Revisão de Probabilidade e Estatística

Aula 1 - Parte 1

Aishameriane Schmidt

PPGECO/UFSC

Fevereiro de 2019.

Apresentação

Aisha? Caixa? Baixa?

- Mestranda do PPGECO/UFSC (2017-2019)

Apresentação

Aisha? Caixa? Baixa?

- Mestranda do PPGECO/UFSC (2017-2019)
  - Aluna de Econometria I em 2016-1
  - ~~*Mascote*~~ Monitora de Econometria Bayesiana em 2018-1

Apresentação

Aisha? Caixa? Baixa?

- Mestranda do PPGECO/UFSC (2017-2019)
  - Aluna de Econometria I em 2016-1
  - ~~*Mascote*~~ Monitora de Econometria Bayesiana em 2018-1
- Graduanda em Economia na UDESC (2015-2019)

Apresentação

Aisha? Caixa? Baixa?

- Mestranda do PPGECO/UFSC (2017-2019)
  - Aluna de Econometria I em 2016-1
  - ~~*Mascote*~~ Monitora de Econometria Bayesiana em 2018-1
- Graduanda em Economia na UDESC (2015-2019)
- Bacharel em Estatística pela UFRGS (2004-2009)

Funcionamento das aulas

- As aulas serão no LabMec no prédio C do CSE/UFSC. Terça, quinta e sexta as aulas serão das 13:30 às 18h (podendo acabar um pouco antes). Na segunda feira começamos às 15:45 e na quarta feira encerramos às 15:30.
  - *Pipi-break* no meio da tarde, conforme demanda - preferencialmente **antes/depois** do intervalo das aulas da graduação.

Funcionamento das aulas

- As aulas serão no LabMec no prédio C do CSE/UFSC. Terça, quinta e sexta as aulas serão das 13:30 às 18h (podendo acabar um pouco antes). Na segunda feira começamos às 15:45 e na quarta feira encerramos às 15:30.
  - *Pipi-break* no meio da tarde, conforme demanda - preferencialmente **antes/depois** do intervalo das aulas da graduação.
- Aulas expositivas - com bastante espaço para interação;
  - **Slides** + quadro.
  - Conteúdos de probabilidade e estatística voltados para utilizar o livro do Davidson e Mackinnon em Econometria I (exceto álgebra linear) - a bibliografia utilizada é bem diversa.
  - Notas de aula e slides serão disponibilizados no github (acompanhe pelas datas a versão): `https://github.com/aishameriane/msc-economics/tree/master/revisao-prob`.

Funcionamento das aulas

- As aulas serão no LabMec no prédio C do CSE/UFSC. Terça, quinta e sexta as aulas serão das 13:30 às 18h (podendo acabar um pouco antes). Na segunda feira começamos às 15:45 e na quarta feira encerramos às 15:30.
  - *Pipi-break* no meio da tarde, conforme demanda - preferencialmente **antes/depois** do intervalo das aulas da graduação.
- Aulas expositivas - com bastante espaço para interação;
  - **Slides** + quadro.
  - Conteúdos de probabilidade e estatística voltados para utilizar o livro do Davidson e Mackinnon em Econometria I (exceto álgebra linear) - a bibliografia utilizada é bem diversa.
  - Notas de aula e slides serão disponibilizados no github (acompanhe pelas datas a versão): `https://github.com/aishameriane/msc-economics/tree/master/revisao-prob`.
- É uma *revisão* - **relembrar é viver**!
  - Mas, se estiver **muito** repetitivo, melhor usar seu tempo de outra forma.

Funcionamento das aulas

- As aulas serão no LabMec no prédio C do CSE/UFSC. Terça, quinta e sexta as aulas serão das 13:30 às 18h (podendo acabar um pouco antes). Na segunda feira começamos às 15:45 e na quarta feira encerramos às 15:30.
  - *Pipi-break* no meio da tarde, conforme demanda - preferencialmente **antes/depois** do intervalo das aulas da graduação.
- Aulas expositivas - com bastante espaço para interação;
  - **Slides** + quadro.
  - Conteúdos de probabilidade e estatística voltados para utilizar o livro do Davidson e Mackinnon em Econometria I (exceto álgebra linear) - a bibliografia utilizada é bem diversa.
  - Notas de aula e slides serão disponibilizados no github (acompanhe pelas datas a versão): `https://github.com/aishameriane/msc-economics/tree/master/revisao-prob`.
- É uma *revisão* - **relembrar é viver**!
  - Mas, se estiver **muito** repetitivo, melhor usar seu tempo de outra forma.
  - Em geral, a Aisha **não** pressupõe que as pessoas saibam as coisas - *isso pode tornar o processo meio maçante*.

Funcionamento das aulas

- As aulas serão no LabMec no prédio C do CSE/UFSC. Terça, quinta e sexta as aulas serão das 13:30 às 18h (podendo acabar um pouco antes). Na segunda feira começamos às 15:45 e na quarta feira encerramos às 15:30.
  - *Pipi-break* no meio da tarde, conforme demanda - preferencialmente **antes/depois** do intervalo das aulas da graduação.
- Aulas expositivas - com bastante espaço para interação;
  - **Slides** + quadro.
  - Conteúdos de probabilidade e estatística voltados para utilizar o livro do Davidson e Mackinnon em Econometria I (exceto álgebra linear) - a bibliografia utilizada é bem diversa.
  - Notas de aula e slides serão disponibilizados no github (acompanhe pelas datas a versão): `https://github.com/aishameriane/msc-economics/tree/master/revisao-prob`.
- É uma *revisão* - **relembrar é viver**!
  - Mas, se estiver **muito** repetitivo, melhor usar seu tempo de outra forma.
  - Em geral, a Aisha **não** pressupõe que as pessoas saibam as coisas - *isso pode tornar o processo meio maçante*.
- O programa das aulas foi feito baseado nas orientações do professor de Econometria I.

