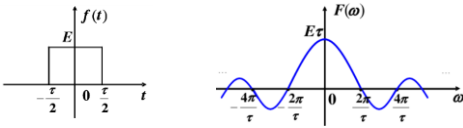


# 图像频域滤波

# 图像频域滤波

连续函数的傅里叶变换

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j2\pi ut}dt\qquad f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(u)e^{j2\pi ut}du$$



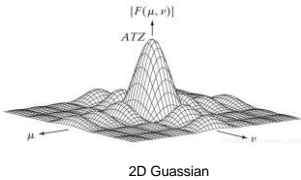
1

2

# 图像频域滤波

连续函数的傅里叶变换

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy$$
$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(u,v)e^{j2\pi(ux+vy)}dudv$$



2D Gaussian

3

# 图像频域滤波

卷积定理

$$f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(m)h(t-m)dm$$

$$f(t)*h(t)\Leftrightarrow F(u)H(u)$$
$$f(t)h(t)\Leftrightarrow F(u)*H(u)$$

$$f(x,y)*h(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)H(u,v)$$
$$f(x,y)h(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)*H(u,v)$$

卷积定理是频域滤波的基础

4

# 图像频域滤波

离散傅里叶变换

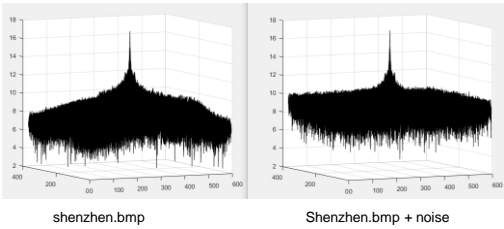
$$F(u)=\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}f(x)e^{-j2\pi ux/M},u=0,1,2,...M-1$$
$$f(x)=\sum_{u=0}^{M-1}F(u)e^{j2\pi ux/M},x=0,1,2,...M-1$$

扩展到二维时，一个图像尺寸为M×N的函数f(x,y)的二维DFT:

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}\qquad u=0,1...M-1;\quad v=0,1...N-1$$
$$f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}\qquad x=0,1...M-1;\quad y=0,1...N-1$$

5

# 图像频域滤波



shenzhen.bmp

Shenzhen.bmp + noise

6

图像频域滤波

离散傅里叶变换的性质

二维DFT的傅立叶谱、相角、功率谱

|F(u,v)| = \sqrt{R^2(u,v) + I^2(u,v)}

\phi(u,v) = \arctan \frac{I(u,v)}{R(u,v)}

P(u,v) = |F(u,v)|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v)

当u=0,v=0时

F(0,0) = \frac{1}{MN} \sum\_{x=0}^{M-1} \sum\_{y=0}^{N-1} f(x,y)

原点处的傅立叶变换等于图像的平均灰度级。

7

图像频域滤波

对称性 F(u,v) = F^\*(-u,-v) 若f(x,y)是实函数

周期性 F(u,v) = F(u+M,v) = F(u,v+N) = F(u+M,v+N) f(x,y) = f(x+M,y) = f(x,y+N) = f(x+M,y+N)

DFT在u, v方向都是周期无穷的，周期由M, N决定 傅里叶逆变换得到的图像也是周期无穷的

DFT实现仅计算一个周期（仅处理M x N的数组）

8

图像频域滤波

平移性 f(x,y)e^{j2\pi(\frac{u\_0x}{M} + \frac{v\_0y}{N})} \Leftrightarrow F(u-u\_0, v-v\_0) f(x-x\_0, y-y\_0) \Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi(u\_0x/M + v\_0y/N)}

当u\_0 = M/2, v\_0 = N/2时，有： e^{j2\pi(u\_0x/M + v\_0y/N)} = e^{j\pi(x+y)} = (-1)^{x+y}

因此可以得到：

f(x,y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u-M/2, v-N/2) f(x-M/2, y-N/2) \Leftrightarrow F(u,v)(-1)^{u+v}

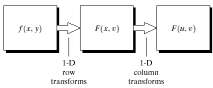
9

图像频域滤波

分配律 \Psi[f\_1(x,y) + f\_2(x,y)] = \Psi[f\_1(x,y)] + \Psi[f\_2(x,y)] \Psi[f\_1(x,y) \cdot f\_2(x,y)] \neq \Psi[f\_1(x,y)] \cdot \Psi[f\_2(x,y)]

可分离性 F(u,v) = \sum\_{x=0}^{M-1} e^{-j2\pi ux/M} \frac{1}{N} \sum\_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi vy/N} = \sum\_{x=0}^{M-1} F(x,v) e^{-j2\pi ux/M}

其中 F(x,v) = \sum\_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi vy/N}



10

图像频域滤波

卷积定理 f(x,y) \* h(x,y) = \sum\_{m=0}^{M-1} \sum\_{n=0}^{N-1} f(m,n)h(x-m, y-n)

f(x,y) \* h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)H(u,v) f(x,y)h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v) \* H(u,v)

