

Projeto de Dissertação:

Estimação bayesiana de vetores autoregressivos com parâmetros variando no tempo e volatilidade estocástica

Aishameriane Schmidt*

Março de 2018

Resumo

O objetivo deste trabalho é desenvolver um método de estimação bayesiano para um modelo TVP-VAR com volatilidade estocástica multivariada do tipo Wishart. O modelo será estimado com o intuito de investigar o impacto da política monetária sobre a razão capital-trabalho da economia brasileira.

Introdução

O modelo de vetores autoregressivos (VAR) foi apresentado por Christopher Sims em 1980 e consiste em um conjunto de equações que permite modelar de maneira simultânea a dinâmica de um conjunto de séries temporais (DEL NEGRO; SCHORFHEIDE, 2013). Indícios de que os parâmetros de modelos VAR com dados macroeconômicos devem ser variantes no tempo (chamados de TVP-VAR) podem ser encontradas em diversos trabalhos, como por exemplo no artigo de Cogley e Sargent (2001), que utilizaram um TVP-VAR para verificar se houve mudanças de comportamento da autoridade econômica em resposta aos choques na economia americana no período de 1948 a 2000. Em um trabalho posterior, Cogley e Sargent incorporaram a componente de volatilidade estocástica ao seu modelo original, ao encontro das críticas feitas por Sims (2001) e Stock (2001). A ideia de um modelo TVP-VAR com volatilidade estocástica, no contexto dos dados de Cogley e Sargent (2005), é que mudanças nos coeficientes captam as alterações na política monetária, enquanto que as alterações de volatilidade seriam decorrentes das mudanças no comportamento dos choques que afetam a economia (KOOP; KOROBILIS, 2010).

Diversos trabalhos na área de macroeconomia que mesclam TVP-VAR com uma componente de volatilidade estocástica foram desenvolvidos ao longo dos últimos anos. Por exemplo, no artigo de Mumtaz e Zanetti (2015) é utilizado um TVP-VAR para verificar mudanças no padrão de procura por emprego e taxa de separação no mercado de trabalho; Baumeister e Peersman (2013) analisaram a resposta da economia a choques na oferta de

*Contato: aishameriane.schmidt@posgrad.ufsc.br

Programa de Pós Graduação em Economia da Universidade Federal de Santa Catarina (PPGECO/UFSC).
Professor Orientador: Guilherme Valle Moura.

petróleo nos EUA e Galí e Gambetti (2015) estudaram o efeito de política monetária em bolhas no mercado financeiro. Os trabalhos de Mumtaz e Theophilopoulou (2015, 2017) e de Davtyan (2017) utilizam modelos VAR e TVP-VAR com estimação bayesiana para investigar o impacto de choques monetários em desigualdade.

Embora os modelos VAR com parâmetros variando no tempo e volatilidade estocástica multivariada (TVP-VAR com MSV) sejam ferramentas úteis para descrever relações entre agregados macroeconômicos e fazer previsões, não há um consenso sobre a melhor maneira de fazer a estimação destes modelos. Em particular, um problema que surge ao lidar com TVP-VAR com MSV e que dificulta o processo de estimação é a quantidade de parâmetros. Por construção, modelos VAR têm uma quantidade elevada de parâmetros, que, por sua vez, aumenta rapidamente com a adição de novas variáveis, defasagens e variação temporal, que é o caso do TVP-VAR. A inclusão de volatilidade estocástica, além de contribuir para a proliferação dos parâmetros, acrescenta outra camada de complexidade: uma vez que a variância é uma função não linear, o sistema inteiro torna-se não linear e ferramentas mais sofisticadas (que o Filtro de Kalman, por exemplo) para estimação são necessárias. Neste sentido, Primiceri (2005) argumenta que a flexibilidade das ferramentas bayesianas (em comparação com métodos clássicos) as torna ideal para a estimação de modelos com variáveis latentes, muitos parâmetros e com função de verossimilhança de alta dimensão, que são características inerentes aos modelos TVP-VAR com MSV.

Apesar da maior flexibilidade dos métodos bayesianos para o tratamento de modelos como o TVP-VAR com MSV, o processo bayesiano de inferência para estes modelos ainda é bastante complexo e existem diferentes abordagens na literatura, tanto na especificação do modelo quanto na forma de obter estimativas. Cogley e Sargent (2005) utilizaram em seu modelo uma generalização da especificação de volatilidade estocástica proposta por Jacquier, Polson e Rossi (2002), em que feita a hipótese de que as variâncias seguem passeios aleatórios geométricos sem deslocamento. Essa estrutura permitiu que, para a estimação do modelo, fosse empregado um amostrador de Gibbs (especificamente, foi utilizada uma versão simples chamada *single-move Gibbs*) em conjunto com o algoritmo de Kim, Shephard e Chib (1998), no qual cada linha da matriz de variâncias e covariâncias foi tratada como um modelo univariado. No entanto, a especificação da variância no trabalho de Cogley e Sargent (2005) tem como restrição que as covariâncias variem apenas como uma proporção fixa das variâncias. Primiceri (2005), por sua vez, propôs um modelo em que as variâncias são como em Cogley e Sargent (2005) e as covariâncias seguem um passeio aleatório, fazendo com que fosse necessário o uso de um *multi-move Gibbs* para estimação. No caso de Primiceri (2005), o aumento da complexidade no amostrador de Gibbs culminou em um erro de especificação no algoritmo que levou dez anos para ser corrigido (ver Del Negro e Primiceri (2015)), evidenciando a dificuldade de estimação neste tipo de modelo. Existem ainda duas outras limitações que são comuns aos modelos de Primiceri (2005) e Cogley e Sargent (2005): o primeiro está relacionado à interpretabilidade da volatilidade multivariada, que é meramente uma estrutura algébrica contendo variâncias e covariâncias, sem uma conexão direta com o modelo univariado (PHILIPOV; GLICKMAN, 2006b). Já a segunda limitação está relacionado à volatilidade dos choques na equação de estados, que se supõe constante. Com relação a este segundo aspecto, Cogley, Primiceri e Sargent (2010) incorporaram volatilidade estocástica para os estados e recorreram, assim como Primiceri (2005), a um *multi-move Gibbs* para estimação do modelo.