Funcionamento das aulas

- As aulas serão no LabMec no prédio C do CSE/UFSC. Terça, quinta e sexta as aulas serão das 13:30 às 18h (podendo acabar um pouco antes). Na segunda feira começamos às 15:45 e na quarta feira encerramos às 15:30.
  - *Pipi-break* no meio da tarde, conforme demanda - preferencialmente **antes/depois** do intervalo das aulas da graduação.
- Aulas expositivas - com bastante espaço para interação;
  - **Slides** + quadro.
  - Conteúdos de probabilidade e estatística voltados para utilizar o livro do Davidson e Mackinnon em Econometria I (exceto álgebra linear) - a bibliografia utilizada é bem diversa.
  - Notas de aula e slides serão disponibilizados no github (acompanhe pelas datas a versão): `https://github.com/aishameriane/msc-economics/tree/master/revisao-prob`.
- É uma *revisão* - **relembrar é viver**!
  - Mas, se estiver **muito** repetitivo, melhor usar seu tempo de outra forma.
  - Em geral, a Aisha **não** pressupõe que as pessoas saibam as coisas - *isso pode tornar o processo meio maçante*.
- O programa das aulas foi feito baseado nas orientações do professor de Econometria I.

Você sabe fazer alguma coisa? Passe o conhecimento adiante!

Programa

O que iremos ver?

- Probabilidade:
  - Conjuntos, definições básicas de probabilidade e probabilidade de eventos;
  - Definição e caracterização de variáveis aleatórias;
- Introdução à Estatística.

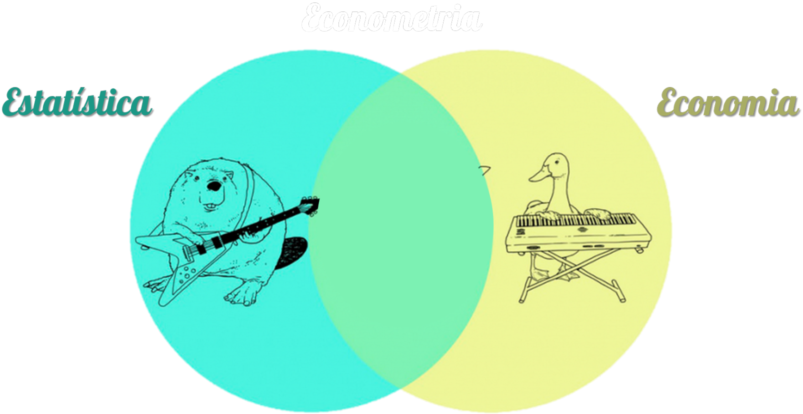
Programa

Aula 1

1. **Teoria dos conjuntos:** Revisão dos principais resultados de teoria dos conjuntos.
2. **Definições de probabilidade:** axiomática, frequentista e subjetiva.
3. **Probabilidade de eventos.**
4. **Independência de eventos, probabilidade condicional e teorema de Bayes.** *Possivelmente fica para amanhã*

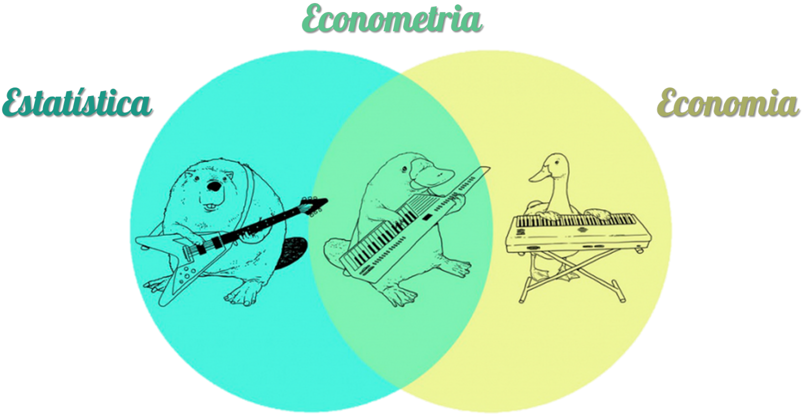
Estatística pra quê?

Motivação



Estatística pra quê?

Motivação



Motivação

Probabilidade VS Estatística

- Probabilidade é uma área da matemática;
  - Embora não seja *exata* pois lida com incertezas, **uma vez definido um espaço de probabilidade, os resultados possíveis são todos bem estabelecidos**.

Motivação

Probabilidade VS Estatística

- Probabilidade é uma área da matemática;
  - Embora não seja *exata* pois lida com incertezas, **uma vez definido um espaço de probabilidade, os resultados possíveis são todos bem estabelecidos**.
- A estatística utiliza a probabilidade como uma **ferramenta**:
  - É similar aos engenheiros, físicos e demais profissões que utilizam cálculo.
- Para falar de estatística, necessariamente haverá uma **população**.
  - E, muito possivelmente, uma ou mais **amostras**.

Motivação

Probabilidade VS Estatística

- Probabilidade é uma área da matemática;
  - Embora não seja *exata* pois lida com incertezas, **uma vez definido um espaço de probabilidade, os resultados possíveis são todos bem estabelecidos**.
- A estatística utiliza a probabilidade como uma **ferramenta**:
  - É similar aos engenheiros, físicos e demais profissões que utilizam cálculo.
- Para falar de estatística, necessariamente haverá uma **população**.
  - E, muito possivelmente, uma ou mais **amostras**.

