

## 第 8 章

# 感染症と流行のモデル

### 8.1 Pandemic 2020

2019 年 11 月に中国武漢にて発生し、急性呼吸器疾患 (COVID-19) の原因となる新型コロナウイルス (SARS-CoV-2) は、最初中国武漢を中心に爆発的に感染を拡大させ、さらには世界的大流行 (pandemic) を引き起こすにいたった。疫病は猖獗を極め魑魅魍魎が跋扈し世は大いに乱れた。

ところで、国内での流行拡大初期にさかんに図 8.1 のような流行曲線の模式図が示された<sup>\*1</sup>。対策の要点は、流行の速度を下げることで、新規感染者数の急激な増加を抑え、そのことによって医療対応の限界を超える医療崩壊をできるだけ防ぐということである。その成否は授業当日には明らかになっているかもしれない。

また、感染拡大初期において、各種の不確かなあるいは明らかに誤った情報が、SNS を中心に拡散し、人びとの行動に大きな影響を与えた。たとえば、原料不足からトイレットペーパーが不足するかもしれないという情報が人びとの購買行動に影響を与え実際に紙不足が生じた。われわれが工業製品で尻を拭く高度な文明を取り戻したかどうかは授業当日には明らかになっているかもしれない。このような、パンデミックに先行する情報の拡散は、インフォデミック (infodemic) とも呼ばれた<sup>\*2</sup>。

---

<sup>\*1</sup> 首相官邸新型コロナウイルス感染症対策本部 第 12 回 (令和 2 年 2 月 23 日開催) 資料 ([https://www.kantei.go.jp/jp/singi/novel\\_coronavirus/th\\_siryou/sidai\\_r020223.pdf](https://www.kantei.go.jp/jp/singi/novel_coronavirus/th_siryou/sidai_r020223.pdf))

<sup>\*2</sup> Novel Coronavirus (2019-nCoV) Situation Report - 13 (2 Feb 2020) by WHO (<https://www.who.int/docs/default-source/coronaviruse/situation-reports/20200202-sitrep-13-ncov-v3.pdf>)

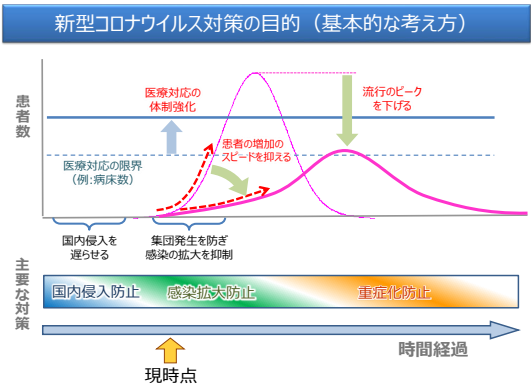


図 8.1 新型コロナウイルス対策の目的

## 8.2 単純感染モデル

### 8.2.1 具体例

ウイルスも情報も、基本的に「人づて」に伝わるものだと考えられる．ということは、情報の流行（流言）も感染症の流行も、基本的には同じ原理的なメカニズムを想定できるだろう．このことを、まずもっとも単純なモデルで考えてみよう．

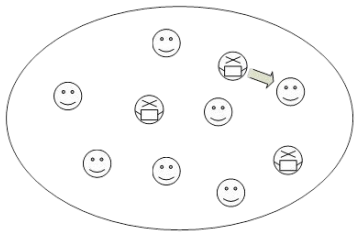


図 8.2 単純感染モデル

いま、ある地域に 10 人の人がいて 3 人がすでに新型コロナウイルスに感染（感染者）し

ており、残りの7人は無事である（非感染者）と想定しよう（図 8.2）。10 人の人は地域の中を自由気ままに動き回っているとする。このとき、ある 1 人の感染者が、いろいろな人がある中で非感染者にバツタリと出会う確率を考えよう。自分以外の人の中で非感染者は 9 人中の 7 人なので、確率は  $7/9$  である。より正確には、

$$\frac{\text{全員} - \text{感染者}}{\text{全員} - \text{自分}} = \frac{10 - 3}{10 - 1} = \frac{7}{9} \quad (8.1)$$

である。非感染者に出会ったとき、ウイルスが伝染する確率を、例えば、 $1/2$  と仮定してみる。さらに、非感染者に出会うことと、相手に感染させることは独立（互いに関連がない）とする。そうすると、それぞれの感染者が非感染者に出会って、さらに相手にインフルエンザを移す確率は  $(7/9) \times (1/2) = 0.389$  である。いま、地域には 3 人の感染者がいるので、それぞれの感染者が動き回ったときに、新たに感染する人の予想人数は

$$3 \times \frac{7}{9} \times \frac{1}{2} = 1.117 \quad (8.2)$$

となる\*3。この結果、次の時点で感染者数は累積で 4 人になっている可能性が高い。

## 8.2.2 一般化

この単純なモデルを少し一般化してみよう。そこで以下の記号を導入する。

$N$  : 地域の総人口。

$t$  : 時点 ( $t = 0, 1, 2, \dots$ )。

$x(t)$  :  $t$  時点における感染者数、単純に  $x$  とだけ書く場合もある。  $x \geq 0$ 。

$\alpha$  : 感染者が非感染者に出会ったとき、相手に感染させる確率。

そして、次のようなモデルの仮定を定める。

- (1) 「新型」のウイルスなので、このウイルスの抗体をもっている人は誰もいない
- (2) それぞれの時点において、感染者・非感染者とも自由に地域を動き回る
- (3) 人々は一度感染すると、その後は  $\alpha$  の感染力を持ち続ける（つまり、排ウイルスしない）

