Revisão de Probabilidade e Estatística

Aula 2 - Parte 1

Aishameriane Schmidt

PPGECO/UFSC

Fevereiro de 2019.

Alguns avisos úteis

Sobrevivendo às próximas 104/208 semanas

1. Envio do e-mail com livros e exercícios

Alguns avisos úteis

Sobrevivendo às próximas 104/208 semanas

1. Envio do e-mail com livros e exercícios
2. Lista 0 de Econometria I e exercícios de álgebra linear

Alguns avisos úteis

Sobrevivendo às próximas 104/208 semanas

1. Envio do e-mail com livros e exercícios
2. Lista 0 de Econometria I e exercícios de álgebra linear
3. Guia para futuros alunos

Alguns avisos úteis

Sobrevivendo às próximas 104/208 semanas

1. Envio do e-mail com livros e exercícios
2. Lista 0 de Econometria I e exercícios de álgebra linear
3. Guia para futuros alunos
4. Fazendo o cartãozinho da UFSC: *número de matrícula + documento com foto*

Alguns avisos úteis

Sobrevivendo às próximas 104/208 semanas

1. Envio do e-mail com livros e exercícios
2. Lista 0 de Econometria I e exercícios de álgebra linear
3. Guia para futuros alunos
4. Fazendo o cartãozinho da UFSC: *número de matrícula + documento com foto*
5. Cadastro na biblioteca central: *número de matrícula (e acho que documento)*

Alguns avisos úteis

Sobrevivendo às próximas 104/208 semanas

1. Envio do e-mail com livros e exercícios
2. Lista 0 de Econometria I e exercícios de álgebra linear
3. Guia para futuros alunos
4. Fazendo o cartãozinho da UFSC: *número de matrícula + documento com foto*
5. Cadastro na biblioteca central: *número de matrícula (e acho que documento)*
6. Cadastro no ID UFSC: *cpf + e-mail*

Alguns avisos úteis

Sobrevivendo às próximas 104/208 semanas

1. Envio do e-mail com livros e exercícios
2. Lista 0 de Econometria I e exercícios de álgebra linear
3. Guia para futuros alunos
4. Fazendo o cartãozinho da UFSC: *número de matrícula + documento com foto*
5. Cadastro na biblioteca central: *número de matrícula (e acho que documento)*
6. Cadastro no ID UFSC: *cpf + e-mail*
7. CAGR e Moodle

Alguns avisos úteis

Sobrevivendo às próximas 104/208 semanas

1. Envio do e-mail com livros e exercícios
2. Lista 0 de Econometria I e exercícios de álgebra linear
3. Guia para futuros alunos
4. Fazendo o cartãozinho da UFSC: *número de matrícula + documento com foto*
5. Cadastro na biblioteca central: *número de matrícula (e acho que documento)*
6. Cadastro no ID UFSC: *cpf + e-mail*
7. CAGR e Moodle
8. *As notas de aula e os slides são feitos em LaTeX!*

Programa

Aula 2

1. ~~Conjuntos, operações com conjuntos.~~
2. ~~Eventos.~~
3. ~~Definições de probabilidade.~~
4. Axiomas de Kolmogorov e implicações.
5. Probabilidade condicional e independência.
6. **Variáveis aleatórias** - ***de onde vem, onde vivem e como enxergar elas como funções?***
7. Função massa, função densidade e função densidade acumulada
8. Esperança, variância e covariância

Pendências da aula passada

“Seu passado sempre volta para assombrar”

Considere A e B dois subconjuntos de Ω. A *diferença simétrica* entre A e B é o conjunto de todos elementos que estão em A ou em B mas que não estão em ambos.

- Escreva a diferença simétrica formalmente utilizando as operações de união, intersecção e/ou complementar.
- Mostre que a diferença simétrica entre A e B é igual à diferença simétrica entre A^c e B^c.

Pendências da aula passada

“Seu passado sempre volta para assombrar”

Calcule

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0, 1+\frac{1}{n}\right) \triangle \left[\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right)$$

onde $A \triangle B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$.

Definição

Probabilidade axiomática

Seja $\mathbb{P}$ uma função que tem como domínio uma *σ-álgebra definida sobre o espaço amostral $\mathscr{F}$* e contradomínio em $\mathbb{R}$, isto é, temos $\mathbb{P} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$, onde $\mathscr{F}$ é uma σ-algebra em Ω. Diremos que $\mathbb{P} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ é uma função de probabilidade (ou medida de probabilidade) se atender aos seguintes axiomas:

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0, \ \forall \ A \subset \Omega$ (*Axioma da não-negatividade*);
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (*Axioma da normalização*);
3. Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos em Ω, $\mathbb{P}(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$ (*Axioma da aditividade enumerável*).

Iremos diferenciar a *função de probabilidade* da *probabilidade*, sendo que esta última é a imagem de um evento através da função $\mathbb{P}$ (cont.)

Qualquer função cujo domínio é uma *σ-álgebra sobre o espaço amostral* com contradomínio em $\mathbb{R}$ que atende os axiomas $1, 2$ e 3 será chamada de *medida de probabilidade*.

Probabilidade

Axiomas de Kolmogorov

Qualquer função cujo domínio é uma *σ-álgebra sobre o espaço amostral* com contradomínio em $\mathbb{R}$ que atende os axiomas $1, 2$ e 3 será chamada de *medida de probabilidade*.

Observe que a imagem da função é o intervalo $[0, 1]$ como decorrência dos axiomas. A imagem de um evento $A \subset \Omega$ gerada pela medida de probabilidade $\mathbb{P}(\cdot)$ é chamada de ***probabilidade do evento A***.

Probabilidade

Axiomas de Kolmogorov

Qualquer função cujo domínio é uma *σ-álgebra sobre o espaço amostral* com contradomínio em $\mathbb{R}$ que atende os axiomas $1, 2$ e 3 será chamada de *medida de probabilidade*.

