot (1-\theta)^{1-y}$$

Para obter a verossimilhança, escrevemos a densidade conjunta:

$$\ell(\theta|y) = \theta^{\sum_{i=1}^{n} y} \cdot (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} y}$$

Precisamos da f.m.p. de y, o resultado do lançamento da moeda.

Se

$$y \sim Bernoulli(\theta),$$

então

$$\mathrm{p}(\mathrm{y}|\theta) = \theta^{y} \cdot (1-\theta)^{1-y}$$

Para obter a verossimilhança, escrevemos a densidade conjunta:

$$\ell(\theta|y) = \theta^{\sum_{i=1}^{n} y} \cdot (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} y}$$

Tomamos o log e maximizamos para obter

$$\hat{\theta}_{MV} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

Agora, podemos aplicar os dados da nossa amostra,

$n = 3$ **e** $\sum y = 3$.

Agora, podemos aplicar os dados da nossa amostra,

$n = 3$ **e** $\sum y = 3$.

$$\hat{\theta}_{MV} = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_i}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Agora, podemos aplicar os dados da nossa amostra,

$n = 3$ **e** $\sum y = 3$.

$$\hat{\theta}_{MV} = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_i}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Nosso melhor palpite
sobre a probabilidade
de sair panda nessa
moeda é igual a 1 !?!

Agora, podemos aplicar os dados da nossa amostra,

$n = 3$ **e** $\sum y = 3$.

$$\hat{\theta}_{MV} = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_i}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

O EMV sofre de excesso de ajuste, i.e., ele não atribui probabilidade aquilo que não aconteceu!

Created by Anniken & Andreas from Noun Project

Agora, podemos aplicar os dados da nossa amostra,

$$n = 3 \text{ e } \sum y = 3.$$

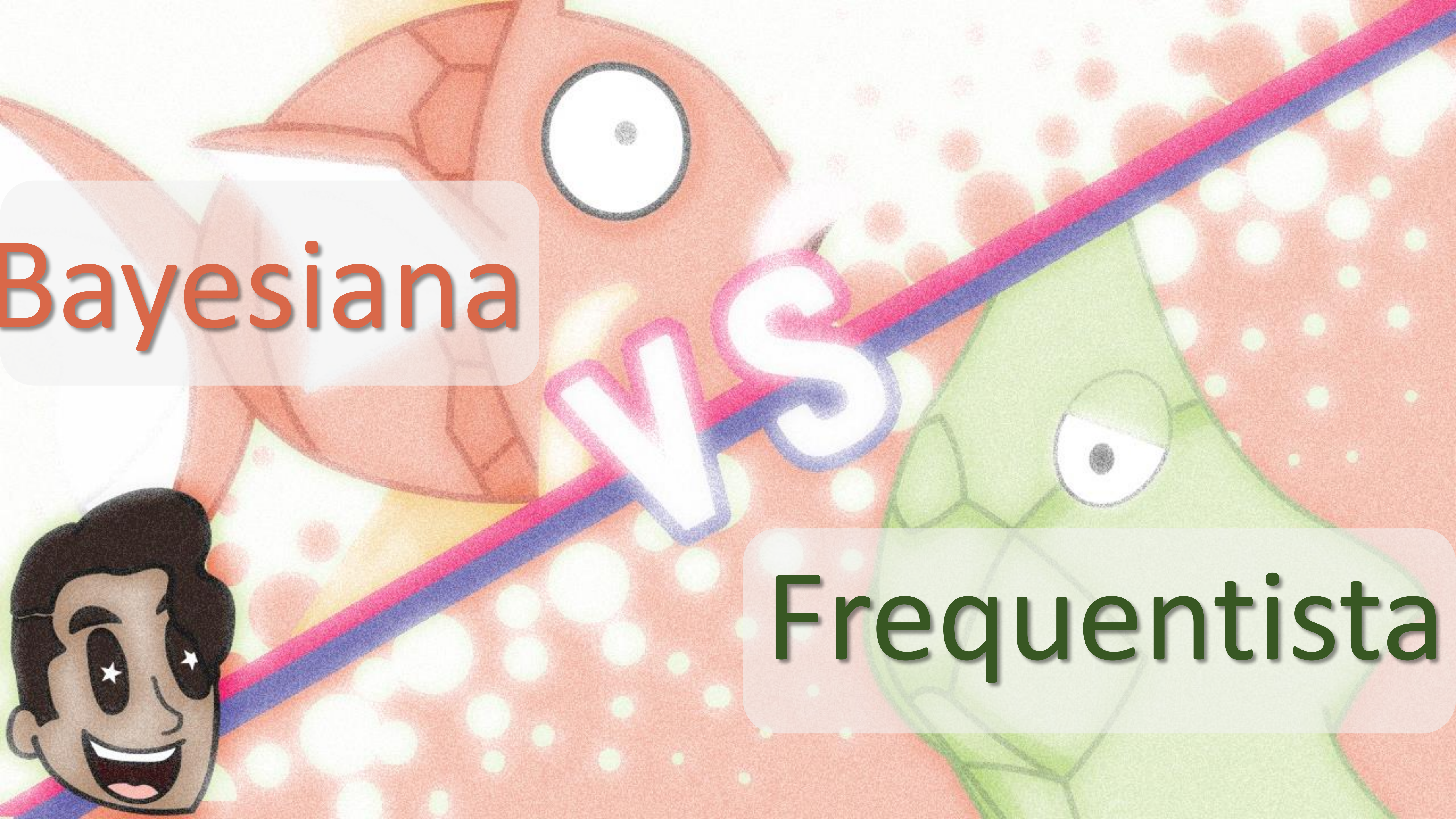
$$\hat{\theta}_{MV} = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_i}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Created by Anniken & Andreas
from Noun Project