---

\*3 確率  $p$  のベルヌーイ試行を  $n$  回行ったときの成功回数は、パラメータ  $n, p$  の二項分布  $Bi(n, p)$  にしたがって、その期待値は  $np$  である。

このとき、 $t$  時点において、ある 1 人の感染者が非感染者に出会う確率は

$$\frac{N - x(t)}{N - 1} \quad (8.3)$$

であり、 $t$  時点において新たに感染する予想人数は、

$$x(t) \times \frac{N - x(t)}{N - 1} \times \alpha = \frac{\alpha}{N - 1} x(t) [N - x(t)] \quad (8.4)$$

である。予想人数は小数になることもあるが、実際に増える人の数は整数でしかありえないので、小数点以下は四捨五入することにしよう。 $x$  の小数点以下を四捨五入することを  $\text{nint}(x)$  と書く。そうすると、 $t$  時点から  $t + 1$  時点にかけて新たに感染する人数  $x(t + 1) - x(t)$  は、

$$x(t + 1) - x(t) = \text{nint} \left( \frac{\alpha}{N - 1} x(t) [N - x(t)] \right) \quad (8.5)$$

となる。そして、 $t + 1$  時点における累積感染者数は

$$x(t + 1) = x(t) + \text{nint} \left( \frac{\alpha}{N - 1} x(t) [N - x(t)] \right) \quad (8.6)$$

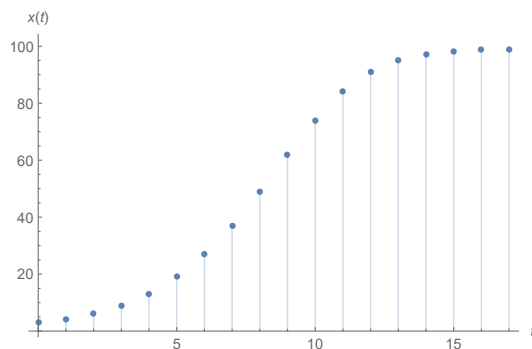
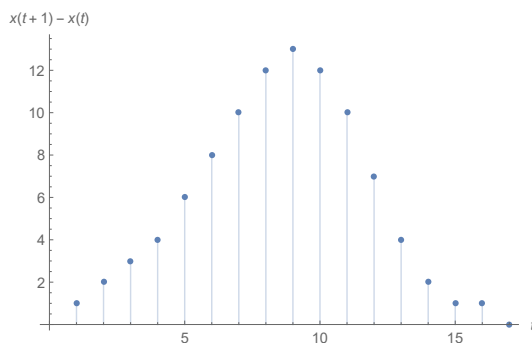
である。

## 8.2.3 数値例

実際にモデルを動かしてみよう。 $N = 100, \alpha = 0.5, x(0) = 3$  として、 $t = 1$  以降の新規感染者数と、累積感染者数を計算してみる。Excel や R を使って簡単に計算ができるので暇な人は自分でやってみよう。

モデルを動かしてみた結果、17 時点でほぼ全員に当たる 99 人が感染した (図 8.3)。新規感染者は 9 試行目までどんどん増加し、その後減少に転じた (図 8.4)。最初に見た指針における発生段階のグラフと同じような傾向をしていることが分かるだろう。

ただし、このモデルはもっとも単純なものであり、現実的な予測を与える場合は、さらに仮定を複雑にしたモデルが用いられる。インフルエンザなどの流行性の感染症を考える場合、重要になってくるのが、もともと抗体をもっている人たち、感染後治癒した人たち、隔離中の人たちそして不幸にも死亡した人たちの存在である。治癒した人は感染力がなくなり抗体ができるので、他の人に感染させることもないし自分も

図 8.3 累積感染者数の推移 ( $N = 100, \alpha = 0.5, x(0) = 3$ )図 8.4 新規感染者数の推移 ( $N = 100, \alpha = 0.5, x(0) = 3$ )

感染しない。隔離者や死者も同様に、感染させることも感染することもない。こうした人々を「除去者」というが、より複雑な伝染モデルを考えるときは、除去者の数の変化を考慮する必要がある。このモデルはあとの 8.4 節で扱う\*4。

今回検討したモデルは、誰も抗体をもっておらず、またモデルの時間が動く範囲内では、感染者は感染力を保持しつつ他者と接触し続けると仮定した。このような仮定は、「新型」で比較的軽い症状の感染症が急速に広まる状況や、感染者がゾンビ化し

\*4 さらに、潜伏期間や接触機会、年齢階層を考慮する複雑なモデルもあるが、ここでは扱わない。

もののすごい勢いで襲ってくるような状況<sup>\*5</sup>に適合的であると考えられる。また、不確実性が高い状況下での情報の「感染」現象にも一定程度当てはまる仮定であろう。

## 8.3 単純感染の微分方程式モデル

### 8.3.1 微分方程式モデルの定式化

いま  $N$  は十分に大きいものと仮定する。先の式 (8.5) を整数化しないで考えよう。式 (8.5) は時間 1 単位あたりの  $x$  の増加率を表していると考えられる。すなわち、

$$\frac{x(t+1) - x(t)}{t+1-t} = x(t+1) - x(t) = \frac{\alpha}{N-1} x(t)[N - x(t)] \quad (8.7)$$

ここで増加率を考えると、時間の動く単位  $\Delta t$  を限りなく小さくすることができる。すると、この式は以下の微分方程式の形になる。すなわち、

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt} = \beta x(t)[N - x(t)] \quad (8.8)$$

