Revisão de Probabilidade e Estatística

Aula 1 - Parte 2

Aishameriane Schmidt

PPGECO/UFSC

Fevereiro de 2019.

Programa

Aula 1

1. ~~**Teoria dos conjuntos:** Revisão dos principais resultados de teoria dos conjuntos.~~
2. **Definições de probabilidade:** axiomática, frequentista e subjetiva.
3. **Probabilidade de eventos.**
4. **Independência de eventos, probabilidade condicional e teorema de Bayes.** - *Possivelmente fica para amanhã*

Probabilidade

Um pouco de história

- A probabilidade surgiu a partir da discussão de Pierre de Fermat e Blaise Pascal a respeito do problema dos pontos (no ano de 1654);

Probabilidade

Um pouco de história

- A probabilidade surgiu a partir da discussão de Pierre de Fermat e Blaise Pascal a respeito do problema dos pontos (no ano de 1654);
- Sabemos que a matemática é uma das ciências mais antigas existentes;
  - Se a probabilidade é uma área da matemática, por que levou tanto tempo para que fosse formalizada?
- Algumas referências: `https://tinyurl.com/yabd7jbg`, [Bernstein, 1996] (probabilidade, atuária, estatística) e [Salsburg, 2001] (estatística)

Probabilidade

Definições básicas [Mittelhammer, 2013]

Empírica ou Clássica

Número de ocorrências de um fenômeno em n repetições de um experimento

Axiomática

Probabilidade como uma função que satisfaz os três axiomas de Kolmogorov

Subjetiva

Representação de uma crença, pode ser atribuída a tudo que é incerto ou desconhecido

Probabilidade

Probabilidade clássica ou por frequência relativa

Definição

Probabilidade por frequência relativa

Seja n o número de vezes que um experimento é repetido sob condições idênticas. Seja A o evento no espaço amostral Ω e defina n_A o número de vezes que o evento A ocorreu. Então, a probabilidade do evento A é igual a:

Probabilidade

Probabilidade clássica ou por frequência relativa

Definição

Probabilidade por frequência relativa

Seja n o número de vezes que um experimento é repetido sob condições idênticas. Seja A o evento no espaço amostral Ω e defina n_A o número de vezes que o evento A ocorreu. Então, a probabilidade do evento A é igual a:

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

Definição

Probabilidade subjetivista

Um número real, $\mathbb{P}(A)$, contido no intervalo $[0, 1]$ e escolhido para expressar o grau de crença pessoal na possibilidade de ocorrência de um evento A, sendo que 1 representa absoluta certeza.

Definição

Probabilidade axiomática

Seja $\mathbb{P}$ uma função que tem como domínio o espaço amostral Ω e contradomínio em $\mathbb{R}$, isto é, temos $\mathbb{P} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$, onde $\mathscr{F}$ é uma σ-algebra em Ω. Diremos que $\mathbb{P} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ é uma função de probabilidade (ou medida de probabilidade) se atender aos seguintes axiomas:

Definição

Probabilidade axiomática

Seja $\mathbb{P}$ uma função que tem como domínio o espaço amostral Ω e contradomínio em $\mathbb{R}$, isto é, temos $\mathbb{P} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$, onde $\mathscr{F}$ é uma σ-algebra em Ω. Diremos que $\mathbb{P} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ é uma função de probabilidade (ou medida de probabilidade) se atender aos seguintes axiomas:

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0, \ \forall \ A \subset \Omega$ (*Axioma da não-negatividade*);

Definição

Probabilidade axiomática

Seja $\mathbb{P}$ uma função que tem como domínio o espaço amostral Ω e contradomínio em $\mathbb{R}$, isto é, temos $\mathbb{P} : \mathscr{F} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\mathscr{F}$ é uma σ-algebra em Ω. Diremos que $\mathbb{P} : \mathscr{F} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de probabilidade (ou medida de probabilidade) se atender aos seguintes axiomas:

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0, \ \forall \ A \subset \Omega$ (*Axioma da não-negatividade*);
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (*Axioma da normalização*);

Probabilidade

Probabilidade axiomática

Definição

Probabilidade axiomática

Seja $\mathbb{P}$ uma função que tem como domínio o espaço amostral Ω e contradomínio em $\mathbb{R}$, isto é, temos $\mathbb{P} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$, onde $\mathscr{F}$ é uma σ-algebra em Ω. Diremos que $\mathbb{P} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ é uma função de probabilidade (ou medida de probabilidade) se atender aos seguintes axiomas:

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0, \ \forall \ A \subset \Omega$ (*Axioma da não-negatividade*);
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (*Axioma da normalização*);
3. Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos em Ω, $\mathbb{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$ (*Axioma da aditividade enumerável*).

