

Revisão de Probabilidade e Estatística

Aula 3 - Parte 1

Aishameriane Schmidt

PPGECO/UFSC

Março de 2019.



Programa

Aula 3

1. Algumas pendências da aula anterior

Programa

Aula 3

1. Algumas pendências da aula anterior
2. Distribuições de variáveis aleatórias conhecidas: Binomial, Poisson, Exponencial, Normal, Gamma, Beta

Programa

Aula 3

1. Algumas pendências da aula anterior
2. Distribuições de variáveis aleatórias conhecidas: Binomial, Poisson, Exponencial, Normal, Gamma, Beta
3. Distribuições conjuntas e condicionais
 - Esperança condicional

Pendências

Propriedades do valor esperado

Tabela 1: Propriedades do valor esperado

1	Esperança da soma	$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$	É a soma das esperanças
2	Esperança do produto	$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ se X e Y indep.	É o produto das esperanças, desde que X e Y sejam independentes
3	Esperança de um escalar	$\mathbb{E}[\alpha] = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	É o próprio escalar
4	Esperança de X vezes um escalar	$\mathbb{E}[\alpha X] = \alpha \mathbb{E}[X],$ $\alpha \in \mathbb{R}$	É o escalar vezes a esperança de X
5	Esperança de um escalar mais X	$\mathbb{E}[\beta + X] = \beta + \mathbb{E}[X],$ $\beta \in \mathbb{R}$	É escalar mais a esperança de X
6	Esperança de uma função de X <small>Lei do Estatístico Inconsciente</small>	$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x_i) p_X(x_i)$ se X é discreta	$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$ se X é contínua
7	Lei das Expectativas Iteradas	$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X Y]] = \mathbb{E}[X]$	O valor esperado da esperança de X dado Y é a esperança de X .
8	Forma alternativa da esperança	$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq i)$	Se X assume valores positivos.
9	Lei da esperança total	$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X A_i] \cdot \mathbb{P}(A_i)$	Se A_1, \dots, A_n uma partição de Ω e X uma v.a. discreta.

Pendências

Teorema

Lei do Estatístico Inconsciente

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x) \cdot p_X(x)$$

Para quais funções $g(\cdot)$ isso é válido?

Pendências

Teorema

Lei do Estatístico Inconsciente

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x) \cdot p_X(x)$$

Para quais funções $g(\cdot)$ isso é válido?

Definição

Composição de Funções [Lima, 1982]

Sejam $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$ funções tais que a imagem de f está contida na imagem de g , i.e., $B \subset C$. Neste caso, podemos definir a função composta $g \circ f : A \rightarrow D$, que consiste em aplicar primeiro f e depois g .

Pendências

Teorema

Lei do Estatístico Inconsciente

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x) \cdot p_X(x)$$

Para quais funções $g(\cdot)$ isso é válido?

Definição

Composição de Funções [Lima, 1982]

Sejam $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$ funções tais que a imagem de f está contida na imagem de g , i.e., $B \subset C$. Neste caso, podemos definir a função composta $g \circ f : A \rightarrow D$, que consiste em aplicar primeiro f e depois g .

Conclusão: Quando usamos a composta no teorema já estamos implicitamente assumindo que $R(X) \subset \text{Dom}(g)$!

Variáveis aleatórias

Variância

Definição

Seja X uma variável aleatória com média finita denotada por μ . Sua variância é dada pelo momento central de ordem 2 de X :

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] \quad (1)$$

Variáveis aleatórias

Covariância

Definição

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço de probabilidade. A *covariância* entre elas será dada por:

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] \quad (2)$$

Variáveis aleatórias

v.a.'s contínuas

Definição

Variável aleatória contínuas (Retirado de [James, 2010])

A variável aleatória X é dita contínua se existe uma função $f(x) \geq 0$ tal que:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

As variáveis aleatórias contínuas são tais que a função densidade em um ponto é igual a zero.

Variáveis aleatórias

v.a.'s contínuas

Definição

Def alternativa [Stern and Izbicki, 2016] Seja X uma variável aleatória contínua. Denotamos a função de densidade de probabilidade de X por $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ela satisfaz as seguintes propriedades:

1. $f_X(x) \geq 0$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$.
3. $\int_a^b f_X(x) dx = \mathbb{P}(a \leq X \leq b)$.