ただし、 $\beta = \alpha/(N-1)$  であり、 $\beta$  は感染力の強さを表すパラメータである。

### 8.3.2 微分方程式を解く

$t$  時点における感染者数  $x(t)$  の変化は、微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = \beta x(N - x) \quad (8.9)$$

によって近似することができる。以下これを解いていこう<sup>\*6</sup>。これは、「変数分離型」と呼ばれる微分方程式の形式なので、

$$\frac{dx}{dt} = \beta x(N - x) \iff \frac{1}{x(N - x)} \frac{dx}{dt} = \beta \quad (8.10)$$

<sup>\*5</sup> 2004 年リメイクの『ドーン・オブ・ザ・デッド』をもって嚆矢とする全力疾走するモダン・ゾンビ群である。

<sup>\*6</sup> これ以降は基本的な微分積分の知識を前提としている。

と変形して、両辺を  $t$  で積分する．すると、

$$\int \frac{1}{x(N-x)} \frac{dx}{dt} dt = \int \beta dt \quad (8.11)$$

を得る．まず、式 (8.11) の左辺を変形する．

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(N-x)} \frac{dx}{dt} dt &= \int \frac{1}{x(N-x)} dx && \text{置換積分} \\ &= \int \frac{1}{Nx} dx + \int \frac{1}{N(N-x)} dx && \text{部分分数に分解} \\ &= \frac{1}{N} [\log x - \log(N-x)] + C_1 && \text{積分する} \\ &= \frac{1}{N} \log \left( \frac{x}{N-x} \right) + C_1 && \text{対数部分をまとめる} \end{aligned} \quad (8.12)$$

次に、右辺は

$$\int \beta dt = \beta t + C_2 \quad (8.13)$$

である．ただし、 $C_1, C_2$  はそれぞれ積分定数である．ゆえに、

$$\frac{1}{N} \log \left( \frac{x}{N-x} \right) = \beta t + C \quad (8.14)$$

が成立する．ここで、 $C$  は積分定数をまとめたものである．さて、ここで初期状態の仮定として、 $t=0$  のとき、 $x(0) = x_0$  (定数) と仮定する．すると、

$$C = \frac{1}{N} \log \left( \frac{x_0}{N-x_0} \right) \quad (8.15)$$

となる．これを、式 (8.14) に代入して、 $x$  について解くと、

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \log \left( \frac{x}{N-x} \right) &= \frac{1}{N} \log \left( \frac{x_0}{N-x_0} \right) + \beta t && C \text{ を代入} \\ \frac{x}{N-x} &= \frac{x_0 \exp(N\beta t)}{N-x_0} && \text{両辺 } N \text{ をかけたのち } \exp \text{ をとる} \\ x(t) &= \frac{Nx_0 \exp(N\beta t)}{N-x_0 + x_0 \exp(N\beta t)} && x \text{ についてまとめる} \end{aligned} \quad (8.16)$$

$$x(t) = \frac{Nx_0}{(N-x_0) \exp(-N\beta t) + x_0} \quad \text{別表現} \quad (8.17)$$

となり、 $t$  時点の累積感染者数の陽関数が求まる。この関数はロジスティック関数 (logistic function) の一つのタイプである。また、 $t$  時点の新規感染者数の関数  $x'(t)$  も陽関数として求まり、

$$x'(t) = \frac{N^2(N - x_0)\beta x_0 \exp(N\beta t)}{[N - x_0 + x_0 \exp(N\beta t)]^2} \quad (8.18)$$

となる。

図 8.5 と図 8.6 は、感染力  $\beta$  を規定する感染確率  $\alpha$  を変化させたときの、累積感染者数と新規感染者数の推移の予測を表している。

さて、 $x'(t)$  の極大点は、 $x''(t) = 0$  のときの

$$t^* = \frac{\log\left(\frac{N}{x_0} - 1\right)}{N\beta} \quad (8.19)$$

であり、そのときの値は、

$$x'(t^*) = \frac{N^2\beta}{4} \quad (8.20)$$

となる\*7。ここから、感染力  $\beta$  (感染確率  $\alpha$ ) が大きければ大きいほど、新規感染者のピークは早まり、ピークにおける瞬間的な新規感染者数は大きくなることがわかる。逆に言えば、感染力を抑えることによって、ピークを遅くしてなおかつピークの値を低くすることができることがわかった。

## 8.4 SIR モデル

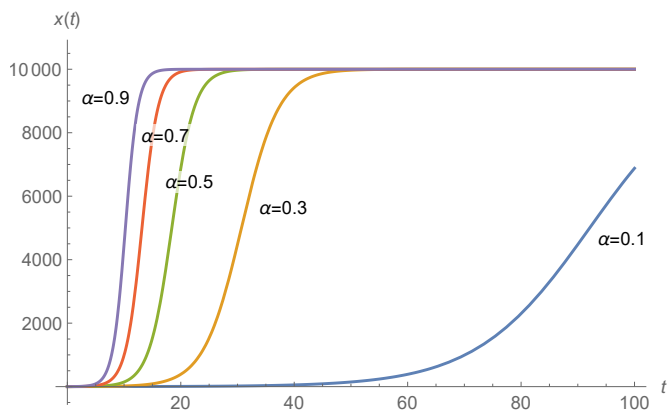
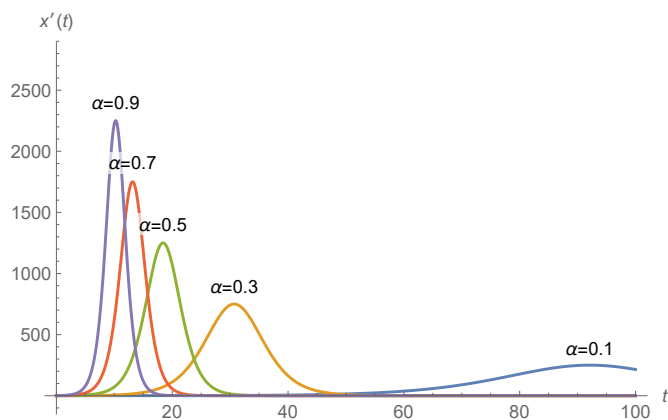
### 8.4.1 モデルの仮定