Você pode até tentar "fazer" estatística sem conhecer probabilidade, mas será igual uma pessoa que quer construir um prédio sem saber nada de engenharia civil.

Como estudar formalmente um conteúdo?

O que está por vir

A estrutura das aulas será muito similar, independente do assunto (probabilidade/estatística) - é como uma receita de bolo:

- São apresentadas as **definições** e **axiomas**;
  - **Definição** é aquilo que descreve um conceito;
  - **Axioma** é uma verdade geral, não precisa de demonstração.

Como estudar formalmente um conteúdo?

O que está por vir

A estrutura das aulas será muito similar, independente do assunto (probabilidade/estatística) - é como uma receita de bolo:

- São apresentadas as **definições** e **axiomas**;
  - **Definição** é aquilo que descreve um conceito;
  - **Axioma** é uma verdade geral, não precisa de demonstração.
- A partir disso, podemos construir e provar **proposições**, **lemas**, **teoremas** e **corolários**.

Como estudar formalmente um conteúdo?

O que está por vir

A estrutura das aulas será muito similar, independente do assunto (probabilidade/estatística) - é como uma receita de bolo:

- São apresentadas as **definições** e **axiomas**;
  - **Definição** é aquilo que descreve um conceito;
  - **Axioma** é uma verdade geral, não precisa de demonstração.
- A partir disso, podemos construir e provar **proposições**, **lemas**, **teoremas** e **corolários**.
  - Para fazer uma demonstração, precisamos de uma hipótese (aquilo que assumimos como verdadeiro) e uma tese (aquilo que desejamos provar e que decorre da hipótese, das definições e dos axiomas);
  - Existem diferentes estratégias de demonstração. Para uma introdução, recomenda-se a leitura de [Velleman, 2006].

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

Definição

Um **conjunto** (ou coleção) é formado por objetos (que são os seus **elementos**). [Lima, 1982]

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

Definição

Um **conjunto** (ou coleção) é formado por objetos (que são os seus **elementos**). [Lima, 1982]

- A relação básica entre um conjunto e seus elementos é a relação de **pertinência**.
- Quando x (objeto) é um elemento do conjunto A:
  - Dizemos "x *pertence a* A" e denotamos por $x \in A$.
- Caso contrário, diremos que "x *não pertence a* A" e denotaremos por $x \notin A$.

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

Definição

Um **conjunto** (ou coleção) é formado por objetos (que são os seus **elementos**). [Lima, 1982]

- A relação básica entre um conjunto e seus elementos é a relação de **pertinência**.
- Quando x (objeto) é um elemento do conjunto A:
  - Dizemos "*x pertence a A*" e denotamos por $x \in A$.
- Caso contrário, diremos que "*x não pertence a A*" e denotaremos por $x \notin A$.

Atenção

Não confundir $\in$ (pertence) com $\subset$ (contido)!

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

Definição

Um **conjunto** (ou coleção) é formado por objetos (que são os seus **elementos**). [Lima, 1982]

- A relação básica entre um conjunto e seus elementos é a relação de **pertinência**.
- Quando x (objeto) é um elemento do conjunto A:
  - Dizemos "x *pertence a* A" e denotamos por $x \in A$.
- Caso contrário, diremos que "x *não pertence a* A" e denotaremos por $x \notin A$.

Atenção

Não confundir $\in$ (pertence) com $\subset$ (contido)!
O primeiro diz respeito a elementos, enquanto que o segundo refere-se a conjuntos!

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- Um conjunto fica bem especificado (definido) quando há uma **regra clara** que permita avaliar se um elemento qualquer pertence ou não ao conjunto.
  - *O uso de regras auxilia a* ***escrever o conjunto sem precisar enumerar todos seus elementos****.*

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- Um conjunto fica bem especificado (definido) quando há uma **regra clara** que permita avaliar se um elemento qualquer pertence ou não ao conjunto.
  - *O uso de regras auxilia a **escrever o conjunto sem precisar enumerar todos seus elementos**.*
- **Exemplo:** A propriedade P define totalmente o conjunto A
  - Se um objeto x atende P, então $x \in A$.
  - Caso contrário, $x \notin A$.

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- Um conjunto fica bem especificado (definido) quando há uma **regra clara** que permita avaliar se um elemento qualquer pertence ou não ao conjunto.
  - *O uso de regras auxilia a **escrever o conjunto sem precisar enumerar todos seus elementos**.*
- **Exemplo:** A propriedade P define totalmente o conjunto A
  - Se um objeto x atende P, então $x \in A$.
  - Caso contrário, $x \notin A$.

$$A = \{x : x \text{ tem a propriedade } P\}$$

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- Um conjunto fica bem especificado (definido) quando há uma **regra clara** que permita avaliar se um elemento qualquer pertence ou não ao conjunto.
  - *O uso de regras auxilia a **escrever o conjunto sem precisar enumerar todos seus elementos**.*
- **Exemplo:** A propriedade P define totalmente o conjunto A
  - Se um objeto x atende P, então $x \in A$.
  - Caso contrário, $x \notin A$.

$$A = \{x : x \text{ tem a propriedade } P\}$$

- Se queremos nos referir a um conjunto $B \subset A$ (significa que B é subconjunto de A ou, equivalentemente, B está contido em A), podemos escrever:

$$B = \{x \in A : x \text{ tem a propriedade } P\}$$

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- Um conjunto fica bem especificado (definido) quando há uma **regra clara** que permita avaliar se um elemento qualquer pertence ou não ao conjunto.
  - *O uso de regras auxilia a* ***escrever o conjunto sem precisar enumerar todos seus elementos****.*
- **Exemplo:** A propriedade P define totalmente o conjunto A
  - Se um objeto x atende P, então $x \in A$.
  - Caso contrário, $x \notin A$.

$$A = \{x : x \text{ tem a propriedade } P\}$$

- Se queremos nos referir a um conjunto $B \subset A$ (significa que B é subconjunto de A ou, equivalentemente, B está contido em A), podemos escrever:

$$B = \{x \in A : x \text{ tem a propriedade } P\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x > 10\}$$

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- Se A e B forem conjuntos, podemos compará-los através da relação de "*inclusão*" ($\subset$).
  - Dizemos que B é subconjunto de A se **todo elemento de** B **também* é elemento de** A e denotamos por $B \subset A$.

