2021 年数理社会学

「ゲーム理論による社会秩序の解明」[*1]

石田　淳

aishida@kwansei.ac.jp

[*1] 2021 年 7 月 15 日版．この講義ノートはクリエイティブ・コモンズ 表示 - 非営利 - 改変禁止 4.0 国際ライセンス (`http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/`) の下に提供されています．

目次

第 1 章

数理社会学：イントロダクション

1.1　シラバス

1.1.1　授業目的

「ゲーム理論による社会秩序の解明」

数理社会学で用いられる手法の一つであるゲーム理論を基礎的な部分から紹介し，数理モデルの理解と構築のエッセンスを学ぶ．さらに，進化ゲーム理論の成果を取り入れつつ，社会秩序の生成について，ゲーム理論の枠組みを用いて原理的に考察することを目的とする．

1.1.2　到達目標

数理社会学の考え方について理解すること，社会現象について形式的に表現し説明できるようになること，数理モデルの考え方に触れることで論理思考力が鍛えられること．

1.1.3　授業方法

対面授業形式．配布するノートを元に講師が解説を加える．授業中に平常レポートとして練習問題を解いてもらうことがある．

1.1.4　授業時間外の学習

授業を進める上で必要となる数学的知識については，授業内で一から学習していきますので，高度な数学的知識は事前には必要としません．数学に苦手意識を持っている人でも十分にフォロー可能です．必要なのは挑戦心と向学心です．授業ではできるだけ事前に講義ノートを配布したいと思いますので，予習して授業に臨むと効果的な学習になるでしょう．

1.1.5　授業計画

*以降の授業計画は実際の進捗状況などによって変更される可能性がある．

(1) 1 章　イントロダクション（4/8）
(2) 2 章　標準型ゲームの基礎（4/15）
(3) 3 章　標準型ゲームの結果の分析 (1)（4/22）
(4) 3 章　標準型ゲームの結果の分析 (2)（5/6）
(5) 4 章　2×2 対称ゲームの 4 類型（5/13）
(6) 5 章　囚人のジレンマと無限繰り返しゲーム (1)（5/20）
(7) 5 章　囚人のジレンマと無限繰り返しゲーム (2)（5/27）
(8) 6 章　混合戦略と混合戦略ナッシュ均衡 (1)（6/3）
(9) 6 章　混合戦略と混合戦略ナッシュ均衡 (2)（6/10）
(10) 7 章　2×2 対称ゲームの 4 類型の混合戦略ナッシュ均衡分析（6/17）
(11) 8 章　進化ゲームとレプリケーターダイナミクス (1)（6/24）
(12) 8 章　進化ゲームとレプリケーターダイナミクス (2)（7/1）
(13) 9 章　2×2 対称ゲームのレプリケーターダイナミクス分析（7/8）
(14) 補題とまとめ（7/15）

1.1.6　授業方法

- 今のところ対面講義方式を予定している．本講義ノートと参考資料をもとに板書と説明によって授業を進める．

- 各自感染症対策をしっかりと行うこと．とくにマスク着用は必須でありマスクは鼻口を覆う形で適切に着用すること．感染症対策について，講師の指示に従わない人は教室の安全確保のため受講を拒否することがある．
- 原則として，授業開始後 30 分以降の入室は不可とする．
- 本講義ノート参考資料は事前に OneDrive にアップロードしておく．
- 一つのテーマを連続的・段階的に講義していく授業なので，毎回出席しないと理解が難しいと思われる．
- 数理モデルを扱うので当然授業では数学を多用する．ただし基本的には，中学高校レベルの基本的な四則演算と不等式の知識があればフォローできる．
- 成績評価方法：平常評価 20%，期末テスト 80%．ただし，定期試験が行われなかった場合，平常リポートと LUNA によるテストで成績を付ける．
- 他の受講者の受講の妨げとなるような行為は厳禁である．逸脱行為にはゼロトレランスで対応する．
- 質疑応答は LUNA 掲示板もしくはメール (aishida@kwansei.ac.jp) もしくはオフィスアワー (火曜 1 限，第一教授館本館 103) で．ただし，掲示板は毎日チェックするわけではないので，返答が遅れる可能性がある．

1.1.7　本講義を通しての参考文献

?「社会的分析の道具としてのゲーム理論」数土直紀・今田高俊（編）『数理社会学シリーズ 1　数理社会学入門』勁草書房，pp. 51–71.

調整ゲームを例として，標準型ゲームから進化ゲームまでの流れをわかりやすく解説している．

?『ゲーム理論』新曜社.

?の説明をさらに丁寧に書き下した初学者向きの入門書.

?『ゲーム理論・入門〔新版〕』有斐閣.

標準型ゲームから進化ゲーム，実験ゲームなどの最新のトピックまでを一通り扱う網羅的な入門書.

?『入門　ゲーム理論』日本評論社.

非協力ゲーム理論の初歩からアドバンストなトピックまでを，あまり数式を使わずに丁寧に記述している．初学者から中級者向き.

?『経済学のためのゲーム理論入門』岩波書店

スタンダードな中級者向きの概説書.

?『ゲーム理論〔新版〕』有斐閣.

数学的に詳細なゲーム理論の概説書．非協力ゲームだけでなく協力ゲームの紹介もある．上級者向き.

?『進化的意志決定』朝倉書店.

力学系の観点から進化ゲーム理論を扱っている．後半の進化ゲームが導入されるあたりから数学的には難しくなる.

これらの参考文献に本文中に言及する場合は (**?**) などと注記する．その他の参考文献については，本文中で適宜紹介する.

1.1.8　本講義の参考資料

本講義に関連する Python プログラムなどは，以下の URL から入手できる.
`https://github.com/aishidajt9/2021MathSoc`

1.2　数理社会学とはどのような学問か？

本節では，数理社会学とはどのような学問なのかを説明する.

1.2.1　連字符社会学としての数理社会学

社会学部の時間割を見てみると，「都市社会学」「環境社会学」「家族社会学」などさまざまな「〇〇社会学」があることが分かる．これらの社会学は社会の特定のサブ

領域を対象とするものであり，カール・マンハイムによって連字符（ハイフン）社会学と名付けられた．

一方，数理-社会学も，連字符社会学ではあるが，「数理」は社会のサブ領域を表すというよりも，用いられる方法（数学）を表している．この意味で，数理社会学は「方法的連字符社会学」の一つであるといえる*[1].

1.2.2　社会を「モデル」でみる

数理社会学を含む社会学の究極の目的は，端的に言えば「社会を理解する」ことである．「理解」の仕方には大きく次の 2 通りがある．

1. 記述的理解：社会の現実や社会現象がどのようになっているか
2. 因果的理解：社会の現実や社会現象がどのような原因によって引き起こされたか

これらの理解にあたって，概念・推論・理論の「数理化 (formalization)」によって明快な理解を目指すのが数理社会学である．

記述・説明のためにパッケージ化された概念・推論・理論の体系のことを**モデル** (model) という．そして，数学を使うモデルはとくに**数理モデル** (mathematical model) という．先の 2 通りの理解に対応して次の 2 通りのモデルのタイプがある．

1. 記述的モデル：社会の現実や社会現象の特徴や外面を写すモデル（ex 飛行機のプラモデル）
2. 因果的モデル：社会の現実や社会現象の原因と結果（因果）のメカニズムを写すモデル（ex ゴム飛行機）

理論として求められる因果モデルのみならず，記述的モデルも社会理解のためには不可欠なものである．社会の現実の要約や記述のためには，概念の明確化や指数の背後にある前提の明確化が求められるし，その際フォーマライゼーションが必要となる．

*[1] ほかの方法的連字符社会学には，「計量社会学」や「理論社会学」がある．

1.2.3　フォーマル・セオリーとしての数理社会学

数理社会学のなかでも因果モデルに限定した場合，**フォーマル・セオリー** (formal theory) の考え方に重なってくる (**?**)．フォーマル・セオリーの目標は「数理モデルによって社会現象成立の因果メカニズムを解明する」ことである．

フォーマル・セオリーとしての数理社会学は演繹的な理論構築を志向する．ここで，**演繹** (deduction) とは，一般的前提（公理）から出発して特殊命題を論理的に導き出すことを指す．数理モデルを作成し分析する際にも，無前提に（先験的に，ア・プリオリに）真となる少数の公理から出発してさまざまな命題を導出する．演繹と対比されるのが，**帰納** (induction) であり，個々の観察された事実を積み重ねることによって一般的法則・原理を見出すことであり，従来の計量社会学的研究は帰納的な理論構築を志向していたと言える．

?の『社会科学におけるモデル入門』において，因果モデルの作り方として以下のような手順が示されている．

■因果モデルの作り方

1. ある事実を観察する
2. その事実がある未知のプロセスの最終結果だと見なす．そして，そのような結果を生み出したと思われるプロセスを推論し，モデル化する
3. そのモデルから別の結果（デリベーション，インプリケーション）を導き出す
4. これらのインプリケーションが正しいかどうかを観察データと突き合わせチェックする．必要ならばそのモデルを棄却し新しいモデルを構築する（K. ポパーの「反証可能性」）

特に数理モデルの場合，2. のモデル化の際の公理の設定と 3. における命題の導出，4. の経験的妥当性の検証に数学言語が用いられる．

また，数理モデルには以下のような特徴があると言われる．

■数理モデルの特徴

- 数学言語を用いることで推論の論理的妥当性を確保することができる．少なく

とも論理的な間違いを指摘してもらえる．

- 数学言語を用いることで厳密な分析が可能になる．どのような条件の下でどのような結果が得られるかを厳密に把握できる．
- 数理モデルでは，同様の説明力であればシンプルなモデルの方が好まれる（オッカムのカミソリ）．
- 数理モデルはミクロ・マクロリンクの説明にもっとも大きな効果を上げる．

1.2.4　ミクロ・マクロリンク

数理モデルの特徴のうち，ミクロ・マクロリンクについてさらに解説する．

?は，社会学的説明の特徴として**ミクロ・マクロリンク** (micro-macro linkage) を指摘し，それを図 1.1 のような模式図で説明している．

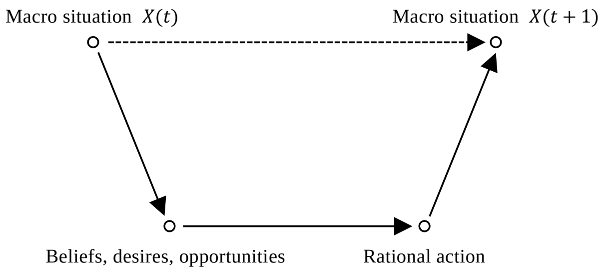

図 1.1　コールマン・ボート (**?**)

社会現象のマクロ・レベルでの観察では，t 時点の状態 $X(t)$ から次の時点での状態 $X(t+1)$ への変動が観察される．しかしながら，その社会変動の説明においては，マクロな社会状態が人びとの考え方や価値観・意識にいかに影響を与えるか（マクロ・ミクロ），そうした意識の変化がどのような（合理的な）行動をもたらすか（ミクロ・ミクロ），そして最終的にそうした行動の集積がどのような社会状態として帰結するか（ミクロ・マクロ），というミクロレベルを経由した説明が必要であることを指摘している．

?, 24–31 は，典型的なミクロ・マクロリンクによる説明様式として，以下の 2 つの

例を挙げている．

(1) ウェーバー『プロ倫』：プロテスタントの宗教教義→価値→経済行動→資本主義
(2) 革命の欲求不満理論：改善された社会状態→欲求不満→攻撃→革命

マクロレベルとミクロレベルをつなぐ 2 つのメカニズム「マクロ状態のミクロレベルでの反映，その規則的ゆがみ」「行動のネットワーク上での集積」，これらを少ない前提から記述する際に，数理モデルは大きな力を発揮する．

1.2.5　数理モデルと計量モデル【Advanced】

数理社会学で用いられる数理モデル（フォーマル・モデル）と計量社会学に用いられる回帰モデルなどの計量モデルは全く別種のものではなく，数学言語を用いたモデルという点では共通している．しかし，力点の違いがある．

フォーマル・モデルは，以下のような特徴を持つ．

(1) より現実的なメカニズムの想定
(2) 結果的に強いパラメータ制約
(3) 結果的に低い経験的データとの適合性

反対に，線型モデルを想定するような伝統的な計量モデルは，以下のような特徴を持つ．

(1) メカニズムの想定が非現実的（あるいは想定がない，あるいは自覚していない）
(2) 弱い，あるいはほとんどないパラメータ制約（データ任せ）
(3) 結果的に高い経験的データとの適合性（というかそうなるようにモデルを後付けで作る）

つまり，演繹的にメカニズム優先にモデルを作るか，帰納的にデータへのフィット優先にモデルを作るかの違いがある．

計量でも最近では，データの分布生成メカニズムの明示化を志向した「（ベイジアン）統計モデリング」の考え方が拡がりつつある (**?**).

第 2 章

標準型ゲーム

本章ではゲーム理論におけるゲームの定義を導入し，ゲーム理論で扱う最も基本的なゲーム形式である標準型ゲームの構成要素を概観する．

2.1　2 つのゲーム

2.1.1　グーパージャンケン

グーとパーだけで行う特殊なジャンケンを考える．プレイヤーは 2 人で，結果に応じて第三者から次の金額が支払われる．

表 2.1　グーパージャンケン

		プレイヤー 2	
		グー	パー
プレイヤー 1	グー	5 千円，5 千円	0 円，1 万円
	パー	1 万円，0 円	1 千円，1 千円

お互いのプレイヤーは何を出すか，互いに知らないとする．また，お互いのプレイヤーは自分の取り分をなるべく大きくしようとしているとする．このとき，あなたが一方のプレイヤーであれば，あなたはグーとパー，どちらを選択するだろうか？

2.1.2　囚人のジレンマ

次の例はゲーム理論の中でも最も有名なゲームである．

> 2 人のギャングが逮捕され，刑務所に拘留されている．2 人は，互いに話をしたり，メッセージを交換したりすることが絶対にできない状態で，独房に入れられている．警察は，重罪で 2 人を有罪にするだけの十分な証拠はもっていないことを認めている．そのため，それより軽微な罪で，ともに 1 年の禁固刑に処す意向をもっている．警察は同時に，2 人の囚人に（……）取引をもちかける．それは，もし相手に不利となる証言をするなら釈放してやろう，ただしパートナーは本件で 3 年の禁固刑に処せられる，というものである．（……）もし，両方が相手に不利となる証言をした場合は，2 人とも 2 年の刑になるというのだ．(**?**, 154–5)

あなたが囚人の一方だとすると，あなたは黙秘を通すだろうか，それとも自白するだろうか？

表 2.2　囚人のジレンマ

		プレイヤー 2	
		黙秘	自白
プレイヤー 1	黙秘	1 年，1 年	3 年，0 年
	自白	0 年，3 年	2 年，2 年

2.2　ゲームとは何か

これらの状況は標準型ゲームとしてみると同型の構造をもっている．ゲーム理論が扱うゲームにはプレイヤー同士の協力・提携を想定した「協力ゲーム」と，それらを想定しない「非協力ゲーム」がある．本講義で扱うのは非協力ゲームの 1 つである**標準型ゲーム** (game in normal form) である[*1]．標準型ゲームは各プレイヤーが同時に（あるいは各々の手を知らずに）手を出すようなゲームである（例えばジャンケン）．もう 1 つの非協力ゲームの形としては展開型ゲーム (game in extensive form) があるが[*2]，これはプレイヤーが交互に手を出すようなゲームである（例えば将棋や

[*1] 戦略型ゲーム，同時手番ゲームともいわれる．
[*2] 逐次手番ゲームともいわれる．

チェス）.