Então agora o que podemos fazer?

Podemos utilizar inferência bayesiana!

Created by Anniken & Andreas
from Noun Project


Bayesiana
vs
Frequentista

Inferência Clássica (ou frequentista)

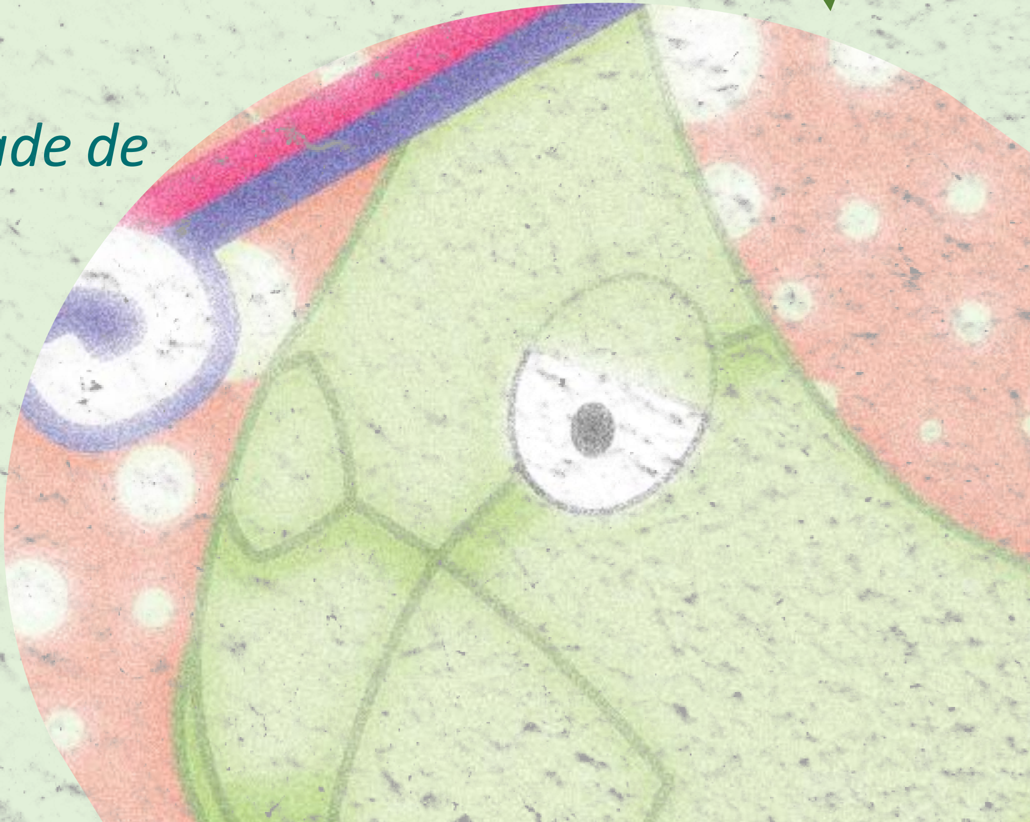
Os parâmetros são quantidades fixas (e desconhecidas)

Usamos amostras em combinação com estimadores para obter estimativas para estas quantidades

A inferência se baseia em p-valores: *a probabilidade de encontrar um valor igual ou mais extremo assumindo que a hipótese nula é verdadeira*