Uma outra forma de modelar volatilidade estocástica multivariada é por meio do uso de processos Wishart, como nos trabalhos de Philipov e Glickman (2006b), Philipov e Glickman (2006a), Asai e McAleer (2009), que, assim como os trabalhos de Primiceri (2005)

e Cogley e Sargent (2005), também são modelos de estado de espaços não lineares e não gaussianos, apresentando função de verossimilhança que não pode ser tratada analiticamente. Para resolver o problema de estimação do modelo, Philipov e Glickman (2006a) e Asai, McAleer e Yu (2006) utilizam abordagem bayesiana com uso de amostradores de Gibbs. No entanto, Philipov e Glickman (2006a) reportaram problemas para estimar adequadamente o parâmetro de persistência d e foi preciso fixá-lo a priori. Por sua vez, no trabalho de Asai e McAleer (2009) foram relatados problemas de ineficiência, possivelmente relacionados com a convergência do amostrador de Gibbs. Além disso, a forma como foi definida a lei de movimento da volatilidade estocástica em ambos trabalhos acaba incorporando mais parâmetros ao modelo, em comparação com Primiceri (2005) e Cogley e Sargent (2005).

Também utilizando volatilidade estocástica Wishart, Uhlig (1997) apresenta um VAR com volatilidade estocástica em que foram utilizadas fórmulas fechadas para a filtragem das covariâncias em conjunto com amostragem por importância para estimação dos estados. O modelo de Uhlig (1997) não impõe restrições na evolução de covariâncias e variâncias e, ao mesmo tempo, sua metodologia de estimação é mais direta sem precisar de um algoritmo complexo como o de Primiceri (2005), além de ser mais parcimonioso com relação ao número de parâmetros que precisam ser estimados, quando comparado ao modelo de Philipov e Glickman (2006a, 2006b). No entanto, o fato de Uhlig utilizar apenas valores filtrados da volatilidade (sem uma etapa de suavização ou amostragem recursiva) faz com que as estimativas não sejam feitas com base em toda a informação disponível na amostra. Neste sentido, Windle e Carvalho (2014) generalizaram o modelo de Uhlig (com relação às dimensões das matrizes utilizadas), além de desenvolver fórmulas de filtro, amostrador recursivo e método de marginalização dos estados para estimação dos demais parâmetros do modelo.

Nas próximas seções são apresentadas as principais características e problemas com relação à estimação dos modelos de Cogley e Sargent (2005) e Primiceri (2005), seguidos da caracterização de um modelo TVP-VAR com MSV Wishart baseada no trabalho de Uhlig (1997). A partir disso, os objetivos do trabalho são detalhados, seguidos da seção de metodologia. Nesta última, é explicado o funcionamento dos métodos de Cadeias de Markov via Monte Carlo (MCMC), com ênfase no amostrador de Gibbs e na forma como ele é utilizado para obter as estimativas nos trabalhos de Cogley e Sargent (2005) e Primiceri (2005). Após, é introduzido o método de Windle e Carvalho (2014) de estimação para matrizes de variância e covariância e de que maneira ele pode ser incorporado em um bloco dentro de um amostrador de Gibbs para estimar os parâmetros de TVP-VAR com volatilidade Wishart. A penúltima seção trata dos resultados preliminares obtidos utilizando dados da economia brasileira no modelo TVP-VAR de Primiceri (2005) para avaliar impacto da política monetária sobre a razão capital-trabalho. O documento é finalizado com a apresentação do cronograma de trabalho e as referências utilizadas.

1 Modelos TVP-VAR com volatilidade estocástica multivariada

Considere a seguinte representação na forma de espaço de estados de um modelo TVP-VAR com MSV genérico:

$$y_t = Z_t \alpha_t + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim \mathcal{N}_k(\mathbf{0}_k, \Omega_t^{-1}) \quad (\text{eq. de medida}), \quad (1)$$

$$\alpha_t = \alpha_{t-1} + u_t \quad u_t \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{0}_p, Q) \quad (\text{eq. de transição dos estados}), \quad (2)$$

em que y_t é um vetor de dimensão $k \times 1$ de variáveis endógenas observadas no instante t ; Z_t é uma matriz com os valores defasados de y_t de forma que $Z_t = \mathbb{I}_k \otimes [1, y'_{t-1}, \dots, y'_{t-\ell}]$, onde \otimes denota o produto de Kronecker e \mathbb{I}_k é a matriz identidade de dimensão k ; α_t é um vetor com $p = k(k\ell + 1)$ coeficientes que variam no tempo de acordo com a equação de estados (e seriam estáticos em um modelo cujos parâmetros não variam no tempo); Ω_t^{-1} e Q são matrizes de covariância com dimensão $k \times k$ e $p \times p$, respectivamente, sendo que Ω_t^{-1} é estocástica.

As equações (1) e (2) definem um sistema dinâmico formado por uma equação de medida, cuja estrutura é similar a um modelo de regressão, e uma equação de transição dos estados, que descreve a trajetória do sistema através de um modelo autoregressivo. De acordo com Fearnhead (2011), a ideia por trás do modelo de estado de espaços é a existência de estados de interesse que evoluem ao longo do tempo, porém não são diretamente observáveis. No caso do sistema (1)-(2), os estados α_t são chamados de variáveis latentes uma vez que apenas as medidas y_t podem ser observadas.

Cogley e Sargent (2005) definem o termo ϵ_t da equação de medida (1) como $\epsilon_t = \Omega_t^{-1/2} \xi_t$, onde ξ_t segue uma distribuição normal padrão e $\Omega_t^{-1} = B^{-1} H_t B^{-1'}$, sendo:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H_t = \begin{bmatrix} h_{1t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_{2t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_{kt} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Os elementos da matriz triangular inferior B são constantes e os elementos da matriz diagonal H seguem passeios aleatórios sem deslocamento dados por:

$$\ln(h_{it}) = \ln(h_{it-1}) + \sigma_i \eta_{it}, \quad \eta_{it} \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (4)$$

A forma como Cogley e Sargent (2005) definem Ω_t , B e H_t restringe o comportamento das covariâncias entre os erros ϵ_t de maneira que elas variam como uma proporção fixa das variâncias, implicando que o choque que a i -ésima variável produz na j -ésima variável é constante ao longo do tempo (KOOP; KOROBILIS, 2010). Isto foi criticado por Primiceri (2005), que argumentou que as interações simultâneas entre variáveis são essenciais para captar os efeitos de variação no tempo em modelos TVP-VAR.