さて，ここでいう**ゲーム** (game) とは，現実に起こるさまざまな「ゲーム的状況」の数理モデルである．ゲーム的状況とは「複数の意志決定主体または行動主体が存在し，それぞれ一定の目的の実現を目指して相互に依存し合っている状況」(**?**, 2) のことをいう．意志決定主体のことをゲーム理論では**プレイヤー** (player) という．プレイヤーは人である必要はなく，集団であっても何らかの生物であってもよい．プレイヤーは「自分の目的を達成するために，相互依存状況下において最も適した行為を選択する」という意味で**合理的** (rational) であると仮定される．

例えば，複数の企業（プレイヤー）が利益の最大化（目的）のために，市場競争に参入する状況（相互依存状況）や，国家間の外交交渉，はたまた夫婦間の家事労働分担の決め方など，さまざまな社会・経済・政治的状況をゲームとして記述することができる．

そして，ゲーム理論の目的は，こうしたゲーム状況からどのような結果（解）がもたらされるかを分析することにある．

2.3　標準型ゲームの構成要素

標準型ゲームは以下の 3 つの要素によって構成される．つまり，この 3 つについて定義を与えてやると 1 つの標準型ゲームができる．

(1) ゲームの**プレイヤー**
(2) 各プレイヤーのとりうる**戦略**
(3) 戦略の組み合わせごとに各プレイヤーが受け取る**利得（利得関数）**

2.3.1　囚人のジレンマの構成要素

(1) **プレイヤー**

プレイヤー集合を N と表し，各プレイヤーを自然数で表す[*3]．$N = \{1, 2\}$.

[*3] 中括弧 { } は集合の中身を表す．

(2) 戦略

プレイヤー i のとりうる戦略の全体を**戦略集合** (strategy set) と呼び S_i で表す．S_i に属する任意の戦略を s_i と表す．戦略のことを，くだけた言い方として「手 (move)」ということもある．集合論の表記で表せば $s_i \in S_i$ である[*4]．囚人のジレンマの例でいえば

$$S_1 = \{\text{黙秘}, \text{自白}\}$$
$$S_2 = \{\text{黙秘}, \text{自白}\}$$

である．さらに，すべての可能な戦略の組み合わせを考える．囚人のジレンマの例でいえば，

$$S_1 \times S_2 = \{(\text{黙秘}, \text{黙秘}), (\text{黙秘}, \text{自白}), (\text{自白}, \text{黙秘}), (\text{自白}, \text{自白})\}$$

である[*5]．これらの要素はゲーム状況の起こりうる結果を示している．

(3) 利得（利得関数）

それぞれの結果に対してプレイヤーの中で「望ましさの程度」が決まっているとする[*6]．この望ましさの程度を数値に置き換えたものが，各プレイヤーのそれぞれの結果についての**利得** (payoff) である．それぞれの結果について利得を対応させる関数を**利得関数** (payoff function) といい，プレイヤー i のもつ利得関数を u_i で表す[*7]．

各プレイヤーは他のプレイヤーの選択を予測しながら，自らの利得を最大化するような戦略を選択する．同時に，各プレイヤーは他のプレイヤーも自分と同様の考え方にもとづき戦略を選択すると考えている．これがプレイヤーの合理性のより具体的な意味である[*8]．利得を最大化する戦略を選ぶためには，利得の数値そのものではなく，利得間の大小関係が本質的に重要な情報となる．ゆえに，利得の大小関係が変わらない限り，どのような利得関数を仮定しても，ゲームの利得構造自体は同一である．

[*4] $a \in A$ は要素 a が集合 A に属していることを示す．

[*5] 集合 A, B の要素の可能な組み合わせの集合を集合 A, B の**直積** (Cartesian product) といい，$A \times B$ で表す

[*6] これを**選好** (preference) という．

[*7] 利得は実数集合 $\mathbb{R}$ の要素である．

[*8] より厳密には「先読み合理性」といわれることがある (**?**, 5–6).

囚人のジレンマの例で，刑期にマイナスを付けたものがプレイヤーの利得だとすると，各プレイヤーの利得関数 u_i は以下のようになる．

$$u_1 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$$
$$u_2 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} &u_1(\text{黙秘}, \text{黙秘}) = -1, && u_1(\text{黙秘}, \text{自白}) = -3 \\ &u_1(\text{自白}, \text{黙秘}) = 0, && u_1(\text{自白}, \text{自白}) = -2 \\ &u_2(\text{黙秘}, \text{黙秘}) = -1, && u_2(\text{黙秘}, \text{自白}) = 0 \\ &u_2(\text{自白}, \text{黙秘}) = -3, && u_2(\text{自白}, \text{自白}) = -2 \end{aligned}$$

2.3.2　利得表

ところで，2 人ゲームでそれぞれの戦略と利得を表 2.3 のように表したものを，そのゲームの**利得表** (payoff table) という．

表 2.3　2×2 対称ゲームの一般的記述

	C	D
C	R,　R	S,　T
D	T,　S	P,　P

表 2.1 のグーパージャンケンと表 2.2 の囚人のジレンマは，表 2.3 の利得の表記でいえば，各プレイヤーとも

$$T > R > P > S$$

となる利得関数をもっており，ゲームの利得構造としては同一である**【このことを確認せよ】**．

2.3.3　標準型ゲームの構成要素の一般的記述

より一般的に標準形ゲームの構成要素を記すと以下のようになる．

(1) プレイヤー

プレイヤー集合を N と表し，各プレイヤーを自然数で表す． $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

(2) 戦略

プレイヤー i のとりうる戦略の全体を戦略集合と呼び S_i で表す.

$$S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$$
$$(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S$$

(3) 利得（利得関数）

任意の i について $u_i : S \to \mathbb{R}$ が定義されている.

このとき，$G = (N; S_1, S_2, \ldots, S_n; u_1, u_2, \ldots, u_n)$ を標準型ゲームという.

第 3 章

標準型ゲームの結果の分析

本章では，支配戦略の組，支配される戦略の段階的な消去，ナッシュ均衡という概念を導入し，標準型ゲームの結果をどのように分析するかを論じる．

3.1　支配戦略

3.1.1　支配戦略の組

再びグーパージャンケンについて考えてみよう．

表 3.1　グーパージャンケン（再録）

	グー	パー
グー	5，5	0，10
パー	10, 0	1，1

まずはプレイヤー 1 に焦点を当てる．プレイヤー 2 が「グー」をとったとき，プレイヤー 1 は,

$$u_1(\text{パー}, \text{グー}) = 10 > 5 = u_1(\text{グー}, \text{グー}) \tag{3.1}$$

なので,「パー」を選んだ方が得である．同様に，プレイヤー 2 が「パー」をとったとき，プレイヤー 1 は,

$$u_1(\text{パー}, \text{パー}) = 1 > 0 = u_1(\text{グー}, \text{パー}) \tag{3.2}$$

なので，やはり「パー」を選んだ方が得である．つまり，相手がどのような手を選んだとしても，プレイヤー 1 は「パー」を選んだ方が常に得をする．ゆえに，プレイ

ヤー 1 が合理的であれば常に「パー」を選択するだろう．プレイヤー 2 についても同様の推論で常に「パー」を選択すると予測できる**【このことを確認せよ】**．

結局，実現する結果は (パー, パー) で，それぞれのプレイヤーに 1 が支払われると結論づけることができる．

このゲームの「パー」のような戦略，つまり，他のプレイヤーがどのような戦略を選んでも，もっとも利得が高くなるような戦略のことを**（強）支配戦略** ((strictly) dominant strategy) という[*1]．ここでの結果の分析は，支配戦略の組を見出すという方法で行われたことになる．

3.1.2　支配される戦略の消去

しかしながら，どのようなゲームでも支配戦略の組が見つかるとは限らない．例えば表 3.1 のグーパージャンケンの利得行列を少し変えた次のゲームを検討しよう．

表 3.2　グーパージャンケン 2

	グー	パー
グー	5，5	0，10
パー	10, 1	1，0

プレイヤー 1 については先程と同様に「パー」が支配戦略であることが分かる．一方，プレイヤー 2 についてみると，

$$u_2(\text{グー},\text{グー}) = 5 < 10 = u_2(\text{グー},\text{パー}) \tag{3.3}$$

$$u_2(\text{パー},\text{グー}) = 1 > 0 = u_2(\text{パー},\text{パー}) \tag{3.4}$$

なので，「パー」も「グー」も支配戦略ではない．

しかし，このようなケースでも次のように考えることができる．

[*1] より形式的には，プレイヤー i の戦略 $\hat{s}_i \in S_i$ が**強支配戦略**であるとは，すべての $s_j \in S_j$ $(i \neq j)$ とすべての $s_i \in S_i \setminus \{\hat{s}_i\}$ について

$$u_i(s_1, s_2, \ldots, \hat{s}_i, \ldots, s_n) > u_i(s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_n)$$

が成り立つことをいう．

プレイヤー 1 にとって「パー」が支配戦略であるならば，支配される戦略である「グー」は決して選ばないと考えられる．というのも，「グー」を選べば必ず損をしてしまうからである．そして，プレイヤー 2 も合理的な推論によってプレイヤー 1 が「グー」を決して選択しないことを予測することができる．つまり両プレイヤーにとってプレイヤー 1 の選択肢である「グー」は考慮しなくてもよいものなのである．ゆえに，表 3.2 は次のように書き換えることができる．

表 3.3　グーパージャンケン 2（支配される戦略を消去）

	グー	パー
パー	10, 1	1, 0

支配される戦略を消去したあとのゲームでは，プレイヤー 2 のみが選択を行う．このとき，

$$u_2(\text{パー}, \text{グー}) = 1 > 0 = u_2(\text{パー}, \text{パー}) \tag{3.5}$$

なので，結局，戦略の組 (パー, グー) が実現すると予測することができる．

このように支配される戦略を段階的に消去し，より簡単なゲームに還元することによって最終的に実現する戦略の組を予測することができる場合がある．

しかし，この方法でも実現する戦略の組を予測することができない場合が数多く存在する．このために，より一般的な概念として**最適反応戦略**という考え方を導入する．

3.2　最適反応戦略

3.2.1　両性の戦い

以下のゲームは「両性の戦い」として知られるゲームである (**?**, 11–2)．もともとはカップルがデートの行き先を決めるという設定であったが，より抽象的にプレイヤー 1 とプレイヤー 2 としておこう．プレイヤー 1 はボクシングよりもオペラに，プレイヤー 2 はオペラよりもボクシングに行きたがっている．しかし 2 人とも別々に行動するよりも一緒にいた方がいいと思っている．利得表は以下の通りである．

表 3.4　両性の戦い

	オペラ	ボクシング
オペラ	2，1	0，0
ボクシング	0，0	1，2

プレイヤー 1 について，

$$u_1(\text{オペラ}, \text{オペラ}) = 2 > 0 = u_1(\text{ボクシング}, \text{オペラ}) \tag{3.6}$$
$$u_1(\text{オペラ}, \text{ボクシング}) = 0 < 1 = u_1(\text{ボクシング}, \text{ボクシング}) \tag{3.7}$$

同様にプレイヤー 2 について，

$$u_2(\text{オペラ}, \text{オペラ}) = 1 > 0 = u_2(\text{オペラ}, \text{ボクシング}) \tag{3.8}$$
$$u_2(\text{ボクシング}, \text{オペラ}) = 0 < 2 = u_2(\text{ボクシング}, \text{ボクシング}) \tag{3.9}$$

である．つまり，両プレイヤーとも支配戦略をもっていない．ゆえに，支配戦略を用いた結果の予測ができない．

そこで，より包括的な概念として**最適反応戦略**という考え方を導入する．

3.2.2　最適反応戦略の定義

他のプレイヤーがとる戦略の組が与えられたとき，自らの利得を最大化する戦略を**最適反応戦略** (best response strategy) といい，プレイヤー i の最適反応戦略を $s_i^* \in S_i$ と表す[*2]．

たとえば，先の表 3.4 の両性の戦いの場合，プレイヤー 1 にとっての最適反応は次のようになる．

プレイヤー 2 がオペラ　⇒　最適反応戦略 s_1^* はオペラ
プレイヤー 2 がボクシング　⇒　最適反応戦略 s_1^* はボクシング

[*2] より形式的には，

$$u_i(s_1, s_2, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n) = \max_{s_i \in S_i} u_i(s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_n) \tag{3.10}$$

のとき，プレイヤー i の戦略 $s_i^* \in S_i$ は，他のプレイヤーがとる戦略の組 $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ に対する**最適反応戦略**であるという．

同様に，プレイヤー 2 にとっての最適反応は次のようになる．

プレイヤー 1 がオペラ	$\Rightarrow$	最適反応戦略 s_2^* はオペラ
プレイヤー 1 がボクシング	$\Rightarrow$	最適反応戦略 s_2^* はボクシング

3.3　ナッシュ均衡

3.3.1　最適反応戦略の組み合わせ

ここで，表 3.4 の両性の戦いにおける 4 つの戦略の組について，他のプレイヤーの戦略を所与とした場合のもう一方のプレイヤーの最適反応戦略を考えてみよう．

表 3.5　両性の戦いにおける最適反応戦略

	戦略の組 (s_1, s_2)	s_1^*	s_2^*
1.	(オペラ, オペラ)	オペラ	オペラ
2.	(オペラ, ボクシング)	ボクシング	オペラ
3.	(ボクシング, オペラ)	オペラ	ボクシング
4.	(ボクシング, ボクシング)	ボクシング	ボクシング

行 2 に注目する．戦略の組 (オペラ, ボクシング) が実現したと仮定してみよう．このとき両プレイヤーの戦略とも，相手の戦略に対する最適反応にはなっていない．ゆえに，プレイヤーの合理性から考えて，両プレイヤーは戦略を最適反応であるもう一方の戦略に変更しようとするだろう．同様のことは行 3 の (ボクシング, オペラ) にもいえる．つまり，行 2，3 の戦略の組がこのまま実現するとは考えられない．

一方，行 1 の (オペラ, オペラ) は両プレイヤーの戦略とも，相手の戦略に対する最適反応になっている．つまり，いったん (オペラ, オペラ) が実現した場合，どちらのプレイヤーもちがう戦略に変更しようとは考えない．行 4 の (ボクシング, ボクシング) にも同じことが当てはまる．

いったん実現したら，結果が変わらないという意味において，戦略の組 (オペラ, オペラ) と (ボクシング, ボクシング) は**均衡**状態にある．こうしたゲームにおける均衡

状態をとくに**ナッシュ均衡** (Nash equilibrium) という[*3].

3.3.2　ナッシュ均衡の定義

戦略の組において，それぞれのプレイヤーの戦略が互いに他のプレイヤーの戦略の組に対して最適反応戦略となっているとき，その戦略の組を**ナッシュ均衡** (Nash equilibrium) という[*4].

別の言い方をすれば，あるプレイヤー 1 人だけが戦略を変えても得をしない，ということがすべてのプレイヤーについて成立するとき，その戦略の組はナッシュ均衡である．この定義を 2 人ゲームについて数学的に表すと次のようになる．

定義 1（2 人ゲームにおけるナッシュ均衡）　2 人ゲームにおいて，戦略の組 (s_1^*, s_2^*) が**ナッシュ均衡であるとは**，プレイヤー 1 の戦略集合 S_1 の要素であるどのような s_1 に対しても

$$u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1, s_2^*) \tag{3.11}$$

が成り立ち，かつ，プレイヤー 2 の戦略集合 S_2 の要素であるどのような s_2 に対しても

$$u_2(s_1^*, s_2^*) \geq u_2(s_1^*, s_2) \tag{3.12}$$

が成り立つことである[*5].