Observe que a imagem da função é o intervalo $[0, 1]$ como decorrência dos axiomas. A imagem de um evento $A \subset \Omega$ gerada pela medida de probabilidade $\mathbb{P}(\cdot)$ é chamada de ***probabilidade do evento** A*.

A tripla $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}(\cdot))$ é chamada de *espaço de probabilidade* e contém toda a informação necessária para associar probabilidade aos eventos do experimento.

Probabilidade

Consequências dos Axiomas de Kolmogorov

Lema

A probabilidade de nada ocorrer é zero

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Lema

A probabilidade de nada ocorrer é zero

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Esboço da demonstração:

- Temos à nossa disposição apenas os axiomas de Kolmogorov e as propriedades de conjuntos (que podemos tomar emprestados para eventos);
- Iremos definir uma sequência de eventos de maneira conveniente e a partir disso utilizar os axiomas.

Probabilidade

Consequências dos Axiomas de Kolmogorov

Lema

A probabilidade da união é a soma das probabilidades se os eventos forem disjuntos

Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são disjuntos, então $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.

Probabilidade

Consequências dos Axiomas de Kolmogorov

Lema

A probabilidade da união é a soma das probabilidades se os eventos forem disjuntos

Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são disjuntos, então $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.

Observação: Nos axiomas tínhamos o resultado apenas para uma sequência *infinita* de eventos.

Probabilidade

Consequências dos Axiomas de Kolmogorov

Lema

A probabilidade da união é a soma das probabilidades se os eventos forem disjuntos

Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são disjuntos, então $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.

Observação: Nos axiomas tínhamos o resultado apenas para uma sequência *infinita* de eventos.

Esboço da demonstração:

- Temos à nossa disposição apenas os axiomas de Kolmogorov, as propriedades de conjuntos e o lema anterior (da probabilidade do vazio);

Probabilidade

Consequências dos Axiomas de Kolmogorov

Lema

A probabilidade da união é a soma das probabilidades se os eventos forem disjuntos

Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são disjuntos, então $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.

Observação: Nos axiomas tínhamos o resultado apenas para uma sequência *infinita* de eventos.

Esboço da demonstração:

- Temos à nossa disposição apenas os axiomas de Kolmogorov, as propriedades de conjuntos e o lema anterior (da probabilidade do vazio);
- Vamos usar a mesma estratégia e definir uma sequência de eventos de maneira conveniente para demonstrar o resultado a partir do que conhecemos.

Probabilidade

Consequências dos Axiomas de Kolmogorov

Lema

Probabilidade do complementar

Para todo evento A,

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

Lema

Probabilidade do complementar

Para todo evento A,

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

Esboço da demonstração:

- Temos à nossa disposição os axiomas de Kolmogorov, as propriedades de conjuntos e os 2 lemas anteriores;

Lema

Probabilidade do complementar

Para todo evento A,

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

Esboço da demonstração:

- Temos à nossa disposição os axiomas de Kolmogorov, as propriedades de conjuntos e os 2 lemas anteriores;
- Vamos partir da definição de complementar, do axioma da probabilidade de Ω e da probabilidade de conjuntos disjuntos.

Lema

Probabilidade da união

Para todos os eventos A e B,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Probabilidade

Consequências dos Axiomas de Kolmogorov

Lema

Probabilidade da união

Para todos os eventos A e B,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Esboço da demonstração:

- Temos à nossa disposição os axiomas de Kolmogorov, as propriedades de conjuntos e os lemas anteriores;

Probabilidade

Consequências dos Axiomas de Kolmogorov

Lema

Probabilidade da união

Para todos os eventos A e B,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Esboço da demonstração:

- Temos à nossa disposição os axiomas de Kolmogorov, as propriedades de conjuntos e os lemas anteriores;
- Vamos escrever A como a união de dois conjuntos disjuntos (ver exercícios da parte anterior);
- E vamos escrever $\mathbb{P}(A \cup B)$ também de uma forma conveniente.

Probabilidade

Consequências dos Axiomas de Kolmogorov

Lema

Probabilidade de subconjuntos

Se $A \subset B$, então $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$.

Lema

Probabilidade de subconjuntos

Se $A \subset B$, então $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$.

Esboço da demonstração:

- Temos à nossa disposição os axiomas de Kolmogorov, as propriedades de conjuntos e os lemas anteriores;

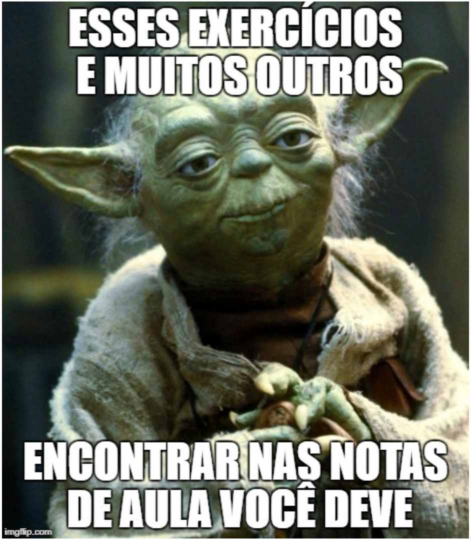
Lema

Probabilidade de subconjuntos

Se $A \subset B$, então $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$.

Esboço da demonstração:

- Temos à nossa disposição os axiomas de Kolmogorov, as propriedades de conjuntos e os lemas anteriores;
- Vamos escrever A e B como a união de dois conjuntos disjuntos;
- Vamos usar nosso conhecimento de teoria dos conjuntos para ver que $(A \cap B^c) = \emptyset$.

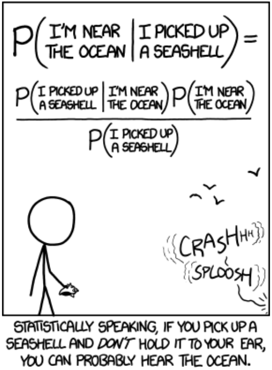


ESSES EXERCÍCIOS
E MUITOS OUTROS
ENCONTRAR NAS NOTAS
DE AULA VOCÊ DEVE
imgflip.com

Probabilidade

Independência de Eventos e Probabilidade Condicional

Como utilizar nosso conhecimento sobre algo que aconteceu para calcular a probabilidade que algo possa acontecer?