Variáveis aleatórias

v.a.'s contínuas

Definição

Def alternativa [Stern and Izbicki, 2016] Seja X uma variável aleatória contínua. Denotamos a função de densidade de probabilidade de X por $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ela satisfaz as seguintes propriedades:

1. $f_X(x) \geq 0$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$.
3. $\int_a^b f_X(x) dx = \mathbb{P}(a \leq X \leq b)$.

Como propriedade, temos que as probabilidades de uma variável aleatória contínua são as integrais sob a curva $f(\cdot)$ em determinados intervalos.

Variáveis aleatórias

v.a.'s contínuas

Definição

f.d.a. de uma v.a. contínua (Retirado de [Mittelhammer, 2013])

A função distribuição acumulada de uma variável aleatória X , se X for contínua, é dada por

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

Lema

Seja X uma variável aleatória contínua com a função de distribuição acumulada F_X . Para $b \geq a$, $F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b)$.

Variáveis aleatórias

v.a.'s contínuas

Teorema

Sejam $f(x)$ e $F(x)$ as f.d.p. e f.d.a. de uma variável aleatória contínua X . A função densidade de X pode ser definida como

$$f(x) = \frac{d}{dx}[F(x)]$$

em todo ponto onde $f(x)$ é contínua e será igual a zero em todos outros pontos.

Distribuição de Bernoulli

Caracterização

Teorema

Dizemos que uma variável aleatória discreta X segue uma distribuição de Bernoulli de parâmetro p se a função massa de probabilidade de X é dada por:

$$f_X(x) = p_X(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & \text{para } x = 0 \text{ ou } 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3)$$

Onde o parâmetro p satisfaz $0 \leq p \leq 1$. A quantia $(1-p)$ é comumente denotada por q . Utilizamos a notação $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ para dizer que X segue a distribuição Bernoulli de parâmetro p .

- ▶ **Observação:**
- ▶ **Observação:** Se $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, então a esperança ou valor esperado de X será dado por $\mathbb{E}[X] = p$ e a sua variância é $\text{Var}[X] = p(1-p)$.

Distribuição Binomial

Caracterização

Teorema

Seja X uma v.a. discreta, tomando valores em $\{0, 1, 2, \dots, n\}$. Dizemos que X tem distribuição Binomial de parâmetros n e p se sua função massa de probabilidade é dada por:

$$p_x(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{para } x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4)$$

onde $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ (lê-se a combinação de n x a x) e $x!$ é o fatorial de x .

- **Observações:**
- Se $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, então a esperança ou valor esperado de X será dado por $\mathbb{E}[X] = np$ e a sua variância é $\text{Var}[X] = np(1-p)$.

Distribuição Binomial

Caracterização

Teorema

Seja X uma v.a. discreta, tomando valores em $\{0, 1, 2, \dots, n\}$. Dizemos que X tem distribuição Binomial de parâmetros n e p se sua função massa de probabilidade é dada por:

$$p_x(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{para } x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4)$$

onde $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ (lê-se a combinação de n x a x) e $x!$ é o fatorial de x .

- **Observações:**
- Se $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, então a esperança ou valor esperado de X será dado por $\mathbb{E}[X] = np$ e a sua variância é $\text{Var}[X] = np(1-p)$.
- Observe que a Bernoulli é um caso particular da Binomial, quando $n = 1$.

Distribuição Binomial

Caracterização

Teorema

Seja X uma v.a. discreta, tomando valores em $\{0, 1, 2, \dots, n\}$. Dizemos que X tem distribuição Binomial de parâmetros n e p se sua função massa de probabilidade é dada por:

$$p_x(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{para } x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4)$$

onde $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ (lê-se a combinação de n x a x) e $x!$ é o fatorial de x .

- **Observações:**
- Se $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, então a esperança ou valor esperado de X será dado por $\mathbb{E}[X] = np$ e a sua variância é $\text{Var}[X] = np(1-p)$.
- Observe que a Bernoulli é um caso particular da Binomial, quando $n = 1$.
- **Exemplo:** o retorno da Jujú.