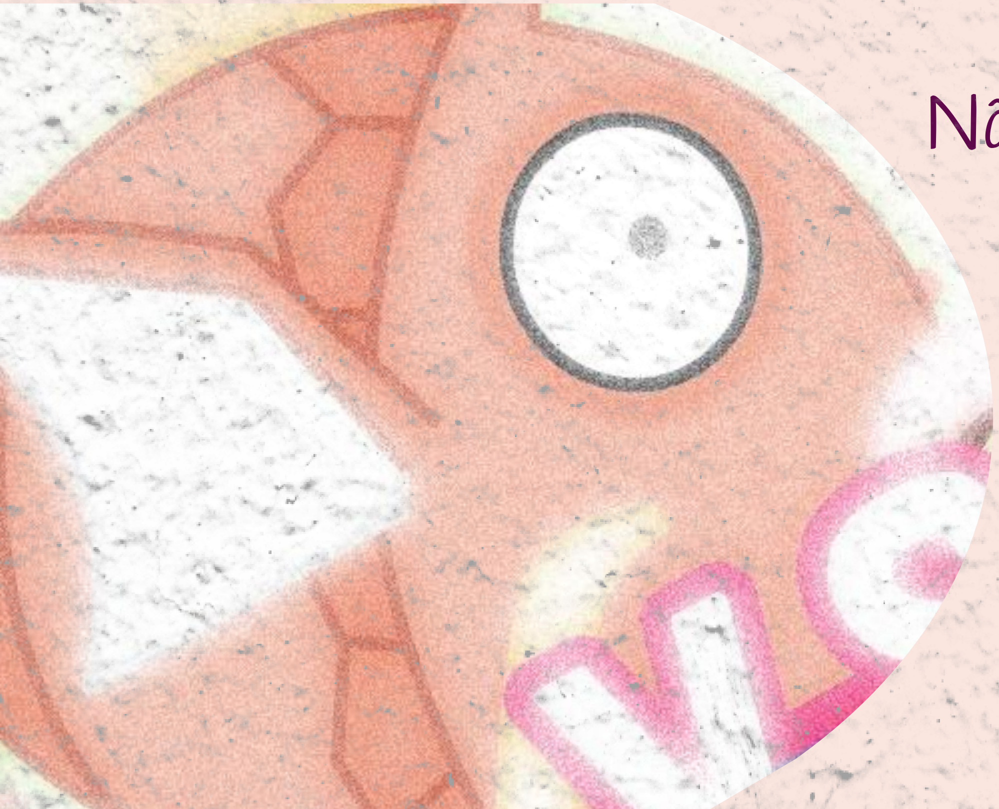
Usamos intervalos com $1 - \alpha\%$ de confiança:
Se fossem coletadas 100 amostras, esperaríamos que $1 - \alpha\%$ dos intervalos construídos contivessem o verdadeiro valor do parâmetro.

Parâmetros estáticos, como o Metapod



Inferência Bayesiana

Os parâmetros seguem densidade de probabilidade e seus valores podem mudar de posição (mas não muito), como o Magikarp.



Os parâmetros são variáveis aleatórias

Usamos informações dos dados (verossimilhança) com informações a priori para obter a **densidade a posteriori**

Não existem p-valores aqui! As probabilidades para os parâmetros podem ser calculadas diretamente

Usamos intervalos de credibilidade:

A probabilidade do parâmetro estar no intervalo [a;b] é igual a 0.95.

Definições Básicas

Teorema de Bayes

$$P(A|B) = \frac{\overbrace{P(B|A) \cdot P(A)}^{P(A \cap B)}}{P(B)}$$

Teorema de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Informação de
A dado B

Teorema de Bayes

Informação de
B dado A

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Informação de
A dado B

Teorema de Bayes

Informação de
B dado A

Informação de
A sem saber de B

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Informação de
A dado B

Teorema de Bayes

Informação dos dados
(verossimilhança)

Informação prévia sobre A
Priori para A

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Posteriori para A

Exemplo (o retorno)

Queremos saber se a moeda é honesta, ou seja,

$$\mathbb{P}(\theta) = \mathbb{P}(1-\theta) = \frac{1}{2}$$

Para a estimação bayesiana, precisaremos de uma priori

Queremos saber se a moeda é honesta, ou seja,

$$\mathbb{P}(\theta) = \mathbb{P}(1-\theta) = \frac{1}{2}$$

Para a estimação bayesiana, precisaremos de uma priori

O que sabemos sobre moedas?

Created by Anniken & Andreas from Noun Project

Podemos considerar que θ é uma quantia aleatória e escolher uma densidade a priori:

- ✓ Como θ é uma probabilidade, deve estar entre zero e um;

Created by Anniken & Andreas
from Noun Project

Podemos considerar que θ é uma quantia aleatória e escolher uma densidade a priori:

- ✓ Como θ é uma probabilidade, deve estar entre zero e um;
- ✓ Além disso, vamos supôr que θ assume qualquer valor neste intervalo;

Created by Anniken & Andreas
from Noun Project

Podemos considerar que θ é uma quantia aleatória e escolher uma densidade a priori:

- ✓ Como θ é uma probabilidade, deve estar entre zero e um;
- ✓ Além disso, vamos supôr que θ assume qualquer valor neste intervalo;
- ✓ Vamos assumir a moeda é (possivelmente) honesta, isto é, acreditamos que θ tem uma maior "chance" de ser 50%.