つぎに、除去者を考慮した一般的な感染症のモデルを導入しよう。このモデルは、Kermack & McKendrick (1927) によって提唱され、変数名をとって **SIR** モデルとも呼ばれる。以下の記述では、佐藤 (1987: 7, 8 章), Burghes & Borrie (1981=1990: 7 章), 稲葉 (2002: 6 章) を参照した。

---

\*7  $x'''(t^*) = -(1/8)N^4\beta^3 < 0$  なので、 $t^*$  において  $x'(t)$  は極大値をとる。



図 8.5 累積感染者数の微分方程式モデルによる予測 ( $N = 10000, x_0 = 1$ )図 8.6 新規感染者数の微分方程式モデルによる予測 ( $N = 10000, x_0 = 1$ )

$S(t)$  : 感受性人口 (susceptibles)

$I(t)$  : 感染人口 (infected)

$R(t)$  : 除去人口 (recovered/removed)

$N$  : 総人口 (定数で  $N = S(t) + I(t) + R(t)$ )

$\beta$  : 感染率 ( $\beta > 0$ )

$\gamma$  : 除去率 ( $\gamma > 0$ )

SIR モデルは、次のような微分方程式系で表される。

$$\frac{d}{dt}S(t) = -\beta S(t)I(t) \quad (8.21)$$

$$\frac{d}{dt}I(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \quad (8.22)$$

$$\frac{d}{dt}R(t) = \gamma I(t) \quad (8.23)$$

### 8.4.2 基本再生算数

この系の定常点は、 $-\beta S^*I^* = 0, \beta S^*I^* = \gamma I^*, \gamma I^* = 0$  より、 $(S^*, I^*, R^*) = (S, 0, N - S), S \in [0, N]$  である。

ある地域にとって免疫のない「新型」ウイルスの侵入状況を考えよう。そのときには、地域のすべての人口が感受性人口になっており、そこにごく少数の感染者が発生する。このような侵入のごく初期の状況は、定常点の一つ  $(N, 0, 0)$  のまわりで線形近似した以下の微分方程式系によって表現できる<sup>\*8</sup>。

$$\frac{d}{dt}S(t) = -\beta I(t) \quad (8.26)$$

$$\frac{d}{dt}I(t) = (\beta N - \gamma)I(t) \quad (8.27)$$

$$\frac{d}{dt}R(t) = \gamma I(t) \quad (8.28)$$

---

<sup>\*8</sup> このあたりはテクニカルな話なので、まずは聞き流す程度でよい。以下知りたい人向け。自励系の微分方程式系  $d\mathbf{x}/dt = f(\mathbf{x})$  における一つの定常点を  $\mathbf{x}^*$  とする。  $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$  とするとき、

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = Df(\mathbf{x}^*)\mathbf{z} \quad (8.24)$$

を  $\mathbf{x}^*$  まわりでの線形近似 (linear approximation) という。ただし、 $Df$  は  $f$  のヤコビ行列である (例えば、矢嶋 (1989: 190–1) などを参照)。SIR モデルのヤコビ行列は

$$Df(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\beta I & -\beta S & 0 \\ \beta I & \beta S - \gamma & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \end{bmatrix}, \quad Df(\mathbf{x}^*) = \begin{bmatrix} 0 & -\beta S & 0 \\ 0 & \beta N - \gamma & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \end{bmatrix} \quad (8.25)$$

であり、これにより線形近似方程式系を得る。

式 (8.27) は単純な変数分離形なので,  $I(0) = I_0$  としてこれを解くと,

$$\begin{aligned}
 \frac{dI}{dt} &= (\beta - \gamma)I(t) && \text{式 (8.27) より} \\
 \frac{1}{I} \frac{dI}{dt} &= (\beta N - \gamma) && \text{両辺に } I^{-1} \text{ をかける} \\
 \int_0^t \frac{1}{I} \frac{dI}{dt} dt &= \int_0^t (\beta N - \gamma) dt && \text{両辺 } 0 \text{ から } t \text{ まで } t \text{ について積分} \\
 \log \left( \frac{I}{I_0} \right) &= (\beta N - \gamma)t && \text{積分をとく} \\
 \frac{I}{I_0} &= \exp\{(\beta N - \gamma)t\} && \text{両辺の exp をとる}
 \end{aligned}$$

これより, 特殊解

$$I(t) = I_0 \exp\{(\beta N - \gamma)t\} \quad (8.29)$$

を得る. これは, マルサスが『人口論』で展開した人口増加モデルと同型であり,  $t$  にかかる係数はマルサス係数とも呼ばれる.