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- Se A e B forem conjuntos, podemos compará-los através da relação de "*inclusão*" ($\subset$).
  - Dizemos que B é subconjunto de A se **todo elemento de** B **também* é elemento de** A e denotamos por $B \subset A$.
    - **Sinônimos:** B é *parte* de A, B está *incluído* em A ou ainda B está *contido* em A.

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- Se A e B forem conjuntos, podemos compará-los através da relação de "*inclusão*" ($\subset$).
  - Dizemos que B é subconjunto de A se **todo elemento de** B **também* é elemento de** A e denotamos por $B \subset A$.
    - **Sinônimos:** B é *parte* de A, B está *incluído* em A ou ainda B está *contido* em A.
- Em alguns livros encontramos as seguintes **notações**:
  - $B \subset A$ para indicar que B está contido em A (mas não é igual),

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- Se A e B forem conjuntos, podemos compará-los através da relação de "*inclusão*" ($\subset$).
  - Dizemos que B é subconjunto de A se **todo elemento de** B **também* é elemento de** A e denotamos por $B \subset A$.
    - **Sinônimos:** B é *parte* de A, B está *incluído* em A ou ainda B está *contido* em A.
- Em alguns livros encontramos as seguintes **notações**:
  - $B \subset A$ para indicar que B está contido em A (mas não é igual),
  - $B \subseteq A$ para indicar que B está contido e pode ser igual a A,

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- Se A e B forem conjuntos, podemos compará-los através da relação de "*inclusão*" ($\subset$).
  - Dizemos que B é subconjunto de A se **todo elemento de** B **também* é elemento de** A e denotamos por $B \subset A$.
    - **Sinônimos:** B é *parte* de A, B está *incluído* em A ou ainda B está *contido* em A.
- Em alguns livros encontramos as seguintes **notações**:
  - $B \subset A$ para indicar que B está contido em A (mas não é igual),
  - $B \subseteq A$ para indicar que B está contido e pode ser igual a A,
  - $B \subsetneq A$ para indicar B está contido mas não é igual a A.

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

- Se A e B forem conjuntos, podemos compará-los através da relação de "*inclusão*" ($\subset$).
    - Dizemos que B é subconjunto de A se **todo elemento de** B **também* é elemento de** A e denotamos por $B \subset A$.
        - **Sinônimos:** B é *parte* de A, B está *incluído* em A ou ainda B está *contido* em A.
- Em alguns livros encontramos as seguintes **notações**:
    - $B \subset A$ para indicar que B está contido em A (mas não é igual),
    - $B \subseteq A$ para indicar que B está contido e pode ser igual a A,
    - $B \subsetneq A$ para indicar B está contido mas não é igual a A.
- Iremos utilizar $B \subset A$ como "B está contido em A e eles podem ser iguais".

Quando não há elemento de A que satisfaça P, o conjunto B não tem nenhum elemento e é denominado *conjunto vazio* ($\emptyset$).

Quando não há elemento de A que satisfaça P, o conjunto B não tem nenhum elemento e é denominado *conjunto vazio* ($\emptyset$).

Definição

Definimos $\emptyset$ da seguinte forma:

$$\forall x, x \notin \emptyset$$

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio ~~que nos habita~~ $\emptyset$

Quando não há elemento de A que satisfaça P, o conjunto B não tem nenhum elemento e é denominado *conjunto vazio* ($\emptyset$).

Definição

Definimos $\emptyset$ da seguinte forma:

$$\forall x, x \notin \emptyset$$

(lê-se: qualquer que seja x, x não percence ao vazio)

Quando não há elemento de A que satisfaça P, o conjunto B não tem nenhum elemento e é denominado *conjunto vazio* ($\emptyset$).

Definição

Definimos $\emptyset$ da seguinte forma:

$$\forall x, x \notin \emptyset$$

(lê-se: qualquer que seja x, x não percence ao vazio)

Observação: $\forall$ significa "para todo" e $\exists$ significa "existe". Eles são chamados de quantificador universal e quantificador existencial e são extremamente importantes na linguagem matemática. Além de [Velleman, 2006], recomenda-se a aula 3 do material disponível em `https://1drv.ms/f/s!AlHDLj_7OjaL4xES4gUq_N_2gzga`.

Uma coisa importante a se notar é que existe diferença entre $\emptyset$ e $\{\emptyset\}$. O primeiro é o conjunto vazio, o segundo é um conjunto cujo único elemento é o conjunto vazio. Para entender melhor a diferença, considere o seguinte exercício:

Exercício 1: Analise se são verdadeiras ou falsas as seguintes sentenças:

1. $\emptyset \in \emptyset$.
2. $\emptyset \in \{\emptyset\}$.
3. $\{\emptyset\} \in \emptyset$.
4. $\emptyset \subset \emptyset$.
5. $\emptyset \subset \{\emptyset\}$.
6. $\{\emptyset\} \subset \emptyset$.