Distribuição de Poisson

Definição

Definição

Seja X uma v.a. discreta, tomando valores em \mathbb{N} . Dizemos que X tem distribuição de Poisson se sua função massa de probabilidade (f.m.p.) é dada por:

$$p_X = \mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad k \in \{1, 2, 3, \dots\} \quad (5)$$

Onde k representa o número de ocorrências de interesse e λ a taxa média de ocorrência. Utilizamos a notação $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Distribuição de Poisson

Observações

Para que a distribuição de Poisson seja apropriada para modelar um fenômeno X , as seguintes condições devem ser atendidas:

- a. X é o número de ocorrências em um determinado intervalo de tempo e assume valores em $\{1, 2, 3, \dots\}$;

Distribuição de Poisson

Observações

Para que a distribuição de Poisson seja apropriada para modelar um fenômeno X , as seguintes condições devem ser atendidas:

- a.** X é o número de ocorrências em um determinado intervalo de tempo e assume valores em $\{1, 2, 3, \dots\}$;
- b.** as ocorrências acontecem de forma independente, isto é, o fato de um carro já ter passado em um pedágio não altera a probabilidade do próximo carro passar;

Distribuição de Poisson

Observações

Para que a distribuição de Poisson seja apropriada para modelar um fenômeno X , as seguintes condições devem ser atendidas:

- a.** X é o número de ocorrências em um determinado intervalo de tempo e assume valores em $\{1, 2, 3, \dots\}$;
- b.** as ocorrências acontecem de forma independente, isto é, o fato de um carro já ter passado em um pedágio não altera a probabilidade do próximo carro passar;
- c.** a taxa λ com que os eventos ocorrem deve ser constante;

Distribuição de Poisson

Observações

Para que a distribuição de Poisson seja apropriada para modelar um fenômeno X , as seguintes condições devem ser atendidas:

- a.** X é o número de ocorrências em um determinado intervalo de tempo e assume valores em $\{1, 2, 3, \dots\}$;
- b.** as ocorrências acontecem de forma independente, isto é, o fato de um carro já ter passado em um pedágio não altera a probabilidade do próximo carro passar;
- c.** a taxa λ com que os eventos ocorrem deve ser constante;
- d.** dois eventos não podem ocorrer no mesmo instante;

Distribuição de Poisson

Observações

Para que a distribuição de Poisson seja apropriada para modelar um fenômeno X , as seguintes condições devem ser atendidas:

- a.** X é o número de ocorrências em um determinado intervalo de tempo e assume valores em $\{1, 2, 3, \dots\}$;
- b.** as ocorrências acontecem de forma independente, isto é, o fato de um carro já ter passado em um pedágio não altera a probabilidade do próximo carro passar;
- c.** a taxa λ com que os eventos ocorrem deve ser constante;
- d.** dois eventos não podem ocorrer no mesmo instante;
- e.** a probabilidade de que um evento ocorra em um intervalo de tempo é proporcional ao comprimento deste intervalo.

Distribuição de Poisson

- ▶ Vamos verificar se de fato p_X define uma função massa;
- ▶ Vamos calcular a média e a variância de $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Distribuição Exponencial

Densidade Acumulada

Teorema

Se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, então sua f.d.a. é dada por

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

- **Observação:** Note que a f.d.a. nos diz a probabilidade de X ser menor ou igual que um valor qualquer, de maneira que seu complementar é a probabilidade de X ultrapassar um determinado valor;

Distribuição Exponencial

Densidade Acumulada

Teorema

Se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, então sua f.d.a. é dada por

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

- ▶ **Observação:** Note que a f.d.a. nos diz a probabilidade de X ser menor ou igual que um valor qualquer, de maneira que seu complementar é a probabilidade de X ultrapassar um determinado valor;
- ▶ Se X é o tempo até um equipamento falhar:
 - ▶ Usamos a **f.d.a.** para calcular a probabilidade de que o equipamento **queime em menos de 10 minutos**;

Distribuição Exponencial

Densidade Acumulada

Teorema

Se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, então sua f.d.a. é dada por

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

- ▶ **Observação:** Note que a f.d.a. nos diz a probabilidade de X ser menor ou igual que um valor qualquer, de maneira que seu complementar é a probabilidade de X ultrapassar um determinado valor;
- ▶ Se X é o tempo até um equipamento falhar:
 - ▶ Usamos a **f.d.a.** para calcular a probabilidade de que o equipamento **queime em menos de 10 minutos**;
 - ▶ E usamos o **complementar** para calcular a probabilidade de **durar pelo menos 10 minutos**.