プレイヤーが十分に合理的であるならば，ゲームの結果としてナッシュ均衡が実現すると予測することができる[*6]．逆にナッシュ均衡でないことは次のように定義できる．

[*3] 数学者の John F. Nash によって定式化されたので，ナッシュ均衡という．ナッシュの数奇な人生については，映画 *Beautiful Mind* (2001) を参照.

[*4] より厳密にいえば，戦略の組 $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ がナッシュ均衡であるとは，各プレイヤー i の戦略 s_i^* が他の $n-1$ 人のプレイヤーの戦略の組 $(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$ に対する最適反応戦略となっていることをいう．

[*5] n 人ゲームにおいては，すべてのプレイヤー i について，S_i の要素であるどのような s_i に対しても

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \tag{3.13}$$

が成り立つことがナッシュ均衡の必要十分条件である．

[*6] しかし，ナッシュ均衡という概念自体は，プレイヤーの合理性に基づき均衡の安定性を保証するロ

定義 2（2 人ゲームにおける非ナッシュ均衡）　2 人ゲームにおいて，戦略の組 (s'_1, s'_2) がナッシュ均衡でないとは，次のいずれかもしくは両方が成立することをいう．

- $u_1(s'_1, s'_2) < u_1(s''_1, s'_2)$ を満たすプレイヤー 1 の戦略 $s''_1(\neq s'_1)$ が存在する．
- $u_2(s'_1, s'_2) < u_2(s'_1, s''_2)$ を満たすプレイヤー 2 の戦略 $s''_2(\neq s'_2)$ が存在する．

3.3.3　両性の戦いのナッシュ均衡

表 3.4 の両性の戦いにおけるナッシュ均衡を確認しよう．

(1) (オペラ, オペラ) について，

$$u_1(\text{オペラ}, \text{オペラ}) = 2 > 0 = u_1(\text{ボクシング}, \text{オペラ}),$$
$$u_2(\text{オペラ}, \text{オペラ}) = 1 > 0 = u_2(\text{オペラ}, \text{ボクシング}).$$

ゆえに，(オペラ, オペラ) はナッシュ均衡である．

(2) (オペラ, ボクシング) について，

$$u_1(\text{オペラ}, \text{ボクシング}) = 0 < 1 = u_1(\text{ボクシング}, \text{ボクシング}),$$
$$u_2(\text{オペラ}, \text{ボクシング}) = 0 < 1 = u_2(\text{オペラ}, \text{オペラ}).$$

ゆえに，(オペラ, ボクシング) はナッシュ均衡でない．

(3) (ボクシング, オペラ) について，

$$u_1(\text{ボクシング}, \text{オペラ}) = 0 < 2 = u_1(\text{オペラ}, \text{オペラ}),$$
$$u_2(\text{ボクシング}, \text{オペラ}) = 0 < 2 = u_2(\text{ボクシング}, \text{ボクシング}).$$

ゆえに，(ボクシング, オペラ) はナッシュ均衡でない．

(4) (ボクシング, ボクシング) について，

$$u_1(\text{ボクシング}, \text{ボクシング}) = 1 > 0 = u_1(\text{オペラ}, \text{ボクシング}),$$
$$u_2(\text{ボクシング}, \text{ボクシング}) = 2 > 0 = u_2(\text{ボクシング}, \text{オペラ}).$$

ジックは備えていても，なぜこの均衡が実現するかを説明するものではない，とも指摘されている (**?**, 25–8)．これは大変重要で興味深い指摘ではあるが，本講義の射程範囲を超えるレベルの議論であるため，ここではこれ以上取り上げない．

ゆえに，(ボクシング, ボクシング) はナッシュ均衡である.

結局，ナッシュ均衡は (オペラ, オペラ),(ボクシング, ボクシング) の 2 つである.

3.3.4　囚人のジレンマのナッシュ均衡

ふたたび囚人のジレンマゲームを考えよう.

表 3.6　囚人のジレンマゲーム

	黙秘	自白
黙秘	-1,　-1	-3,　0
自白	0,　-3	-2,　-2

このとき，(自白, 自白) が唯一のナッシュ均衡となる【このことを確認せよ】. 一般に，支配戦略の組，もしくは支配戦略の段階的消去で残る戦略の組は必ずナッシュ均衡になる. ただし，逆は必ずしも真ならず. つまり，ナッシュ均衡であるからといって，それが支配戦略の組，もしくは支配戦略の段階的消去で残る戦略の組であるとは限らない.

3.3.5　練習問題

(1) 表 3.2 グーパージャンケン 2 におけるナッシュ均衡を見出し，それが支配戦略の段階的消去で残る戦略の組と一致することを確認せよ.

(2) 次の利得表のナッシュ均衡を求めよ (**?**, 8).

	L	C	R
T	0,　4	4,　0	5,　3
M	4,　0	0,　4	5,　3
B	3,　5	3,　5	6,　6

3.4　パレート最適

囚人のジレンマゲームにおいて，(自白, 自白) が唯一のナッシュ均衡となることがわかった．そこで，次にこの結果が社会的に（この場合 2 人にとって）望ましい結果であるかを考えることにしよう．このとき用いられる基準が**パレート最適** (Pareto optimality) である[*7]．

3.4.1　パレート最適の定義

パレート最適とはもともと財の社会的分配状態の望ましさを評価する 1 つの基準であった．ゲーム状況に特化してパレート最適の定義を与えると以下のようになる．

ある戦略の組 $(s_1, \ldots, s_n)$ から別の戦略の組へと移行しようとすると，少なくとも 1 人のプレイヤーの利得が減少してしまう場合，その戦略の組 $(s_1, \ldots, s_n)$ は**パレート最適である** (Pareto optimal) という．逆に，誰の利得を下げることもなく，かつ，少なくとも 1 人にとっては利得が大きくなるような戦略の組が他に存在する場合，その戦略の組 $(s_1, \ldots, s_n)$ は**パレート最適でない**という．2 人ゲームについて数学的な定義を与える．

定義 3（2 人ゲームにおけるパレート最適）　2 人ゲームにおいて，戦略の組 (s_1, s_2) が**パレート最適である**とは，他のすべての可能な戦略の組 (s'_1, s'_2) について，

$$u_1(s_1, s_2) > u_1(s'_1, s'_2) \tag{3.14}$$

もしくは

$$u_2(s_1, s_2) > u_2(s'_1, s'_2) \tag{3.15}$$

が成立することである[*8]．

[*7] イタリアの経済学者 Vilfredo Pareto が定式化した．

[*8] n 人ゲームの場合は，戦略の組 $(s_1, \ldots, s_n)$ が**パレート最適である**とは，他のすべての可能な戦略の組 $(s'_1, \ldots, s'_n)$ について，

$$\exists i \in N, u_i(s_1, \ldots, s_n) > u_i(s'_1, \ldots, s'_n) \tag{3.16}$$

が成立することである．

定義 4（2 人ゲームにおけるパレート非最適） 2 人ゲームにおいて，戦略の組 (s_1, s_2) が**パレート最適でない**とは，ある他の戦略の組 (s'_1, s'_2) が存在し，

$$u_1(s_1, s_2) < u_1(s'_1, s'_2) \text{ かつ } u_2(s_1, s_2) \leq u_2(s'_1, s'_2) \tag{3.17}$$

もしくは

$$u_2(s_1, s_2) < u_2(s'_1, s'_2) \text{ かつ } u_1(s_1, s_2) \leq u_1(s'_1, s'_2) \tag{3.18}$$

が成立することである[*9].

例えば，表 3.4 の両性の戦いにおけるナッシュ均衡 (オペラ, オペラ)，(ボクシング, ボクシング) はどちらもパレート最適である **【このことを確認せよ】**.

3.4.2　囚人のジレンマの何がジレンマか？

表 3.6 の囚人のジレンマゲームでは (自白, 自白) がナッシュ均衡になった．このとき両プレイヤーは 2 年の刑期を課せられることになる．では，この実現する戦略の組 (自白, 自白) は果たしてパレート最適だろうか？　別の戦略の組 (黙秘, 黙秘) と比べてみると

$$u_1(\text{自白}, \text{自白}) = -2 < -1 = u_1(\text{黙秘}, \text{黙秘})$$
$$u_2(\text{自白}, \text{自白}) = -2 < -1 = u_2(\text{黙秘}, \text{黙秘})$$

なので，(自白, 自白) はパレート最適ではない．言い換えると，両プレイヤーとも黙秘した場合は刑期が 1 年軽くなり，双方にとって状況は改善されるのである．しかしながら，合理的なプレイヤーを仮定した場合，よりよい結果が実現しなくなる．これが囚人のジレンマのジレンマたるゆえんである．そしてこの問題を専門用語で言えば，ナッシュ均衡がパレート最適でないこと，ということができるのである[*10].

囚人のジレンマゲームの解釈については 4 章でさらに取り上げる.

[*9] n 人ゲームの場合は, 戦略の組 $(s_1, \ldots, s_n)$ が**パレート最適でない**とは, ある戦略の組 $(s'_1, \ldots, s'_n)$ が存在し,

$$\forall i \in N, u_i(s_1, \ldots, s_n) \leq u_i(s'_1, \ldots, s'_n), \text{ かつ } \exists j \in N, u_j(s_1, \ldots, s_n) < u_j(s'_1, \ldots, s'_n) \tag{3.19}$$

が成立することである.

[*10] パレート最適は，社会的な望ましさについての 1 つの基準と考えられているが，次のような問題もある．例えば，社会的な財の総量が 100 と決まっているとする．これを 2 人で分けるケースを考

3.4.3　練習問題

以下のゲームのナッシュ均衡を求めよ．また，ナッシュ均衡のパレート最適性を評価せよ．

(1)

	C	D
A	3,　1	2,　5
B	5,　2	1,　3

(2)

	L	R
L	5,　5	1,　3
R	3,　1	2,　2

(3)

	F	B
F	−1,　1	1,　−1
B	1,　−1	−1,　1

える．このとき財をどのように分けたとしても，その分け方は他の分け方に対してパレート最適になっているのである．というのも，どのような分け方に変更したとしても，どちらかの財の量は必ず減少するからだ．ゆえに財の分け方が (50,50) であっても，(1,99) であっても，これらをパレート最適性の基準で優劣を付けることはできないのである．最後通牒ゲームの行動経済学的分析との関連にも注意しよう．

第 4 章

2×2 対称ゲームの 4 類型

本章では 2×2 対称ゲームの 4 つの類型を取り上げ，それぞれのゲーム類型のナッシュ均衡を分析する．あわせてそれらのゲーム類型がどのように解釈されているかを概観する．

4.1　2×2 対称ゲームとは

プレイヤーが 2 人，それぞれの戦略が 2 種類のゲームを 2×2 ゲームという．また，各プレイヤーの戦略の数と種類が等しく，それぞれの戦略の組み合わせについて自他の区別なく同じ利得が得られるようなゲームを対称ゲームという．表 4.1 に各プレイヤーの戦略が C と D の 2 種類がある 2×2 対称ゲームの利得表を示す．

表 4.1　2×2 対称ゲームの一般的記述（再掲）

	C	D
C	$R,\quad R$	$S,\quad T$
D	$T,\quad S$	$P,\quad P$

「それぞれの戦略の組み合わせについて自他の区別なく同じ利得が得られる」ということは，例えば，自分が C をとり，相手が D をとる場合の利得が，両プレイヤーで等しいということを意味している．つまり，

$$u_1(C, D) = S = u_2(D, C)$$

が成り立つことを意味する．

こうした対称ゲームは，お互いのプレイヤーが，選択可能な戦略，そして利得の点でまったく同質である状況を表している．プレイヤーの同質性は，とくに後述の協力問題や公共性問題などの原理的問題を考察する際には，許容しうる仮定であるし，分析をする上でも大変扱いやすい[*1]．

4.2　2 つの制限

以下，2×2 対称ゲームの類型を見ていくが，ここで 2 つの制限を課しておく．

(1) 4 種類の戦略の組に対する利得はすべて異なる．このとき 4 種類の利得間で狭義の順序が成立するので，利得の順位は必ず決まる．

(2) $R > P$．ただし，この制限は表現上の簡略化のための制限であって，類型の分析上本質的な制限ではない[*2]．

[*1] 数学的にいえば，対称 2 人ゲームとはプレイヤー 2 の利得行列がプレイヤー 1 の利得行列の転置行列（行と列を入れ替えてできる行列）で表されるゲームである．表 4.1 についていえば，

$$\text{プレイヤー 2 の利得行列} = \begin{pmatrix} R & T \\ S & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & S \\ T & P \end{pmatrix}'.$$

[*2] たとえば，$R > S > T > P$ となるゲーム 1 と $P > T > S > R$ となるゲーム 2 は，戦略のラベル C と D を入れ替えれば，構造的に同一である．このことを確認するために，R, S, T, P をプレイヤー 1 の利得として書くと，ゲーム 1 は

$$u_1(C, C) > u_1(C, D) > u_1(D, C) > u_1(D, D)$$

であり，ゲーム 2 は

$$u_1(D, D) > u_1(D, C) > u_1(C, D) > u_1(C, C)$$

であるが，ゲーム 2 の C と D を入れ替えれば，ゲーム 1 と完全に同一であることが確認できる．このように 24 種類のゲームは，それぞれ構造的に同一の 12 のペアに分けることができる．ここではそのうち，$R > T$ となるものを取り上げて分析するということである．詳しくは**?**, 29 参照．

4.3 4 つの類型

さて，2 つの制限を課すと，可能なゲームの種類は 12 種類である[*3]．2×2 対称ゲームにおいては，相手の戦略に対する最適反応戦略は，相手が C の場合は R と T の大小関係，そして相手が D の場合には P と S の大小関係で決まる．ゆえに，12 種類のゲームは R と T，P と S の大小関係に応じて 4 つのタイプに分類できる．

Type I 条件 $R > T, P < S$．5 パターン．
- (a) $R > T > S > P$
- (b) $R > S > T > P$
- (c) $R > S > P > T$
- (d) $S > R > P > T$
- (e) $S > R > T > P$

Type II 条件 $R < T, P > S$．1 パターン．
- (a) $T > R > P > S$

Type III 条件 $R > T, P > S$．3 パターン．
- (a) $R > T > P > S$
- (b) $R > P > S > T$
- (c) $R > P > T > S$

Type IV 条件 $R < T, P < S$．3 パターン．
- (a) $T > R > S > P$
- (b) $T > S > R > P$
- (c) $S > T > R > P$

以下，4 つのタイプについて詳しく検討する．

[*3] 2×2 対称ゲームの種類の数は R, S, T, P の順列の数に対応する．すなわち，$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ 種類である．そのうち $R > T$ を満たすのは半分の 12 種類である．

4.3.1　Type I　非ジレンマ状況

条件は $R > T, P < S$ で，この場合 5 パターンのゲームがある．最も典型的なケースとして $R > S > T > P$ のゲームを考える．表 4.2 はこのゲームの数値例である．

表 4.2　非ジレンマ例

	C	D
C	5,　5	3,　1
D	1,　3	0,　0

このタイプのゲームでは，条件 $R > T, P < S$ より，両プレイヤーにとって C が支配戦略になる．ゆえに，**戦略の組 (C, C) が唯一のナッシュ均衡となる．** また，条件 $R > T$ と制約 $R > P$ より，**唯一のナッシュ均衡である戦略の組 (C, C) はパレート最適である．** つまり，このタイプのゲームの場合，プレイヤーの合理的選択によって社会的に望ましい結果が実現されるのである．