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio $\emptyset$ e o vazio $\{\emptyset\}$

Note que:

- $\emptyset$ é o conjunto vazio (não contém elementos);
- $\{\emptyset\}$ é o conjunto cujo único elemento é o vazio.

1. $\emptyset \in \emptyset$ - "*O elemento vazio pertence ao conjunto vazio*"
2. $\emptyset \in \{\emptyset\}$ - "*O vazio é elemento do conjunto que só contém o vazio*"
3. $\{\emptyset\} \in \emptyset$ - "*O conjunto cujo único elemento é o vazio é elemento do conjunto vazio*"
4. $\emptyset \subset \emptyset$ - "*O conjunto vazio está contido no conjunto vazio*"
5. $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ - "*O conjunto que contém o vazio está contido no conjunto cujo único elemento é o vazio*"
6. $\{\emptyset\} \subset \emptyset$ - "*O conjunto cujo único elemento é o vazio está contido no vazio*"

1. $\emptyset \in \emptyset$ - "*O elemento vazio pertence ao conjunto vazio*"

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio $\emptyset$ e o vazio $\{\emptyset\}$

1. $\emptyset \in \emptyset$ - "*O elemento vazio pertence ao conjunto vazio*"
   Falsa pois o conjunto vazio não tem nenhum elemento.

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio $\emptyset$ e o vazio $\{\emptyset\}$

1. $\emptyset \in \emptyset$ - "*O elemento vazio pertence ao conjunto vazio*"
   Falsa pois o conjunto vazio não tem nenhum elemento.
2. $\emptyset \in \{\emptyset\}$ - "*O vazio é elemento do conjunto que só contém o vazio*"

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

1. $\emptyset \in \emptyset$ - “*O elemento vazio pertence ao conjunto vazio*”
   Falsa pois o conjunto vazio não tem nenhum elemento.
2. $\emptyset \in \{\emptyset\}$ - “*O vazio é elemento do conjunto que só contém o vazio*”
   Verdadeira - no lado esquerdo estamos listando todos os elementos do conjunto à direita, que neste caso só contém o vazio.

1. $\emptyset \in \emptyset$ - "*O elemento vazio pertence ao conjunto vazio*"
   Falsa pois o conjunto vazio não tem nenhum elemento.
2. $\emptyset \in \{\emptyset\}$ - "*O vazio é elemento do conjunto que só contém o vazio*"
   Verdadeira - no lado esquerdo estamos listando todos os elementos do conjunto à direita, que neste caso só contém o vazio.
3. $\{\emptyset\} \in \emptyset$ - "*O conjunto cujo único elemento é o vazio é elemento do conjunto vazio*"

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio $\emptyset$ e o vazio $\{\emptyset\}$

1. $\emptyset \in \emptyset$ - "*O elemento vazio pertence ao conjunto vazio*"
   Falsa pois o conjunto vazio não tem nenhum elemento.
2. $\emptyset \in \{\emptyset\}$ - "*O vazio é elemento do conjunto que só contém o vazio*"
   Verdadeira - no lado esquerdo estamos listando todos os elementos do conjunto à direita, que neste caso só contém o vazio.
3. $\{\emptyset\} \in \emptyset$ - "*O conjunto cujo único elemento é o vazio é elemento do conjunto vazio*"
   Falsa - pela definição do conjunto vazio, sabemos que ele não contém elemento.

4. $\emptyset \subset \emptyset$ - "*O conjunto vazio está contido no conjunto vazio*"

4. $\emptyset \subset \emptyset$ - "*O conjunto vazio está contido no conjunto vazio*"
   Verdadeira pois todo conjunto contém o conjunto vazio (dizemos que é verdadeira por vacuidade).

4. $\emptyset \subset \emptyset$ - "*O conjunto vazio está contido no conjunto vazio*"
   Verdadeira pois todo conjunto contém o conjunto vazio (dizemos que é verdadeira por vacuidade).
5. $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ - "*O conjunto que contém o vazio está contido no conjunto cujo único elemento é o vazio*"

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O vazio $\emptyset$ e o vazio $\{\emptyset\}$

4. $\emptyset \subset \emptyset$ - "*O conjunto vazio está contido no conjunto vazio*"
   Verdadeira pois todo conjunto contém o conjunto vazio (dizemos que é verdadeira por vacuidade).
5. $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ - "*O conjunto que contém o vazio está contido no conjunto cujo único elemento é o vazio*"
   Verdadeira pois quando comparamos dois conjuntos, precisamos verificar se os elementos de um estão contidos no outro. Como o lado esquerdo não contém elementos, significa, por vacuidade, que todo elemento pertence ao conjunto do lado direito.

4. $\emptyset \subset \emptyset$ - "*O conjunto vazio está contido no conjunto vazio*"
   Verdadeira pois todo conjunto contém o conjunto vazio (dizemos que é verdadeira por vacuidade).
5. $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ - "*O conjunto que contém o vazio está contido no conjunto cujo único elemento é o vazio*"
   Verdadeira pois quando comparamos dois conjuntos, precisamos verificar se os elementos de um estão contidos no outro. Como o lado esquerdo não contém elementos, significa, por vacuidade, que todo elemento pertence ao conjunto do lado direito.
6. $\{\emptyset\} \subset \emptyset$ - "*O conjunto cujo único elemento é o vazio está contido no vazio*"

4. $\emptyset \subset \emptyset$ - "*O conjunto vazio está contido no conjunto vazio*"
   Verdadeira pois todo conjunto contém o conjunto vazio (dizemos que é verdadeira por vacuidade).
5. $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ - "*O conjunto que contém o vazio está contido no conjunto cujo único elemento é o vazio*"
   Verdadeira pois quando comparamos dois conjuntos, precisamos verificar se os elementos de um estão contidos no outro. Como o lado esquerdo não contém elementos, significa, por vacuidade, que todo elemento pertence ao conjunto do lado direito.
6. $\{\emptyset\} \subset \emptyset$ - "*O conjunto cujo único elemento é o vazio está contido no vazio*"
   Falsa, pois o conjunto do lado esquerdo contém um elemento, enquanto que o conjunto do lado direito não tem elemento, por definição. O único subconjunto do vazio é ele próprio, isto é, $\emptyset \subset \emptyset$.