Para entender a piada: `https://www.explainxkcd.com/wiki/index.php/1236:_Seashell`

Probabilidade

Probabilidade condicional

- Considere que existe um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}[\cdot])$ bem definido.

Definição

Probabilidade Condicional

Sejam A e B eventos em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}[\cdot])$. A *probabilidade condicional* do evento A dado B, denotada por $\mathbb{P}[A|B]$, é definida por:

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad , \text{se} \quad \mathbb{P}(B) \neq 0 \tag{1}$$

e não está definida para $\mathbb{P}(B) = 0$.

Probabilidade

Probabilidade condicional

- Considere que existe um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}[\cdot])$ bem definido.

Definição

Probabilidade Condicional

Sejam A e B eventos em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}[\cdot])$. A *probabilidade condicional* do evento A dado B, denotada por $\mathbb{P}[A|B]$, é definida por:

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \text{, se} \quad \mathbb{P}(B) \neq 0 \tag{1}$$

e não está definida para $\mathbb{P}(B) = 0$.

Observação 1: Decorre da definição que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}[B|A]\mathbb{P}(A)$, *se ambas probabilidades* $\mathbb{P}(A)$ *e* $\mathbb{P}(B)$ *são não nulas.*

Probabilidade condicional

Observação 2: A definição anterior vai ao encontro da noção de probabilidade sob o enfoque frequentista. Suponha que foram observadas N ocorrências de um experimento aleatório (sendo N um número grande) para o qual os eventos A e B estão definidos. Então, $\mathbb{P}[A|B]$ representa a proporção de ocorrências do evento B onde o evento A também ocorreu, isto é:

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{N_{AB}}{N_B}$$

Probabilidade condicional

Observação 2: A definição anterior vai ao encontro da noção de probabilidade sob o enfoque frequentista. Suponha que foram observadas N ocorrências de um experimento aleatório (sendo N um número grande) para o qual os eventos A e B estão definidos. Então, $\mathbb{P}[A|B]$ representa a proporção de ocorrências do evento B onde o evento A também ocorreu, isto é:

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{N_{AB}}{N_B}$$

Onde N_{AB} representa o número de ocorrências do evento $A \cap B$ e N_B representa o número de ocorrências do evento B nas N observações do experimento. Portanto, $\mathbb{P}[A \cap B] = \frac{N_{AB}}{N}$ e $\mathbb{P}(B) = \frac{N_B}{N}$, de forma que:

Probabilidade condicional

Observação 2: A definição anterior vai ao encontro da noção de probabilidade sob o enfoque frequentista. Suponha que foram observadas N ocorrências de um experimento aleatório (sendo N um número grande) para o qual os eventos A e B estão definidos. Então, $\mathbb{P}[A|B]$ representa a proporção de ocorrências do evento B onde o evento A também ocorreu, isto é:

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{N_{AB}}{N_B}$$

Onde N_{AB} representa o número de ocorrências do evento $A \cap B$ e N_B representa o número de ocorrências do evento B nas N observações do experimento. Portanto, $\mathbb{P}[A \cap B] = \frac{N_{AB}}{N}$ e $\mathbb{P}(B) = \frac{N_B}{N}$, de forma que:

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{N_{AB}/N}{N_B/N} = \frac{N_{AB}}{N_B} = \mathbb{P}[A|B]$$

O que é consistente com a definição dada.

Probabilidade condicional

Observação 3: Será que é verdade que para um dado evento B definido no espaço de probabilidades para o qual $\mathbb{P}(B) > 0$ teremos que $\mathbb{P}(\cdot|B)$ é uma função de probabilidade?

Probabilidade condicional

Observação 3: Será que é verdade que para um dado evento B definido no espaço de probabilidades para o qual $\mathbb{P}(B) > 0$ teremos que $\mathbb{P}(\cdot|B)$ é uma função de probabilidade? **Sim!** Consulte as notas de aula para ver a demonstração e as propriedades. Obs: nas notas de aula aparece γ como sendo o espaço de eventos. O [Mittelhammer, 2013] usa essa notação e se esquiva de falar de σ-álgebra, para todos os fins, podem considerar que seria o equivalente ao nosso conjunto $\mathscr{F}$.

Probabilidade

Um exemplo

Considere o lançamento de duas moedas. Calcule:

1. a probabilidade de saírem duas caras dado que saiu cara na primeira moeda;
2. a probabilidade de duas caras dado que pelo menos uma é cara.

Probabilidade

Um exemplo

Considere o lançamento de duas moedas. Calcule:

1. a probabilidade de saírem duas caras dado que saiu cara na primeira moeda;
2. a probabilidade de duas caras dado que pelo menos uma é cara.

Primeiro, vamos fazer olhando diretamente para o espaço amostral e então vamos calcular usando a definição.

Probabilidade

Um exemplo

Considere o lançamento de duas moedas. Calcule:

1. a probabilidade de saírem duas caras dado que saiu cara na primeira moeda;
2. a probabilidade de duas caras dado que pelo menos uma é cara.

Primeiro, vamos fazer olhando diretamente para o espaço amostral e então vamos calcular usando a definição.
Defina os eventos: A_1 = cara na primeira moeda e
A_2 = cara na segunda moeda. Então, a probabilidade de saírem duas caras dado que saiu cara na primeira moeda é:

$$\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 | A_1] = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

Probabilidade

Um exemplo

Considere o lançamento de duas moedas. Calcule:

1. a probabilidade de saírem duas caras dado que saiu cara na primeira moeda;
2. a probabilidade de duas caras dado que pelo menos uma é cara.

