Revisão de Probabilidade e Estatística

Aula 1 - Parte 2

Aishameriane Schmidt

PPGECO/UFSC

Fevereiro de 2019.

Programa

Aula 1

1. ~~**Teoria dos conjuntos:** Revisão dos principais resultados de teoria dos conjuntos.~~
2. **Definições de probabilidade:** axiomática, frequentista e subjetiva.
3. **Probabilidade de eventos.**
4. **Independência de eventos, probabilidade condicional e teorema de Bayes.** - *Possivelmente fica para amanhã*

Probabilidade

Um pouco de história

- A probabilidade surgiu a partir da discussão de Pierre de Fermat e Blaise Pascal a respeito do problema dos pontos (no ano de 1654);

Probabilidade

Um pouco de história

- A probabilidade surgiu a partir da discussão de Pierre de Fermat e Blaise Pascal a respeito do problema dos pontos (no ano de 1654);
- Sabemos que a matemática é uma das ciências mais antigas existentes;
  - Se a probabilidade é uma área da matemática, por que levou tanto tempo para que fosse formalizada?
- Algumas referências: `https://tinyurl.com/yabd7jbg`, [Bernstein, 1996] (probabilidade, atuária, estatística) e [Salsburg, 2001] (estatística)

Probabilidade

Definições básicas [Mittelhammer, 2013]

Empírica ou Clássica

Número de ocorrências de um fenômeno em n repetições de um experimento

Axiomática

Probabilidade como uma função que satisfaz os três axiomas de Kolmogorov

Subjetiva

Representação de uma crença, pode ser atribuída a tudo que é incerto ou desconhecido

Definição

Probabilidade por frequência relativa

Seja n o número de vezes que um experimento é repetido sob condições idênticas. Seja A o evento no espaço amostral Ω e defina n_A o número de vezes que o evento A ocorreu. Então, a probabilidade do evento A é igual a:

Probabilidade

Probabilidade clássica ou por frequência relativa

Definição

Probabilidade por frequência relativa

Seja n o número de vezes que um experimento é repetido sob condições idênticas. Seja A o evento no espaço amostral Ω e defina n_A o número de vezes que o evento A ocorreu. Então, a probabilidade do evento A é igual a:

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

Probabilidade

Probabilidade subjetiva

Definição

Probabilidade subjetivista

Um número real, $\mathbb{P}(A)$, contido no intervalo $[0, 1]$ e escolhido para expressar o grau de crença pessoal na possibilidade de ocorrência de um evento A, sendo que 1 representa absoluta certeza.

Definição

Probabilidade axiomática

Seja $\mathbb{P}$ uma função que tem como domínio uma *σ-álgebra definida sobre o espaço amostral $\mathscr{F}$* e contradomínio em $\mathbb{R}$, isto é, temos $\mathbb{P} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$, onde $\mathscr{F}$ é uma σ-algebra em Ω. Diremos que $\mathbb{P} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ é uma função de probabilidade (ou medida de probabilidade) se atender aos seguintes axiomas:

Probabilidade

Probabilidade axiomática

Definição

Probabilidade axiomática

Seja $\mathbb{P}$ uma função que tem como domínio uma *σ-álgebra definida sobre o espaço amostral $\mathscr{F}$* e contradomínio em $\mathbb{R}$, isto é, temos $\mathbb{P} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$, onde $\mathscr{F}$ é uma σ-algebra em Ω. Diremos que $\mathbb{P} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ é uma função de probabilidade (ou medida de probabilidade) se atender aos seguintes axiomas:

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0, \; \forall \; A \subset \Omega$ (*Axioma da não-negatividade*);