11

图像频域滤波

Numpy 函数

```
f = np.fft.fft2(img)
fshift = np.fft.fftshift(f)

f1shift = np.fft.ifftshift(fshift)
img_back = np.fft.ifft2(f1shift)
```

12

图像频域滤波

- 频率增强原理
- 频率域平滑（低通）滤波器
- 频率域锐化（高通）滤波器
- 频率带通滤波器
- 频率带阻滤波器

13

图像频域滤波

频率增强原理

g(x,y)=T^{-1}{E\_H[T{f(x,y)}]}

- 步骤:
- (1) 转换到频域
  - (2) 在频域增强、滤波
  - (3) 转换回空域

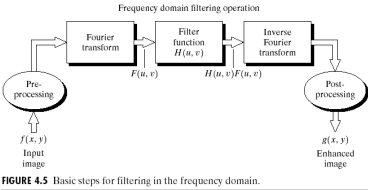


FIGURE 4.5 Basic steps for filtering in the frequency domain.

15

图像频域滤波

低通滤波器

如何确定滤波器的截止频率？ 计算包含图像总功率值P\_T特定量的圆环。

P\_T = \sum\_{u=0}^{M-1} \sum\_{v=0}^{N-1} P(u,v) \quad P(u,v) = |F(u,v)|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v)

其中 u = 0, 1, 2, ..., M - 1, v = 0, 1, 2, ..., N - 1

原点在频率域矩形的中心、半径为r的圆包含的功率占总功率P\_T的百分数为：

\alpha \% = 100 \sum \sum\_{u,v} P(u,v) / P\_T

根据对保留能量的要求来确定滤波器的截止频率

17

图像频域滤波

卷积理论是频域技术的基础

设 g(x, y) = h(x, y) \* f(x, y)，那么根据卷积定理在频域有：

G(u,v) = H(u,v)F(u,v)

其中G(u, v), H(u, v), F(u, v)分别是g(x, y), h(x, y), f(x, y)的傅里叶变换。

14

图像频域滤波

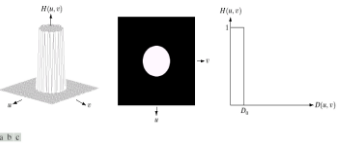
低通滤波器

理想低通滤波器

H(u,v) = \begin{cases} 1 & D(u,v) \leq D\_0 \\ 0 & D(u,v) > D\_0 \end{cases}

在半径为D\_0的圆内，所有频率没有衰减地通过滤波器，而在此半径的圆之外的所有频率被完全衰减掉。

D(u,v) = [(u - M / 2)^2 + (v - N / 2)^2]^{1/2}

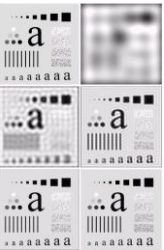


(a)理想低通滤波器变换函数的透视图 (b) 以图像显示的滤波器 (c) 滤波器的径向横截面

16

图像频域滤波

低通滤波器



(a)原图像，(b)-(f) 分别用半径值为5,15,30,80和230的截止频率进行理想低通滤波的结果。

由这些滤波器滤去的功率占总功率的8%, 5.4%, 3.6%, 2%和0.5%。

18

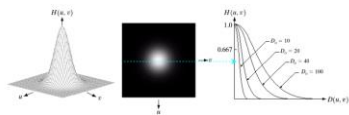
# 图像频域滤波

## 低通滤波器

高斯低通滤波器  $H(u, v) = e^{-D^2(u,v)/2\sigma^2}$

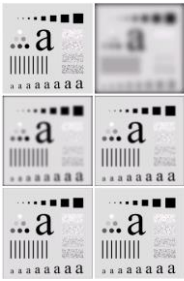
$D(u, v)$ 是距傅立叶变换原点的距离, $\sigma$ 表示高斯曲线的扩散程度.  
若使 $\sigma = D_0$ ,则可表示为:  $H(u, v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$   
其中, $D_0$ 是截止频率.

高斯曲线的傅立叶反变换也是高斯曲线



# 图像频域滤波

## 低通滤波器



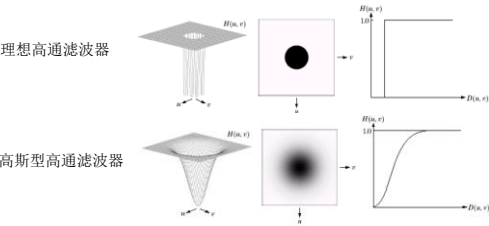
(a)原图像 (b)-(f)用高斯低通滤波器滤波的结果,其截止频率半径分别为5,15,30,80和230.

# 图像频域滤波

## 高通滤波器

$H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v)$

其中, $H_{lp}(u, v)$ 是相应低通滤波器的传递函数.



# 图像频域滤波

# 图像频域滤波

# 图像频域滤波

图像频域滤波

---

25

图像频域滤波

---

26

图像频域滤波

---

27

图像频域滤波

---

28