4.3.2　Type II　囚人のジレンマ

条件は $R < T, P > S$ であり，この場合は $T > R > P > S$ の 1 パターンである．

表 4.3　囚人のジレンマ例

	C	D
C	3,　3	0,　5
D	5,　0	1,　1

3 章で検討したように，このタイプのゲームでは，条件 $R < T, P > S$ より，両プレイヤーにとって D が支配戦略となる．ゆえに **戦略の組 (D, D) が唯一のナッシュ均衡となる．** また，制約 $R > P$ より，**唯一のナッシュ均衡である戦略の組 (D, D) はパレート最適ではない．** 囚人のジレンマゲームの場合，プレイヤーの合理的選択によって社会的に望ましくない結果が実現されてしまう．

この囚人のジレンマゲームは，主に社会学の文脈において，**社会秩序形成問題**を表現するものとして取り扱われてきた (**?**)．この問題は**ホッブズ問題**ともいわれる．

17 世紀の思想家トマス・ホッブズは，共通の権力による統制のない「自然状態」においては，人々が自らの欲求にしたがって利己的に行動するために，結果的に「万人の万人に対する闘争」状態が生じると考えた．ホッブズはこの状態を解決するためには，主権国家の創設と国家主権への権利委譲が必要であると考えたが，このホッブズの枠組みに見られる原理的な問いとは，利己的な行為者たちからなる状態からいかにして社会秩序が生成しうるか，というものであった．

囚人のジレンマゲームにおいて，この問題を敷衍すると，利己的な行為者の行動によって引き起こされる (D, D) という相互裏切り (defection) ＝無秩序状態から，いかにして (C, C) という相互協力 (cooperation) ＝秩序状態へと移行しうるか，と言い直すことができる．

この定式化をもとにして，これまで様々な考察が加えられてきた．しかし，利得構造を変更しない限り，プレイヤーの合理性を仮定する以上，1 回だけのゲームでは支配戦略解は (D, D) 以外にはあり得ない．だが，永続的に存続する関係性を仮定した場合は，ある種の協力関係，つまり秩序状態が生じうるということが，無限繰り返しゲームという枠組みにおいて示すことができる．無限繰り返しゲームについては 5 章で紹介する．

4.3.3　Type III　調整ゲーム

条件は $R > T, P > S$ で，この場合 3 パターンのゲームがある．典型的な例として $R > T > P > S$ を取り上げる．表 4.4 はこのゲームの数値例である．

表 4.4　調整ゲーム例

	C	D
C	5,　5	0,　3
D	3,　0	1,　1

このタイプのゲームでは，$R > T$ より (C, C) が，そして $P > S$ より (D, D) がナッシュ均衡となる．また，$R > T$ と条件 $R > P$ より (C, C) はパレート最適であ

り，(D, D) はパレート最適ではない．まとめると，このタイプのゲームには**パレート最適なナッシュ均衡** (C, C) **と，パレート最適でないナッシュ均衡** (D, D) **の 2 つのナッシュ均衡が存在する．**

ここでの問題は均衡が複数あり，そのなかでどの均衡が実際に実現するかは，標準型ゲームの枠組みからは分からないということである．とくに，いかにしてパレート最適である方のナッシュ均衡が実現するかが問題となる．こうした問題を**複数均衡選択問題**という．逆にいえば，この種のゲームではパレート最適でないナッシュ均衡が成立する可能性も十分にある．こうしたゲーム状況は，社会的な慣習の成立，とくに一見非効率的な慣習がいかにして成立したか，を考える上で大きなヒントとなると考えられている．あるいはまた，商品規格争いにおいても，しばしば必ずしも機能的に優れていない規格が勝つことがあるが（例えば，QWERTY キーボード配列とか VHS とか），こうした現象もパレート最適なナッシュ均衡が必ずしも成立しない調整ゲームとして解釈することができる．

4.3.4　Type IV　チキンゲーム

条件は $R < T, P < S$ で，この場合 3 パターンのゲームがある．ここでは典型的な例として $T > R > S > P$ の数値例を表 4.5 に挙げる．

表 4.5　チキンゲーム例

	C	D
C	3,　3	1,　5
D	5,　1	0,　0

ここで，このゲームをゲーム名の由来となったチキンゲームとして解釈しよう．チキンゲームとは要するに根性試しゲームで，2 台の車を両端から向かい合う形で全速力で走らせて，先によけた方が弱虫（チキン）で負けというゲームである．C を「避ける」，D を「突っ込む」とすると，一番よいのは相手が先に避ける場合で 5，次によいのはお互いが避ける場合で，この場合どちらも弱虫とはいわれないので 3，自分が先に避けると弱虫の烙印を押されてしまい 1，最後にお互いが避けずに突っ込むと大事故となり最悪の結果 0 となる．

このタイプのゲームは $R < T, P < S$ という条件より，(C, D) と (D, C) という **2 つのナッシュ均衡が存在し，しかも両方ともパレート最適となる．**つまり，一方が突っ込み，一方が避けるという結果が予測される結果である．ただし，どちらのプレイヤーが避けるかについてはこのゲームの分析からは分からない．ここにも複数均衡選択問題が存在するのである．

このタイプのゲームは，**公共財供給問題**の分析においてしばしば取り上げられる．ここで公共財とは，誰が供給主体であろうと，いったんできあがったら他の人の利用を（原則的に）制限することのできないような財を指す．道路や橋，堤防などのような公共設備や行政や消防・警察などの公共サービスが典型例である．このような公共財を新たに作り出す，あるいは既存のものを維持する場合，何らかの制限がなければ供給・維持活動には参加せず，公共財だけは利用するという**フリーライダー** (free rider) が出てくる可能性がある．そして，全員がフリーライダーになった場合，結局公共財は供給されないことになる．例えば，町内の清掃を誰が担うかという問題が考えられる．全員が協力して清掃すればよいのだが，清掃に参加しなくても他の人の尽力で町内がきれいになるなら，参加しない方が得である．しかし，全員がそのように考えると，誰も掃除をしなくなり町内は汚くなる．

ここで，C を「公共財供給活動に参加する」，D を「フリーライドする」とすれば，チキンゲームは公共財供給問題を表していると解釈できるのである．

第 5 章

囚人のジレンマと無限繰り返しゲーム

本章では，同じプレイヤー同士で囚人のジレンマゲームを繰り返しプレイした場合，(C, C) となる相互協力状態が実現する可能性がある，ということを無限繰り返しゲームというゲームの形式を分析することで示す．本章の議論をわかりやすく解説したものとして，**?**, 4 章 がある．また，無限繰り返しゲームとフォーク定理のより厳密な解説については，**?**, 6 章，**?**を参照のこと．

5.1 無限繰り返しゲーム

ここまで考えてきたゲームは，プレイヤーが同時に手を出す 1 回限りのゲームであった．しかしながら，現実社会のゲーム状況，つまり複数の主体が相互依存状況のもとで意志決定を行う状況を考えると，同様の状況が繰り返し生じることがある．例えば，同一の売り手と買い手が同じような取引を繰り返す場合や，友人や夫婦間の関係などである．

表 5.1 囚人のジレンマ例（再掲）

	C	D
C	3, 3	0, 5
D	5, 0	1, 1

このことをとくに囚人のジレンマ状況について考えてみよう（表 5.1）．相手と 1 回だけのゲームを行い，そのあとは二度と会わないのであれば，プレイヤーは躊躇なく非協力 D を選択するだろう．しかしながら，その相手との関係がその後も続くとす

れば話は変わってくるかもしれない．例えば互いに信頼し会える関係ならば協力関係 (C, C) が続くかもしれない[*1]．

そこで，繰り返し続くゲームにおいて，協力関係が成立する可能性を理論的に検討してみよう．

5.1.1　無限繰り返しゲームの定義

ある標準型ゲーム G が際限なく繰り返される状況を考えよう．このとき 2 人のプレイヤーはそれぞれの回のゲームをプレイするにあたって，過去のすべてのゲームの結果を知っているとする．このような繰り返されるゲームをすべてひっくるめて，1 つのゲームと見なすことにする．このゲームを G の**無限繰り返しゲーム** (infinitely repeated game) といい G^∞ で表す[*2]．無限繰り返しゲームはまた**スーパーゲーム** (super game) とも呼ばれる．元のゲーム G を無限繰り返しゲームの**成分ゲーム** (component game) と呼ぶ．

5.1.2　無限繰り返しゲームにおける戦略

無限繰り返しゲームにおけるプレイヤーの戦略とは，過去のゲームの結果にもとづいて毎回のゲームにおける手[*3]を決めるような，「行動の予定表」あるいは「行動のプログラム」である．無限繰り返しゲームにおけるプレイヤー i の戦略を一般的に $ss_i \in SS_i$ と表す．このような戦略は原理的には無限に種類がありうる．ここではしばしば分析に取り上げられる代表的な 4 つの戦略を紹介する．

(1) **All C (AC)**：過去のゲームの結果によらず，つねに C を出す．

(2) **All D (AD)**：過去のゲームの結果によらず，つねに D を出す．

(3) **トリガー (Tr)**：一番最初は C を出す．それ以降は相手プレイヤーが C を出す限り C を出す．相手が一度でも D を出せば，その次のゲーム以降はつねに D を

[*1] そればかりか現実には，実験状況で囚人のジレンマゲームを被験者同士でプレイさせると，互いに知らないもの同士であっても協力状態が達成されるケースが少なくないことが知られている (**?**)．

[*2] ゲームの終了時点がいつになるか不確かな繰り返しゲーム，というのが無限繰り返しゲームの現実的な解釈である．

[*3] より精確に言えば，成分ゲーム G における戦略 s_i のことである．

出す．

(4) **しっぺ返し (TFT)**：tit for tat とも呼ばれる．一番最初は C を出す．2 回目以降は相手が前回出した手と同じ手を出す．

トリガー戦略は，協力には協力をもって応じるが，一度でも裏切る（つまり非協力に移行する）と以後二度と協力しないという強い対抗手段をもつ戦略である．同様に，しっぺ返し戦略は，協力には協力を裏切りには裏切りをもって対抗する戦略であり，トリガー戦略と同様に裏切りに対する対抗手段を組み込んでいる．ただし，相手が一度裏切っても，相手がふたたび協力するなら協力に戻るという「赦し」を含んでいる分，より緩やかな戦略であると言えよう．まとめると，トリガー戦略，しっぺ返し戦略とも協力行動をベースに，相手の裏切りに対する対抗手段をもつ戦略である．

5.1.3　無限繰り返しゲームにおける利得

無限繰り返しゲームにおける利得は，各々の成分ゲームにおいて得られるであろう利得の総合計であるとする．ただし，**人は将来のことであればあるほど利得を割り引いて評価する**と仮定する[*4]．無限繰り返しゲーム G^∞ の戦略を決めるのは，ゲームがスタートする前の時点であり，その時点でプレイヤーはゲームを繰り返していったときに得られるであろう利得を見積もる．ただし，将来のゲームであればあるほど，そのゲームで得られる利得の現時点での重要性もしくは価値は小さく見積もられると仮定する．この仮定は人間の一般的な認識傾向を表していると見なすことができる[*5]．

この傾向を表現するために，**割引因子** (discount factor) を導入し δ と表記する．ただし $0 < \delta < 1$ とする．そして t 回目のゲームで得る利得についての**割引率** (discount rate) を δ^{t-1} と定義する．戦略の組 (ss_1, ss_2) において，プレイヤー i が t 回目のゲームで得る利得を u_{it} とすると，割引因子 δ をもつプレイヤー i の無限繰り返しゲーム G^∞ における利得は

$$U_i(\delta; ss_1, ss_2) = u_{i1} + \delta u_{i2} + \delta^2 u_{i3} + \delta^3 u_{i4} + \cdots + \delta^{t-1} u_{it} + \cdots \tag{5.1}$$

によって定義される．

[*4] この仮定の意味について詳しくは**?**, 251–5 を参照のこと．

[*5] 例えば，今日もらえる 1 万円と 1 年後にもらえる 1 万円のどちらが実質的により大きな価値を持つかを考えてみよ．

例えば，表 5.1 の無限繰り返しゲームにおいて，両プレイヤーともに All C をとった場合を考えてみる．この場合各ゲームで実現する結果は (C, C) であり両プレイヤーとも，各ゲームにおいて 3 の利得を得る．つまり，$i = 1, 2$ について

$$U_i(\delta; \mathrm{AC,AC}) = 3 + \delta 3 + \delta^2 3 + \delta^3 3 + \cdots + \delta^{t-1} 3 + \cdots \tag{5.2}$$

であり，例えば $\delta = 0.9$ とすると

$$U_i(0.9; \mathrm{AC,AC}) = 3 + (0.9)3 + (0.81)3 + (0.729)3 + \cdots$$

となる．ここで式 (5.2) が初項が 3，公比が δ の無限等比数列の和であることに気付けば，公式[*6] より

$$U_i(\delta; \mathrm{AC,AC}) = \frac{3}{1-\delta} \tag{5.3}$$

と単純な式に変形できる．$\delta = 0.9$ とすると $U_i(0.9; \mathrm{AC,AC}) = 3/(1-0.9) = 30$ となる．

5.2　無限繰り返し囚人のジレンマゲームの結果の分析

以下，表 5.2 を成分ゲームとしてもつ無限繰り返しゲーム G^∞ の結果を検討する．

[*6] 初項 a，公比 δ $(0 < \delta < 1)$ の等比数列の和を

$$S_n = a + a\delta + a\delta^2 + \cdots + a\delta^{n-1}$$

とする．この式の両辺に δ をかけると

$$\delta S_n = a\delta + a\delta^2 + a\delta^3 + \cdots + a\delta^n$$

となる．第 1 式と第 2 式の差をとると $S_n - \delta S_n = a - a\delta^n$ となるので，結局まとめると

$$S_n = \frac{a(1-\delta^n)}{1-\delta}$$

となる．ここで $n \to \infty$，つまり n をだんだんと限りなく大きくしていく場合を考える．すると $0 < \delta < 1$ なので δ^n はだんだんと小さくなり，限りなく 0 に近づく．つまり，$n \to \infty$ のとき，S_n は限りなく $a/(1-\delta)$ に近づく．これを S_n の極限値といい，正確には

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-\delta}$$

と表記する．

表 5.2　囚人のジレンマの一般的記述（ただし $T > R > P > S$）

	C	D
C	$R,\ \ R$	$S,\ \ T$
D	$T,\ \ S$	$P,\ \ P$

5.2.1　4 つの戦略の利得表

ここでは，2 人のプレイヤーがそれぞれ All C，All D，トリガー，しっぺ返しという 4 つの戦略をもっているときの G^{∞} の利得表をまとめることにしよう．まずは，戦略の組み合わせごとに得られる利得を計算しよう．

(1) **All C，トリガー，しっぺ返しの組み合わせの対戦**

トリガーもしっぺ返しも相手が C を出し続ける場合，自分も常に C を出す．ゆえに，All C，トリガー，しっぺ返しの 3 つの戦略（これを ss_i で示す）の組み合わせに対する利得は，両プレイヤーとも

$$U_i(\delta; ss_1, ss_2) = R + \delta R + \delta^2 R + \cdots = \frac{R}{1-\delta}.$$

(2) **All D 同士の対戦**

両プレイヤーについて

$$U_i(\delta; \mathrm{AD},\ \mathrm{AD}) = P + \delta P + \delta^2 P + \cdots = \frac{P}{1-\delta}.$$

(3) **All C と All D の対戦**

プレイヤー 1 が All C，プレイヤー 2 が All D をとる場合を示す．

$$U_1(\delta; \mathrm{AC},\ \mathrm{AD}) = S + \delta S + \delta^2 S + \cdots = \frac{S}{1-\delta},$$

$$U_2(\delta; \mathrm{AC},\ \mathrm{AD}) = T + \delta T + \delta^2 T + \cdots = \frac{T}{1-\delta}.$$

(4) **All D とトリガー，All D としっぺ返しの対戦**

1 回目は All D をとるプレイヤーは D，トリガーもしくはしっぺ返しをとるプレイヤーは C である．2 回目以降は双方とも D をとる．ゆえに，プレイヤー 1 が

トリガーもしくはしっぺ返しをとり，プレイヤー 2 が All D をとる場合，利得は

$$U_1(\delta;\mathrm{Tr},\,\mathrm{AD}) = U_1(\delta;\mathrm{TFT},\,\mathrm{AD}) = S + \delta P + \delta^2 P + \delta^3 P + \cdots = S + \frac{\delta P}{1-\delta},$$

$$U_2(\delta;\mathrm{Tr},\,\mathrm{AD}) = U_2(\delta;\mathrm{TFT},\,\mathrm{AD}) = T + \delta P + \delta^2 P + \delta^2 P + \cdots = T + \frac{\delta P}{1-\delta}$$

となる**【式の展開を確認せよ】**.

