实验 4 Python 数值计算

学号：　　姓名：　　日期：2021-11-08

- **实验正式报告请交纸质版。截止日期：2021 年 11 月 15 日**
- **请注意报告版面整洁，截图清晰，内容组织逻辑清晰，易于阅读**
- **代码请附在报告中，并打包发邮件。代码要能复现报告中的结果。**

目的和要求：

（1）掌握基于 Numpy 数值分析的基本用法

（2）运用 Numpy 数值分析，解决实际问题

一、基本题

使用 Python Numpy 回答下面的问题：

1. 矩阵 $a=\begin{bmatrix}4 & 2 & -6\\ 7 & 5 & 4\\ 3 & 4 & 9\end{bmatrix}$，计算 a 的行列式和逆矩阵。

2. a = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9], b = a;

用 np.rot90 去旋转矩阵 a，要旋转几次，才能和 np.flipud(np.fliplr(b)) 相等

3. 使用 np.random.rand 函数，建立一个 5x5 的随机数矩阵，求矩阵的行列式的值，秩和范数。

4. 方程组 $\begin{bmatrix}2 & 9 & 0\\ 3 & 4 & 11\\ 2 & 2 & 6\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}13\\ 6\\ 6\end{bmatrix}$,

1) 依线性代数，写成 Ax = b 的形式，那么 $x = A\backslash b$，求得 x
2) 使用 np.linalg.solve 求得 x
3) 两者是否相等？

5. 写出代码，给出例子,验证两个方阵 A，B 满足|AB| =|A||B|

二、应用题

1948 年起奥林匹克运动会女子铅球记录如下：

年份	1948	1952	1956	1960	1964	1968	1972	1976	1980	1984
距离(米)	13.75	15.28	16.59	17.32	18.14	19.61	21.03	21.16	22.41	23.57
平均年龄	28	28	27.5	29	30	26	26.5	28	27	31

a) 使用数据插值函数，从这些数据中预测 1970 年的奥运会女子铅球的最佳成绩？

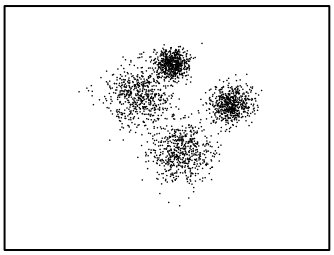
b) 表中的距离逐年呈现单调递增的趋势，请用一个一次函数 y = kx + b 拟合这些数据。并回答依照拟合的函数，在 2000 年奥运会女子铅球的最佳成绩会是多少？

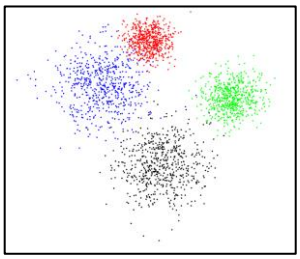
三、综合题

编写函数实现 Kmeans 算法聚类算法。

使用 Numpy 编写代码，不要使用其他工具包，勿直接抄袭网上代码！

聚类就是根据数据之间的相似度将数据集划分为多个类别或组，使类别内的数据相似度较大而类别间的数据相似度较小。如下图所示，左边是原始数据，右边是聚类之后的效果，不同的颜色代表不同的类别。





实验数据：文件 Lab4.dat 中含有 2400 个二维空间的点坐标 XY。

Kmeans 算法简要

请参考相关书籍或网络，了解 kmeans 算法。大致的步骤如下：

1. 设置初始类别中心和类别数
2. 根据类别中心对全部数据进行类别划分：每个点分到离自己距离最小的那个类
3. 重新计算当前类别划分下每个类的中心：例如可以取每个类别里所有的点的平均值作为新的中心。如何求多个点的平均值？ 分别计算 X 坐标的平均值，y 坐标的平均值，从而得到新的点。**注意：**类的中心可以不是真实的点，虚拟的点也不影响。
4. 在新的类别中心下继续进行类别划分;
5. 如果连续两次的类别划分结果不变则停止算法; 否则循环 2～5。例如当类的中心不再变化时，跳出循环。

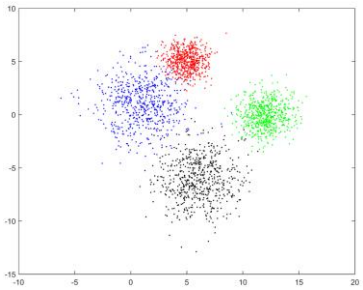
影响 Kmeans 算法的可能因素：

- **如何选择距离的定义：**对数据点进行类别划分时，需要计算点到点之间的距离。距离有很多种。 例如欧式距离，$d_2(X,Y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$, 其中$X=(x_1,x_2)$和$Y=(y_1,y_2)$是两个不同的点; L1 范数距离$d_1(X,Y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$。
- **如何确定合理的 K 值？**
- **如何选择 K 个初始类簇的中心点？**

要求：

1. 实现函数 cidx, ctrs = kmeans(X, K), 其中

- 输入 X 是$N \times 2$的矩阵，每行一个点，K 是类别的个数，
- 输出 ctrs 是类的中心坐标，对应的 size 应该为：$K \times 2$。cidx 是各个点的类别信息，表示每个点属于哪一类，其 size 为$N \times 1$，例如 cidx(0) = 2，表示第一个点属于第二个类。
- 函数写好后，测试当 K = 2, 3, 4 的效果，并用散点图画出分类的效果。例如，下图显示了当 K=4 的效果。



请查阅 matplotlib.pyplot.scatter 散点图的画法。

2. 确定最优的参数 K：手肘法

参考：https://blog.csdn.net/qq_15738501/article/details/79036255

对每一个 K 值，计算分类的 SSE(sum of the squared errors，误差平方和)。

$$SSE = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} dist(X_i - c_i)^2$$

其中 N 是点的个数，X_i是第i个点，c_i是X_i对应的中心。

编写函数函数 y = calSSE(X, cidx) 计算聚类效果的 SSE，其中 X 是待聚类的数据，cidx 是 kmeans 函数返回的聚类结果， 画出当类别数 K 分别为 2,3,4,5,6 等值时的 SSE， 肉眼能否看出最佳的 K 值？类似下图的效果？