Distribuição Exponencial

Falta de memória

Teorema

Se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, então

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s)$$

- Se estamos avaliando tempo entre clientes que chegam em uma agência bancária e queremos saber a probabilidade de um cliente chegar 30 minutos depois da agência estar aberta há 3 horas, isso é a mesma coisa que calcular a probabilidade de um cliente chegar meia hora depois do banco abrir.

Distribuição Exponencial

Exercício

Sejam $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ e $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$ duas v.a. aleatórias independentes e seja $Z = \min\{X_1, X_2\}$.

Encontre a f.d.a. de Z . Que distribuição é essa?

Distribuição Exponencial

Exercício

Sejam $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ e $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$ duas v.a. aleatórias independentes e seja $Z = \min\{X_1, X_2\}$.

Encontre a f.d.a. de Z . Que distribuição é essa?

Dica: Utilize a definição: Se X e Y são independentes, então $\mathbb{P}(X \cap Y) = \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y)$.

Distribuição Gama

Definição

Função Gama

$\Gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é chamada de função Gama e é tal que:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Distribuição Gama

Definição

Função Gama

$\Gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é chamada de função Gama e é tal que:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Propriedades: (demonstração em [Stern and Izbicki, 2016])

1. Para $a \geq 1$, temos que $\Gamma(a) = (a - 1)\Gamma(a - 1)$
2. Se $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n) = (n - 1)!$

Distribuição Gama

Definição

Função Gama

Dizemos que uma variável aleatória X tem distribuição Gama com parâmetros (k, λ) e denotamos por $X \sim \text{Gama}(k, \lambda)$ se a densidade de X é

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(k)\lambda^k} x^{k-1} e^{-\frac{x}{\lambda}} & , \text{ if } x > 0 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

- Em est. bayesiana, a distribuição Gama é utilizada como **priori** para modelar variâncias (ou precisões);

Distribuição Gama

Definição

Função Gama

Dizemos que uma variável aleatória X tem distribuição Gama com parâmetros (k, λ) e denotamos por $X \sim \text{Gama}(k, \lambda)$ se a densidade de X é

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(k)\lambda^k} x^{k-1} e^{-\frac{x}{\lambda}} & , \text{ if } x > 0 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

- ▶ Em est. bayesiana, a distribuição Gama é utilizada como **priori** para modelar variâncias (ou precisões);
 - ▶ No modelo de regressão linear múltiplo, a priori Gama para a precisão dos erros com uma priori Normal para os coeficientes junto com verossimilhança normal resulta em uma posteriori conjunta Normal-Gama.

Distribuição Gama

Definição

Função Gama

Dizemos que uma variável aleatória X tem distribuição Gama com parâmetros (k, λ) e denotamos por $X \sim \text{Gama}(k, \lambda)$ se a densidade de X é

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(k)\lambda^k} x^{k-1} e^{-\frac{x}{\lambda}} & , \text{ if } x > 0 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

- ▶ Em est. bayesiana, a distribuição Gama é utilizada como **priori** para modelar variâncias (ou precisões);
 - ▶ No modelo de regressão linear múltiplo, a priori Gama para a precisão dos erros com uma priori Normal para os coeficientes junto com verossimilhança normal resulta em uma posteriori conjunta Normal-Gama.
- ▶ Se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, então $X \sim \text{Gama}(1, \lambda)$
 - ▶ Dizemos que a distribuição exponencial é um *caso particular* da distribuição Gama.

Distribuição Gama

Lema

- ▶ *A densidade Gama de fato é uma densidade de probabilidade (sempre positiva e integra 1);*
- ▶ *Se $X \sim \text{Gama}(k, \lambda)$, então:*
 - ▶ $\mathbb{E}[X] = k\lambda$
 - ▶ $\text{Var}[X] = k\lambda^2$

Distribuição Beta

Definição

Dizemos que X tem distribuição Beta com parâmetros (α, β) e denotamos por $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ se a densidade de X é

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & , \text{ if } 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

- Em bayesiana, a densidade Beta é comumente utilizada como priori para parâmetros que signifiquem elasticidades (em módulo), probabilidades e/ou o coeficiente de um processo AR que seja estacionário;

Distribuição Beta

Definição

Dizemos que X tem distribuição Beta com parâmetros (α, β) e denotamos por $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ se a densidade de X é

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & , \text{ if } 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

- ▶ Em bayesiana, a densidade Beta é comumente utilizada como priori para parâmetros que signifiquem elasticidades (em módulo), probabilidades e/ou o coeficiente de um processo AR que seja estacionário;
 - ▶ A densidade Beta é conjugada da Binomial, isso significa que uma priori Beta com uma verossimilhança Binomial resulta em uma posteriori Beta.