マルサス係数  $\beta N - \gamma$  が正の場合, 感染者数  $I$  は指数関数的に増加し, 負の場合はゼロに向かって減少する. つまり, ある地域に感染症が侵入し流行を始める条件は,

$$\beta N - \gamma > 0 \iff R_0 = \beta N \frac{1}{\gamma} > 1 \quad (8.30)$$

である. ここで,  $R_0$  は基本再生算数 (basic reproduction number: R nought) と呼ばれ, 疫学上大変重要な指数である<sup>\*9</sup>.

$R_0$  の具体的意味を確認しよう (稲葉 2002: 197). まず,  $\beta N$  は, 「1 人の感染者が単位時間あたりに生み出す 2 次感染者数」を表す<sup>\*10</sup>. 次に,  $\gamma^{-1}$  は, 「1 人の感染者が除去 (隔離, 免疫獲得, もしくは死亡) されるまでの平均的な感染性期間」を示す<sup>\*11</sup>. これらを掛け合わせた  $R_0$  は, 「1 人の感染者が感染性期間に生み出す 2 次感

<sup>\*9</sup> 今回のパンデミックを予言したともいわれるスティーブン・ソダーバーグ監督の『コンテイジョン (Contagion)』(2011) では, ケイト・ウィンスレット演じる CDC 調査官が地元保健当局者に  $R_0$  の説明をしている. ちなみにこの映画では序盤でいきなりグウィネス・パルトロウが泡を吹いてぶっ倒れて死後検屍のために頭の皮を剥がれるというひどい扱いを受けていて大変よい映画である.

<sup>\*10</sup> 単純感染モデルで  $N$  が十分に大きければ  $\beta N \approx \alpha$  となる.

<sup>\*11</sup> このことをもう少し丁寧に説明する. まず, 除去は独立に一定の発生確率で起こるイベントである

染者数」を示している．まとめると，

$$\underbrace{R_0}_{\text{感染性期間の2次感染者数}} = \underbrace{\beta N}_{\text{単位時間あたりの2次感染者数}} \times \underbrace{\frac{1}{\gamma}}_{\text{平均的な感染性期間}} \quad (8.31)$$

となる．「1人の感染者が感染性期間に生み出す2次感染者数」である  $R_0$  が1を超えることで指数関数的爆発が起きる（図8.7）．

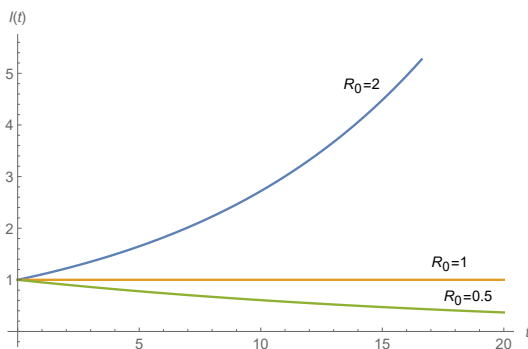


図8.7 流行初期の近似モデルによる予測（ $\gamma = 0.1$ ）

さらに，流行が起こる条件は

$$R_0 = \beta N \frac{1}{\gamma} > 1 \iff N > \frac{\gamma}{\beta} \quad (8.32)$$

とも書き換えられる．ここで， $\rho = \gamma/\beta$  とすると， $\rho$  は流行が起こる人口規模の「閾値」であり，閾値が人口規模を下回り， $N > \rho$  が満たされることによって流行が起こる，とも言うことができる．

### 8.4.3 $(S, I)$ 相平面

次により一般的な状況について分析を進める．

---

と仮定する（ポアソン過程）．このとき， $\gamma$  は，単位時間あたりに発生する除去イベントの平均回数と解釈でき，単位時間あたりの除去発生回数はパラメータ  $\gamma$  のポアソン分布に従う．このとき，次に除去が生じるまでの待ち時間はパラメータ  $\gamma$  の指数分布にしたがい，その期待値は  $\gamma^{-1}$  である．ポアソン過程，ポアソン分布，指数分布については，浜田ほか（2019: 5章）も参照．

初期条件として,  $S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = 0$  を仮定する. SIR モデルのダイナミクスは  $(S, I)$  のみによって動いているので, 以下では,

$$\frac{d}{dt}S(t) = -\beta S(t)I(t) \quad (8.33)$$

$$\frac{d}{dt}I(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \quad (8.34)$$

の 2 つの方程式による系の相平面を検討する. このとき, 問題の性質から  $S \geq 0, I \geq 0$  となる  $(S, I)$  平面の第 1 象限のみを分析範囲とする.

式 (8.41) より,  $dS(t)/dt < 0$ . また, 式 (8.34) より,

$$S(t) \leq \rho \implies \frac{d}{dt}I(t) = \beta I(S(t) - \rho) \leq 0 \quad (8.35)$$

ゆえに, 相平面の模式図は図 8.8 のとおりになる.

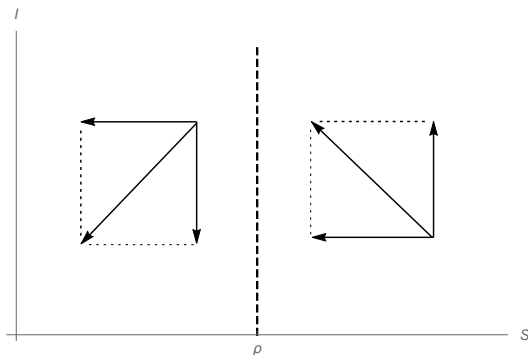


図 8.8  $(S, I)$  相平面の模式図

より正確に解軌道を描くために  $S$  の関数としての  $I$  を求める.