No trabalho de Primiceri (2005), as covariâncias entre variáveis seguem um passeio aleatório. Isso significa que a matriz B da equação (3) passa a ter a seguinte especificação:

$$B_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_{21,t} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k1,t} & \beta_{k2,t} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \beta_t = \beta_{t-1} + v_t, \quad v_t \sim \mathcal{N}(0, Q). \quad (5)$$

Entretanto, como ressaltado por Primiceri (2005), este modelo não é invariante à ordem das variáveis no sentido de que a solução das estimativas não é única para um mesmo conjunto de dados. Por exemplo, considere \tilde{y}_t como uma permutação dos valores de y_t (equação 1) e $\tilde{\Omega}_t^{-1}$ a respectiva matriz de covariâncias (obtida permutando as linhas e

colunas de Ω_t^{-1}). Primiceri (2005) diz que é possível mostrar que não existe uma matriz triangular \tilde{B}_t e uma matriz diagonal \tilde{H}_t que satisfazem $\tilde{B}_t^{-1}\tilde{H}_t\tilde{B}_t^{-1'} = \tilde{\Omega}_t^{*-1}$, com os elementos de \tilde{B}_t seguindo uma distribuição normal, os elementos de \tilde{H}_t seguindo uma distribuição lognormal e com $\tilde{\Omega}_t^{*-1}$ tendo a mesma distribuição de $\tilde{\Omega}_t^{-1}$. De fato, isso ocorre tanto pela estrutura triangular da matriz \tilde{B}_t quanto pelas distribuições de probabilidade escolhidas para modelar a volatilidade estocástica.

Apesar de dar mais flexibilidade às covariâncias se comparado ao modelo de Cogley e Sargent (2005), em sua aplicação econômica, Primiceri utiliza uma estrutura mais simples no TVP-VAR, assumindo independência dos choques que afetam as covariâncias da matriz B_t (KIM, 2014). Como apontado por Primiceri (2005), a generalização é possível com o uso de uma variação do amostrador de Gibbs chamado *multi-move* Gibbs para obter as estimativas a posteriori. No entanto, a implementação foi feita sem incluir todos elementos que seriam necessários a cada passo do amostrador. Este erro só foi corrigido 10 anos depois, e o fato de ter passado tanto tempo sem ter sido percebido mesmo com diversos trabalhos utilizando o algoritmo, evidencia a complexidade da implementação do mesmo (DEL NEGRO; PRIMICERI, 2015).

As estruturas dadas em (3) e (5) não são as únicas formas de modelar volatilidade estocástica. O modelo VAR de coeficientes constantes e volatilidade estocástica proposto por Uhlig (1997) assume que a matriz de precisão dos erros da equação de medida sofre choques que seguem uma distribuição Beta multivariada. Especificamente, o modelo de Uhlig é um modelo VAR(k) com m variáveis onde as matrizes de precisão dos erros variam no tempo e é composto da equação de medida,

$$y_t = Z_t\alpha + \epsilon_t, \text{ onde } \epsilon = \mathcal{U}(\Omega^{-1})'\xi_t \text{ e } \xi_t \sim \mathcal{N}(0, \mathbb{I}_m) \quad (6)$$

além de uma única equação de transição dos estados,

$$\Omega_{(t+1)} = \frac{\mathcal{U}(\Omega_t)'\Theta_t\mathcal{U}(\Omega_t)}{\lambda} \quad \text{com } \Theta \sim \mathcal{B}_m\left(\frac{\nu + c + km}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (7)$$

em que assume-se m variáveis no modelo observadas em t períodos ($t = 1, \dots, T$); $\lambda > 0$ e $\nu > m - 1$ são parâmetros; c é o número de regressores determinísticos (como uma constante e/ou tendência); os choques Θ são independentes entre si; $\mathcal{U}(\cdot)$ é a decomposição de Cholesky superior (que por construção é positiva definida) e $\mathcal{B}_m(p, q)$ é a distribuição Beta multivariada. O parâmetro ν é o que permite as variações na matriz de precisão Ω_t : quanto menor ν , maior a variação de H_t ao longo do tempo e vice-versa. No limite, quando $\nu \rightarrow \infty$, o modelo se aproxima de um VAR sem volatilidade estocástica, pois a densidade beta multivariada em (7) converge, neste caso, para uma matriz identidade de ordem m (KIM, 2014).

A escolha das distribuições à priori dos parâmetros e das inovações do modelo feita por Uhlig (1997) explora a relação entre as distribuições Beta e Wishart, permitindo que a atualização da posteriori seja feita com fórmula fechada e confere propriedades importantes ao modelo. De acordo com Kim (2014), a estrutura proposta por Uhlig não está sujeita às limitações dos modelos de Cogley e Sargent (2005) e Primiceri (2005): a escolha da densidade Wishart para modelar a volatilidade estocástica permite que variâncias e covariâncias evoluam sem os problemas citados anteriormente. Isto é, da forma como a matriz Θ_t é definida, o modelo permite que variâncias e covariâncias evoluam livremente, sem a necessidade de modelá-las separadamente. A densidade Wishart, por sua vez, garante que a matriz de precisão Ω_t é sempre positiva definida.

O modelo descrito em (6)-(7) pode ser generalizado incorporando o índice de tempo nos estados α na primeira equação e adicionando uma segunda equação de transição dos estados (similar à Equação 2), resultando em:

$$y_t = Z_t \alpha_t + \epsilon_t, \text{ com } \epsilon = \mathcal{U}(\Omega_t^{-1})' \xi_t \text{ e } \xi_t \sim \mathcal{N}(0, \mathbb{I}_m), \quad (8)$$

$$\Omega_{(t+1)} = \frac{\mathcal{U}(\Omega_t)' \Theta_t \mathcal{U}(\Omega_t)}{\lambda}, \text{ com } \Theta \sim \mathcal{B}_m \left(\frac{\nu + c + km}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad (9)$$

$$\alpha_{t+1} = \alpha_t + u_t, \text{ com } u_t \sim \mathcal{N}(0, Q^{-1}). \quad (10)$$

Observe que o sistema acima mantém as características do modelo original de Uhlig (1997) ao mesmo tempo que incorpora a característica de coeficientes variando no tempo. Isto é, a especificação TVP-VAR com volatilidade Wishart acima é flexível como os modelos de Cogley e Sargent (2005) e Primiceri (2005) para captar tanto alterações nos coeficientes decorrentes, por exemplo, de mudanças na política, como também mudanças nos choques sofridos em uma economia. Ao mesmo tempo, este modelo não apresenta os problemas relacionados à ordenação de variáveis e restrições na matriz de variância e covariância inerentes a (3) e (5).