Primeiro, vamos fazer olhando diretamente para o espaço amostral e então vamos calcular usando a definição.
Defina os eventos: A_1 = cara na primeira moeda e
A_2 = cara na segunda moeda. Então, a probabilidade de saírem duas caras dado que saiu cara na primeira moeda é:

$$\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 | A_1] = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

A probabilidade de saírem duas caras dado que pelo menos uma das moedas é cara será igual a $\frac{1}{3}$. **Quem quer tentar?**

Probabilidade

Definição

Independência entre eventos

Dois eventos A e B são independentes se $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Probabilidade

Definição

Independência entre eventos

Dois eventos A e B são independentes se $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Lema

Independência entre eventos (def. alternativa)

A e B são independentes se e somente se $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$. Em outras palavras, A e B são independentes se e somente se a incerteza sobre A não muda se assumirmos que B é verdadeiro.

Probabilidade

Definição

Independência entre eventos

Dois eventos A e B são independentes se $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Lema

Independência entre eventos (def. alternativa)

A e B são independentes se e somente se $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$. Em outras palavras, A e B são independentes se e somente se a incerteza sobre A não muda se assumirmos que B é verdadeiro.

Esboço da demonstração:

- Para provar um se e somente se ($\Leftrightarrow$), precisamos de duas etapas: a ida ($\Rightarrow$) e a volta ($\Leftarrow$).
  - ($\Rightarrow$) Assuma $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ e mostre que são independentes.
  - ($\Leftarrow$) Assuma que são independentes e prove que $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

Probabilidade

Teorema

Se A e B são eventos independentes, então os eventos A e B^c, A^c e B e A^c e B^c também são independentes.

Probabilidade

Teorema

Se A e B são eventos independentes, então os eventos A e B^c, A^c e B e A^c e B^c também são independentes.

Esboço da prova:

- Em todos os itens, queremos partir da probabilidade da interseção e mostrar que ela é o produto das probabilidades;

Probabilidade

Teorema

Se A e B são eventos independentes, então os eventos A e B^c, A^c e B e A^c e B^c também são independentes.

Esboço da prova:

- Em todos os itens, queremos partir da probabilidade da interseção e mostrar que ela é o produto das probabilidades;

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap B^c) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\
&= \mathbb{P}(A)[1 - \mathbb{P}(B)] \\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)
\end{aligned}$$

Teorema de Bayes

Teorema

Teorema da probabilidade total

Para um dado espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}[\cdot])$, *se* $B_1, B_2, \cdots, B_n$ *são uma coleção de eventos mutuamente disjuntos (ou exclusivos) em* $\mathscr{F}$ *satisfazendo* $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$ *e* $\mathbb{P}(B_j) > 0$ *para* $j = 1, \cdots, n$, *então, para todo* $A \in \mathscr{F}$, *vale que*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_j]\mathbb{P}(B_j)$$

Teorema de Bayes

Teorema

Teorema da probabilidade total

Para um dado espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}[\cdot])$, *se* $B_1, B_2, \cdots, B_n$ *são uma coleção de eventos mutuamente disjuntos (ou exclusivos) em* $\mathscr{F}$ *satisfazendo* $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$ *e* $\mathbb{P}(B_j) > 0$ *para* $j = 1, \cdots, n$, *então, para todo* $A \in \mathscr{F}$, *vale que*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_j]\mathbb{P}(B_j)$$

Corolário

Para um dado espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}[\cdot])$, *seja* $B \in \mathscr{F}$ *satisfazendo* $0 < \mathbb{P}(B) < 1$; *então, para todo* $A \in \mathscr{F}$:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}[A|B^c]\mathbb{P}(B^c)$$

Teorema de Bayes

Teorema

Fórmula de Bayes

Para um dado espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}[\cdot])$, *se* $B_1, B_2, \cdots, B_n$ *são uma coleção de eventos mutuamente disjuntos (ou exclusivos) em* $\mathscr{F}$ *satisfazendo* $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$ *e* $\mathbb{P}(B_j) > 0$ *para* $j = 1, \cdots, n$, *então, para todo* $A \in \mathscr{F}$ *para o qual* $\mathbb{P}(A) > 0$ *vale que:*

$$\mathbb{P}[B_k|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B_k]\mathbb{P}(B_k)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_j]\mathbb{P}(B_j)} \tag{2}$$

Teorema de Bayes

Teorema

Fórmula de Bayes

Para um dado espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}[\cdot])$, *se* $B_1, B_2, \cdots, B_n$ *são uma coleção de eventos mutuamente disjuntos (ou exclusivos) em* $\mathscr{F}$ *satisfazendo* $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$ *e* $\mathbb{P}(B_j) > 0$ *para* $j = 1, \cdots, n$, *então, para todo* $A \in \mathscr{F}$ *para o qual* $\mathbb{P}(A) > 0$ *vale que:*

$$\mathbb{P}[B_k|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B_k]\mathbb{P}(B_k)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_j]\mathbb{P}(B_j)} \tag{2}$$

Corolário

Para um dado espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}[\cdot])$, *sejam* A *e* $B \in \mathscr{F}$ *satisfazendo* $\mathbb{P}(A) > 0$ *e* $0 < \mathbb{P}(B) < 1$; *então:*

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}[A|B^c]\mathbb{P}(B^c)}$$

Variáveis aleatórias

Até o momento trabalhamos apenas com probabilidades relacionadas a um espaço de probabilidade, $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}(\cdot))$, em que:

- Ω ou *espaço amostral*, é o conjunto de todos os possíveis resultados de um determinado experimento,
- $\mathscr{F}$ uma σ – *álgebra* (é um conjunto com coleções de eventos de Ω),
- $\mathbb{P}(\cdot)$ é uma função de probabilidade, que tem como domínio $\mathscr{F}$ e contradomínio o intervalo $[0, 1]$.

Variáveis aleatórias

Em algumas situações, lidar diretamente com o espaço amostral pode ser muito trabalhoso. Por exemplo, seja o lançamento de uma moeda. Sabemos que $\Omega = \{C, K\}$, onde C representa "cara" e K representa "coroa" e, no caso de uma moeda honesta, $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(K)$.