- Dado um conjunto A qulquer, podemos definir o conjunto formado pelas partes de A, que é denotado por $\mathscr{P}(A)$.

- Dado um conjunto A qulquer, podemos definir o conjunto formado pelas partes de A, que é denotado por $\mathscr{P}(A)$.
  - Se $B \subset A$, então $B \in \mathscr{P}(A)$.

- Dado um conjunto A qulquer, podemos definir o conjunto formado pelas partes de A, que é denotado por $\mathscr{P}(A)$.
  - Se $B \subset A$, então $B \in \mathscr{P}(A)$.
- $\mathscr{P}(A) \neq \emptyset$ - por quê?

- Dado um conjunto A qulquer, podemos definir o conjunto formado pelas partes de A, que é denotado por $\mathscr{P}(A)$.
  - Se $B \subset A$, então $B \in \mathscr{P}(A)$.
- $\mathscr{P}(A) \neq \emptyset$ - por quê?
  - Note que $\emptyset \in \mathscr{P}(A)$ e $A \in \mathscr{P}(A)$.

- Dado um conjunto A qulquer, podemos definir o conjunto formado pelas partes de A, que é denotado por $\mathscr{P}(A)$.
  - Se $B \subset A$, então $B \in \mathscr{P}(A)$.
- $\mathscr{P}(A) \neq \emptyset$ - por quê?
  - Note que $\emptyset \in \mathscr{P}(A)$ e $A \in \mathscr{P}(A)$.

Exemplo:

$$A = \{a, b, c\}$$

Quem é $\mathscr{P}(A)$?

Uma introdução à Teoria dos Conjuntos

O conjunto das partes $\mathscr{P}(\cdot)$

- Dado um conjunto A qulquer, podemos definir o conjunto formado pelas partes de A, que é denotado por $\mathscr{P}(A)$.
  - Se $B \subset A$, então $B \in \mathscr{P}(A)$.
- $\mathscr{P}(A) \neq \emptyset$ - por quê?
  - Note que $\emptyset \in \mathscr{P}(A)$ e $A \in \mathscr{P}(A)$.

Exemplo:

$$A = \{a, b, c\}$$

Quem é $\mathscr{P}(A)$?

$$\mathscr{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Eventos

Vamos preencher o vazio...

- **Eventos** são objetos de interesse na probabilidade e, como vamos ver, eles tem uma correspondência com teoria dos conjuntos.
- Experimentos que ao serem repetidos sob as mesmas condições não produzem os mesmos resultados são chamados de **experimentos aleatórios**.
  - Como só nos ocuparemos deles, toda vez que aparecer um **experimento**, estamos falando de um *experimento aleatório*.

Definição

O conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento particular é chamado de Espaço Amostral e é denotado por Ω. Este conjunto pode ser: enumerável, finito ou infinito, se houver uma bijeção $f : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ ou ainda, pode ser não enumerável (por exemplo, no caso de $\Omega = \mathbb{R}$).

Eventos

Vamos preencher o vazio...

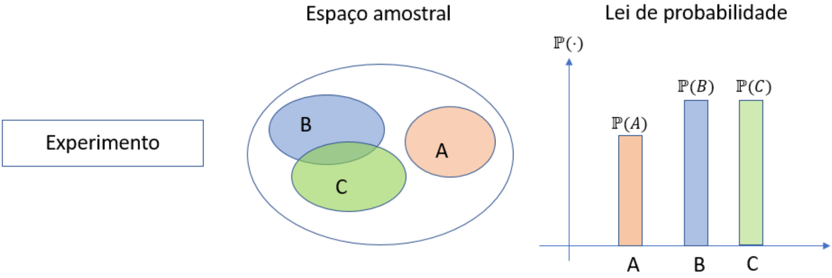


Figura: Representação de experimento, espaço amostral e lei de probabilidade.

Exemplo 1: Espaço amostral do lançamento de uma moeda

Imagine que você faz o experimento de lançar uma moeda. Considere que K significa que o resultado foi cara e C significa que o resultado foi coroa.
Então, $\Omega = \{K, C\}$ é o espaço amostral do experimento.

Exemplo 1: Espaço amostral do lançamento de uma moeda

Imagine que você faz o experimento de lançar uma moeda. Considere que K significa que o resultado foi cara e C significa que o resultado foi coroa.
Então, $\Omega = \{K, C\}$ é o espaço amostral do experimento.

Exemplo 2: Espaço amostral do tempo até uma lâmpada queimar

Considere agora o seguinte experimento: você observa uma lâmpada e está interessado no tempo, em minutos, até a lâmpada queimar*.
Então, $\Omega = [0, +\infty)$.

Eventos

Definição

Um *evento* é qualquer coleção de possíveis resultados de um experimento, isto é, qualquer subconjunto de Ω (incluindo o próprio Ω) é um evento.