さて，これらの結果をもとに利得表を構成しよう（表 5.3）．ここで見やすさのためにすべての利得に $1-\delta$ をかけている．この操作によって利得の大小関係が変わることはないので[*7]，ナッシュ均衡の分析には影響がない．ただしここで,

$$T_s = (1-\delta)T + \delta P \qquad\qquad S_s = (1-\delta)S + \delta P$$

とおく.

表 5.3　繰り返し囚人のジレンマの利得表（ただし $T > R > P > S$）

	All C	All D	トリガー	TFT
All C	$R,\ R$	$S,\ T$	$R,\ R$	$R,\ R$
All D	$T,\ S$	$P,\ P$	$T_s,\ S_s$	$T_s,\ S_s$
トリガー	$R,\ R$	$S_s,\ T_s$	$R,\ R$	$R,\ R$
TFT	$R,\ R$	$S_s,\ T_s$	$R,\ R$	$R,\ R$

5.2.2　非協力ナッシュ均衡

無限繰り返しゲームにおけるナッシュ均衡は，1 回だけの標準型ゲームにおけるナッシュ均衡とまったく同様に定義できる．すなわち，無限繰り返しゲームの戦略の組において，それぞれのプレイヤーの戦略が互いに他のプレイヤーの戦略の組に対して最適反応戦略となっているとき，その戦略の組は**ナッシュ均衡**である．別の言い方をすれば，あるプレイヤー 1 人だけが戦略を変えても得をしない，ということがすべてのプレイヤーについて成立するとき，その戦略の組はナッシュ均衡である.

[*7] $0 < \delta < 1$ であったことに注意.

さて，表 5.3 を一瞥してすぐにわかることは，**戦略が All C と All D だけの 2 人無限繰り返しゲームは，成分ゲームである囚人のジレンマゲームと利得構造上まったく同一であるということである．**ゆえに戦略が All C と All D だけの 2 人無限繰り返しゲームでは，(All D, All D) が唯一のナッシュ均衡となる．

戦略の種類を拡大して，トリガーとしっぺ返しを加えても，**(All D, All D) は δ の値にかかわらずに常にナッシュ均衡となる．**このことを証明しよう．まず，プレイヤー 1 の All C への移行は

$$(1-\delta)U_1(\delta;\text{AD, AD}) = P > S = (1-\delta)U_1(\delta;\text{AC, AD}) \tag{5.4}$$

なので利得が減少する．次に，プレイヤー 1 がトリガーもしくはしっぺ返しへと移行すると，

$$(1-\delta)P > (1-\delta)S \iff P > S_s \tag{5.5}$$

なので，

$$(1-\delta)U_1(\delta;\text{AD, AD}) = P > S_s = (1-\delta)U_1(\delta;\text{Tr, AD}) \tag{5.6}$$

$$(1-\delta)U_1(\delta;\text{AD, AD}) = P > S_s = (1-\delta)U_1(\delta;\text{TFT,AD}) \tag{5.7}$$

であり，やはり利得が減少する．プレイヤー 2 についても同様のことが成り立つので，ゆえに (All D, All D) はナッシュ均衡である*8．

5.2.3　協力状態が実現する可能性

では，やはり繰り返しゲームにおいても相互非協力のパレート最適でない均衡状態しか実現しないのだろうか？　実はこのゲームにおいて (トリガー, トリガー)，(しっぺ返し, しっぺ返し)，(トリガー, しっぺ返し)，(しっぺ返し, トリガー) がナッシュ均衡になる可能性がある．このことを論証しよう．

表 5.3 より，これら 4 種類の戦略の組がナッシュ均衡であるためには，

$$R \geq T_s \tag{5.8}$$

*8 さらに，他の選択肢としてどのような戦略があったとしても (All D, All D) は常にナッシュ均衡となる．というのも，All D と対戦したときすべての回で結果的に D を出す戦略の場合，その戦略に変更しても利得は変化しない．また，少なくとも 1 回 C を出す戦略であれば $P > S$ なので，かならず利得は減少する．

が成り立つ必要がある．これを δ についてまとめると，

$$\begin{aligned} R \geq T_s &\iff R \geq (1-\delta)T + \delta P \\ &\iff \delta(T-P) \geq T-R \\ &\iff \delta \geq \frac{T-R}{T-P} \end{aligned} \tag{5.9}$$

となる．結局，$\delta \geq (T-R)/(T-P)$ **が成立するなら，トリガーとしっぺ返しの組み合わせによる 4 種類の戦略の組はナッシュ均衡となる**．トリガーとしっぺ返しの組み合わせによる戦略の組がナッシュ均衡となりうるということは，結果的に各成分ゲームにおいて協力状態 (C, C) が永続するような均衡状態が実現しうるということに他ならない．そしてこの均衡状態は不等式 (5.9) が成立するならば，必ずパレート最適である．

ここで，イメージを持ちやすくするために実際の数値例を示す．無限繰り返しゲームの成分ゲームが表 5.2 で示されるゲームであったとすると，

$$\delta \geq \frac{5-3}{5-1} = 0.5$$

である．ではこの δ の条件は実質的にはどのような意味をもっているのだろうか？

以下に 2 つの方向からの解釈を示そう．

(1) δ に注目すると，δ が大きく 1 に近ければ近いほど，この条件が満たされる可能性が高くなる．つまり，プレイヤーが無限繰り返しゲームにおいて将来の利得の現在価値を高く評価すればするほど，永続的な協力関係が達成される可能性が高まる．

(2) 不等式の右辺に注目すると，分子部分の $T-R$ は (C, C) の相互協力状態から 1 人だけ裏切りに移行した際の利得の純増分を示している．また，分母部分の $T-P$ は，裏切りに対して相手が対抗手段，つまり D に対して D をとった場合の利得の純減分を示している．つまり，不等式の右辺は「裏切りの誘惑の大きさ」と「裏切りに対する罰の大きさ」の関係を示していると見なすことができる．そして，「裏切りの誘惑の大きさ」よりも「裏切りに対する罰の大きさ」の方が大きければ大きいほど，低い割引率であっても協力関係が達成される可能性が高くなる．

5.3　フォーク定理

このように，1 回限りのゲームでは非均衡状態となり実現されないより望ましい状態が，無限繰り返しゲームにおいてナッシュ均衡として実現される可能性がある，ということはゲーム理論研究においては古くから知られていた．こうした知見を一般的に示したものが，いわゆる**フォーク定理** (folk theorem) である．ここでは，フォーク定理そのものの詳細には触れないが[*9]，(トリガー, トリガー) がナッシュ均衡となる一般的条件について証明しておく．さらに，(しっぺ返し, しっぺ返し) がナッシュ均衡となる一般的条件について概観する．

5.3.1　(トリガー, トリガー) がナッシュ均衡となる一般的条件

2×2 囚人のジレンマゲームを成分ゲームとする無限繰り返しゲーム G^{∞} において，(トリガー, トリガー) がナッシュ均衡となる一般的条件は

$$\delta \geq \frac{T-R}{T-P} \tag{5.10}$$

である．以下これを証明する．2 人のプレイヤーがトリガー戦略を用いるときのプレイヤーの総利得は

$$U_i(\delta; \mathrm{Tr}, \mathrm{Tr}) = R + \delta R + \delta^2 R + \cdots = \frac{R}{1-\delta} \tag{5.11}$$

である．もしプレイヤー 1 が t 回目（$t = 1, 2, \ldots$）に行動を D に変更するとしよう．するとプレイヤー 2 はその後 D を出し続けるので，プレイヤー 1 の t 回目以降の利得の総和はもっとも大きくて

$$\delta^{t-1}T + \delta^{t}P + \delta^{t+1}P + \cdots = \delta^{t-1}\left(T + \frac{\delta P}{1-\delta}\right) \tag{5.12}$$

[*9] フォーク定理とその証明については，**?**, 6 章，**?**を参照．

である[*10]．一方，両方ともにトリガー戦略を採り続ける場合の t 回目以降の利得の総和は,

$$\delta^{t-1}R+\delta^{t}R+\delta^{t+1}R+\cdots=\delta^{t-1}\left(\frac{R}{1-\delta}\right) \tag{5.13}$$

である．ゆえに

$$\delta^{t-1}\left(\frac{R}{1-\delta}\right)\geq\delta^{t-1}\left(T+\frac{\delta P}{1-\delta}\right) \tag{5.14}$$

ならば，プレイヤー 1 のすべての可能な無限繰り返しゲームにおける戦略 ss_1 に対して

$$U_1(\delta;\mathrm{Tr},\mathrm{Tr})\geq U_1(\delta;ss_1,\mathrm{Tr}) \tag{5.15}$$

が成立する．プレイヤー 2 についてもまったく同様のことが言える．式 (5.14) を変形すると式 (5.10) が得られる．以上で証明された.

5.3.2　(しっぺ返し, しっぺ返し) がナッシュ均衡となる一般的条件

2×2 囚人のジレンマゲームを成分ゲームとする無限繰り返しゲーム G^{∞} において，(しっぺ返し, しっぺ返し) がナッシュ均衡となる一般的条件は

$$\delta\geq\max\left(\frac{T-R}{T-P},\frac{T-R}{R-S}\right) \tag{5.16}$$

である．ここで $\max(a,b)$ は a,b のうち大きな方をとるという操作を示している．この命題の証明はやや煩雑であるため，ここではフォローしない．詳しくは**?**, 235–8 を参照されたい.

この条件の数値例を示そう．表 5.2 を成分ゲームとする無限繰り返しゲームにおける条件は

$$\delta\geq\max\left(\frac{5-3}{5-1},\frac{5-3}{3-0}\right)=\max(0.5,0.6\dot{6})=0.6\dot{6}$$

[*10] 相手が D を出しているときに，自分が得られる利得は P か S かの 2 種類であって，$P>S$ である．ゆえに利得の総和がもっとも大きくなるのは，自らも D を出し続けて $t+1$ 回以降 P を得ることである.

である．この例からも分かるとおり，しっぺ返し同士がナッシュ均衡となる条件は，トリガー同士がナッシュ均衡となる条件に比べて，同等かそれよりも厳しい条件になっているものの，δ が十分に 1 に近ければ (しっぺ返し, しっぺ返し) がナッシュ均衡となる可能性があることを示している．

5.4　アクセルロッドのトーナメント

アメリカの政治学者であるロバート・アクセルロッドは，繰り返し囚人のジレンマゲームを用いて次のようなコンピュータ・シミュレーションを行った．ゲーム理論の専門家を中心として，さまざまな研究者から繰り返し囚人のジレンマゲームの戦略のアイデアを募り，それらの戦略を総当たりで戦わせて，もっとも平均利得が高い戦略を決定した．2 回のトーナメントが実施されたが，2 回とももっとも平均利得が高くなったのは「しっぺ返し」だったのである．

この結果は「しっぺ返し」がさまざまな対戦相手との対戦において，そこそこの結果を得ることができる「たくましい」戦略であることを示しているとアクセルロッドは見ている．しっぺ返しの成功の要因としてアクセルロッドは「自分の方から裏切り始めることはなく，相手の裏切りには即座に報復し，心が広く，相手に対して分かりやすい行動」(**?**, 55) であることを挙げている．

ここで，「たくましさ」が，ある戦略をもつプレイヤーが生き残って，次の世代にその戦略を伝える可能性の高さを表していると考えてみると，しっぺ返し戦略の強さは相互協力という社会秩序状態が成立する 1 つの道筋を示していると見なすことができるだろう．

アクセルロッドのトーナメントについて，より詳細には『つきあい方の科学』(**?**) を参照のこと．

第 6 章

混合戦略と混合戦略ナッシュ均衡

本章では，ふたたび 1 回限りのゲームに戻り，標準型ゲームにおける戦略の概念を拡張した混合戦略と混合戦略のナッシュ均衡を導入する．

6.1　コイン合わせゲーム

さてここで,「コイン合わせゲーム」として知られる 2×2 ゲームを検討しよう．このゲームは 2 人のプレイヤーがコイン（たとえば 100 円玉）を持ち寄り行われる．それぞれのプレイヤーはコインの表（F）を出すか，裏（B）を出すかを選択する．2 人の出した面がそろえば，つまり (F, F)，(B, B) ならばプレイヤー 2 の勝ちで，プレイヤー 2 はプレイヤー 1 のコインをもらう．逆に 2 人の出した面がそろっていなければ，つまり (F, B)，(B, F) であれば，プレイヤー 1 の勝ちで，プレイヤー 1 はプレイヤー 2 からコインをもらう．このとき利得表は表 6.1 のようになる[*1]．

表 6.1　コイン合わせゲーム

	F	B
F	$-1,\ \ 1$	$1,\ \ -1$
B	$1,\ \ -1$	$-1,\ \ 1$

さて，このゲームのナッシュ均衡はどのようになっているだろうか？　それぞれの戦略の組について，それがナッシュ均衡であるかどうかを 3 章の定義 1,2 に照らし

[*1] このゲームは，すべての可能な戦略の組み合わせにおいて，両プレイヤーの利得の合計がゼロになる．このようなタイプのゲームを**ゼロサム・ゲーム** (zero-sum game) という．

て確認しよう．

(1) (F,F) について
$$u_1(F,F) = -1 < 1 = u_1(B,F)$$
なので，(F,F) はナッシュ均衡ではない．

(2) (B,B) について
$$u_1(B,B) = -1 < 1 = u_1(F,B)$$
なので，(B,B) はナッシュ均衡ではない．

(3) (F,B) について
$$u_2(F,B) = -1 < 1 = u_2(F,F)$$
なので，(F,B) はナッシュ均衡ではない．

(4) (B,F) について
$$u_2(B,F) = -1 < 1 = u_2(B,B)$$
なので，(B,F) はナッシュ均衡ではない．

このように，このゲームでは，どの戦略の組でもつねにどちらかのプレイヤーが手を変えたいと望むため，ナッシュ均衡は存在しない．また，なじみ深いゲームとして，ジャンケンの勝者が相手から報酬を得るようなゲームもゼロサム・ゲームとなり，ナッシュ均衡は存在しなくなる．では，このようなゲームについては，どのような結果の予測もできないのであろうか？　以下では，新たな戦略の概念を導入することで標準型ゲームを拡張し，より一般的な均衡の可能性について検討する．