Variáveis aleatórias

Em algumas situações, lidar diretamente com o espaço amostral pode ser muito trabalhoso. Por exemplo, seja o lançamento de uma moeda. Sabemos que $\Omega = \{C, K\}$, onde C representa "cara" e K representa "coroa" e, no caso de uma moeda honesta, $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(K)$.
O que acontece se quisermos saber qual a probabilidade de saírem 5 caras em 7 lançamentos da moeda?

$$\Omega = \{CCCCCCC, CCCCCCK, CCCCCKC, \ldots\}$$

Variáveis aleatórias

Em algumas situações, lidar diretamente com o espaço amostral pode ser muito trabalhoso. Por exemplo, seja o lançamento de uma moeda. Sabemos que $\Omega = \{C, K\}$, onde C representa "cara" e K representa "coroa" e, no caso de uma moeda honesta, $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(K)$.
O que acontece se quisermos saber qual a probabilidade de saírem 5 caras em 7 lançamentos da moeda?

$$\Omega = \{CCCCCCC, CCCCCCK, CCCCCKC, \ldots\}$$

Poderíamos criar um código onde $C = 1$ e $K = 0$, de forma que estaríamos interessados em $\mathbb{P}(5)$.

Variáveis aleatórias

Juju

Suponha que você tem uma moeda chamada Juju e que ela é uma moeda honesta, isto é, a probabilidade de sair cara é igual à probabilidade de sair coroa. Em notação matemática,

$$\mathbb{P}(\{\text{lançar Juju resultou em cara}\}) = \mathbb{P}(\{\text{lançar Juju resultou em coroa}\}) = \frac{1}{2}$$

Variáveis aleatórias

Juju

Suponha que você tem uma moeda chamada Juju e que ela é uma moeda honesta, isto é, a probabilidade de sair cara é igual à probabilidade de sair coroa. Em notação matemática,

$$\mathbb{P}(\{\text{lançar Juju resultou em cara}\}) = \mathbb{P}(\{\text{lançar Juju resultou em coroa}\}) = \frac{1}{2}$$

Observe que Ω, o espaço amostral do experimento *lançar a Juju*, é dado por $\Omega = \{(\text{cara}), (\text{coroa})\}$.

Variáveis aleatórias

Juju

Suponha que você tem uma moeda chamada Juju e que ela é uma moeda honesta, isto é, a probabilidade de sair cara é igual à probabilidade de sair coroa. Em notação matemática,

$$\mathbb{P}(\{\text{lançar Juju resultou em cara}\}) = \mathbb{P}(\{\text{lançar Juju resultou em coroa}\}) = \frac{1}{2}$$

Observe que Ω, o espaço amostral do experimento *lançar a Juju*, é dado por $\Omega = \{(\text{cara}), (\text{coroa})\}$.

Agora, vamos criar uma função que será definida por:

$$f(\text{Juju}) = \begin{cases} 0 & \text{se o lançamento de Juju deu cara,} \\ 1 & \text{se o lançamento de Juju deu coroa.} \end{cases} \tag{3}$$

Variáveis aleatórias

Juju (cont.)

Vamos chamar essa função de X (ao invés de f). Observe que:

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{\text{lançar Juju resultou em coroa}\}) = \frac{1}{2}$$

E ainda:

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\{\text{lançar Juju resultou em cara}\}) = \frac{1}{2}$$

Variáveis aleatórias

Juju (cont.)

Vamos chamar essa função de X (ao invés de f). Observe que:

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{\text{lançar Juju resultou em coroa}\}) = \frac{1}{2}$$

E ainda:

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\{\text{lançar Juju resultou em cara}\}) = \frac{1}{2}$$

- A probabilidade de que X assuma valor 1 é a mesma probabilidade de sair coroa quando lançamos a Juju e a probabilidade de X ser igual a 0 é a probabilidade de sair cara no lançamento da Juju.

Variáveis aleatórias

Juju (cont.)

Vamos chamar essa função de X (ao invés de f). Observe que:

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{\text{lançar Juju resultou em coroa}\}) = \frac{1}{2}$$

E ainda:

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\{\text{lançar Juju resultou em cara}\}) = \frac{1}{2}$$

- A probabilidade de que X assuma valor 1 é a mesma probabilidade de sair coroa quando lançamos a Juju e a probabilidade de X ser igual a 0 é a probabilidade de sair cara no lançamento da Juju.
- Como X é uma função que "pega" um elemento de Ω e está associando um número real, então X preenche os requisitos para ser chamada de *variável aleatória*.

Variável aleatória

Definição

Informalmente, *variável aleatória* (v.a.) é uma função que associa elementos do espaço amostral Ω ao conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$.

Variável aleatória

Definição

Informalmente, *variável aleatória* (v.a.) é uma função que associa elementos do espaço amostral Ω ao conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$. Formalmente, temos:

Definição

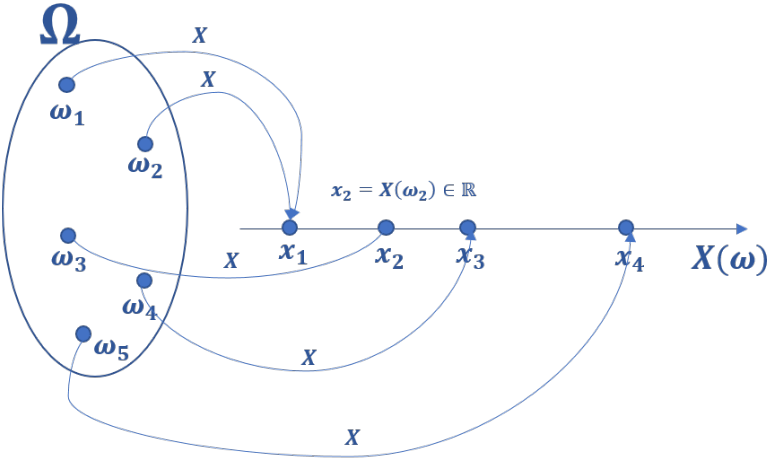
(Variável Aleatória)
Para um dado espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, P(\cdot))$ uma variável aleatória, denotada por X ou $X(\cdot)$, é qualquer função $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\} \in \mathscr{F}$$

Temos Ω como sendo o conjunto de todos resultados possíveis de um experimento (conjunto de todos eventos) e $X(\cdot)$ é uma *função* que associa cada elemento $\omega \in \Omega$ a um número real.
Observação: Em nenhum momento utilizamos a função $\mathbb{P}(\cdot)$!