Probabilidade

Probabilidade axiomática

Definição

Probabilidade axiomática

Seja $\mathbb{P}$ uma função que tem como domínio o espaço amostral Ω e contradomínio em $\mathbb{R}$, isto é, temos $\mathbb{P} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$, onde $\mathscr{F}$ é uma σ-algebra em Ω. Diremos que $\mathbb{P} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ é uma função de probabilidade (ou medida de probabilidade) se atender aos seguintes axiomas:

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0, \ \forall\ A \subset \Omega$ (*Axioma da não-negatividade*);
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (*Axioma da normalização*);
3. Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos em Ω, $\mathbb{P}(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$ (*Axioma da aditividade enumerável*).

Iremos diferenciar a *função de probabilidade* da *probabilidade*, sendo que esta última é a imagem de um evento através da função $\mathbb{P}$ (cont.)

Probabilidade

Axiomas de Kolmogorov

Qualquer função cujo domínio é o espaço de eventos com contradomínio em $\mathbb{R}$ que atende os axiomas $1, 2$ e 3 será chamada de *medida de probabilidade*.

Qualquer função cujo domínio é o espaço de eventos com contradomínio em $\mathbb{R}$ que atende os axiomas $1, 2$ e 3 será chamada de *medida de probabilidade*.

Observe que a imagem da função é o intervalo $[0, 1]$ como decorrência dos axiomas. A imagem de um evento $A \subset \Omega$ gerada pela medida de probabilidade $\mathbb{P}(\cdot)$ é chamada de ***probabilidade do evento*** A.

Qualquer função cujo domínio é o espaço de eventos com contradomínio em $\mathbb{R}$ que atende os axiomas $1, 2$ e 3 será chamada de *medida de probabilidade*.

Observe que a imagem da função é o intervalo $[0, 1]$ como decorrência dos axiomas. A imagem de um evento $A \subset \Omega$ gerada pela medida de probabilidade $\mathbb{P}(\cdot)$ é chamada de ***probabilidade do evento*** A.

A tripla $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}(\cdot))$ é chamada de *espaço de probabilidade* e contém toda a informação necessária para associar probabilidade aos eventos do experimento.

Probabilidade

Consequências dos Axiomas de Kolmogorov

Lema

A probabilidade de nada ocorrer é zero

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Lema

A probabilidade de nada ocorrer é zero

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Esboço da demonstração:

- Temos à nossa disposição apenas os axiomas de Kolmogorov e as propriedades de conjuntos (que podemos tomar emprestados para eventos);
- Iremos definir uma sequência de eventos de maneira conveniente e a partir disso utilizar os axiomas.

Probabilidade

Consequências dos Axiomas de Kolmogorov

Lema

A probabilidade da união é a soma das probabilidades se os eventos forem disjuntos

Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *são disjuntos, então* $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.

Probabilidade

Consequências dos Axiomas de Kolmogorov

Lema

A probabilidade da união é a soma das probabilidades se os eventos forem disjuntos

Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *são disjuntos, então* $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.

Observação: Nos axiomas tínhamos o resultado apenas para uma sequência *infinita* de eventos.

Probabilidade

Consequências dos Axiomas de Kolmogorov

Lema

A probabilidade da união é a soma das probabilidades se os eventos forem disjuntos

Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são disjuntos, então $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.

Observação: Nos axiomas tínhamos o resultado apenas para uma sequência *infinita* de eventos.

Esboço da demonstração:

- Temos à nossa disposição apenas os axiomas de Kolmogorov, as propriedades de conjuntos e o lema anterior (da probabilidade do vazio);

Probabilidade

Consequências dos Axiomas de Kolmogorov

Lema

A probabilidade da união é a soma das probabilidades se os eventos forem disjuntos

Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *são disjuntos, então* $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.

Observação: Nos axiomas tínhamos o resultado apenas para uma sequência *infinita* de eventos.

Esboço da demonstração:

- Temos à nossa disposição apenas os axiomas de Kolmogorov, as propriedades de conjuntos e o lema anterior (da probabilidade do vazio);
- Vamos usar a mesma estratégia e definir uma sequência de eventos de maneira conveniente para demonstrar o resultado a partir do que conhecemos.