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dS} &= \frac{dI}{dt} \frac{dt}{dS} && \text{微分の連鎖律} \\ &= \frac{dI}{dt} \bigg/ \frac{dS}{dt} && \text{逆関数の微分} \\ &= \frac{\beta SI - \gamma I}{-\beta SI} && \text{式 (8.41), (8.34) を代入} \end{aligned}$$

より,

$$\frac{d}{dS}I(S) = -1 + \frac{\rho}{S} \quad (8.36)$$

を得る. この微分方程式を解くと,

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dS} \frac{dS}{dt} &= -\frac{dS}{dt} + \frac{\rho}{S} \frac{dS}{dt} && \text{両辺に } dS/dt \text{ をかける} \\ \int_0^t \frac{dI}{dS} \frac{dS}{dt} dt &= -\int_0^t \frac{dS}{dt} dt + \int_0^t \frac{\rho}{S} \frac{dS}{dt} dt && \text{両辺 } 0 \text{ から } t \text{ まで } t \text{ について積分} \\ \int_{I_0}^I dI &= -\int_{S_0}^S dS + \rho \int_{S_0}^S \frac{dS}{S} && \text{置換積分} \\ I - I_0 &= -S + S_0 + \rho(\log S - \log S_0) && \text{積分する} \end{aligned}$$

より,

$$I(S) = S_0 + I_0 - S + \rho \log \frac{S}{S_0} \quad (8.37)$$

を得る. これにより  $I$  が  $S$  の関数として表現された.

式 (8.37) より,  $I(S_0) = I_0$ ,  $\lim_{S \rightarrow 0} I(S) = -\infty$ , また, 式 (8.36) より,  $S = \rho$  のとき  $dI/dS = 0$ , また  $d^2I/dS^2 = -\rho/S^2 < 0$  なので,  $S = \rho$  のとき  $I(S)$  は最大値

$$I(\rho) = S_0 + I_0 - \rho + \rho \log \frac{\rho}{S_0} \quad (8.38)$$

をとる.

初期状態について,

$$R_0 = \frac{S_0}{\rho} = \frac{\beta S_0}{\gamma} > 1 \quad (8.39)$$

のとき, つまり  $S_0 > \rho$  のとき, 初期感受性人口が閾値を超えていれば,  $I$  は  $S$  の減少に伴って上昇し,  $S = \rho$  において最大値をとり, その後減少して, 最終的に  $S$  軸と交わる.  $S$  軸と交わる点  $(S^*, 0)$  は系の 1 つの定常点となっている. なぜなら  $I = 0$  のとき  $dS/dt = 0, dI/dt = 0$  だからである. 逆に, 初期感受性人口が閾値以下  $S_0 < \rho$ , つまり  $R_0 < 1$  であれば,  $I$  は  $S$  の減少に伴って単調に減少していく. ここでも,  $R_0 > 1$  が流行発生の閾値条件になっていることが確認できる.

また,  $S_0 > \rho$  のとき,  $I(S)$  の最大値  $I(\rho)$  を  $\rho$  で微分すると,  $dI(\rho)/d\rho = \log(\rho/S_0) < 0$ . つまり,  $\rho$  が大きいほど, ピーク時の感染者数は少なくなる.  $\rho = \gamma/\beta$

を思い出すと、除去率を増やす、あるいは感染率を減らす、あるいはその両方によって、ピーク時の感染者数を小さくすることができることがわかる。

図 8.9 は、 $\beta = 0.00002, \gamma = 0.1$ , よって  $\rho = 5000$  としたときの系のベクトル場を示しており、赤のグラフは初期値  $S_0 = 8000, I_0 = 10$  を設定したときの解軌道である。また、図 8.10 は、同条件における  $S(t), I(t), R(t)$  の特殊解をプロットしたものである。

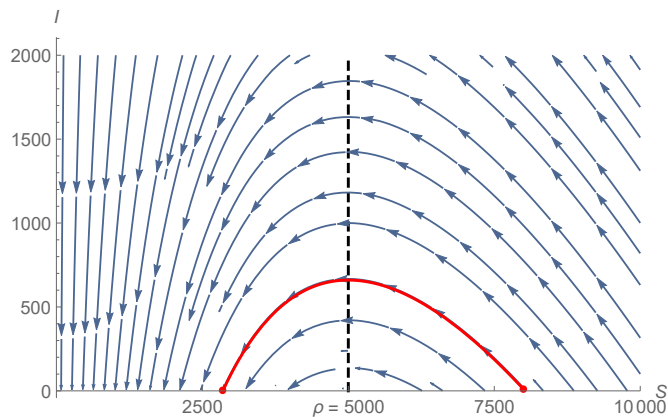


図 8.9 ベクトル場 ( $\beta = 0.00002, \gamma = 0.1$ ) と解軌道 ( $S_0 = 8000, I_0 = 10$ ) の例

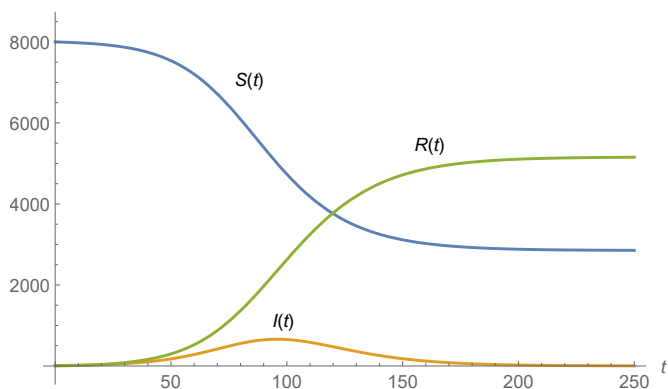


図 8.10 特殊解のプロット ( $\beta = 0.00002, \gamma = 0.1, S_0 = 8000, I_0 = 10$ )