Resta, então, definir um método de estimação para o sistema (8)-(10). Note que se trata de um modelo na forma de estado de espaços não linear, uma vez que as variâncias da equação de medida (8) são estados latentes. Dessa forma, não é possível utilizar de forma direta o filtro de Kalman para estimação dos parâmetros. Uma solução é o uso de um amostrador de Gibbs, onde um bloco que amostra a matriz de variância e covariância condicionada aos coeficientes α_{t-1} é combinado com outro bloco que faça retiradas da distribuição dos coeficientes $\alpha_t | \Omega_t$. Na estimação dos coeficientes, observe que para um dado valor de Ω_t , a equação de medida torna-se linear e gaussiana com relação aos estados α_t e permitindo utilizar um algoritmo de estimação como o de Carter e Kohn (1994). O maior problema de estimação do modelo proposto reside na obtenção dos valores de Ω_t . A maneira como a volatilidade estocástica é definida em Cogley e Sargent (2005) e Primiceri (2005) possibilita que transformações na equação de medida reduzam o problema da estimação de Ω_t em diversos problemas univariados mais simples, porém isto não é possível com a volatilidade estocástica de (8)-(10). Também não é possível recorrer ao trabalho de Uhlig (1997), pois seu método consiste em obter via amostragem por importância as estimativas dos coeficientes e filtrar as matrizes de variância e covariância. Sem estas estimativas, não é possível ter todos os blocos necessários para um amostrador de Gibbs para o modelo.

Isso nos leva ao problema de pesquisa deste trabalho: desenvolver um método de estimação bayesiano para estimar os coeficientes e volatilidade do modelo TVP-VAR com volatilidade estocástica Wishart definido em (8)-(10).

2 Objetivos

Assim como os modelos de Cogley e Sargent (2005), Primiceri (2005) e Uhlig (1997), o modelo definido em (8)-(10) pode ser estimado utilizando abordagem bayesiana. No entanto, o método de Uhlig não produz estimativas da volatilidade com base em toda a informação da amostra, uma vez que são utilizados apenas valores filtrados e por isso é necessário um método alternativo de estimação. Ao mesmo tempo, o bloco de estimação das volatilidades do amostrador de Gibbs de Primiceri (2005) é específico para a forma da funcional que ele propôs e não pode ser utilizado para volatilidade estocástica Wishart.

Ainda assim, o amostrador de Gibbs, por seu caráter modular, é o ideal para tratar de modelos como o descrito em (8)-(10): permite que um problema de alta dimensão seja particionado em problemas de menor complexidade, de forma que os parâmetros do modelo possam ser estimados em blocos diferentes. Com isso, pode-se utilizar o método de Windle e Carvalho (2014) para construir o filtro e o amostrador recursivo para gerar amostras de Ω_t como um bloco do Gibbs, em conjunto com outro bloco que utilize o algoritmo de Carter e Kohn (1994) para estimação dos demais parâmetros do modelo (8)-(10).

Especificamente, os objetivos do trabalho são:

- a. Incorporar o método de Windle e Carvalho (2014) como bloco em um amostrador de Gibbs em conjunto com o algoritmo de Carter e Kohn (1994) para estimação a posteriori do modelo (8)-(10);
- b. Implementar métodos de inferência, previsão e diagnóstico para o modelo estimado em (a);
- c. Desenvolver uma aplicação para o modelo utilizando dados da economia brasileira.

A aplicação da etapa (c) será investigar o impacto de política monetária em desigualdade de renda para o Brasil a partir de 1999, usando como referência o trabalho desenvolvido por Mumtaz e Theophilopoulou (2015, 2017) para o Reino Unido.

3 Metodologia

Algoritmos de MCMC são métodos bayesianos utilizados para conseguir amostras de uma densidade alvo da qual não é possível (ou é muito difícil) amostrar. As amostras são obtidas a partir de uma Cadeia de Markov escolhida de forma que sua distribuição invariante seja exatamente a distribuição alvo. Dependendo das características do problema, a Cadeia de Markov pode ser construída utilizando diferentes algoritmos, como por exemplo o Metropolis-Hastings, o amostrador de Gibbs ou ainda uma mistura destes dois métodos (CHIB, 2001). Nas aplicações bayesianas, MCMC é comumente utilizado para obter retiradas de distribuições à posteriori e, a partir de um número suficientemente grande dos valores amostrados, calcular as quantidades de interesse como momentos da distribuição, intervalos de credibilidade, etc.

Em particular, o amostrador de Gibbs permite que o problema de amostrar da densidade alvo seja fracionado em problemas de menor complexidade, o que torna o método interessante para os casos onde a densidade alvo tem alta dimensão. Seu funcionamento baseia-se em explorar as densidades condicionais de duas ou mais variáveis aleatórias (v.a.) para obter retiradas da densidade marginal (CASELLA; GEORGE, 1992). Por exemplo, se Θ_1 e Θ_2 são duas v.a. com densidade conjunta $f(\theta_1, \theta_2)$ e densidades marginais denotadas por $f_{\Theta_1|\Theta_2}$ e $f_{\Theta_2|\Theta_1}$, então, utilizando um valor inicial $\Theta_{1,0} = \theta_{1,0}$, para todo $t = 1, 2, \dots, N$, pode-se amostrar $\Theta_{2,t}$ de $f_{\Theta_2|\Theta_1}(\cdot|\theta_{1,t-1})$ e utilizar este valor para obter $\Theta_{1,t} \sim f_{\Theta_1|\Theta_2}(\cdot|\theta_{2,t})$ gerando assim uma sequência $(\theta_{1,t}, \theta_{2,t})_{t=1}^N$.

A ideia acima do amostrador de Gibbs pode ser explorada em modelos de espaço de estados. Por exemplo, assumindo $\Omega_t^{-1} \equiv \Omega^{-1}$ na equação (1), o modelo (1)-(2) deixa de ter volatilidade estocástica. Neste caso, se os valores de α_t forem conhecidos para $t = 1, \dots, T$, a equação de medida (1) pode ser escrita como um modelo de regressão linear normal multivariado da forma $y_t^* = y_t - Z_t \alpha_t = \epsilon_t$, tornando a estimação de Ω^{-1}

através de $p(\Omega^{-1}|y^T, \alpha^T)$ simples (KOOP; KOROBILIS, 2010). Da mesma forma, no caso onde os α_t são conhecidos, a equação de transição dos estados em (2) passa a ser uma variação do modelo de regressão linear multivariado e $p(Q|y^T, \alpha^T)$ também tem uma forma simples. Um algoritmo de MCMC então pode ser especificado com um bloco que amostra de $p(\Omega^{-1}|y^T, \alpha^T)$, seguido de um bloco para amostrar $p(Q|y^T, \alpha^T)$. Por fim, o algoritmo de Carter e Kohn (1994) pode ser usado no último bloco para obter amostras de $p(\alpha_1, \dots, \alpha_T|y^T, Q, \Omega_t)$, fazendo com que o algoritmo de MCMC esteja completamente especificado para uma dada priori escolhida. No entanto, a presença de volatilidade estocástica acrescenta uma camada de complexidade ao modelo através da estimação de $p(\Omega_t^{-1}|y^T, \alpha^T)$.