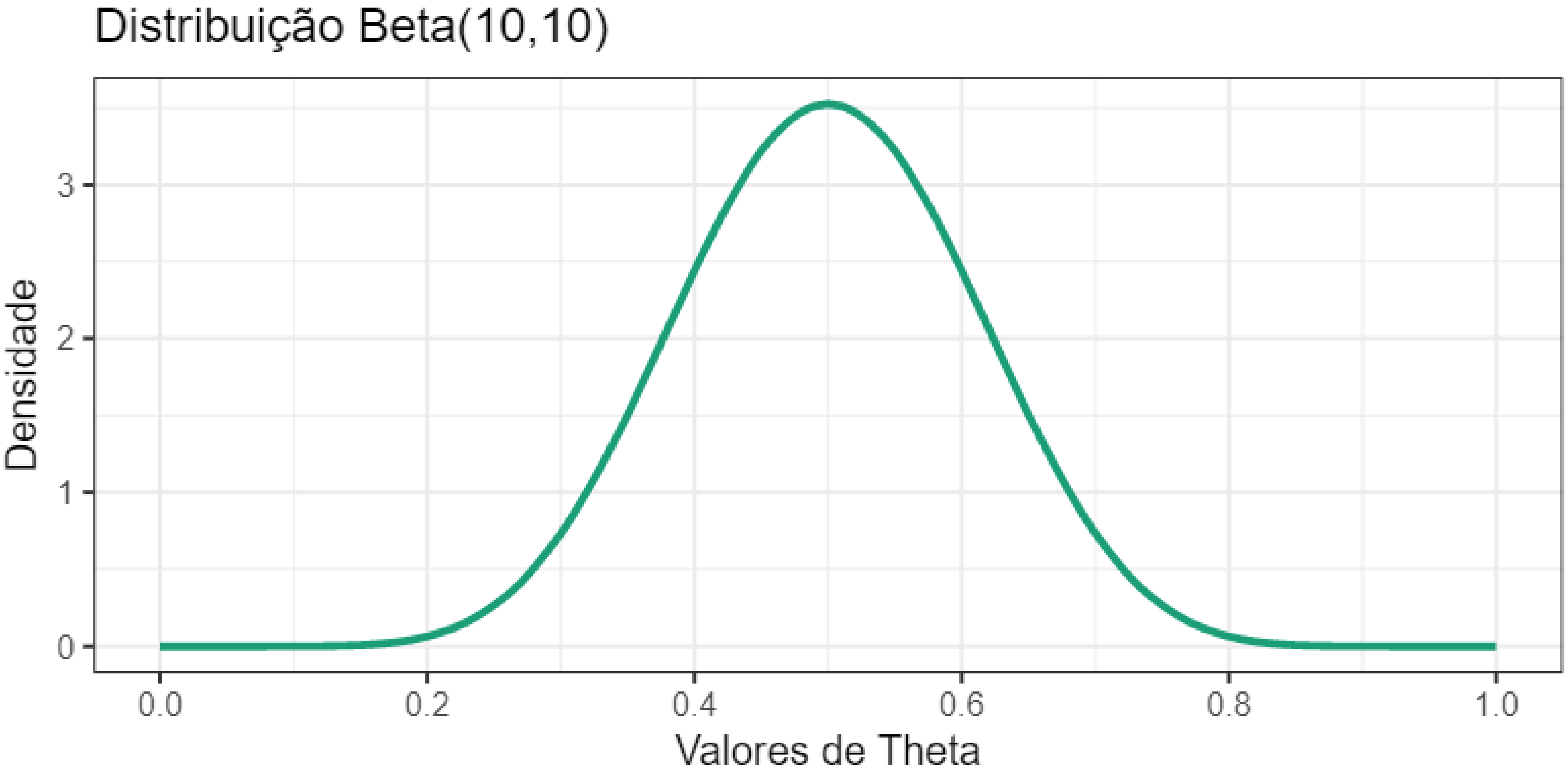
Created by Anniken & Andreas
from Noun Project

Podemos considerar que θ é uma quantia aleatória e escolher uma densidade a priori:

Created by Anniken & Andreas
from Noun Project

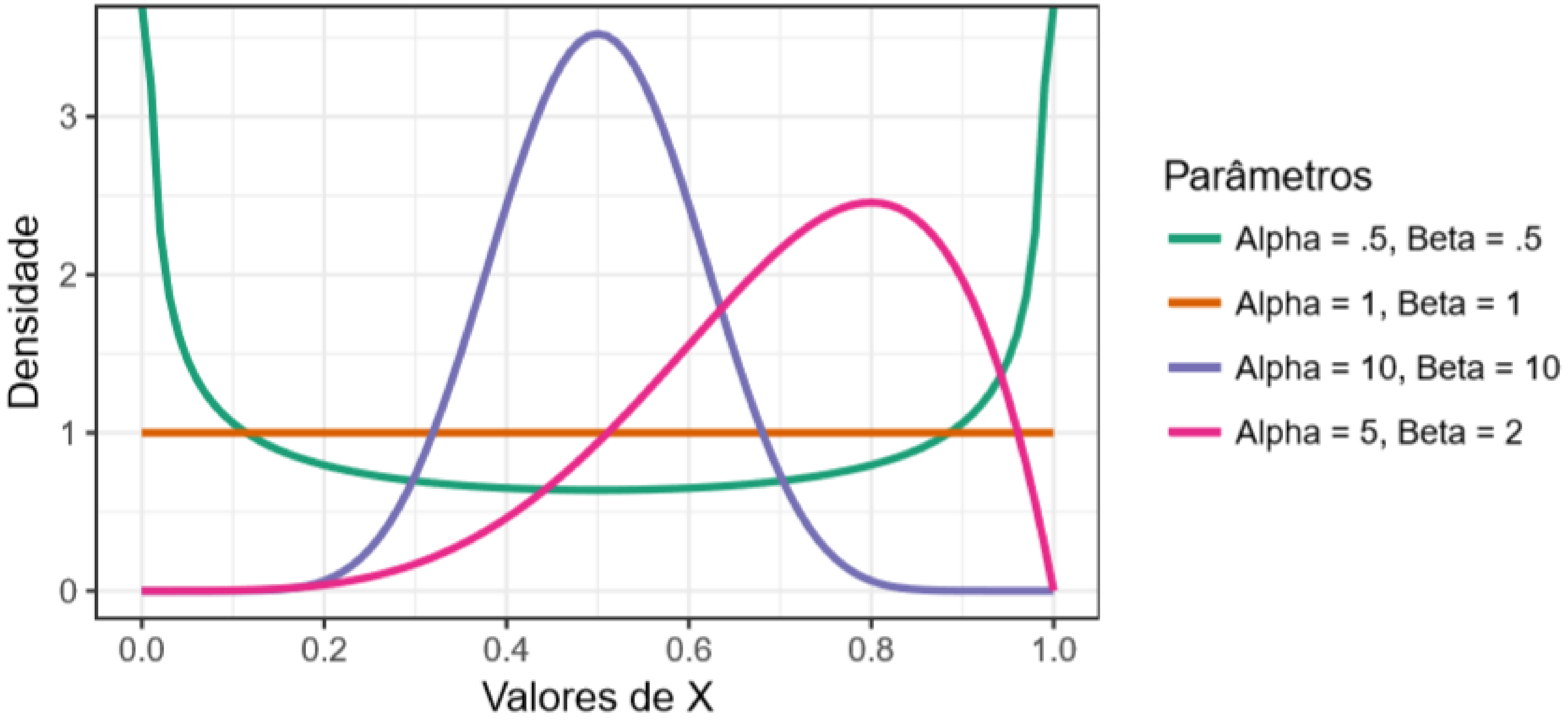
- ✓ Como θ é uma probabilidade, deve estar entre zero e um;
- ✓ Além disso, vamos supôr que θ assume qualquer valor neste intervalo;
- ✓ Vamos assumir a moeda é (possivelmente) honesta, isto é, acreditamos que θ tem uma maior "chance" de ser 50%.
- ✓ A f.d.p. de uma distribuição $Beta(\alpha, \beta)$ para θ é dada por

$$f_\theta = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$$



Distribuição Beta(10,10)
Densidade
Valores de Theta
0
1
2
3
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Figura 1 – Diferentes formas da distribuição $Beta(\alpha, \beta)$



Podemos considerar que θ é uma quantia aleatória e escolher uma densidade a priori:

- ✓ Obtemos a posteriori através do produto da verossimilhança com a priori

Created by Anniken & Andreas
from Noun Project

$$f(\theta|y) \propto \overbrace{\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}}^{\text{Priori}} \cdot \overbrace{\theta^{\sum_{i=1}^{n} y} \cdot (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} y}}^{\text{Verossimilhança}}$$

Podemos considerar que θ é uma quantia aleatória e escolher uma densidade a priori:

- ✓ Obtemos a posteriori através do produto da verossimilhança com a priori

Created by Anniken & Andreas from Noun Project

$$f(\theta|y) \propto \overbrace{\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}}^{\text{Priori}} \cdot \overbrace{\theta^{\sum_{i=1}^{n} y} \cdot (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} y}}^{\text{Verossimilhança}}$$

$$\Rightarrow f(\theta|y) = \frac{\Gamma(\bar{\alpha}+\bar{\beta})}{\Gamma(\bar{\alpha})\Gamma(\bar{\beta})}\theta^{\bar{\alpha}-1}(1-\theta)^{\bar{\beta}-1}$$