Distribuição Beta

Lema

A densidade na Definição 18 é uma fdp válida. Em particular,

$$\int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = 1$$

Distribuição Beta

Lema

A densidade na Definição 18 é uma fdp válida. Em particular,

$$\int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1 - x)^{\beta-1} dx = 1$$

Lema

Se $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$, então para todo $c, d \geq 0$ $\mathbb{E}[X^c(1 - X)^d] = \frac{\Gamma(\alpha+c)\Gamma(\beta+d)}{\Gamma(\alpha+\beta+c+d)}.$

Portanto, $\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ e $\text{Var}[X] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$

Demonstração: Fica como exercício :) A média e variância estão nas notas de aula. A densidade se alguém for tentar e quiser ajuda, pode pedir pra Aisha.

Distribuição Normal

Definição

Dizemos que X tem distribuição Normal com parâmetros (μ, σ^2) e denotamos por $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ se a densidade de X é

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Se $\mu = 0$, e $\sigma = 1$, dizemos que X tem distribuição normal padrão.

Distribuição Normal

Definição

Dizemos que X tem distribuição Normal com parâmetros (μ, σ^2) e denotamos por $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ se a densidade de X é

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Se $\mu = 0$, e $\sigma = 1$, dizemos que X tem distribuição normal padrão.

Definição

Seja $Z \sim N(0, 1)$.

$$\phi(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = F_Z(z)$$

ϕ não tem solução analítica.

Distribuição Normal

Lema

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $\frac{(X-\mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

Distribuição Normal

Lema

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $\frac{(X-\mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

Lema

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $\mathbb{E}[X] = \mu$ e $\text{Var}[X] = \sigma^2$.

Densidades Conjuntas

Motivação

Considere duas v.a. discretas, X e Y , associadas ao mesmo experimento. As probabilidades que X e Y podem assumir são descritas pela função densidade de probabilidade conjunta de X e Y :

$$f_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

Densidades Conjuntas

Motivação

Considere duas v.a. discretas, X e Y , associadas ao mesmo experimento. As probabilidades que X e Y podem assumir são descritas pela função densidade de probabilidade conjunta de X e Y :

$$f_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

A f.d.p. conjunta de X e Y determina a probabilidade de qualquer evento que possa ser especificado em termos de X e Y :

$$\mathbb{P}((X, Y) \in A) = \sum_{(x,y) \in A} f_{X,Y}(x, y)$$

Densidades Conjuntas

Motivação

Considere duas v.a. discretas, X e Y , associadas ao mesmo experimento. As probabilidades que X e Y podem assumir são descritas pela função densidade de probabilidade conjunta de X e Y :

$$f_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

A f.d.p. conjunta de X e Y determina a probabilidade de qualquer evento que possa ser especificado em termos de X e Y :

$$\mathbb{P}((X, Y) \in A) = \sum_{(x,y) \in A} f_{X,Y}(x, y)$$

Pode-se calcular a f.d.p. somente de X ou de Y (*densidade marginal*) através da conjunta:

$$f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x, y) \quad f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x, y)$$

Densidades Conjuntas

Definição

Definição

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias discretas. A fmp conjunta de X e Y é $p_{X,Y}(x, y) := \mathbb{P}(X = x, Y = y)$. De forma similar, se X e Y são duas variáveis aleatórias com distribuições contínuas, a fdp conjunta de X e Y é $f_{X,Y}(x, y)$. Seja A um subconjunto de \mathbb{R}^2 ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((X, Y) \in A) &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : (X(\omega), Y(\omega)) \in A\}) = \\ &\begin{cases} \sum_{(x,y) \in A} p_{X,Y}(x, y) & , \text{ se } X \text{ e } Y \text{ são discretas.} \\ \int_{(x,y) \in A} f_{X,Y}(x, y) d(x, y) & , \text{ se } X \text{ e } Y \text{ são contínuas.} \end{cases} \end{aligned}$$

Densidades Conjuntas

Exemplo

Exemplo

Considere que X e Y são variáveis aleatórias discretas com a fmp conjunta dada na Tabela abaixo.