Por exemplo, a forma como foi definida a volatilidade estocástica em Cogley e Sargent (2005) e Primiceri (2005) permite que o problema de estimação seja simplificado para um conjunto de problemas univariados mais simples. Como ilustração, considere um modelo de volatilidade estocástica multivariada à la Cogley e Sargent (2005), porém sem coeficientes no VAR, dado por $y_t = \epsilon_t$; em que $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega_t^{-1})$, $\Omega_t^{-1} = B^{-1}H_tB^{-1'}$, H_t e B_t são definidas como em (3) e seus elementos seguem a lei de movimento dada em (4). Os elementos de ϵ_t não são independentes, porém pode-se transformar a equação de medida pré multiplicando a mesma por B_t^{-1} , obtendo $B^{-1}y_t = B\epsilon_t$. Assim, $\epsilon_t^* = B\epsilon_t$ terá uma matriz de variâncias covariâncias diagonal. Então, pode-se utilizar um algoritmo de MCMC que emprega $p(h^T|y^T, B)$ e $p(B|y^T, h^T)$ (h^T é um vetor de dimensão $kT \times 1$ que empilha todos elementos das matrizes H_t), de maneira que métodos como o de Kim, Shephard e Chib (1998) podem ser utilizados em uma equação por vez para gerar amostras de $p(h^T|y^T, B)$ (KOOP; KOROBILIS, 2010). As amostras de $p(B|y^T, h^T)$ são obtidas utilizando os resultados para o modelo normal de regressão linear pois $B^{-1}y_t = B\epsilon_t$ pode ser visto como k equações de regressão com erros independentes entre si. Quando a matriz B varia ao longo do tempo como no modelo de Primiceri (2005), a forma de amostrar de $p(B_t|y^T, h^T)$ precisa ser modificada. Em linhas gerais, o procedimento envolve reescrever $B_ty_t = \epsilon_t^*$ e obter um modelo linear e com erros que são uma mistura de gaussianas, onde o algoritmo de Carter e Kohn (1994) pode ser utilizado.

Os algoritmos para estimar a volatilidade estocástica dos modelos de Cogley e Sargent (2005) e Primiceri (2005) são baseados no método de Kim, Shephard e Chib (1998), que, por sua vez, utiliza resultados do modelo de espaço de estados linear e gaussiano. Seu uso não é possível no sistema (8)-(10), por causa da especificação da volatilidade Wishart. O método de Windle e Carvalho (2014), desenvolvido para um modelo similar ao de Uhlig (1997), utiliza os resultados de conjugação das densidades do modelo para derivar o *forward filter*, o *backward sampler* (ou amostrador recursivo, que consiste em amostrar da densidade posterior dos estados em t através da densidade condicional ao estado em $t + 1$) e fazer a marginalização dos estados latentes para estimação dos demais parâmetros do modelo.

4 Resultados preliminares da aplicação empírica

Com o intuito de ter um primeiro contato com a metodologia de estimação bayesiana de TVP-VAR, foi realizado um estudo piloto utilizando o modelo de Primiceri (2005) com a metodologia de estimação de Del Negro e Primiceri (2015). O problema econômico a ser abordado é a relação entre política monetária e desigualdade de renda, uma vez que durante a pesquisa se detectou uma lacuna de estudos empíricos nessa área para dados do Brasil e uma falta de convergência nos resultados dos estudos realizados nos demais países. Sendo assim, um dos interesses secundários na realização do estudo piloto é verificar a

disponibilidade e qualidade dos dados sobre desigualdade de renda para o Brasil. Nesta seção são apresentados os argumentos para o uso da razão capital-trabalho como medida de desigualdade de renda para o Brasil e os principais resultados obtidos na estimação do TVP-VAR.

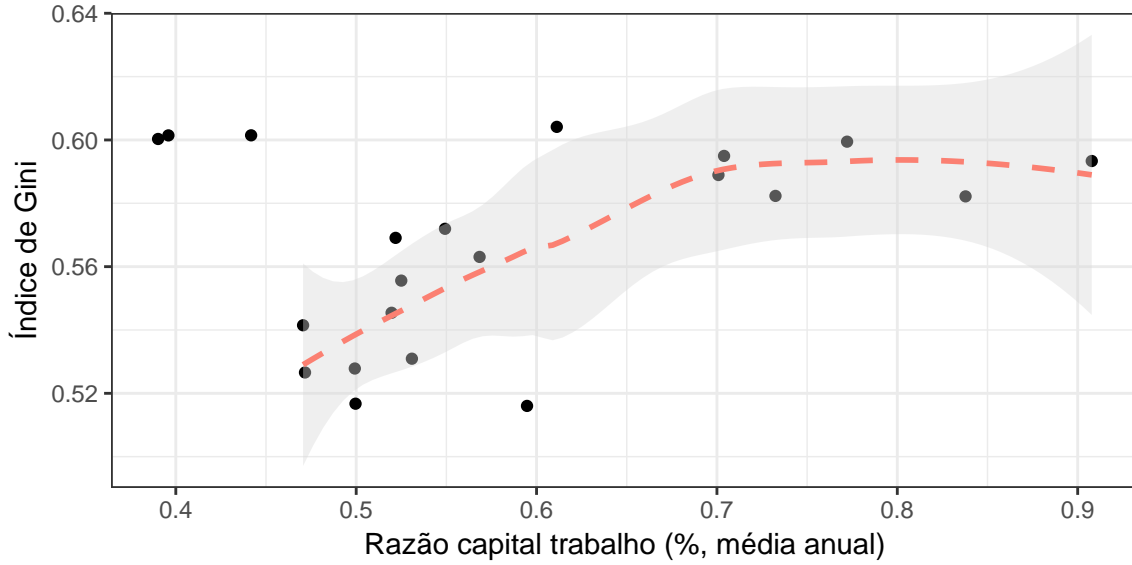
Frente à falta de consenso na literatura internacional relacionando a política monetária com desigualdade de renda e também o baixo número de estudos empíricos para o Brasil nesta área, torna-se relevante dar continuidade ao debate e fazer para o país um estudo similar ao que foi proposto por Mumtaz e Theophilopoulou (2017) para o Reino Unido e Davtyan (2017) para os EUA. Um primeiro desafio que surge é com relação aos dados de desigualdade, pois as séries de desigualdade para o Brasil são escassas e sua periodicidade, no caso das séries existentes, é anual (MORGAN, 2017). Uma vez que se busca analisar impactos de choques de política monetária, são necessários dados que tenham pelo menos periodicidade trimestral, para que as relações de curto prazo possam ser detectadas.