Eventos

Definição

Um *evento* é qualquer coleção de possíveis resultados de um experimento, isto é, qualquer subconjunto de Ω (incluindo o próprio Ω) é um evento.

Definição

Relação entre eventos

$$A \subset B \iff x \in A \Rightarrow x \in B \tag{1}$$

Eventos

Definição

Um *evento* é qualquer coleção de possíveis resultados de um experimento, isto é, qualquer subconjunto de Ω (incluindo o próprio Ω) é um evento.

Definição

Relação entre eventos

$$A \subset B \iff x \in A \Rightarrow x \in B \tag{1}$$

$$A = B \iff A \subset B \quad e \quad B \subset A \tag{2}$$

Eventos

Operações entre eventos

Definição

União de dois eventos

A união de dois eventos A e B, representada por $A \cup B$, é o conjunto de elementos que percentem a A, B ou ambos:

Definição

União de dois eventos

A união de dois eventos A e B, representada por $A \cup B$, é o conjunto de elementos que percentem a A, B ou ambos:

$$A \cup B = \{x : x \in A \quad ou \quad x \in B\} \tag{3}$$

Eventos

Operações entre eventos

Definição

União de dois eventos

A união de dois eventos A e B, representada por $A \cup B$, é o conjunto de elementos que percentem a A, B ou ambos:

$$A \cup B = \{x : x \in A \quad ou \quad x \in B\} \tag{3}$$

De maneira mais geral, seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos. $x \in \Omega$ é um elemento da união de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, denotada por $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, se e somente se existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_n$. Isto é,

Eventos

Operações entre eventos

Definição

União de dois eventos

A união de dois eventos A e B, representada por $A \cup B$, é o conjunto de elementos que percentem a A, B ou ambos:

$$A \cup B = \{x : x \in A \quad ou \quad x \in B\} \tag{3}$$

De maneira mais geral, seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos. $x \in \Omega$ é um elemento da união de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, denotada por $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, se e somente se existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_n$. Isto é,

$$\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \in \Omega : \textbf{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \in A_n\}$$

Eventos

Operações entre eventos

Definição

Interseção de dois eventos

A interseção de dois eventos A e B, representada por $A \cap B$, é o conjunto de elementos que percentem a A e, ao mesmo tempo, B:

Eventos

Operações entre eventos

Definição

Interseção de dois eventos

A interseção de dois eventos A e B, representada por $A \cap B$, é o conjunto de elementos que percentem a A e, ao mesmo tempo, B:

$$A \cap B = \{x : x \in A \quad e \quad x \in B\} \tag{4}$$

Dizemos ainda que A e B são conjuntos disjuntos se, e somente se, $A \cap B = \emptyset$.

Eventos

Operações entre eventos

Definição

Interseção de dois eventos

A interseção de dois eventos A e B, representada por $A \cap B$, é o conjunto de elementos que percentem a A e, ao mesmo tempo, B:

$$A \cap B = \{x : x \in A \quad e \quad x \in B\} \tag{4}$$

Dizemos ainda que A e B são conjuntos disjuntos se, e somente se, $A \cap B = \emptyset$.

De maneira mais geral, seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos. $x \in \Omega$ é um elemento da interseção de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, denotada por $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, se e somente se para todo $n \in \mathbb{N}$, $x \in A_n$. Isto é,

Eventos

Operações entre eventos

Definição

Interseção de dois eventos

A interseção de dois eventos A e B, representada por $A \cap B$, é o conjunto de elementos que percentem a A e, ao mesmo tempo, B:

$$A \cap B = \{x : x \in A \quad e \quad x \in B\} \tag{4}$$

Dizemos ainda que A e B são conjuntos disjuntos se, e somente se, $A \cap B = \emptyset$.

De maneira mais geral, seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos. $x \in \Omega$ é um elemento da interseção de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, denotada por $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, se e somente se para todo $n \in \mathbb{N}$, $x \in A_n$. Isto é,

$$\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \in \Omega : \textbf{para todo } n \in \mathbb{N}, x \in A_n\}$$

.

Eventos

Complementar

Definição

Complementar de um evento

Seja A um conjunto. x é um elemento de A^c se e somente se $x \notin A$. Isto é, o complemento de A é definido formalmente como

$$A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\}.$$

Eventos

Complementar

Definição

Complementar de um evento

Seja A um conjunto. x é um elemento de A^c se e somente se $x \notin A$. Isto é, o complemento de A é definido formalmente como

$$A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\}.$$

Exemplo

Complementar do espaço amostral

O complementar do espaço amostral (Ω) é o conjunto vazio, $\emptyset$, pois:

- Como o conjunto $\emptyset$ não possui elementos, $\forall \omega \in \Omega$ temos que $\omega \notin \emptyset$;
- Uma vez que $\emptyset$ não possui elementos, não há elemento de $\emptyset$ que pertença a Ω (dizemos que isso ocorre por *vacuidade*).

Eventos

Complementar

Definição

Complementar de um evento

Seja A um conjunto. x é um elemento de A^c se e somente se $x \notin A$. Isto é, o complemento de A é definido formalmente como

$$A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\}.$$

Exemplo

Complementar do espaço amostral

O complementar do espaço amostral (Ω) é o conjunto vazio, $\emptyset$, pois:

- Como o conjunto $\emptyset$ não possui elementos, $\forall \omega \in \Omega$ temos que $\omega \notin \emptyset$;
- Uma vez que $\emptyset$ não possui elementos, não há elemento de $\emptyset$ que pertença a Ω (dizemos que isso ocorre por *vacuidade*).

Atenção: Também por vacuidade temos que $\emptyset \subset \Omega$.