* A conta inteira pode ser vista em http://sistemabu.udesc.br/pergamumweb/vinculos/000042/000042c2.pdf

Com $\bar{\alpha} = \alpha + \sum y_i$ e $\bar{\beta} = \beta + n - \sum y_i$

Se usarmos uma densidade a priori beta, a posteriori resultante neste caso também é beta

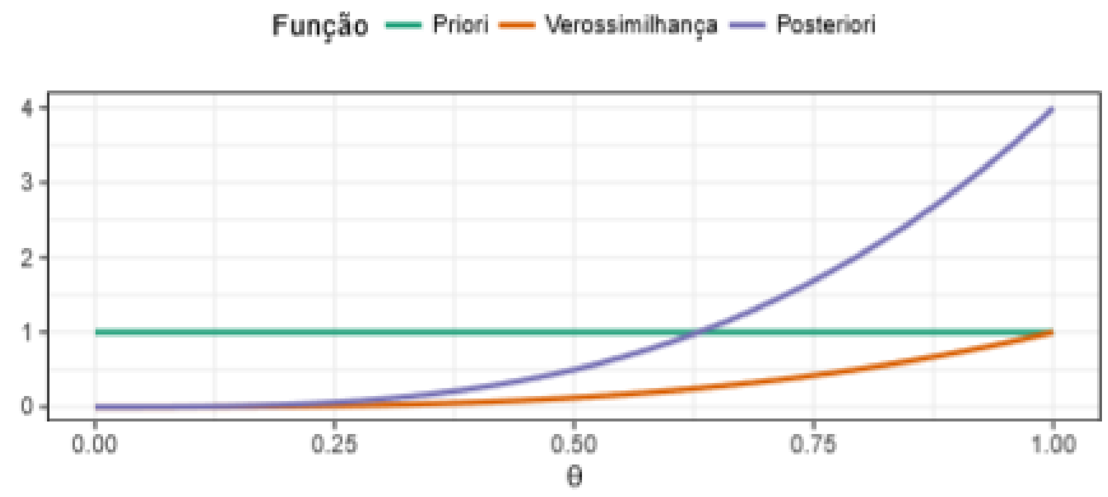
- ✓ Os parâmetros da posteriori são combinações dos hiperparâmetros da priori com os valores da verossimilhança.

Created by Anniken & Andreas
from Noun Project

$$\bar{\alpha} = \sum y + \underline{\alpha} \quad \text{e} \quad \bar{\beta} = \underline{\beta} + n - \sum y$$

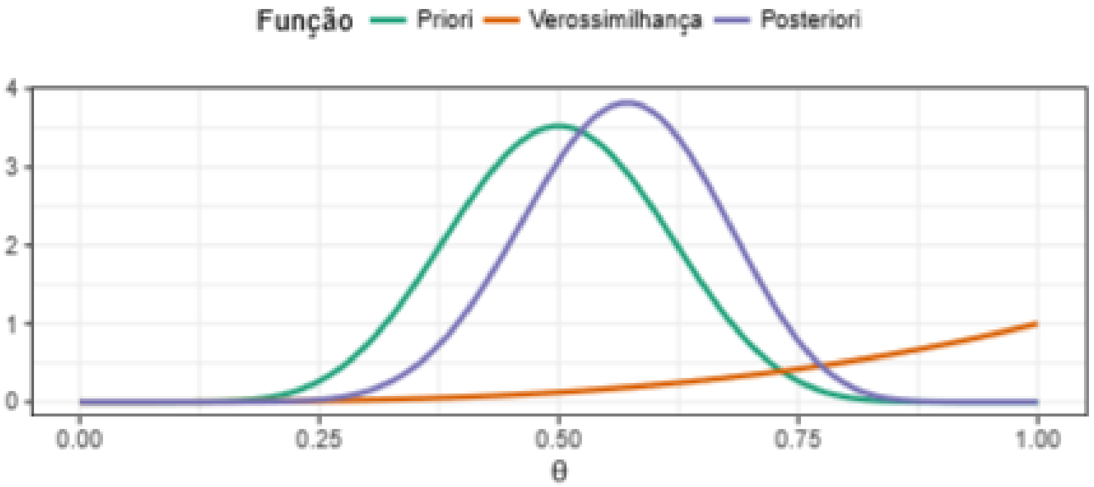
Para 3 pandas, temos que o valor esperado de θ a posteriori, se usarmos uma Beta(1,1) como priori, será 0.8.