Probabilidade

Consequências dos Axiomas de Kolmogorov

Lema

Probabilidade do complementar

Para todo evento A,

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

Probabilidade

Consequências dos Axiomas de Kolmogorov

Lema

Probabilidade do complementar

Para todo evento A,

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

Esboço da demonstração:

- Temos à nossa disposição os axiomas de Kolmogorov, as propriedades de conjuntos e os 2 lemas anteriores;

Probabilidade

Consequências dos Axiomas de Kolmogorov

Lema

Probabilidade do complementar

Para todo evento A,

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

Esboço da demonstração:

- Temos à nossa disposição os axiomas de Kolmogorov, as propriedades de conjuntos e os 2 lemas anteriores;
- Vamos partir da definição de complementar, do axioma da probabilidade de Ω e da probabilidade de conjuntos disjuntos.

Lema

Probabilidade da união

Para todos os eventos A e B,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Lema

Probabilidade da união

Para todos os eventos A e B,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Esboço da demonstração:

- Temos à nossa disposição os axiomas de Kolmogorov, as propriedades de conjuntos e os lemas anteriores;

Lema

Probabilidade da união

Para todos os eventos A e B,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Esboço da demonstração:

- Temos à nossa disposição os axiomas de Kolmogorov, as propriedades de conjuntos e os lemas anteriores;
- Vamos escrever A como a união de dois conjuntos disjuntos (ver exercícios da parte anterior);
- E vamos escrever $\mathbb{P}(A \cup B)$ também de uma forma conveniente.

Probabilidade

Consequências dos Axiomas de Kolmogorov

Lema

Probabilidade de subconjuntos

Se $A \subset B$, *então* $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$.

Lema

Probabilidade de subconjuntos

Se $A \subset B$, então $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$.

Esboço da demonstração:

- Temos à nossa disposição os axiomas de Kolmogorov, as propriedades de conjuntos e os lemas anteriores;

Lema

Probabilidade de subconjuntos

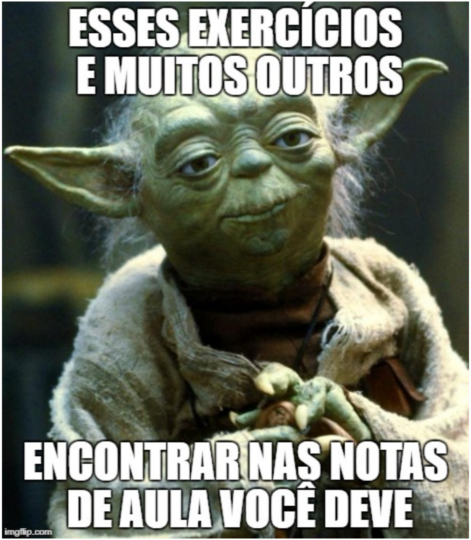
Se $A \subset B$, então $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$.

Esboço da demonstração:

- Temos à nossa disposição os axiomas de Kolmogorov, as propriedades de conjuntos e os lemas anteriores;
- Vamos escrever A e B como a união de dois conjuntos disjuntos;
- Vamos usar nosso conhecimento de teoria dos conjuntos para ver que $(A \cap B^c) = \emptyset$.

Probabilidade

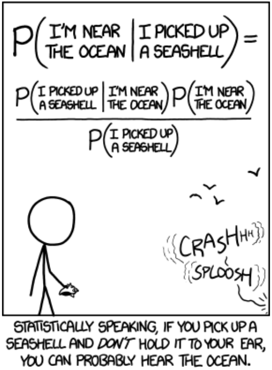
Consequências dos Axiomas de Kolmogorov



Probabilidade

Independência de Eventos e Probabilidade Condicional

Como utilizar nosso conhecimento sobre algo que aconteceu para calcular a probabilidade que algo possa acontecer?



Para entender a piada: `https://www.explainxkcd.com/wiki/index.php/1236:_Seashell`

Probabilidade

Probabilidade condicional

- Considere que existe um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}[\cdot])$ bem definido.

Definição

Probabilidade Condicional

Sejam A e B eventos em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}[\cdot])$. A *probabilidade condicional* do evento A dado B, denotada por $\mathbb{P}[A|B]$, é definida por:

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad , \text{se} \quad \mathbb{P}(B) \neq 0 \tag{1}$$

e não está definida para $\mathbb{P}(B) = 0$.

- Considere que existe um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}[\cdot])$ bem definido.

Definição

Probabilidade Condicional

Sejam A e B eventos em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}[\cdot])$. A *probabilidade condicional* do evento A dado B, denotada por $\mathbb{P}[A|B]$, é definida por:

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad , \text{se} \quad \mathbb{P}(B) \neq 0 \tag{1}$$

e não está definida para $\mathbb{P}(B) = 0$.