## 8.4.4 閾値定理

式 (8.37) より,

$$S = S_0 + I_0 - I + \rho \log \frac{S}{S_0} \quad (8.40)$$

を得る. ここから,  $t \rightarrow \infty$  としたときの, 最終的な感受性人口  $S_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$  についての式を求める.  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$  に注意すると,

$$\begin{aligned} S_\infty &= S_0 + I_0 + \rho \log \frac{S_\infty}{S_0} && \text{limit をとる} \\ \exp\{S_\infty\} &= \exp\{S_0 + I_0\} \left(\frac{S_\infty}{S_0}\right)^\rho && \text{両辺 exp をとる} \\ \exp\left\{\frac{S_\infty}{\rho}\right\} &= \exp\left\{\frac{S_0 + I_0}{\rho}\right\} \left(\frac{S_\infty}{S_0}\right) && \text{両辺 } \rho^{-1} \text{ 乗} \\ S_\infty &= S_0 \exp\left\{-\frac{S_0 + I_0 - S_\infty}{\rho}\right\} && \text{まとめる} \end{aligned} \quad (8.41)$$

ここで,  $t$  時点において, 感染する感受性人口の割合を示す関数として,

$$p(t) = \frac{S(0) - S(t)}{S(0)} = 1 - \frac{S(t)}{S(0)} \quad (8.42)$$

を導入する.

$$p_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \frac{S_0 - S_\infty}{S_0} \quad (8.43)$$

とすると,  $p_\infty$  は最終的な流行の強度を表す. これにより式 (8.41) を

$$1 - p_\infty = \exp\{-R_0 p_\infty - \zeta\} \quad (8.44)$$

と書き換えられる. ここで  $R_0 = \beta S_0 / \gamma$  は初期時刻における基本再生産数であり,  $\zeta = \beta I_0 / \gamma$  は初期の感染人口から発生する 2 次感染者数である<sup>\*12</sup>. この式から, 初期条件に依存する流行強度を求めることができる.

次に, 「閾値定理」として知られる定理を証明する.

<sup>\*12</sup> 総感染力 (total infectivity) と呼ばれる (稲葉 2002: 202).



**命題 8.1.**  $S_0 > \rho$  であり, かつ  $\nu = S_0 - \rho$  が  $S_0$  に比べて十分小さく, かつ  $I_0$  が  $S_0$  に比べて十分小さいとすると, 初期の感受性人口から感染する人口は  $2\nu$  に近似し, 最終的に残る感受性人口は  $\rho - \nu$  に近似する. つまり,

$$S_0 - S_\infty \approx 2\nu. \quad (8.45)$$

**証明.** 条件より,  $S_0 + I_0 \approx S_0$  とすると, 式 (8.44) は,

$$1 - p_\infty = \exp \left\{ -\frac{S_0}{\rho} p_\infty \right\} \quad (8.46)$$

となる. 指数関数のテイラー展開  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} x^n$  より,

$$\exp \left\{ -\frac{S_0}{\rho} p_\infty \right\} \approx 1 - \frac{S_0}{\rho} p_\infty + \frac{1}{2} \left( \frac{S_0}{\rho} p_\infty \right)^2 \quad (8.47)$$

を用いて整理すると,

$$p_\infty \left( 1 - \frac{S_0}{\rho} + \frac{S_0^2}{\rho^2} p_\infty \right) = 0 \quad (8.48)$$

となる. モデルの仮定より  $S(t)$  は狭義単調減少関数であり  $p_\infty > 0$  なので, 括弧の中について解くと,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{S_0}{\rho} + \frac{S_0^2}{2\rho^2} p_\infty &= 0 \\ \left( \frac{S_0}{2\rho^2} \right) S_0 p_\infty &= \frac{S_0}{\rho} - 1 \\ S_0 p_\infty &= 2 \frac{\rho^2}{S_0} \left( \frac{S_0}{\rho} - 1 \right) \\ S_0 p_\infty &= 2 \frac{\rho}{S_0} (S_0 - \rho) \\ S_0 - S_\infty &= 2 \frac{S_0 + \nu}{S_0} \nu \\ S_0 - S_\infty &\approx 2\nu \quad S_0 + \nu \approx S_0 \text{ より} \end{aligned}$$

を得る. □

$S_0 - S_\infty \approx 2(S_0 - \gamma/\beta)$  より, 除去率を増やす, あるいは感染率を減らす, あるいはその両方によって, 流行における累積感染者数を小さくすることができるがわかる.