Eventos

Álgebra e σ-álgebra

- Vamos considerar agora uma classe de eventos (ou subconjuntos) de Ω que iremos chamar de $\mathscr{F}$.

Eventos

Álgebra e σ-álgebra

- Vamos considerar agora uma classe de eventos (ou subconjuntos) de Ω que iremos chamar de $\mathscr{F}$.
- $\mathscr{F}$ será chamada de **álgebra de subconjuntos de Ω** se:
    1. $\Omega \in \mathscr{F}$;

Eventos

Álgebra e σ-álgebra

- Vamos considerar agora uma classe de eventos (ou subconjuntos) de Ω que iremos chamar de $\mathscr{F}$.
- $\mathscr{F}$ será chamada de **álgebra de subconjuntos de Ω** se:
  1. $\Omega \in \mathscr{F}$;
  2. Para qualquer $A \in \mathscr{F}$ temos $A^c \in \mathscr{F}$ *($\mathscr{F}$ é fechada por complementação)*;

Eventos

Álgebra e σ-álgebra

- Vamos considerar agora uma classe de eventos (ou subconjuntos) de Ω que iremos chamar de $\mathscr{F}$.
- $\mathscr{F}$ será chamada de **álgebra de subconjuntos de Ω** se:
  1. $\Omega \in \mathscr{F}$;
  2. Para qualquer $A \in \mathscr{F}$ temos $A^c \in \mathscr{F}$ *($\mathscr{F}$ é fechada por complementação)*;
  3. Para $A, B \in \mathscr{F}$, vale que $A \cup B \in \mathscr{F}$ *($\mathscr{F}$ é fechada por uniões finitas dos seus elementos)*.

Eventos

Álgebra e σ-álgebra

- Vamos considerar agora uma classe de eventos (ou subconjuntos) de Ω que iremos chamar de $\mathscr{F}$.
- $\mathscr{F}$ será chamada de **álgebra de subconjuntos de Ω** se:
  1. $\Omega \in \mathscr{F}$;
  2. Para qualquer $A \in \mathscr{F}$ temos $A^c \in \mathscr{F}$ (*$\mathscr{F}$ é fechada por complementação)*;
  3. Para $A, B \in \mathscr{F}$, vale que $A \cup B \in \mathscr{F}$ (*$\mathscr{F}$ é fechada por uniões finitas dos seus elementos)*.

Observação: É imediato ver que se valem (1) e (2), então (3) equivale a $P(A \cap B) \in \mathscr{F}$.

- A σ-álgebra é apenas um pouco mais geral do que a álgebra pois ela é fechada para uniões infinitas dos seus elementos.

Eventos

Álgebra e σ-álgebra

- A σ-álgebra é apenas um pouco mais geral do que a álgebra pois ela é fechada para uniões infinitas dos seus elementos.
- $\mathscr{F}$ será chamada de **σ-álgebra das partes de Ω** se:
  - $\Omega \in \mathscr{F}$;

- A σ-álgebra é apenas um pouco mais geral do que a álgebra pois ela é fechada para uniões infinitas dos seus elementos.
- $\mathscr{F}$ será chamada de **σ-álgebra das partes de Ω** se:
  - $\Omega \in \mathscr{F}$;
  - Para qualquer $A \in \mathscr{F}$ temos $A^c \in \mathscr{F}$;
  - Para $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F}$, vale que $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$.

Eventos

Exercícios (yay)

Prove as seguintes propriedades:

a.	Comutatividade	$A \cup B = B \cup A$
		$A \cap B = B \cap A$
b.	Associatividade	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
		$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
c.	Leis distributivas	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
		$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
d.	Leis de De Morgan	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
		$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Mostre que $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$.
Observação: Este exercício é útil para conseguirmos escrever um conjunto como a união de conjuntos disjuntos.

Eventos

Exercícios (yay)

Seja $\Omega = \{a, b, c, d\}$.
Será que $\mathscr{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \Omega\}$ é uma σ-álgebra de Ω?

Considere A e B dois subconjuntos de Ω. A *diferença simétrica* entre A e B é o conjunto de todos elementos que estão em A ou em B mas que não estão em ambos.

- Escreva a diferença simétrica formalmente utilizando as operações de união, intersecção e/ou complementar.
- Mostre que a diferença simétrica entre A e B é igual à diferença simétrica entre A^c e B^c.

Eventos

Teorema (Leis de De Morgan)

Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de subconjuntos de* Ω. *Então, para todo* $n \in \mathbb{N}$,

- $\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \cap_{i=1}^{n} A_i^c$
- $\left(\cap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \cup_{i=1}^{n} A_i^c$

Além disso,

- $(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i)^c = \cap_{i\in\mathbb{N}} A_i^c$
- $(\cap_{i\in\mathbb{N}} A_i)^c = \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i^c$

Eventos

Teorema (Leis de De Morgan)

Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos de Ω. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$,

- $\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \cap_{i=1}^{n} A_i^c$
- $\left(\cap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \cup_{i=1}^{n} A_i^c$

Além disso,

- $(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i)^c = \cap_{i\in\mathbb{N}} A_i^c$
- $(\cap_{i\in\mathbb{N}} A_i)^c = \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i^c$

Definição (Partição)

Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos. Dizemos que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ particiona Ω se:

- para todo $i, j \in \mathbb{N}$ tal que $i \neq j$, A_i e A_j são disjuntos.
- $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$.

Referências I

Lima, E. L. (1982).
Curso de analise: volume 1, volume 1.
Instituto de Matematica Pura e Aplicada.

Velleman, D. J. (2006).
How to prove it: A structured approach.
Cambridge University Press.