X/Y	0	1
0	0.2	0.4
1	0.3	0.1

Densidades Condicionais

Exemplo

Exemplo

Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas, com a seguinte fdp

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy & , \text{ if } x > 0, y > 0, x + y < 1 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Qual é o valor de c ?

Independência de v.a.'s

Definição

Duas variáveis aleatórias contínuas X e Y são independentes se e somente se $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$.

Independência de v.a.'s

Definição

Duas variáveis aleatórias contínuas X e Y são independentes se e somente se $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$.

Lema

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias. X e Y são independentes se e somente se para todos $A, B \subset \mathfrak{R}$, $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$.

Independência de v.a.'s

Definição

Duas variáveis aleatórias contínuas X e Y são independentes se e somente se $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$.

Lema

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias. X e Y são independentes se e somente se para todos $A, B \subset \mathfrak{R}$, $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$.

Lema

Duas variáveis contínuas, X e Y , são independentes se e somente se a distribuição conjunta pode ser escrita como $f_{X,Y}(x, y) = g(x)h(y)$ para alguma função g e h .

Densidades Condicionais

Caso discreto

Definição

Se X e Y são variáveis aleatórias discretas, definimos a *massa de probabilidade condicional* de X dado que $Y = y$ por

$$p_{X|Y}(x|y) = \mathbb{P}(X = x|Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)},$$

para todos os valores de y tais que $\mathbb{P}(Y = y) > 0$.

Densidades Condicionais

Caso discreto

Definição

Se X e Y são variáveis aleatórias discretas, definimos a *massa de probabilidade condicional* de X dado que $Y = y$ por

$$p_{X|Y}(x|y) = \mathbb{P}(X = x|Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)},$$

para todos os valores de y tais que $\mathbb{P}(Y = y) > 0$.

Note que, para um dado y , $g(x) = p_{X|Y}(x|y)$ é uma fmp no sentido em que a estudamos antes.

Densidades Condicionais

Caso contínuo

Definição

Se X e Y são variáveis aleatórias contínuas com densidade conjunta $f(x, y)$, definimos a *densidade de probabilidade condicional* de X dado $Y = y$ por

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)},$$

para todos os valores de y tais que $f_Y(y) > 0$.

Densidades Condicionais

Caso contínuo

Exemplo

Seja densidade conjunta de X e Y definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{15}{2}x(2 - x - y) & \text{se } 0 < x, y < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calcule $X|Y = y$ quando $0 < y < 1$.

Densidades Condicionais

Esperança condicional - caso discreto

Definição

Esperança condicional

A esperança condicional de X dado $Y = y$, no caso discreto, é dada por:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X|Y = y] &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\} | Y = y) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{\{\omega: X(\omega)=x\}} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\} | Y = y) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{X}} x \sum_{\{\omega: X(\omega)=x\}} \mathbb{P}(\{\omega\} | Y = y) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{X}} x \cdot \mathbb{P}(X = x | Y = y) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{X}} x \cdot p_{X|Y}(x|y)\end{aligned}$$

Densidades Condicionais

Esperança condicional - caso contínuo

Definição

Esperança condicional

A esperança condicional de X dado $Y = y$, no caso contínuo, é dada por:

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_{X|Y}(x|y) dx$$

Densidades Condicionais

Esperança condicional - caso contínuo

Definição

Esperança condicional

A esperança condicional de X dado $Y = y$, no caso contínuo, é dada por:

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_{X|Y}(x|y) dx$$

Atenção!

- ▶ $\mathbb{E}[X|Y]$ é uma variável aleatória,
- ▶ $\mathbb{E}[X|Y = y]$ é um número.

Esperança Condicional

Lei das Expectativas Iteradas

Lema

Sejam X e Y duas v.a.. Então,

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$$

Função Geradora de Momentos

Definição

(Função Geradora de Momentos) A função geradora de momentos de uma variável aleatória X é uma função $M_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] \quad (6)$$

Isto é, a função geradora de momentos é calculada através da esperança da função e^{tX} .

Referências I



James, B. R. (2010).
Probabilidade: um curso em nível intermediário.
IMPA.



Lima, E. L. (1982).
Curso de análise: volume 1, volume 1.
Instituto de Matemática Pura e Aplicada.



Mittelhammer, R. (2013).
Mathematical statistics for economics and business.
Springer.



Stern, R. and Izbicki, R. (2016).
Introdução à Teoria das Probabilidades e Processos Aleatórios.
UFSCAR.