6.2　混合戦略の導入

6.2.1　混合戦略の定義

ここで，混合戦略という戦略の概念を導入する．プレイヤー i にとって**混合戦略** (mixed strategy) とは，戦略集合 S_i 上の任意の確率分布のことをいう．つまり，プレイヤー i が K 個の戦略をもっていたとき，それらの戦略 $s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{iK}$ のそれぞれに対して割り当てた確率 p_{ik} $(k = 1, 2, \ldots, K)$ の分布
$$\boldsymbol{p}_i = (p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{iK})$$

を**混合戦略**という，ただし，p_{ik} は確率であるので，$0 \le p_{ik} \le 1$ $(k = 1, 2, \ldots, K)$ かつ $p_{i1} + p_{i2} + \cdots + p_{iK} = 1$ が成り立つ必要がある．すべてのプレイヤーについての混合戦略の組み合わせを $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n)$ と記述する．また，これまで単に「戦略」と呼んできた s_i を混合戦略と区別するために**純粋戦略** (pure strategy) という

たとえば，ジャンケンというゲームにおいて，それぞれのプレイヤーがグー，チョキ，パーという 3 種類の戦略をもっていたとする．30% の確率でグーを，50% の確率でチョキを，そして 20% の確率でパーを選ぶという戦略は，混合戦略の 1 つであり，(0.3,0.5,0.2) で表される．同様に，すべて同確率で出す (1/3,1/3,1/3) や 100% パーを出す (0,0,1) も混合戦略である．この最後の例のように，純粋戦略「パー」を混合戦略 (0,0,1) として表すことができる．つまり混合戦略は純粋戦略を含む，より広い戦略概念である．

6.2.2 期待利得

混合戦略を導入したゲームを考えるときに，すべてのプレイヤーの混合戦略，つまり純粋戦略に割り当てる確率は，他のプレイヤーの混合戦略からの影響を受けずに，それぞれのプレイヤーについて（確率の意味で）独立に決定される，と仮定する．

さて，混合戦略を導入した場合，それぞれの混合戦略の組についてのプレイヤーの利得は，純粋戦略の利得の期待値で表されると仮定し，これを**期待利得** (expected payoff) と呼ぶ[*2]．

期待利得について，プレイヤーが 2 人の場合について具体的に記述しよう (**?**, 34–6)．プレイヤー 1 の純粋戦略 $s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1K}$ に対する混合戦略を $\boldsymbol{p}_1 = (p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1K})$ とする．同様に，プレイヤー 2 の純粋戦略 $s_{21}, s_{22}, \ldots, s_{2J}$ に対する混合戦略を $\boldsymbol{p}_2 = (p_{21}, p_{22}, \ldots, p_{2J})$ とする．それぞれのプレイヤーの混合戦略

[*2] 期待値とは，ある確率で何らかの値をとる変数 X（これを確率変数という）の確率の重み付き平均のことであり，$E(X)$ で表す．たとえば，さいころの目を X とすると，X の可能な実現値は 1,2,3,4,5,6 であり，さいころに歪みがないとすると，それぞれの実現確率は 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6 である．ゆえに $E(X)$ は

$$E(X) = 1(1/6) + 2(1/6) + 3(1/6) + 4(1/6) + 5(1/6) + 6(1/6) = 3.5$$

となる．このことは，さいころを何回も振ってそのたびごとに目を得点として記録すると，平均して毎回の試行で 3.5 が得られることが「期待（予測）」されるということを示している．

は独立であるから，ある戦略の組 (s_{1k}, s_{2j}) が実現する確率は $p_{1k}p_{2j}$ となる．よって，プレイヤー i の期待利得 $\pi_i(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$ は

$$\pi_i(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} p_{1k}p_{2j}u_i(s_{1k}, s_{2j}) \tag{6.1}$$

で計算できる．式 (6.1) は次のように考えても導出できる．プレイヤー 1 について，プレイヤー 1 が純粋戦略 s_{1k} を選択することで得られる期待利得は

$$\sum_{j=1}^{J} p_{2j}u_1(s_{1k}, s_{2j}) = p_{21}u_1(s_{1k}, s_{21}) + p_{22}u_1(s_{1k}, s_{22}) + \cdots + p_{2J}u_1(s_{1k}, s_{2J}) \tag{6.2}$$

である．ゆえに，プレイヤー 1 が混合戦略 $\boldsymbol{p}_1$ をとるときの期待利得はそれぞれの純粋戦略における期待利得の期待値（確率の重み付き平均）であるから，

$$\pi_1(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = \sum_{k=1}^{K} p_{1k}\left(\sum_{j=1}^{J} p_{2j}u_1(s_{1k}, s_{2j})\right) \tag{6.3}$$

である．プレイヤー 2 についても同様に定義できる．

ある標準型ゲーム G について，各プレイヤーの混合戦略，期待利得を導入することを，G の**混合拡大** (mixed extension) という．

6.2.3　混合戦略ナッシュ均衡

混合拡大ゲームにおけるナッシュ均衡は，標準型ゲームにおけるナッシュ均衡と同様に定義できる．

定義 5（混合戦略ナッシュ均衡）　混合拡大した 2 人ゲームにおいて，混合戦略の組 $(\boldsymbol{p}_1^*, \boldsymbol{p}_2^*)$ が**ナッシュ均衡**であるとは，各プレイヤーの混合戦略が他のプレイヤーの混合戦略に対する最適反応となっていることをいう．言い換えると，S_1 上の任意の確率分布 $\boldsymbol{p}_1$ に対して，

$$\pi_1(\boldsymbol{p}_1^*, \boldsymbol{p}_2^*) \geq \pi_1(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2^*) \tag{6.4}$$

が成立し，S_2 上の任意の確率分布 $\boldsymbol{p}_2$ に対して，

$$\pi_2(\boldsymbol{p}_1^*, \boldsymbol{p}_2^*) \geq \pi_2(\boldsymbol{p}_1^*, \boldsymbol{p}_2) \tag{6.5}$$

が成立することをいう．

混合戦略によって表されるナッシュ均衡をとくに**混合戦略ナッシュ均衡** (mixed strategy Nash equilibrium) と呼ぶことがある．

6.2.4　ナッシュ均衡の存在定理

プレイヤーの数と純戦略の数が有限となる標準型ゲームの混合拡大ゲームには，少なくとも 1 つのナッシュ均衡が必ず存在する，ということがナッシュ自身による定理において証明されている．この定理は，混合戦略までを考えると，必ずゲームの結果の何らかの予測ができることを示しており，大変重要な定理である．ただし，数学的には高度な知識が必要なこともあり，ここでは取り上げない．定理の意味と証明方法のわかりやすい解説として**?**, 5 章があるので，興味があれば参照されたい．

6.3　コイン合わせゲームにおける混合戦略ナッシュ均衡

6.3.1　混合戦略

表 6.2　コイン合わせゲーム（再掲）

	F	B
F	$-1,\ 1$	$1,\ -1$
B	$1,\ -1$	$-1,\ 1$

表 6.2 のコイン合わせゲームにおいて，プレイヤー 1 が F を選ぶ確率を p_1 とすると，B を選ぶ確率は自動的に $1 - p_1$ である．つまり，プレイヤー 1 の混合戦略は $(p_1, 1 - p_1)$ である．同様に，プレイヤー 2 が F を選ぶ確率を p_2 とすると，プレイヤー 2 の混合戦略は $(p_2, 1 - p_2)$ で表すことができる．

ゆえに，コイン合わせゲームにおける混合戦略の組は $((p_1, 1 - p_1), (p_2, 1 - p_2))$ となる．p_1, p_2 が決まれば，それぞれの混合戦略は自動的に決まるので，以下では煩雑さを避けるために，それぞれの混合戦略を単に p_1, p_2，そして混合戦略の組を (p_1, p_2) と記述する．

6.3.2　期待利得

さて，コイン合わせゲームにおいて 4 つの純粋戦略の組み合わせが実現する確率は表 6.3 の通りである．

表 6.3　コイン合わせゲームにおいて戦略の組が実現する確率

	F	B
F	$p_1 p_2$	$p_1(1-p_2)$
B	$(1-p_1)p_2$	$(1-p_1)(1-p_2)$

ゆえに混合戦略の組 (p_1, p_2) について，プレイヤー 1 の期待利得は

$$\begin{aligned}\pi_1(p_1, p_2) &= p_1 p_2 u_1(F, F) + p_1(1-p_2)u_1(F, B) \\ &\quad + (1-p_1)p_2 u_1(B, F) + (1-p_1)(1-p_2)u_1(B, B)\end{aligned}$$

で定義され，プレイヤー 2 の期待利得は

$$\begin{aligned}\pi_2(p_1, p_2) &= p_1 p_2 u_2(F, F) + p_1(1-p_2)u_2(F, B) \\ &\quad + (1-p_1)p_2 u_2(B, F) + (1-p_1)(1-p_2)u_2(B, B)\end{aligned}$$

で定義される．具体的な利得を代入すると，プレイヤー 1 の期待利得は,

$$\begin{aligned}\pi_1(p_1, p_2) &= p_1 p_2(-1) + p_1(1-p_2)(1) + (1-p_1)p_2(1) + (1-p_1)(1-p_2)(-1) \\ &= (2-4p_2)p_1 + 2p_2 - 1 \qquad (6.6)\end{aligned}$$

また，プレイヤー 2 の期待利得は

$$\begin{aligned}\pi_2(p_1, p_2) &= p_1 p_2(1) + p_1(1-p_2)(-1) + (1-p_1)p_2(-1) + (1-p_1)(1-p_2)(1) \\ &= (4p_1-2)p_2 - 2p_1 + 1 \qquad (6.7)\end{aligned}$$

となる．式 (6.6) は次のようにも導出できる．プレイヤー 1 が純粋戦略 F を選択するときの期待利得を $\pi_1(F)$，純粋戦略 B を選択するときの期待利得を $\pi_1(B)$ とそれ

それ表す[*3]．$\pi_1(F), \pi_1(B)$ は具体的には

$$\begin{aligned}\pi_1(F) &= p_2 u_1(F,F) + (1-p_2)u_1(F,B)\\ &= 1 - 2p_2\\ \pi_1(B) &= p_2 u_1(B,F) + (1-p_2)u_1(B,B)\\ &= -1 + 2p_2\end{aligned}$$

である．ゆえに，プレイヤー 1 の期待利得は

$$\begin{aligned}\pi_1(p_1,p_2) &= p_1\pi_1(F) + (1-p_1)\pi_1(B)\\ &= (\pi_1(F) - \pi_1(B))p_1 + \pi_1(B) \qquad (6.8)\end{aligned}$$

である．式 (6.8) からただちに式 (6.6) が得られる．

同様に式 (6.7) は，プレイヤー 2 が純粋戦略 F を選択するときの期待利得 $\pi_2(F)$，純粋戦略 B を選択するときの期待利得 $\pi_2(B)$，具体的には

$$\begin{aligned}\pi_2(F) &= p_1 u_2(F,F) + (1-p_1)u_2(B,F)\\ &= -1 + 2p_1\\ \pi_2(B) &= p_1 u_2(F,B) + (1-p_1)u_2(B,B)\\ &= 1 - 2p_1\end{aligned}$$

を用いて，

$$\begin{aligned}\pi_2(p_1,p_2) &= p_2\pi_2(F) + (1-p_2)\pi_2(B)\\ &= (\pi_2(F) - \pi_2(B))p_2 + \pi_2(B) \qquad (6.9)\end{aligned}$$

と記述することができる．やはり式 (6.9) からただちに式 (6.7) が得られる**【このことを確認せよ】**．今後は期待利得の記述として，式 (6.8)，式 (6.9) を用いることにする．

6.3.3　最適反応

式 (6.8) のプレイヤー 1 の期待利得

$$\pi_1(p_1,p_2) = (\pi_1(F) - \pi_1(B))p_1 + \pi_1(B) \qquad (6.10)$$

[*3] より厳密には $\pi_1(F) = \pi_1(1,p_2), \pi_1(B) = \pi_1(0,p_2)$ ということである．

はプレイヤー 1 の混合戦略 p_1 の一次関数になっている．そして，一次関数の傾き $(\pi_1(F) - \pi_1(B)) = 2 - 4p_2$ は，プレイヤー 2 の混合戦略 p_2 によって決定される．つまり，プレイヤー 2 の混合戦略によって，期待利得の関数が正の一次関数になったり，負の一次関数になったりする，ということである．では，プレイヤー 2 の混合戦略によってプレイヤー 1 の最適反応はどのように変化するだろうか．3 つのケースについて考えよう（図 6.1 も参照）．

(1) $\pi_1(F) > \pi_1(B)$，つまり $p_2 < 1/2$ のとき，$\pi_1(p_1, p_2)$ は正の一次関数である．ゆえに，プレイヤー 1 にとって最適，つまり期待利得が最大となるのは $p_1^* = 1$.
(2) $\pi_1(F) = \pi_1(B)$, つまり $p_2 = 1/2$ のとき, $\pi_1(p_1, p_2)$ は定数関数である．ゆえに，プレイヤー 1 はどのような混合戦略を用いても最適となる．つまり $0 \leq p_1^* \leq 1$.
(3) $\pi_1(F) < \pi_1(B)$，つまり $p_2 > 1/2$ のとき，$\pi_1(p_1, p_2)$ は負の一次関数である．ゆえに，プレイヤー 1 にとって最適となるのは $p_1^* = 0$.

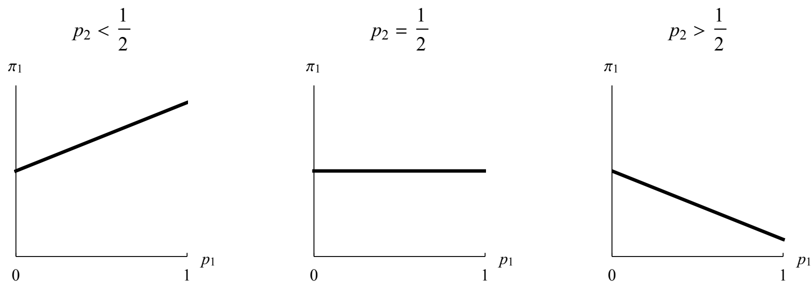

図 6.1　プレイヤー 1 の利得関数

これらをまとめると，プレイヤー 1 の最適反応は

$$p_1^* = \begin{cases} 1 & (p_2 < 1/2 \text{ のとき}) \\ 0 \text{ から } 1 & (p_2 = 1/2 \text{ のとき}) \\ 0 & (p_2 > 1/2 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{6.11}$$

となる．

同様にプレイヤー 2 の最適反応についても，プレイヤー 1 の混合戦略の違いに応じ

て 3 つのケースで考えよう（図 6.2 も参照）.

(1) $\pi_2(F) < \pi_2(B)$，つまり $p_1 < 1/2$ のとき，$\pi_2(p_1, p_2)$ は負の一次関数である．ゆえに，プレイヤー 2 にとって最適となるのは $p_2^* = 0$.
(2) $\pi_2(F) = \pi_2(B)$, つまり $p_1 = 1/2$ のとき, $\pi_2(p_1, p_2)$ は定数関数である．ゆえに，プレイヤー 2 はどのような混合戦略を用いても最適となる．つまり $0 \leq p_2^* \leq 1$.
(3) $\pi_2(F) > \pi_2(B)$，つまり $p_1 > 1/2$ のとき，$\pi_2(p_1, p_2)$ は正の一次関数である．ゆえに，プレイヤー 2 にとって最適となるのは $p_2^* = 1$.