De acordo com Piketty (2014), a relação entre os ganhos do capital (oriundos de juros, ações, etc) e a renda do trabalho (salários) é um determinante importante de desigualdade: quanto maior for a proporção do capital em relação à renda nacional, maior a tendência à concentração de riqueza com uma fração menor da população. No Brasil, é possível recuperar a série de dados das rendas do capital e das rendas do trabalho que são construídas pela Receita Federal através das declarações de impostos e com elas construir a série da razão capital-trabalho. A ideia por trás do uso da relação capital-trabalho como medida de desigualdade de renda está na composição do patrimônio e fluxo de renda das famílias: pessoas mais pobres tendem a ter menos aplicações financeiras, recebimentos de aluguéis e similares, dependendo quase que integralmente dos salários. No outro extremo, situam-se as pessoas ricas, que por possuírem muitos ativos financeiros apresentam rendas de capital altas em relação à renda de salário. Isso implica que aumentos na razão capital-trabalho em teoria apontam benefícios para as pessoas proprietárias de ativos financeiros, aumentando a desigualdade de renda.

A Figura 1 exibe os valores anuais da razão capital-trabalho (média) e índice de Gini para o Brasil nos anos de 1995 a 2015. É possível perceber um comportamento crescente entre os valores, com exceção de três outliers localizados no canto superior esquerdo do gráfico. Mesmo com a ocorrência destes valores discrepantes na série, o restante dos dados aponta para uma relação positiva entre o Índice de Gini e a razão capital-trabalho, o que vai ao encontro do descrito na literatura. Sendo assim, nossa proposta é de utilizar a razão capital-trabalho (em valores mensais) para o período de 1996 a 2017 como medida de desigualdade de renda para o Brasil.

Como estudo piloto, os dados do Brasil da razão capital-trabalho, produto, inflação, taxa de câmbio e taxa de juros (todos com periodicidade mensal) foram utilizados no TVP-VAR(1) com volatilidade estocástica à la Primiceri sendo que para a estimação das volatilidades e coeficientes, foi utilizado o algoritmo de Del Negro e Primiceri (2015). A taxa de variação do PIB real mensal foi obtida a partir da série calculada pelo BACEN utilizando como deflator o IPCA do mês de novembro de 2017. O IPCA acumulado em 12 meses foi utilizado como medida de inflação e a variação da taxa de câmbio (R\$/US\$) foi calculada com base no câmbio comercial de final de período. Por fim, a taxa de juros é a taxa Swap DI 90 dias, equivalente à taxa *3-month treasury bill* (utilizada por Primiceri (2005), Mumtaz e Theophilopoulou (2017) e outros). O período dos dados compreende os meses de janeiro de 1996 a novembro de 2017, sendo que as primeiras 48 observações

Figura 1 – Diagrama de dispersão do Índice de Gini e Razão Capital-Trabalho
Brasil, 1992-2015



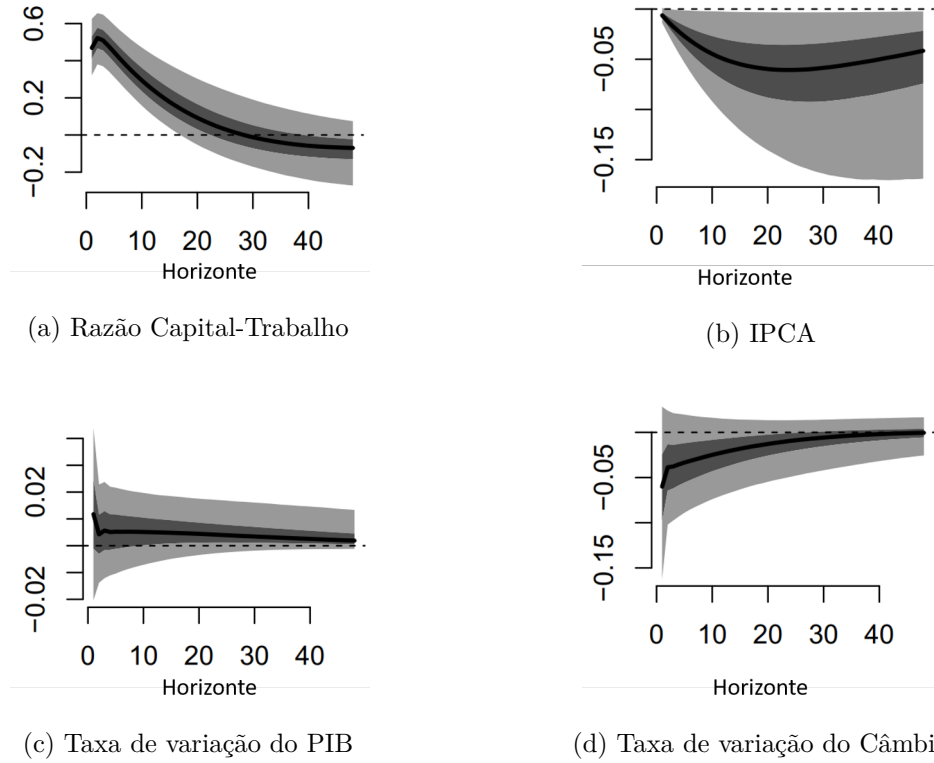
A Razão Capital-Trabalho anual foi calculada utilizando a média aritmética dos meses de um ano. Não há dados do Índice de Gini para os anos 1994, 2000 e 2010 e portanto esses valores foram excluídos do gráfico. Os outliers localizados no canto superior esquerdo correspondem aos anos de 1995 a 1997. Neste período, que é após a implementação do plano real, a desigualdade pelo Índice de Gini manteve-se nos mesmos patamares anteriores ao mesmo tempo que a série de Capital-Trabalho teve uma redução média anual, motivada principalmente pelo aumento na série da renda do trabalho mais do que a variação no aumento da série do capital. A curva pontilhada foi calculada com base na regressão polinomial local do Índice de Gini em função da Razão Capital-Trabalho excluindo os anos de 95, 96 e 97 e a região cinza representa o intervalo de confiança de 95% da regressão. O coeficiente de correlação de Spearman considerando a amostra toda é de 0.1545 (p -valor = 0.5019) enquanto que sem os outliers a correlação passa a ser significativa a um nível de confiança de 99% ($\rho = 0.7461$, p -valor < 0.001).
Fonte – Elaboração própria com base nos dados da PNAD e BCB-DSTAT.

foram utilizadas exclusivamente para o cálculo de alguns dos hiperparâmetros da priori (através das quantidades de MQO). Dessa forma, o modelo final foi estimado considerando um horizonte de 215 períodos.