Variável aleatória

Definição



Definição

Imagem de uma v.a. A imagem de uma v.a. representa a transformação do espaço amostral original para um espaço amostral com valores reais. Formalmente, a imagem de uma v.a. é definida por:

$$R(X) = \{x \in \mathbb{R} : x = X(w), w \in \Omega\}$$

Variável aleatória

O espaço de probabilidade induzido por uma v.a.

- Precisaremos de um novo espaço de probabilidade para associar probabilidades a subconjuntos do novo espaço amostral real definido pela imagem da v.a.

Variável aleatória

O espaço de probabilidade induzido por uma v.a.

- Precisaremos de um novo espaço de probabilidade para associar probabilidades a subconjuntos do novo espaço amostral real definido pela imagem da v.a.
- O espaço $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}(\cdot))$ nos permite determinar uma probabilidade para eventos em Ω, porém não sabemos a probabilidade de que um resultado da v.a. X fique no subconjunto $A \subset R(X)$.

Variável aleatória

O espaço de probabilidade induzido por uma v.a.

- Precisaremos de um novo espaço de probabilidade para associar probabilidades a subconjuntos do novo espaço amostral real definido pela imagem da v.a.
- O espaço $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}(\cdot))$ nos permite determinar uma probabilidade para eventos em Ω, porém não sabemos a probabilidade de que um resultado da v.a. X fique no subconjunto $A \subset R(X)$.
- Como X é um mapa de Ω para a reta real, é possível definir o evento B em Ω tal que o evento B ocorre se e somente se $A \subset R(X)$ ocorre.

Variável aleatória

O espaço de probabilidade induzido por uma v.a.

- Precisaremos de um novo espaço de probabilidade para associar probabilidades a subconjuntos do novo espaço amostral real definido pela imagem da v.a.
- O espaço $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}(\cdot))$ nos permite determinar uma probabilidade para eventos em Ω, porém não sabemos a probabilidade de que um resultado da v.a. X fique no subconjunto $A \subset R(X)$.
- Como X é um mapa de Ω para a reta real, é possível definir o evento B em Ω tal que o evento B ocorre se e somente se $A \subset R(X)$ ocorre.
- Uma vez que os eventos A e B ocorrem simultaneamente, a probabilidade deles deve ser a mesma, ou seja, $\mathbb{P}_X(A) \equiv \mathbb{P}(B)$, onde $\mathbb{P}_X(\cdot)$ denota a medida de probabilidade que atribui a resultados de X suas probabilidades.

Variável aleatória

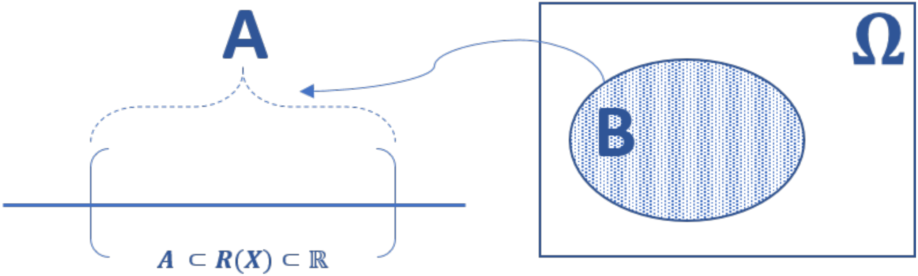
O espaço de probabilidade induzido por uma v.a.

- Precisaremos de um novo espaço de probabilidade para associar probabilidades a subconjuntos do novo espaço amostral real definido pela imagem da v.a.
- O espaço $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}(\cdot))$ nos permite determinar uma probabilidade para eventos em Ω, porém não sabemos a probabilidade de que um resultado da v.a. X fique no subconjunto $A \subset R(X)$.
- Como X é um mapa de Ω para a reta real, é possível definir o evento B em Ω tal que o evento B ocorre se e somente se $A \subset R(X)$ ocorre.
- Uma vez que os eventos A e B ocorrem simultaneamente, a probabilidade deles deve ser a mesma, ou seja, $\mathbb{P}_X(A) \equiv \mathbb{P}(B)$, onde $\mathbb{P}_X(\cdot)$ denota a medida de probabilidade que atribui a resultados de X suas probabilidades.
  - Se dois eventos ocorrem sempre simultaneamente, eles são ditos equivalentes e ocorrem em espaços de probabilidades distintos, pois se ocorressem no mesmo espaço, eles seriam o mesmo evento. Logo,

$$\mathbb{P}_X(A) \equiv \mathbb{P}(B) \text{ para } B = \{w : X(w) \in A, w \in \Omega\}$$

Variável aleatória

O espaço de probabilidade induzido por uma v.a.

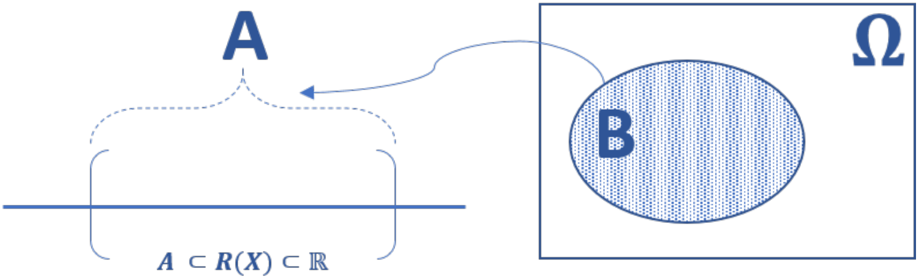


Probabilidades definidas para eventos em Ω são transferidas para eventos em $R(X)$ através da relação funcional que define uma v.a., $x_i = X(w_i)$.