Observação 1: Decorre da definição que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}[B|A]\mathbb{P}(A)$, *se ambas probabilidades* $\mathbb{P}(A)$ *e* $\mathbb{P}(B)$ *são não nulas.*

Probabilidade

Observação 2: A definição anterior vai ao encontro da noção de probabilidade sob o enfoque frequentista. Suponha que foram observadas N ocorrências de um experimento aleatório (sendo N um número grande) para o qual os eventos A e B estão definidos. Então, $\mathbb{P}[A|B]$ representa a proporção de ocorrências do evento B onde o evento A também ocorreu, isto é:

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{N_{AB}}{N_B}$$

Probabilidade

Observação 2: A definição anterior vai ao encontro da noção de probabilidade sob o enfoque frequentista. Suponha que foram observadas N ocorrências de um experimento aleatório (sendo N um número grande) para o qual os eventos A e B estão definidos. Então, $\mathbb{P}[A|B]$ representa a proporção de ocorrências do evento B onde o evento A também ocorreu, isto é:

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{N_{AB}}{N_B}$$

Onde N_{AB} representa o número de ocorrências do evento $A \cap B$ e N_B representa o número de ocorrências do evento B nas N observações do experimento. Portanto, $\mathbb{P}[A \cap B] = \frac{N_{AB}}{N}$ e $\mathbb{P}(B) = \frac{N_B}{N}$, de forma que:

Probabilidade

Observação 2: A definição anterior vai ao encontro da noção de probabilidade sob o enfoque frequentista. Suponha que foram observadas N ocorrências de um experimento aleatório (sendo N um número grande) para o qual os eventos A e B estão definidos. Então, $\mathbb{P}[A|B]$ representa a proporção de ocorrências do evento B onde o evento A também ocorreu, isto é:

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{N_{AB}}{N_B}$$

Onde N_{AB} representa o número de ocorrências do evento $A \cap B$ e N_B representa o número de ocorrências do evento B nas N observações do experimento. Portanto, $\mathbb{P}[A \cap B] = \frac{N_{AB}}{N}$ e $\mathbb{P}(B) = \frac{N_B}{N}$, de forma que:

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{N_{AB}/N}{N_B/N} = \frac{N_{AB}}{N_B} = \mathbb{P}[A|B]$$

O que é consistente com a definição dada.

Probabilidade

Um exemplo

Considere o lançamento de duas moedas. Calcule:

1. a probabilidade de saírem duas caras dado que saiu cara na primeira moeda;
2. a probabilidade de duas caras dado que pelo menos uma é cara.

Probabilidade

Um exemplo

Considere o lançamento de duas moedas. Calcule:

1. a probabilidade de saírem duas caras dado que saiu cara na primeira moeda;
2. a probabilidade de duas caras dado que pelo menos uma é cara.

Primeiro, vamos fazer olhando diretamente para o espaço amostral e então vamos calcular usando a definição.

Probabilidade

Um exemplo

Considere o lançamento de duas moedas. Calcule:

1. a probabilidade de saírem duas caras dado que saiu cara na primeira moeda;
2. a probabilidade de duas caras dado que pelo menos uma é cara.

Primeiro, vamos fazer olhando diretamente para o espaço amostral e então vamos calcular usando a definição.
Defina os eventos: A_1 = cara na primeira moeda e
A_2 = cara na segunda moeda. Então, a probabilidade de saírem duas caras dado que saiu cara na primeira moeda é:

$$\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 | A_1] = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

Probabilidade

Um exemplo

Considere o lançamento de duas moedas. Calcule:

1. a probabilidade de saírem duas caras dado que saiu cara na primeira moeda;
2. a probabilidade de duas caras dado que pelo menos uma é cara.

Primeiro, vamos fazer olhando diretamente para o espaço amostral e então vamos calcular usando a definição.
Defina os eventos: A_1 = cara na primeira moeda e A_2 = cara na segunda moeda. Então, a probabilidade de saírem duas caras dado que saiu cara na primeira moeda é:

$$\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 | A_1] = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

A probabilidade de saírem duas caras dado que pelo menos uma das moedas é cara será igual a $\frac{1}{3}$ e fica sugerida como exercício.

Probabilidade

Definição

Independência entre eventos

Dois eventos A e B são independentes se $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Probabilidade

Definição

Independência entre eventos

Dois eventos A e B são independentes se $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Lema

Independência entre eventos (def. alternativa)

A e B são independentes se e somente se $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$. Em outras palavras, A e B são independentes se e somente se a incerteza sobre A não muda se assumirmos que B é verdadeiro.

Probabilidade

Definição

Independência entre eventos

Dois eventos A e B são independentes se $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Lema

Independência entre eventos (def. alternativa)

A e B são independentes se e somente se $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$. Em outras palavras, A e B são independentes se e somente se a incerteza sobre A não muda se assumirmos que B é verdadeiro.