A resposta negativa da razão capital-trabalho a um choque contracionista, considerando os coeficientes estimados no último período, é significativa e com persistência de aproximadamente dois anos (Figura 2). A capacidade preditiva do modelo piloto em comparação com as previsões de um modelo VAR simples foi superior para 1, 10 e 24 períodos, o que leva a concluir que existe uma contribuição importante dos coeficientes variando no tempo e/ou da volatilidade para a estimação correta dos parâmetros do modelo.

Os próximos passos são utilizar estes dados na estrutura mais geral do modelo TVP-VAR com volatilidade estocástica Wishart para verificar se há melhorias tanto na estimação de parâmetros quanto nas previsões fora da amostra ao permitir uma estrutura mais flexível para os choques que afetam as covariâncias no modelo.

Figura 2 – Função impulso resposta de um choque monetário contracionista nas variáveis do modelo calculadas para um horizonte de 48 períodos



O modelo tem uma defasagem e a identificação dos choques segue o seguinte esquema: a desigualdade, por ter uma característica estrutural, não é afetada contemporaneamente por nenhum outro choque; a inflação e o produto afetam contemporaneamente a taxa de juros que por sua vez afeta o câmbio. A função impulso resposta calcula o impacto de um choque de uma unidade na equação do Swap considerando os parâmetros estimados para o último período do modelo (nov/2017). São utilizados os valores médios em toda a amostra para os elementos da matriz Ω_t , seguindo a mesma abordagem de Del Negro e Primiceri (2015).

Fonte – Elaboração própria.

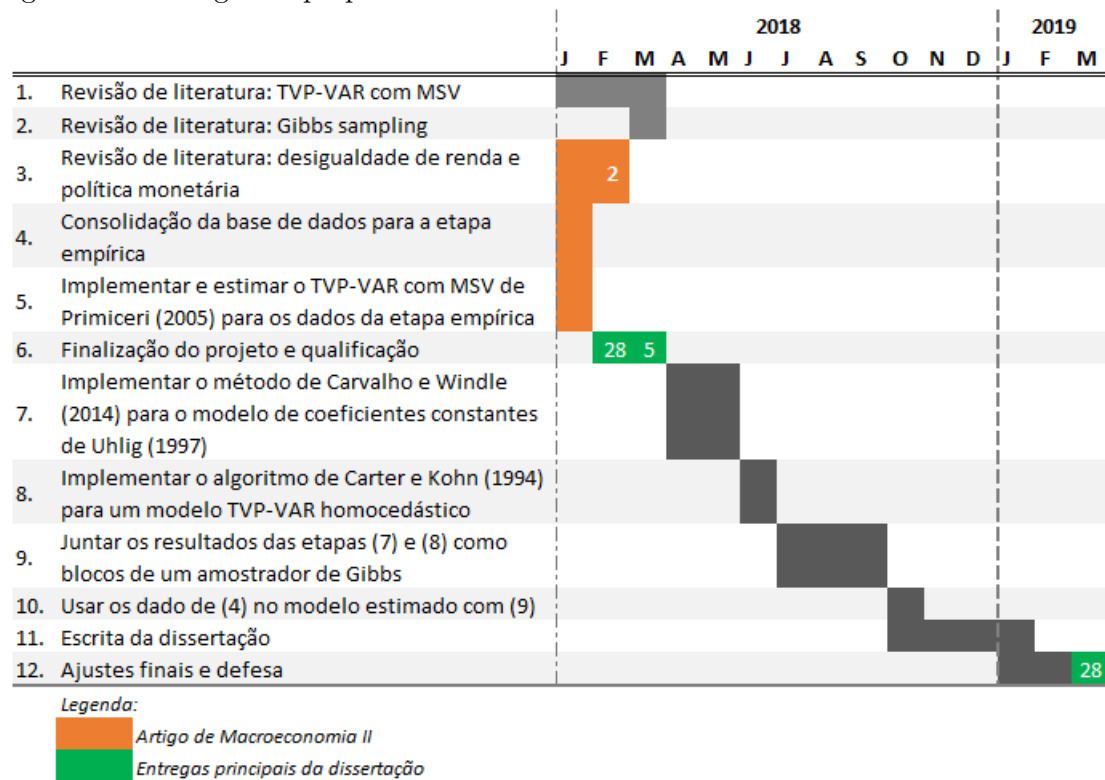
5 Cronograma

Usando o método de Windle e Carvalho (2014) é possível gerar amostras das matrizes de variância e covariância do modelo em (8)-(10) que, por sua vez, podem ser incorporadas no algoritmo de Carter e Kohn (1994) para amostrar os demais parâmetros. A partir das sequências geradas, o cálculo de momentos da posteriori é direto. Serão implementados também métodos para diagnóstico de convergência univariada e multivariada das Cadeias de Markov.

O cronograma de trabalho está detalhado na Figura 3. No cronograma estão listadas as principais atividades previstas para a dissertação a serem desenvolvidas nos próximos 12 meses.

Para a disciplina de Macroeconomia II foi implementado o TVP-VAR de Primiceri (2005) utilizando o algoritmo de Del Negro e Primiceri (2015) para verificar o impacto de política monetária em desigualdade utilizando dados do Brasil e os resultados principais estão reportados na seção 4. Com isso, verificou-se tanto a disponibilidade dos dados como a sua adequabilidade para a aplicação empírica a ser desenvolvida na dissertação.

Figura 3 – Cronograma proposto



O desenvolvimento dos blocos do amostrador de Gibbs será feito de forma fracionada, para auxiliar no entendimento de cada pedaço (estimação dos coeficientes e estimação da volatilidade) antes de entrar em uma estrutura mais complexa.

Referências

ASAI, M.; MCALEER, M. The structure of dynamic correlations in multivariate stochastic volatility models. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 150, n. 2, p. 182–192, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.

ASAI, M.; MCALEER, M.; YU, J. Multivariate stochastic volatility: a review. *Econometric Reviews*, Taylor & Francis, v. 25, n. 2-3, p. 145–175, 2006. Citado na página 3.