Então, sabendo que o domínio de $\mathbb{P}(\cdot)$ é $\mathscr{F}$, qual é o domínio de $\mathbb{P}_X(\cdot)$?

Variável aleatória

O espaço de probabilidade induzido por uma v.a.



Probabilidades definidas para eventos em Ω são transferidas para eventos em $R(X)$ através da relação funcional que define uma v.a., $x_i = X(w_i)$.

Então, sabendo que o domínio de $\mathbb{P}(\cdot)$ é $\mathscr{F}$, qual é o domínio de $\mathbb{P}_X(\cdot)$?
Podemos dizer informalmente que $\mathscr{F}_X$ é o espaço de eventos do espaço de probabilidade associado à variável aleatória X e é dado por todos os subconjuntos da imagem de X, $R(X)$.

Definição

(Função distribuição acumulada de uma v.a.)
Seja X uma v.a.. A *função distribuição acumulada* de X, denotada por $F_X(\cdot)$, é definida como a função com domínio em $\mathbb{R}$ e contradomínio no intervalo fechado $[0, 1]$ que satisfaz

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \in (-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}[\{\omega : X(\omega) \leq x\}]$$

para todo número real x.

Variáveis aleatórias

Função acumulada

- A função acumulada de X é a função que calcula as probabilidades de X assumir valores menores ou iguais a um valor específico x;

- A função acumulada de X é a função que calcula as probabilidades de X assumir valores menores ou iguais a um valor específico x;
  - Para tanto, ela avalia os valores ω do espaço amostral tais que $X(\omega)$ é menor ou igual que x.

Variáveis aleatórias

Função acumulada

- A função acumulada de X é a função que calcula as probabilidades de X assumir valores menores ou iguais a um valor específico x;
  - Para tanto, ela avalia os valores ω do espaço amostral tais que $X(\omega)$ é menor ou igual que x.
- Essa função é importante pois ela define de forma única uma variável aleatória.

Variáveis aleatórias

Função acumulada

- A função acumulada de X é a função que calcula as probabilidades de X assumir valores menores ou iguais a um valor específico x;
  - Para tanto, ela avalia os valores ω do espaço amostral tais que $X(\omega)$ é menor ou igual que x.
- Essa função é importante pois ela define de forma única uma variável aleatória.
- Note também que mesmo que X só assuma valores em um subconjunto dos reais, a função de distribuição é bem definida em toda a reta.

- A função acumulada de X é a função que calcula as probabilidades de X assumir valores menores ou iguais a um valor específico x;
  - Para tanto, ela avalia os valores ω do espaço amostral tais que $X(\omega)$ é menor ou igual que x.
- Essa função é importante pois ela define de forma única uma variável aleatória.
- Note também que mesmo que X só assuma valores em um subconjunto dos reais, a função de distribuição é bem definida em toda a reta.
- Quando não houver a possibilidade de confusão, a notação será apenas F ao invés de F_X.

Teorema

(Propriedades da função distribuição acumulada $F_X(\cdot)$***)***

As seguintes propriedades precisam ser atendidas para que possamos considerar uma função como sendo a função distribuição acumulada. Este teorema não será demonstrado, mas uma parte da prova pode ser encontrada em [Mood and Graybill, 1963] ou em [Magalhães, 2011].

i. $F_X(-\infty) \equiv \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ *e* $F_X(+\infty) \equiv \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$*;*

Teorema

(Propriedades da função distribuição acumulada** $F_X(\cdot)$**)
As seguintes propriedades precisam ser atendidas para que possamos considerar uma função como sendo a função distribuição acumulada. Este teorema não será demonstrado, mas uma parte da prova pode ser encontrada em [Mood and Graybill, 1963] ou em [Magalhães, 2011].

i. $F_X(-\infty) \equiv \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ *e* $F_X(+\infty) \equiv \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$;

ii. $F_X(\cdot)$ *é uma função monótona não-decrescente; isto é,* $F_X(a) < F_X(b)$ *para* $a < b$;

Variáveis aleatórias

Função acumulada

Teorema

(Propriedades da função distribuição acumulada** $F_X(\cdot)$**)
As seguintes propriedades precisam ser atendidas para que possamos considerar uma função como sendo a função distribuição acumulada. Este teorema não será demonstrado, mas uma parte da prova pode ser encontrada em [Mood and Graybill, 1963] ou em [Magalhães, 2011].

i. $F_X(-\infty) \equiv \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ *e* $F_X(+\infty) \equiv \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$;

ii. $F_X(\cdot)$ *é uma função monótona não-decrescente; isto é,* $F_X(a) < F_X(b)$ *para* $a < b$;

iii. $F_X(\cdot)$ *é contínua à direita; isto é,*

$$\lim_{h \to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$$

Definição

Variável aleatória discreta

Uma variável aleatória é dita *discreta* se a sua imagem consiste de um número contável de elementos, isto é, sua imagem pode ser colocada em correspondência com um subconjunto (próprio ou não) de $\mathbb{N}$.

Definição

Variável aleatória discreta
Uma variável aleatória é dita *discreta* se a sua imagem consiste de um número contável de elementos, isto é, sua imagem pode ser colocada em correspondência com um subconjunto (próprio ou não) de $\mathbb{N}$.

Em outras palavras, uma v.a. é dita discreta se ela assume um número finito ou enumerável de valores.

Definição

(Função massa de probabilidade de uma v.a. discreta)
Se X é uma v.a. discreta (X assume valores em um subconjunto de $\mathbb{N}$) que assume valores distintos $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ então a função densidade de X, denotada $f_X(\cdot)$ é definida por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x_i) & \text{se } x = x_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4}$$

Definição

(Função massa de probabilidade de uma v.a. discreta)
Se X é uma v.a. discreta (X assume valores em um subconjunto de $\mathbb{N}$) que assume valores distintos $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ então a função densidade de X, denotada $f_X(\cdot)$ é definida por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x_i) & \text{se } x = x_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4}$$

- Outros nomes comumente dados à $f_X(x)$ são: função massa de probabilidade, função de frequência discreta e função de probabilidade.