Figura 2 – Triplots para duas prioris diferentes no exemplo (2.3)



(a) Priori Beta(1,1) e posteriori Beta(4,1)

Figura 2 – Triplots para duas prioris diferentes no exemplo (2.3)



(b) Priori Beta(10,10) e posteriori Beta(23,10)

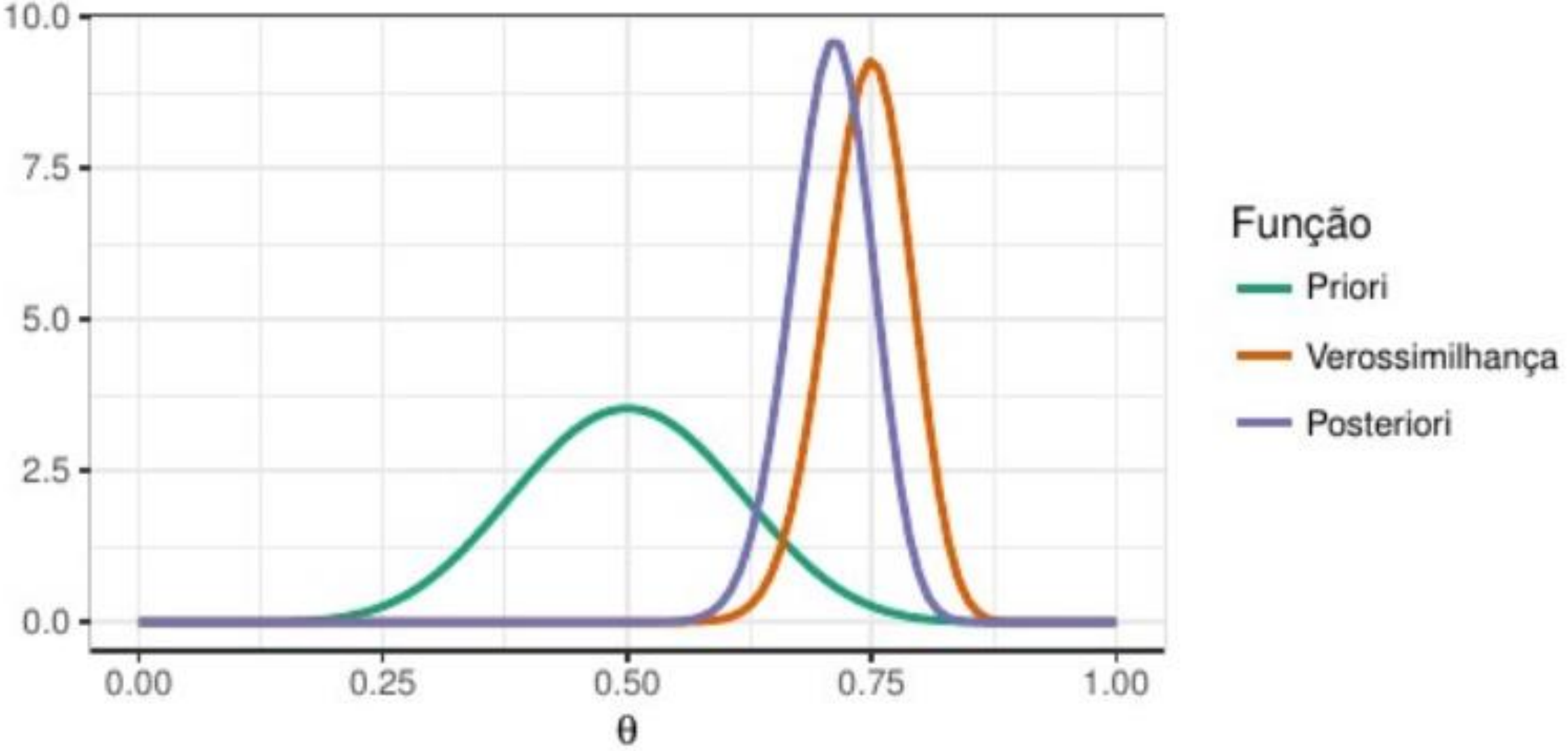


Figura 15: Triplot para priori Beta(10,10) e verossimilhança Binomial com $n = 100$ e $\sum y = 75$.

Aplicações contemporâneas

Bayesiana na vida dos economistas

- ✓ Métodos bayesianos permitem incorporar prioris de maneira mais intuitiva aos modelos
- ✓ Modelos atuais, especialmente modelos macroeconômicos, são complexos e nem sempre métodos clássicos são possíveis de serem utilizados
- ✓ Bancos Centrais utilizam metodologia bayesiana para estimação de modelos VAR, DSGE, etc.