Esboço da demonstração:

- Para provar um se e somente se ($\Leftrightarrow$), precisamos de duas etapas: a ida ($\Rightarrow$) e a volta ($\Leftarrow$).
  - ($\Rightarrow$) Assuma $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ e mostre que são independentes.
  - ($\Leftarrow$) Assuma que são independentes e prove que $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

Probabilidade

Teorema

Se A e B são eventos independentes, então os eventos A e B^c, A^c e B e A^c e B^c também são independentes.

Probabilidade

Teorema

Se A e B são eventos independentes, então os eventos A e B^c, A^c e B e A^c e B^c também são independentes.

Esboço da prova:

- Em todos os itens, queremos partir da probabilidade da interseção e mostrar que ela é o produto das probabilidades;

Probabilidade

Teorema

Se A e B são eventos independentes, então os eventos A e B^c, A^c e B e A^c e B^c também são independentes.

Esboço da prova:

- Em todos os itens, queremos partir da probabilidade da interseção e mostrar que ela é o produto das probabilidades;

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap B^c) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\
&= \mathbb{P}(A)[1 - \mathbb{P}(B)] \\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)
\end{aligned}
$$

Teorema de Bayes

Teorema

Teorema da probabilidade total

Para um dado espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}[\cdot])$*, se* $B_1, B_2, \cdots, B_n$ *são uma coleção de eventos mutuamente disjuntos (ou exclusivos) em* $\mathscr{F}$ *satisfazendo* $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$ *e* $\mathbb{P}(B_j) > 0$ *para* $j = 1, \cdots, n$*, então, para todo* $A \in \mathscr{F}$*, vale que*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_j]\mathbb{P}(B_j)$$

Teorema de Bayes

Teorema

Teorema da probabilidade total

Para um dado espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}[\cdot])$, *se* $B_1, B_2, \cdots, B_n$ *são uma coleção de eventos mutuamente disjuntos (ou exclusivos) em* $\mathscr{F}$ *satisfazendo* $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$ *e* $\mathbb{P}(B_j) > 0$ *para* $j = 1, \cdots, n$*, então, para todo* $A \in \mathscr{F}$*, vale que*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_j]\mathbb{P}(B_j)$$

Corolário

Para um dado espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}[\cdot])$, *seja* $B \in \mathscr{F}$ *satisfazendo* $0 < \mathbb{P}(B) < 1$*; então, para todo* $A \in \mathscr{F}$*:*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}[A|B^c]\mathbb{P}(B^c)$$

Teorema de Bayes

Teorema

Fórmula de Bayes

Para um dado espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}[\cdot])$*, se* $B_1, B_2, \cdots, B_n$ *são uma coleção de eventos mutuamente disjuntos (ou exclusivos) em* $\mathscr{F}$ *satisfazendo* $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$ *e* $\mathbb{P}(B_j) > 0$ *para* $j = 1, \cdots, n$*, então, para todo* $A \in \mathscr{F}$ *para o qual* $\mathbb{P}(A) > 0$ *vale que:*

$$\mathbb{P}[B_k|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B_k]\mathbb{P}(B_k)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_j]\mathbb{P}(B_j)} \tag{2}$$

Teorema de Bayes

Teorema

Fórmula de Bayes

Para um dado espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}[\cdot])$, *se* $B_1, B_2, \cdots, B_n$ *são uma coleção de eventos mutuamente disjuntos (ou exclusivos) em* $\mathscr{F}$ *satisfazendo* $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$ *e* $\mathbb{P}(B_j) > 0$ *para* $j = 1, \cdots, n$, *então, para todo* $A \in \mathscr{F}$ *para o qual* $\mathbb{P}(A) > 0$ *vale que:*

$$\mathbb{P}[B_k|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B_k]\mathbb{P}(B_k)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_j]\mathbb{P}(B_j)} \tag{2}$$

Corolário

Para um dado espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}[\cdot])$, *sejam* A *e* $B \in \mathscr{F}$ *satisfazendo* $\mathbb{P}(A) > 0$ *e* $0 < \mathbb{P}(B) < 1$*; então:*

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}[A|B^c]\mathbb{P}(B^c)}$$

Referências I

Bernstein, P. (1996).
Against the gods: The remarkable story of risk.
Wiley New York.

Mittelhammer, R. (2013).
Mathematical statistics for economics and business.
Springer.

Salsburg, D. (2001).
The lady tasting tea: How statistics revolutionized science in the twentieth century.
Macmillan.