図 8.11 は閾値定理による近似の具体例である． $\nu = S_0 - \rho = 12000 - 10000 = 2000$  であり，最終的には  $S_\infty \approx 2\nu = 8000$  になると予測される．実際には， $S_\infty = 8189.67$  である．

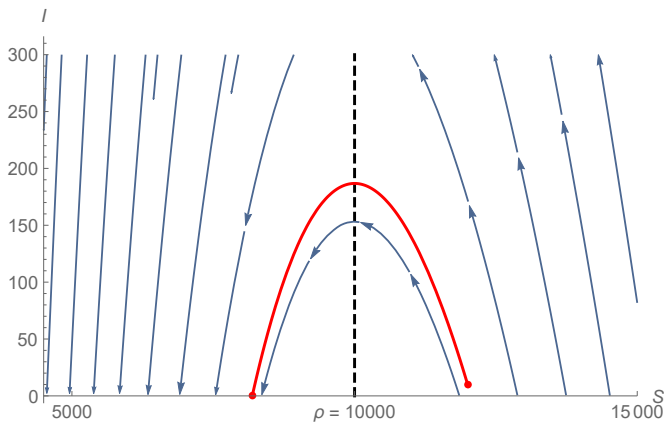


図 8.11 閾値定理の例 ( $\beta = 0.00001, \gamma = 0.1, S_0 = 12000, I_0 = 10$ )

### 8.4.5 流行曲線

次に，除去者人口  $R(t)$  の推移を研究する．引き続き，初期条件として  $S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = 0$  を仮定する．

まず， $S$  を  $R$  の関数として解く．モデルの仮定より，

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \iff I = \frac{1}{\gamma} \frac{dR}{dt}. \quad (8.49)$$

これを， $dS/dt = -\beta SI$  に代入すると，

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta}{\gamma} S \frac{dR}{dt} && I \text{ を代入} \\ \frac{1}{S} \frac{dS}{dt} &= -\frac{1}{\rho} S \frac{dR}{dt} \\ \int_0^t \frac{1}{S} \frac{dS}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \int_0^t \frac{dR}{dt} \end{aligned}$$

$$\log \frac{S}{S_0} = -\frac{1}{\rho}(R - R(0))$$

$$S = S_0 \exp \left\{ -\frac{R}{\rho} \right\}$$

をえる。仮定より  $N = S + I + R \iff I = N - S - R$  であるので、

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \gamma I \\ &= \gamma(N - S - R) \\ &= \gamma \left( N - S_0 \exp \left\{ -\frac{R}{\rho} \right\} - R \right) \end{aligned} \quad (8.50)$$

これが、SIR モデルにおける流行曲線 (epidemic curve) である。

$R/\rho$  が十分に小さいと仮定したときの、 $dR/dt, R(0) = 0$  の近似解は

$$R(t) = \frac{\rho^2}{S_0} \left[ \left( \frac{S_0}{\rho} - 1 \right) + \lambda \tanh \left( \frac{\gamma \lambda}{2} t - \mu \right) \right] \quad (8.51)$$

となる。ただし、

$$\lambda = \sqrt{\left( \frac{S_0}{\rho} - 1 \right)^2 + \frac{2S_0(N - S_0)}{\rho^2}} \quad (8.52)$$

$$\mu = \tanh^{-1} \frac{1}{\lambda} \left( \frac{S_0}{\rho} - 1 \right) \quad (8.53)$$

である。近似解  $R$  を  $t$  について微分すると、新規除去者数の推移の近似として

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\gamma \rho^2 \lambda^2}{2S_0} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\gamma \lambda}{2} t - \mu \right) \quad (8.54)$$

を得る。詳しい導出は佐藤 (1987: 8 章) を参照のこと。図 8.12, 8.13 は  $R(t)$  と  $dR/dt$  の近似の例である。

## 8.5 感染のエージェント・ベースド・モデル

仮想社会上の行動主体 (エージェント) に単純なルールを与えて動かし、そのマクロな帰結をシミュレートする手法であるエージェント・ベースド・モデル (agent based model, ABM) を用いた研究が近年盛んである。フリーの ABM プログラミング環境の一つとして、NetLogo がある。近年では、web 利用可能な NetLogo Web

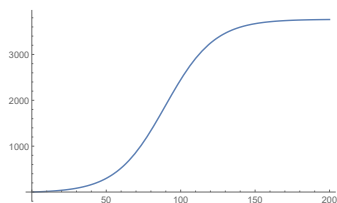


図 8.12  $R(t)$  の近似 ( $\beta = 0.00002, \gamma = 0.1, S_0 = 8000, N = 8010$ )

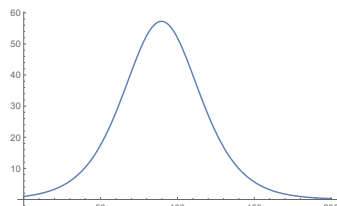


図 8.13  $dR/dt$  の近似 (条件は図 8.12 と同じ)

(<http://www.netlogoweb.org/>) も公開されており、簡単に ABM を触ってみることができる。

NetLogo Web にはいくつかのサンプルが公開されており、感染症関連のモデルもいくつか含まれる。たとえば、「virus」は基本設定が SIR モデルのシミュレーションである\*13。いろいろ触って遊んでみよう。

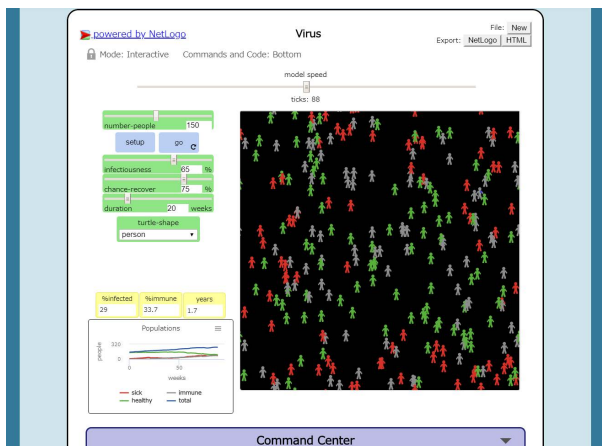


図 8.14 NetLogo Web の virus サンプル画面

\*13 ただし、寿命による人口の入れ替わりを仮定しており、流行に周期性が見られる。