BAUMEISTER, C.; PEERSMAN, G. Time-varying effects of oil supply shocks on the U.S. economy. *American Economic Journal: Macroeconomics*, American Economic Association, v. 5, n. 4, p. 1–28, 2013. Citado na página 1.

CARTER, C. K.; KOHN, R. On gibbs sampling for state space models. *Biometrika*, Oxford University Press, v. 81, n. 3, p. 541–553, 1994. Citado 4 vezes nas páginas 6, 7, 8 e 11.

CASELLA, G.; GEORGE, E. I. Explaining the gibbs sampler. *The American Statistician*, Taylor & Francis, v. 46, n. 3, p. 167–174, 1992. Citado na página 7.

- CHIB, S. Markov chain monte carlo methods: computation and inference. In: *Handbook of econometrics*. [S.l.]: Elsevier, 2001. v. 5, p. 3569–3649. Citado na página 7.
- COGLEY, T.; PRIMICERI, G. E.; SARGENT, T. J. Inflation-gap persistence in the US. *American Economic Journal: Macroeconomics*, v. 2, n. 1, p. 43–69, 2010. Citado na página 2.
- COGLEY, T.; SARGENT, T. J. Evolving Post-World War II U.S. Inflation Dynamics. *NBER Macroeconomics Annual*, v. 16, n. 1, p. 331–373, Jan 2001. Citado na página 1.
- COGLEY, T.; SARGENT, T. J. Drifts and volatilities: monetary policies and outcomes in the post WWII US. *Review of Economic dynamics*, Elsevier, v. 8, n. 2, p. 262–302, 2005. Citado 7 vezes nas páginas 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 8.
- DAVTYAN, K. The distributive effect of monetary policy: The top one percent makes the difference. *Economic Modelling*, Elsevier, v. 65, p. 106–118, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 9.
- DEL NEGRO, M.; PRIMICERI, G. E. Time varying structural vector autoregressions and monetary policy: a corrigendum. *The review of economic studies*, Oxford University Press, v. 82, n. 4, p. 1342–1345, 2015. Citado 5 vezes nas páginas 2, 5, 8, 9 e 11.
- DEL NEGRO, M.; SCHORFHEIDE, F. Bayesian macroeconometrics. In: GEWEKE, J.; KOOP, G.; DIJK, H. V. (Ed.). *The Oxford Handbook of Bayesian Econometrics*. Oxford: Oxford University Press, 2013. cap. 7, p. 293–389. Citado na página 1.
- FEARNHEAD, P. MCMC for State-Space Models. In: BROOKS, S. et al. (Ed.). *Handbook of markov chain monte carlo*. [S.l.]: CRC press, 2011. Citado na página 4.
- GALÍ, J.; GAMBETTI, L. The effects of monetary policy on stock market bubbles: Some evidence. *American Economic Journal: Macroeconomics*, American Economic Association, v. 7, n. 1, p. 233–257, 2015. Citado na página 2.
- JACQUIER, E.; POLSON, N. G.; ROSSI, P. E. Bayesian analysis of stochastic volatility models. *Journal of Business & Economic Statistics*, Taylor & Francis, v. 20, n. 1, p. 69–87, 2002. Citado na página 2.
- KIM, D. Maximum likelihood estimation for vector autoregressions with multivariate stochastic volatility. *Economics Letters*, Elsevier, v. 123, n. 3, p. 282–286, 2014. Citado na página 5.
- KIM, S.; SHEPHARD, N.; CHIB, S. Stochastic volatility: likelihood inference and comparison with ARCH models. *The Review of Economic Studies*, Wiley-Blackwell, v. 65, n. 3, p. 361–393, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 8.
- KOOP, G.; KOROBILIS, D. Bayesian multivariate time series methods for empirical macroeconomics. *Foundations and Trends in Econometrics*, Now Publishers, Inc., v. 3, n. 4, p. 267–358, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 1, 4 e 8.
- MORGAN, M. Extreme and persistent inequality: New evidence for Brazil combining national accounts, surveys and fiscal data, 2001-2015. *WID. World Working Paper Series*, v. 12, 2017. Citado na página 9.
- MUMTAZ, H.; THEOPHILOPOULOU, A. *Monetary Policy and Inequality in the UK*. [S.l.], 2015. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 7.

MUMTAZ, H.; THEOPHILOPOULOU, A. The impact of monetary policy on inequality in the UK. an empirical analysis. *European Economic Review*, Elsevier, v. 98, p. 410–423, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 2, 7 e 9.

MUMTAZ, H.; ZANETTI, F. Labor Market Dynamics: A Time-Varying Analysis. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, Wiley Online Library, v. 77, n. 3, p. 319–338, 2015. Citado na página 1.

PHILPOV, A.; GLICKMAN, M. E. Factor multivariate stochastic volatility via Wishart processes. *Econometric Reviews*, Taylor & Francis, v. 25, n. 2-3, p. 311–334, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.

PHILPOV, A.; GLICKMAN, M. E. Multivariate stochastic volatility via Wishart processes. *Journal of Business & Economic Statistics*, Taylor & Francis, v. 24, n. 3, p. 313–328, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.

PIKETTY, T. *O capital no século XXI*. [S.l.]: Editora Intrínseca, 2014. Citado na página 9.

PRIMICERI, G. E. Time varying structural vector autoregressions and monetary policy. *The Review of Economic Studies*, Wiley-Blackwell, v. 72, n. 3, p. 821–852, 2005. Citado 8 vezes nas páginas 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 11.

SIMS, C. A. Macroeconomics and reality. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 1–48, 1980. Citado na página 1.

SIMS, C. A. Comment on Sargent and Cogley’s “Evolving U.S. Postwar Inflation Dynamics”. In: *NBER Macroeconomics Annual*. [S.l.: s.n.], 2001. p. 273–278. Citado na página 1.

STOCK, J. H. Evolving Post-World War II US Inflation Dynamics: Comment. *NBER macroeconomics annual*, MIT Press, v. 16, p. 379–387, 2001. Citado na página 1.

UHLIG, H. Bayesian vector autoregressions with stochastic volatility. *Econometrica*, v. 65, n. 1, p. 59, 1997. Citado 4 vezes nas páginas 3, 5, 6 e 8.

WINDLE, J.; CARVALHO, C. A tractable state-space model for symmetric positive-definite matrices. *Bayesian Analysis*, International Society for Bayesian Analysis, v. 9, n. 4, p. 759–792, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 3, 7, 8 e 11.