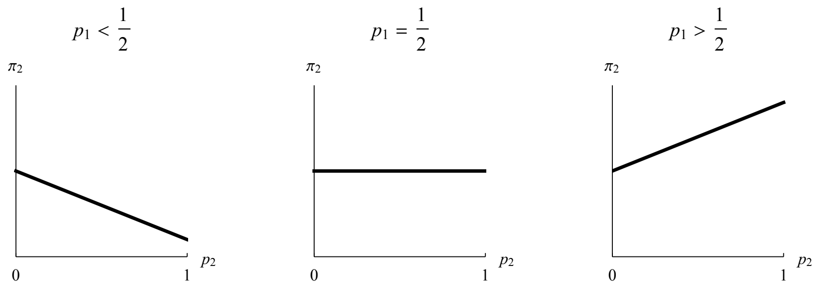

図 6.2　プレイヤー 2 の利得関数

まとめると，プレイヤー 2 の最適反応は

$$p_2^* = \begin{cases} 0 & (p_1 < 1/2 \text{ のとき}) \\ 0 \text{ から } 1 & (p_1 = 1/2 \text{ のとき}) \\ 1 & (p_1 > 1/2 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{6.12}$$

となる.

6.3.4　混合戦略ナッシュ均衡

混合戦略ナッシュ均衡は，両プレイヤーとも相手の混合戦略に対して最適反応をとっている状態である．混合戦略ナッシュ均衡を見つけるために，式 (6.11), 式 (6.12) より次のような 2 つの図を描く.

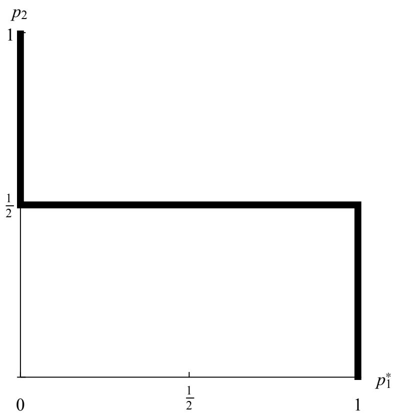

図 6.3　プレイヤー 1 の最適反応

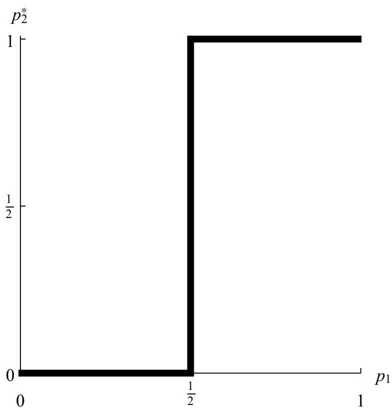

図 6.4　プレイヤー 2 の最適反応

まず図 6.3 はプレイヤー 2 の混合戦略 p_2 を y 軸に，プレイヤー 2 の混合戦略に対するプレイヤー 1 の最適反応 p_1^* を x 軸にとったグラフである．次に，図 6.4 はプレイヤー 1 の混合戦略 p_1 を x 軸に，プレイヤー 1 の混合戦略に対するプレイヤー 2 の最適反応 p_2^* を y 軸にとったグラフである．最後にこれら 2 つの図を合体させると，

図 6.5 のように両プレイヤーの最適反応のグラフとなる．

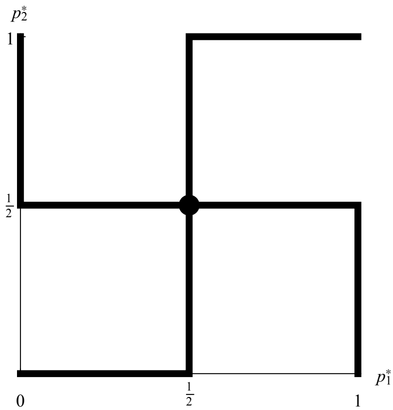

図 6.5　プレイヤー 1,2 の最適反応の組み合わせ

この図において，両プレイヤーの最適反応線の交わるポイントが，お互いが最適反応を出し合う混合戦略ナッシュ均衡である．そして，この場合唯一交わるポイントは $(p_1^*, p_2^*) = (1/2, 1/2)$ である*4．これがこのコイン合わせゲームの唯一のナッシュ均衡である．

混合戦略の組 $(1/2, 1/2)$ がナッシュ均衡であることを確認することは容易である．式 (6.8)，式 (6.9) より，$0 \leq p_1 \leq 1, 0 \leq p_2 \leq 1$ について

$$\pi_1(1/2, 1/2) = 0 = \pi_1(p_1, 1/2)$$
$$\pi_2(1/2, 1/2) = 0 = \pi_2(1/2, p_2)$$

が成り立つ．つまり，1 人だけ手を変えても期待利得は上昇しない．そしてこれらは定義 5 の 2 つの式を満たしているのである．

*4 より精確には $((p_1^*, 1-p_1^*), (p_2^*, 1-p_2^*)) = ((1/2, 1/2), (1/2, 1/2))$ である．

6.3.5　混合戦略ナッシュ均衡の解釈について

混合戦略の組 $(1/2, 1/2)$ がナッシュ均衡であるということの実質的な意味は，コイン合わせゲームでは，ランダムに裏か表を出す，つまりそれこそコインを投げて出た側をそのまま提示するのが，もっとも期待利得が高くなるということである．ただし，1 回だけ行うゲームでは，結局勝って 1 を得るか，負けて -1 を得るかのどちらかしかない．ゲームを繰り返していったときに，ランダムに裏か表を出し続けると平均して 0 の利得が期待できる，ということである[*5].

こうした混合戦略を，確率としてではなく，ある純戦略をとるプレイヤーの割合と解釈することもできる．このような解釈は進化ゲームとの関連において大変重要であるが，詳細は 8 章以降に議論する．

ところで，混合戦略の組 $(1/2, 1/2)$ では，どちらかのプレイヤーが一方的に戦略を変更したとしても，そのプレイヤーの利得は変化しない．ゆえに，両プレイヤーは自らの戦略を積極的に変更しようとはしない，というのがナッシュ均衡で想定されていることである．しかし，逆に利得が変わらないのであれば，プレイヤーは戦略をどのようにでも変更させるのではないかと想定することもできる．このとき，たとえばプレイヤー 1 が戦略を 1/2 から 2/3 に変更したとすると，式 (6.12) よりプレイヤー 2 の最適反応は 1 となり，そうすると今度は式 (6.11) よりプレイヤー 1 の最適反応は 0 となり，さらには $\cdots\cdots$ とナッシュ均衡からどんどん外れていってしまう．

純戦略ではない混合戦略によるナッシュ均衡は一般的に，唯一の最適反応同士の組によって構成されない，つまり，定義 5 の 2 つの式において，つねに強い不等式が成り立つことはない．一方，純戦略同士の場合は，つねに強い不等式が成り立つナッシュ均衡となる場合がある．これを**狭義ナッシュ均衡** (strict Nash equilibrium) という．狭義ナッシュ均衡においては，すべてのプレイヤーは戦略を変更しようとすると必ず損をするのであって，戦略を変更する誘因がまったくないといえる．一方，純戦略ではない混合戦略ナッシュ均衡は，狭義ナッシュ均衡となることはないのであって，その分均衡概念としては弱いといえる (**?**, 82–4).

[*5] ただし，5 章のように割引率は考えない．

6.3.6　練習問題

(1) 3 章表 3.4 の両性の戦いを混合拡大し，混合戦略ナッシュ均衡を求めよ（純戦略による 2 つのナッシュ均衡を含めて 3 つのナッシュ均衡が存在する）.

第 7 章

2×2 対称ゲームの 4 類型の混合戦略ナッシュ均衡分析

本章では，2×2 対称ゲームの一般型を混合拡大し，4 類型のそれぞれについて混合戦略ナッシュ均衡を分析する．

7.1　2×2 対称ゲームの混合拡大

4 章で詳しく検討した 2×2 対称ゲームをもう一度取り上げよう．各プレイヤーの戦略が C と D の 2 種類がある 2×2 対称ゲームの利得表は表 7.1 のようになる．

表 7.1　2×2 対称ゲームの一般的記述（再掲）

	C	D
C	$R,\ R$	$S,\ T$
D	$T,\ S$	$P,\ P$

このゲームを一般型のまま混合拡大しよう．

7.1.1　混合戦略

プレイヤー 1 が C を選択する確率を p_1，D を選択する確率を $1 - p_1$ とする．同様に，プレイヤー 2 が C を選択する確率を p_2，D を選択する確率を $1 - p_2$ とする．プレイヤー 1 の混合戦略を p_1，プレイヤー 2 の混合戦略を p_2，そして混合戦略の組を (p_1, p_2) で表す．

7.1.2　期待利得と最適反応

まずは，プレイヤー 1 の期待利得と最適反応について検討する．プレイヤー 1 が純粋戦略 C を選択するときの期待利得を $\pi_1(C)$，純粋戦略 D を選択するときの期待利得を $\pi_1(D)$ とそれぞれ表すと，

$$\pi_1(C) = Rp_2 + S(1 - p_2) \tag{7.1}$$

$$\pi_1(D) = Tp_2 + P(1 - p_2) \tag{7.2}$$

である．このとき，プレイヤー 1 の期待利得は

$$\pi_1(p_1, p_2) = (\pi_1(C) - \pi_1(D))p_1 + \pi_1(D) \tag{7.3}$$

であるが，ここで，

$$\alpha = R - T, \quad \beta = P - S$$

とおくと，

$$\pi_1(C) - \pi_1(D) = \alpha p_2 - \beta(1 - p_2) \tag{7.4}$$

である．プレイヤー 2 の混合戦略 p_2 に対するプレイヤー 1 の最適反応は，式 (7.3) と式 (7.4) より，

$$p_1^* = \begin{cases} 1 & (\alpha p_2 - \beta(1 - p_2) > 0 \text{ のとき}) \\ 0 \text{ から } 1 & (\alpha p_2 - \beta(1 - p_2) = 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (\alpha p_2 - \beta(1 - p_2) < 0 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{7.5}$$

である．

同様にして，プレイヤー 2 の C の期待利得 $\pi_2(C)$，D の期待利得 $\pi_2(D)$ は，

$$\pi_2(C) = Rp_1 + S(1 - p_1) \tag{7.6}$$

$$\pi_2(D) = Tp_1 + P(1 - p_1) \tag{7.7}$$

となり，プレイヤー 2 の期待利得は

$$\pi_2(p_1, p_2) = (\pi_2(C) - \pi_2(D))p_2 + \pi_2(D) \tag{7.8}$$

で表される．このとき，

$$\pi_2(C) - \pi_2(D) = \alpha p_1 - \beta(1 - p_1) \tag{7.9}$$

となる．プレイヤー 1 の混合戦略 p_1 に対するプレイヤー 2 の最適反応は，式 (7.8) と式 (7.9) より，

$$p_2^* = \begin{cases} 1 & (\alpha p_1 - \beta(1-p_1) > 0 \text{ のとき}) \\ 0 \text{ から } 1 & (\alpha p_1 - \beta(1-p_1) = 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (\alpha p_1 - \beta(1-p_1) < 0 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{7.10}$$

である．

7.2　4 類型における混合戦略ナッシュ均衡

これらの情報を元に，2×2 対称ゲームの 4 類型における混合戦略ナッシュ均衡を分析しよう．

7.2.1　Type I　非ジレンマ状況

非ジレンマ状況の条件は $R > T, P < S$ であった．つまり，$\alpha > 0, \beta < 0$ である．このとき，$\alpha p_1 - \beta(1 - p_1)$ はつねに正となる**【このことを確認せよ】**．ゆえにプレイヤー 1 の最適反応は，プレイヤー 2 の混合戦略にかかわらずつねに $p_1^* = 1$，同時にプレイヤー 2 の最適反応は，プレイヤー 1 の混合戦略にかかわらずつねに $p_2^* = 1$ である．

結局，図 7.1 のように，両プレイヤーが最適反応を出し合いナッシュ均衡となるのは $(p_1^*, p_2^*) = (1, 1)$ であり，**純戦略の組 (C, C) が混合拡大した場合でも唯一のナッシュ均衡となるのである．**

7.2.2　Type II　囚人のジレンマ

囚人のジレンマの条件は $R < T, P > S$ である．この場合，$\alpha < 0, \beta > 0$ であり $\alpha p_1 - \beta(1 - p_1)$ はつねに負となる．ゆえに，プレイヤー 1 の最適反応は，プレイヤー 2 の混合戦略にかかわらずつねに $p_1^* = 0$，プレイヤー 2 の最適反応は，プレイヤー 1 の混合戦略にかかわらずつねに $p_2^* = 0$ となる．

結果として，図 7.2 のように，両プレイヤーが最適反応を出し合いナッシュ均衡となるのは $(p_1^*, p_2^*) = (0, 0)$ であり，純戦略の組 (D, D) が混合拡大した場合でも唯一のナッシュ均衡となる．

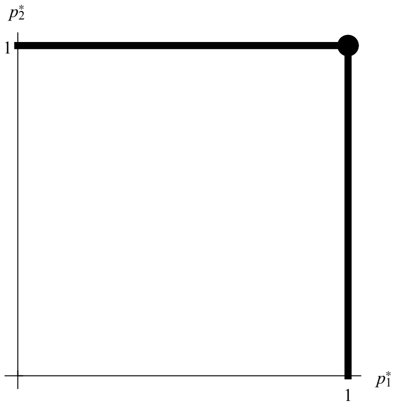

図 7.1　非ジレンマ状況におけるプレイヤー 1,2 の最適反応の組み合わせ

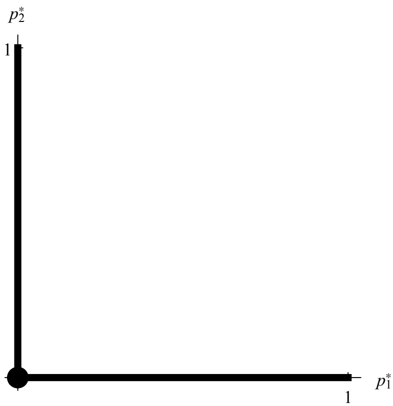

図 7.2　囚人のジレンマ状況におけるプレイヤー 1,2 の最適反応の組み合わせ

7.2.3　Type III　調整ゲーム

調整ゲームの条件は $R > T, P > S$ である．このとき，$\alpha > 0, \beta > 0$ であるが，$\alpha p_1 - \beta(1 - p_1)$ の正負は一意には決まらない．そこで $\alpha + \beta > 0$ であることに注意しながら最適反応の分岐条件をまとめると，式 (7.5) と式 (7.10) はそれぞれ

$$p_1^* = \begin{cases} 1 & \left(p_2 > \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \text{のとき}\right) \\ 0 \text{ から } 1 & \left(p_2 = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \text{のとき}\right) \\ 0 & \left(p_2 < \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \text{のとき}\right) \end{cases}$$

$$p_2^* = \begin{cases} 1 & \left(p_1 > \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \text{のとき}\right) \\ 0 \text{ から } 1 & \left(p_1 = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \text{のとき}\right) \\ 0 & \left(p_1 < \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \text{のとき}\right) \end{cases}$$