Professor Christopher Sims,
prêmio Nobel em Economia (2011):
http://www.princeton.edu/~sims/

Bayesian Methods in Applied Econometrics, or, Why Econometrics Should Always and Everywhere Be Bayesian

Christopher A. Sims
Princeton University
sims@princeton.edu

August 6, 2007

UNDERSTANDING NON-BAYESIANS

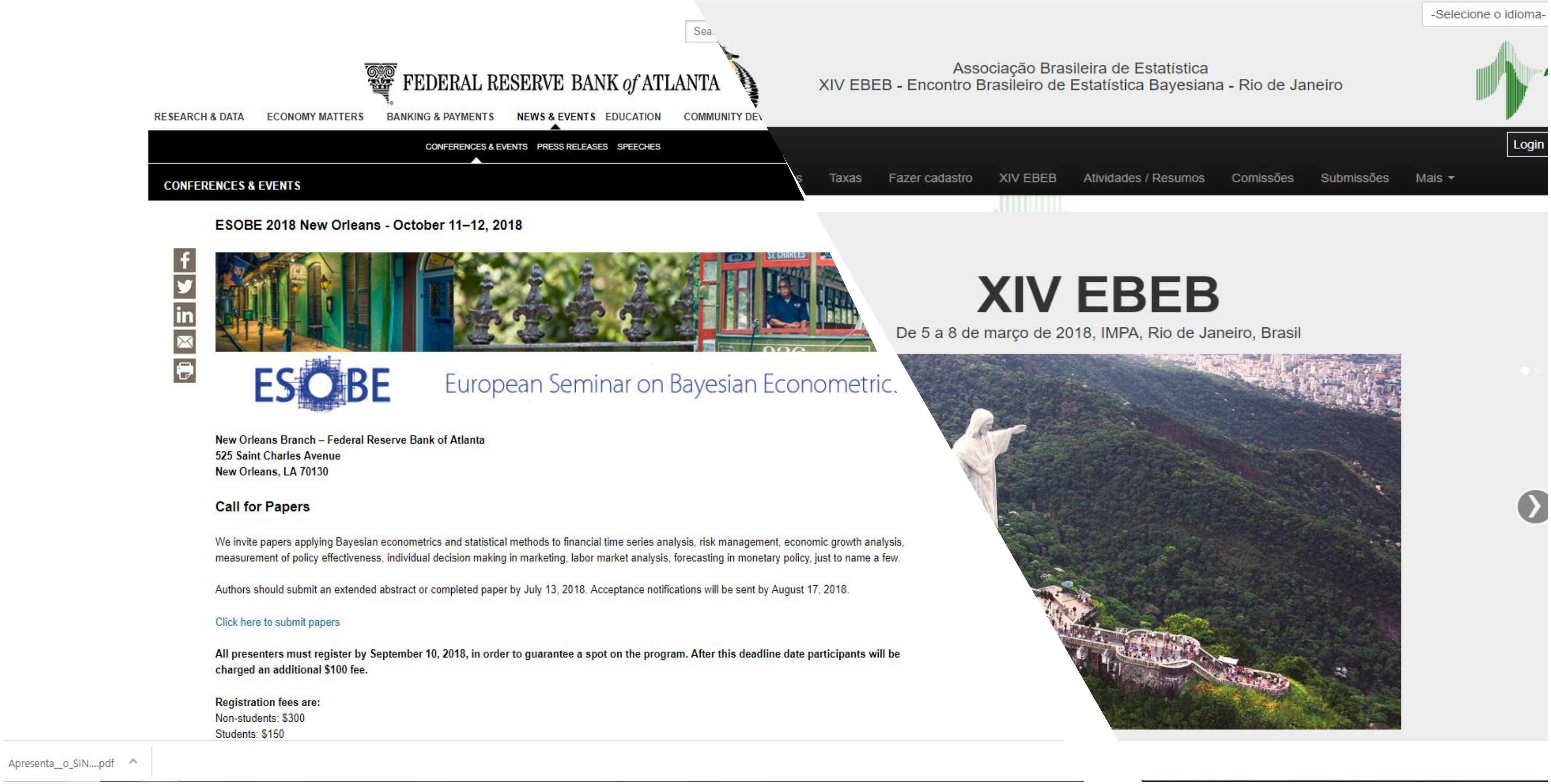
ABSTRACT.

I. INTRODUCTION

Once one becomes used to thinking about inference from a Bayesian perspective, it becomes difficult to understand why many econometricians are uncomfortable with that way of thinking. But some very good econometricians are either firmly non-Bayesian or (more commonly these days) think of Bayesian approaches as a "tool" which might sometimes be appropriate, sometimes not. This paper tries to articulate the counterarguments to a Bayesian perspective. There are some counterarguments that are frequently expressed, but are not hard to dismiss. Others, though, correspond to types of application where convenient, seemingly sensible, frequentist tools exist, while Bayesian approaches are either not yet developed or seem quite incon-

PROBABILITY MODELS FOR MONETARY POLICY DECISIONS

CHRISTOPHER A. SIMS



Dois exemplos de trabalhos de econometria bayesiana: [Pôster na ESOBE](#) e [Pôster na EBEB](#).


Obrigada!