Definição

(Função massa de probabilidade de uma v.a. discreta)
Se X é uma v.a. discreta (X assume valores em um subconjunto de $\mathbb{N}$) que assume valores distintos $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ então a função densidade de X, denotada $f_X(\cdot)$ é definida por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x_i) & \text{se } x = x_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4}$$

- Outros nomes comumente dados à $f_X(x)$ são: função massa de probabilidade, função de frequência discreta e função de probabilidade.
- A notação $p_X(x)$ também é usada para diferenciar quando se trata de uma variável aleatória discreta e usualmente usa-se a notação $f_X(x)$ para as contínuas.

Lema

Se X é uma v.a. discreta e $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ é o conjunto de valores que ela pode assumir, então

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} p_X^{(x)} = 1$$

Definição

f.d.a. de uma v.a. discreta (Retirado de [Mittelhammer, 2013])
A função distribuição acumulada de uma variável aleatória X, se X for discreta, é dada por

$$F_X(x) = \sum_{X \leq x,\ f(x)>0} f(x),\ x \in (-\infty, +\infty)$$

Definição

Função Indicadora

Considere um evento $A \in \Omega$. A *função indicadora* de A é a variável aleatória definida por:

$$\mathbb{I}_A : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in A \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Variáveis aleatórias

Variáveis aleatórias discretas

Definição

Função Indicadora

Considere um evento $A \in \Omega$. A *função indicadora* de A é a variável aleatória definida por:

$$\mathbb{I}_A : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in A \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo:

- Para o evento de uma lâmpada durar mais de 10 segundos, podemos criar a função indicadora que assume valor 0 se a lâmpada queimar em 10 segundos ou menos e assume valor 1 caso ela dure mais que 10 segundos.

Variáveis aleatórias

Definição

Independência de v.a.'s discretas

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s discretas. dizemos que $X_1, \ldots, X_n$ são independentes se $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) := \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Variáveis aleatórias

Definição

Independência de v.a.'s discretas

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s discretas. dizemos que $X_1, \ldots, X_n$ são independentes se $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) := \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Observação:

- $\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$ denota a interseção, isto é,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) \equiv \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} X_i = x_i) = \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n}\{\omega : X_i(\omega) = x_i\})$$

Variáveis aleatórias

Independência de v.a.'s

Exercício:

Sejam X e Y duas v.a.'s independentes. Será que $Z = e^x$ e $U = e^Y$ são independentes?

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta com função massa de probabilidade denotada por p_X e que assume valores $x \in \chi$. O *valor esperado* ou *esperança matemática* ou *média* de X é definida por:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \chi} x_i p_X(x_i) \tag{5}$$

Definição

O *k-ésimo momento* da variável aleatória X é dado pela esperança de X elevada à potência k, isto é, $\mathbb{E}[X^k]$ (desde que essa quantidade esteja bem definida), para $k \in \{1, 2, \cdots\}$. Se a esperança de X for um número finito μ, isto é, se $\mathbb{E}[X] = \mu < \infty$, então definimos $\mathbb{E}[(X - \mu)^k]$ como o *k-ésimo momento central de X*, desde que essa quantidade esteja bem definida.

Variáveis aleatórias

Propriedades do valor esperado

Propriedades

da esperança.png da esperança.png da esperança.png

Definição

Seja X uma variável aleatória com média finita denotada por μ. Sua variância é dada pelo momento central de ordem 2 de X:

$$Var[X] = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] \tag{6}$$

Definição

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço de probabilidade. A *covariância* entre elas será dada por:

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] \quad (7)$$

Variáveis aleatórias

v.a.'s contínuas

Definição

Variável aleatória contínuas (Retirado de [James, 2010])
A variável aleatória X é dita contínua se existe uma função $f(x) \geq 0$ tal que:

$$F_X(x) = \int_{\infty}^{x} f(t)dt, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

As variáveis aleatórias contínuas são tais que a função densidade em um ponto é igual a zero.

Definição

Def alternativa [Stern and Izbicki, 2016] Seja X uma variável aleatória contínua. Denotamos a função de densidade de probabilidade de X por $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ela satisfaz as seguintes propriedades:

1. $f_X(x) \geq 0$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$.
3. $\int_a^b f_X(x)dx = \mathbb{P}(a \leq X \leq b)$.

Definição

Def alternativa [Stern and Izbicki, 2016] Seja X uma variável aleatória contínua. Denotamos a função de densidade de probabilidade de X por $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ela satisfaz as seguintes propriedades:

1. $f_X(x) \geq 0$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$.
3. $\int_a^b f_X(x)dx = \mathbb{P}(a \leq X \leq b)$.

Como propriedade, temos que as probabilidades de uma variável aleatória contínua são as integrais sob a curva $f(\cdot)$ em determinados intervalos.

Definição

f.d.a. de uma v.a. contínua (Retirado de [Mittelhammer, 2013])
A função distribuição acumulada de uma variável aleatória X, se X for contínua, é dada por

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx, \; x \in (-\infty, +\infty)$$

Lema

Seja X uma variável aleatória contínua com a função de distribuição acumulada F_X. Para $b \geq a$, $F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b)$.

Variáveis aleatórias

Teorema

Sejam $f(x)$ e $F(x)$ as f.d.p. e f.d.a. de uma variável aleatória contínua X. A função densidade de X pode ser definida como

$$f(x) = \frac{d}{dx}[F(x)]$$

em todo ponto onde $f(x)$ é contínua e será igual a zero em todos outros pontos.

Referências I

James, B. R. (2010).
Probabilidade: um curso em nivel intermediario.
IMPA.

Magalhães, M. N. (2011).
Probabilidade e variáveis aleatórias.
Edusp.

Mittelhammer, R. (2013).
Mathematical statistics for economics and business.
Springer.

Mood, A. M. and Graybill, F. A. (1963).
Introduction to the theory of statistics.

Stern, R. and Izbicki, R. (2016).
Introducao à Teoria das Probabilidades e Processos Aleatorios.
UFSCAR.