Probabilidade

Probabilidade axiomática

Definição

Probabilidade axiomática

Seja $\mathbb{P}$ uma função que tem como domínio uma *σ-álgebra definida sobre o espaço amostral $\mathscr{F}$* e contradomínio em $\mathbb{R}$, isto é, temos $\mathbb{P} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$, onde $\mathscr{F}$ é uma σ-algebra em Ω. Diremos que $\mathbb{P} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ é uma função de probabilidade (ou medida de probabilidade) se atender aos seguintes axiomas:

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0, \ \forall \ A \subset \Omega$ (*Axioma da não-negatividade*);
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (*Axioma da normalização*);

Probabilidade

Probabilidade axiomática

Definição

Probabilidade axiomática

Seja $\mathbb{P}$ uma função que tem como domínio uma *σ-álgebra definida sobre o espaço amostral $\mathscr{F}$* e contradomínio em $\mathbb{R}$, isto é, temos $\mathbb{P} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$, onde $\mathscr{F}$ é uma σ-algebra em Ω. Diremos que $\mathbb{P} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ é uma função de probabilidade (ou medida de probabilidade) se atender aos seguintes axiomas:

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0, \ \forall \ A \subset \Omega$ (*Axioma da não-negatividade*);
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (*Axioma da normalização*);
3. Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos em Ω, $\mathbb{P}(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$ (*Axioma da aditividade enumerável*).

Probabilidade

Probabilidade axiomática

Definição

Probabilidade axiomática

Seja $\mathbb{P}$ uma função que tem como domínio uma *σ-álgebra definida sobre o espaço amostral $\mathscr{F}$* e contradomínio em $\mathbb{R}$, isto é, temos $\mathbb{P} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$, onde $\mathscr{F}$ é uma σ-algebra em Ω. Diremos que $\mathbb{P} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ é uma função de probabilidade (ou medida de probabilidade) se atender aos seguintes axiomas:

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0, \ \forall \ A \subset \Omega$ (*Axioma da não-negatividade*);
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (*Axioma da normalização*);
3. Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos em Ω, $\mathbb{P}(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$ (*Axioma da aditividade enumerável*).

Iremos diferenciar a *função de probabilidade* da *probabilidade*, sendo que esta última é a imagem de um evento através da função $\mathbb{P}$ (cont.)

Probabilidade

Axiomas de Kolmogorov

Qualquer função cujo domínio é uma emphσ-álgebra sobre espaço amostral com contradomínio em $\mathbb{R}$ que atende os axiomas $1, 2$ e 3 será chamada de *medida de probabilidade*.

Probabilidade

Axiomas de Kolmogorov

Qualquer função cujo domínio é uma emphσ-álgebra sobre espaço amostral com contradomínio em $\mathbb{R}$ que atende os axiomas $1, 2$ e 3 será chamada de *medida de probabilidade*.

Observe que a imagem da função é o intervalo $[0, 1]$ como decorrência dos axiomas. A imagem de um evento $A \subset \Omega$ gerada pela medida de probabilidade $\mathbb{P}(\cdot)$ é chamada de ***probabilidade do evento*** A.

Probabilidade

Axiomas de Kolmogorov

Qualquer função cujo domínio é uma emphσ-álgebra sobre espaço amostral com contradomínio em $\mathbb{R}$ que atende os axiomas $1, 2$ e 3 será chamada de *medida de probabilidade*.

Observe que a imagem da função é o intervalo $[0, 1]$ como decorrência dos axiomas. A imagem de um evento $A \subset \Omega$ gerada pela medida de probabilidade $\mathbb{P}(\cdot)$ é chamada de ***probabilidade do evento** A*.

A tripla $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}(\cdot))$ é chamada de *espaço de probabilidade* e contém toda a informação necessária para associar probabilidade aos eventos do experimento.

Referências I

Bernstein, P. (1996).
Against the gods: The remarkable story of risk.
Wiley New York.

Mittelhammer, R. (2013).
Mathematical statistics for economics and business.
Springer.

Salsburg, D. (2001).
The lady tasting tea: How statistics revolutionized science in the twentieth century.
Macmillan.