となる．

これらをもとに，最適反応の組み合わせのグラフを作成すると図 7.3 のようになる．

ここから，ナッシュ均衡は

$$(0,0), (1,1), \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)$$

の 3 タイプがあることが分かる．つまり，純戦略によるナッシュ均衡である (C, C) と (D, D) に加えて，混合戦略によるナッシュ均衡として $(\beta/(\alpha+\beta), \beta/(\alpha+\beta))$ が見出されたのである．

数値例として表 7.2 のゲームを取り上げよう．そうすると，

$$\frac{\beta}{\alpha+\beta} = \frac{1-0}{5-3+1-0} = \frac{1}{3}$$

である．ゆえに両プレイヤーともが 1/3 の確率で C を，2/3 の確率で D を出すという混合戦略の組がナッシュ均衡の 1 つとなるのである．また，このときの期待利得

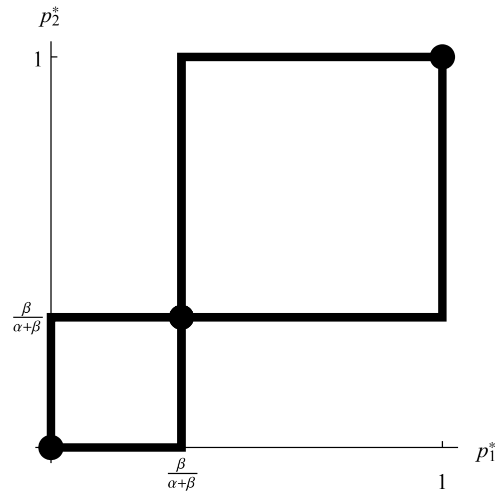

図 7.3　調整ゲームにおけるプレイヤー 1,2 の最適反応の組み合わせ

表 7.2　調整ゲーム例（再掲）

	C	D
C	5,　5	0,　3
D	3,　0	1,　1

は，式 (7.3) と式 (7.8) より，

$$\pi_1(1/3, 1/3) = \pi_1(D) = 1 + \frac{2}{3}$$
$$\pi_2(1/3, 1/3) = \pi_2(D) = 1 + \frac{2}{3}$$

である．ゆえに，期待利得はそれぞれのプレイヤーについて (D, D) のときよりも大きくなるものの，(C, C) の利得よりは小さく，そのためにパレート最適ではない．

7.2.4　Type IV　チキンゲーム

チキンゲームの条件は $R < T, P < S$ である．このとき，$\alpha < 0, \beta < 0$ であり，やはり $\alpha p_1 - \beta(1-p_1)$ の正負は一意には決まらない．そこで $\alpha + \beta < 0$ であることに注意しながら最適反応の分岐条件をまとめると，式 (7.5) と式 (7.10) はそれぞれ

$$p_1^* = \begin{cases} 1 & \left(p_2 < \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\text{のとき}\right) \\ 0\text{ から }1 & \left(p_2 = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\text{のとき}\right) \\ 0 & \left(p_2 > \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\text{のとき}\right) \end{cases}$$

$$p_2^* = \begin{cases} 1 & \left(p_1 < \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\text{のとき}\right) \\ 0\text{ から }1 & \left(p_1 = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\text{のとき}\right) \\ 0 & \left(p_1 > \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\text{のとき}\right) \end{cases}$$

となる**【このことを確認せよ】**．ここから，最適反応の組み合わせのグラフを作成すると図 7.4 のようになる．

このグラフから，最適反応の組であるナッシュ均衡は

$$(1,0), (0,1), \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)$$

の 3 つがあることが分かる．つまり，純戦略によるナッシュ均衡 $(C, D), (D, C)$ に加えて，混合戦略によるナッシュ均衡が存在する．

表 7.3　チキンゲーム例（再掲）

	C	D
C	3,　3	1,　5
D	5,　1	0,　0

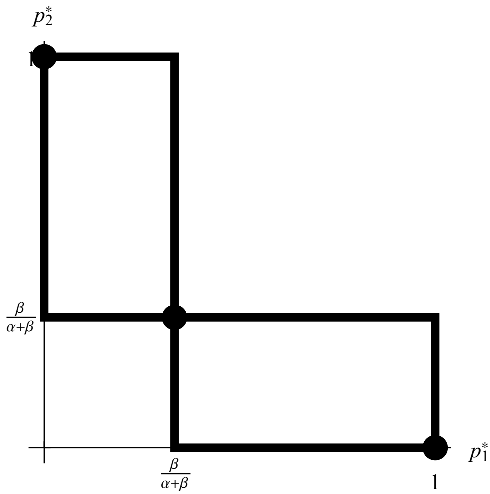

図 7.4　チキンゲームにおけるプレイヤー 1,2 の最適反応の組み合わせ

数値例として，表 7.3 を考えよう．このとき

$$\frac{\beta}{\alpha+\beta} = \frac{0-1}{3-5+0-1} = \frac{1}{3}$$

である．つまり，両プレイヤーとも C を 1/3 の確率で，D を 2/3 の確率で出すという混合戦略の組がナッシュ均衡になる．そして，このときの期待利得は

$$\pi_1(1/3, 1/3) = \pi_1(D) = 1 + \frac{2}{3}$$
$$\pi_2(1/3, 1/3) = \pi_2(D) = 1 + \frac{2}{3}$$

であり，パレート最適ではない．

7.2.5　混合戦略ナッシュ均衡の解釈

ここまで標準型ゲームを混合拡大したゲームにおけるナッシュ均衡について検討してきた．純戦略ではない混合戦略の実質的な解釈は，各プレイヤーがサイコロのような確率化装置を用いて意志決定を行うというものであったが，お互いの混合戦略が最

適反応となる混合戦略ナッシュ均衡が，具体的にどのような状態なのかを直感的に理解することは容易ではない．

ゆえに，混合戦略はナッシュ均衡の存在定理と密接に関連し，ゲーム理論内在的には大変重要なのであるが，経験的事象との関連を重視するような社会学的研究の視点からは扱いづらいものである．一方，次章で導入する進化ゲームという枠組みは，混合戦略や混合戦略によるナッシュ均衡に，より実質的な意味——ある純戦略をとるプレイヤーの社会における割合とその割合の時間的安定性——を与えるものである．そこで，次章以降は進化ゲームという考え方とそれによる 2×2 対称ゲームの分析を導入する．

第 8 章

進化ゲームとレプリケーターダイナミクス

本章では，進化ゲーム，そしてレプリケーターダイナミクスというゲームの分析枠組みを導入する．その際，**?**で取り上げられた調整ゲームの一類型を具体例として議論を進める．

8.1　交通ルール調整ゲーム (?)

次のようなゲームを分析しよう．2 人のプレイヤーは車に乗る際に，道路の左側を走る（L）か右側を走るかを決める（R）．2 人が別々の側を選択すれば，すれ違うときに正面衝突してしまう．ゆえに，2 人とも同じ側を選ぶことが双方にとってより良い利得をもたらすが，2 人とも右ハンドルの車に乗っているために，右側通行よりも左側通行の方が良いと考えている．このゲームの利得表は表 8.1 のようになる．

表 8.1　交通ルール調整ゲーム

	L	R
L	2,　2	0,　0
R	0,　0	1,　1

このゲームはゲームの 4 類型でいえば，調整ゲームの特殊例である．このゲームを混合拡大した場合ナッシュ均衡 (p_1^*, p_2^*) は

$$(1,1), (0,0), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \tag{8.1}$$

となる【**このことを確認せよ**】[*1]．つまり 2 人とも L を選択するというパレート最適な純戦略によるナッシュ均衡と，2 人とも R を選択する非パレート最適純戦略ナッシュ均衡，そしてさらに 2 人とも 1/3 の確率で L を選択し，2/3 の確率で R を選択する混合戦略による非パレート最適ナッシュ均衡，以上 3 種類のナッシュ均衡がこのゲームから見出される．

4.3.3 節で説明したように，こうした調整ゲームには，複数あるナッシュ均衡のうちどれが実際に実現するかがゲーム内在的には分からない，といういわゆる「複数均衡問題」がある．また，交通ルールのような社会的規範が人々の合理的選択の結果どのよう形成されるか，という社会学的観点から交通ルール調整ゲームを解釈する場合，これまでのような 1 回限りのゲームは分析枠組みとしてはそぐわない．

そこで，進化ゲームという枠組みを新たに導入し，交通ルール調整ゲームを進化ゲームとして分析してみよう．

8.2　進化ゲームの枠組み

ここで大勢のプレイヤーがいる社会を想定しよう．そして，社会内の任意の 2 人のプレイヤー間で 1 種類の対称ゲーム（ここでは交通ルール調整ゲーム）がランダムに行われると仮定する．交通ルール調整ゲームでいえば，道を走っていてその都度偶然出合う他人と調整の意志決定が行われると考えればよい．ただし，進化ゲームの枠組みにおいては，プレイヤーは 1 回 1 回のゲームにおいて，その都度合理的基準に基づき意志決定するのではなく，あらかじめ選択する（純）戦略を決定していると想定する．つまり，交通ルールの例では，社会には右側通行するグループと左側通行するグループが存在する．このような，ある戦略をとるプレイヤーのグループのことを**戦略グループ** (strategy group) という．

そして，ランダムに行われるゲームの利得に応じて，戦略グループの割合が変化すると想定する．具体的にいえば，ある戦略をとる戦略グループが相対的により大きい

[*1] 後に導入する戦略グループの割合の表記と混乱しないために，ナッシュ均衡を 2 人のプレイヤーのとる確率分布の形 $((p_1^*, 1-p_1^*), (p_2^*, 1-p_2^*))$ で丁寧に述べておくと次のようになる．すなわち，

$$((1,0),(1,0)),((0,1),(0,1)),((1/3,2/3),(1/3,2/3)). \tag{8.2}$$

平均的利得を得るのであれば，そのグループの割合は大きくなり，逆に相対的により小さい平均的利得しか得られないのであれば，そのグループの割合は小さくなると仮定する．

戦略グループの割合の変化は，生物学的進化のアナロジーで，より多くの利得（適応度）を得る種は，自分たちの子孫を残すチャンスが大きいと考えてもよいし，より多くの利得を得る戦略を他の戦略グループのプレイヤーが学習する，と見なしてもよい．いずれにせよ，2 人ゲームが社会内のプレイヤー間でランダムに行われ，その平均的な結果によって戦略グループの割合が変化していく，というのが進化ゲームの基本的な枠組みである（図 8.1）．そして社会における戦略グループの構成が時間的にどのように変化し，そして結果的にどのような構成に落ち着くかが分析の焦点となる．

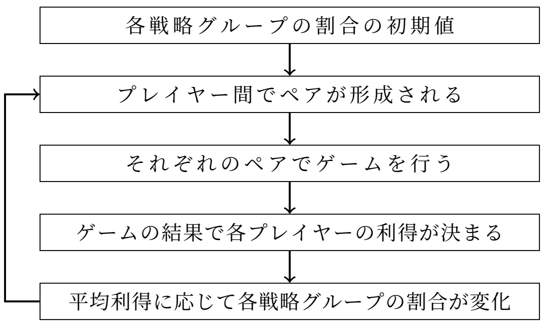

図 8.1　進化ゲームの過程（**?**, 59 より，適宜表現を変更した）

8.3　レプリケータ・ダイナミクス

以下，戦略グループの平均利得，戦略グループ割合の時間的変化について一般的な定義を与える．

8.3.1　戦略グループの平均利得

ある 2 人対称ゲームにおいて K 個の純粋戦略 $s_1, s_2, \ldots, s_K$ があったとする．このゲームは対称ゲームなので戦略の組 (s_j, s_k) についての各プレイヤーの利得関数は,

$$u_1(s_j, s_k) = u_2(s_k, s_j) \tag{8.3}$$

である．2 人のプレイヤーの利得関数は実質的には同一なので，以下添字をとって $u(s_j, s_k)$ と表す．

このとき，社会においてそれぞれの純粋戦略をとる戦略グループの割合を $q_1, q_2, \ldots, q_K$ とする．また, 社会における戦略グループの分布を $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_K)$ と表す．ただし，$\forall k, 0 \leq q_k \leq 1, \sum_{k=1}^{K} q_k = 1$ である．

戦略 s_j の戦略グループのプレイヤーが，様々な相手とランダムにゲームをプレイしていった場合の平均利得を考えよう．これを**戦略 s_j の平均利得**とよぶ．期待値の定義から明らかであるが，戦略 s_j の平均利得は，相手のプレイヤーが混合戦略 $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_K)$ を選択し，自らが純粋戦略 s_j を選択したときの期待利得に等しい．つまり，戦略 s_j の平均利得は $\pi(s_j)$ で表すことができ,

$$\pi(s_j) = \sum_{k=1}^{K} q_k u(s_j, s_k) = q_1 u(s_j, s_1) + q_2 u(s_j, s_2) + \cdots + q_K u(s_j, s_K) \tag{8.4}$$

である．

そして，社会の各プレイヤーが，様々な相手とランダムにゲームをプレイしていった場合の平均利得を，**社会全体の平均利得**とよぶことにする．これは，自らも相手も混合戦略 $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_K)$ を選択したときの期待利得に等しい．つまり，社会全体の平均利得は $\pi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})$ であり,

$$\pi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}) = \sum_{j=1}^{K} q_j \pi(s_j) = \sum_{j=1}^{K} \sum_{k=1}^{K} q_j q_k \pi(s_j, s_k) \tag{8.5}$$

で定義される．

8.3.2 戦略グループ割合の時間的変化

戦略グループの割合 $q_1, q_2, \ldots, q_K$ の時間的変化を表現する．このとき，q_i の瞬間的な変化率を dq_i/dt で表す．q_i の瞬間的変化率は，ほんの少しの時間的変化に対して q_i がどの程度増加もしくは減少するかを示している*2．具体的には，dq_i/dt の正負によって q_i の時間的増減が分かる．

- $\dfrac{dq_i}{dt} > 0$ であれば，q_i は増加していく．
- $\dfrac{dq_i}{dt} = 0$ であれば，q_i は変化しない．
- $\dfrac{dq_i}{dt} < 0$ であれば，q_i は減少していく．

さて，q_i の瞬間的変化率 dq_i/dt は，具体的には次のような式によって決まると考える．すなわち，

$$\frac{dq_i}{dt} = [\pi(s_i) - \pi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})]q_i. \tag{8.8}$$

この式の右辺を詳しく説明しよう．

---

*2 q_i は t の変化にしたがって変化するのであるから，t の関数である．これを強調するために $q_i = q_i(t)$ と表してもよい．このとき dq_i/dt は，関数 $q_i(t)$ を t について微分したときの導関数である．

ここで微分法や導関数を知らない読者のために，思いっきり簡略化した説明をしておく．時間 t の増分を Δt と表す．すると，t から Δt だけ経過したあとの時間は $t + \Delta t$ である．また，t から Δt だけ経過したあとの q_i の値は $q_i(t + \Delta t)$ となる．このとき，t から Δt だけ経過するときの q_i の平均的な変化率は

$$\frac{q_i(t+\Delta t) - q_i(t)}{t + \Delta t - t} = \frac{q_i(t+\Delta t) - q_i(t)}{\Delta t} \tag{8.6}$$

である．q_i の増分 $q_i(t + \Delta t) - q_i(t)$ を Δq_i で示すことにすれば，平均変化率は簡単に $\Delta q_i/\Delta t$ で表される．そして，Δt を限りなく 0 に近づけていった結果を dq_i/dt という表記法で表すと約束する．つまり，

$$\frac{dq_i}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q_i}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q_i(t+\Delta t) - q_i(t)}{\Delta t}. \tag{8.7}$$

$\Delta q_i/\Delta t$ は分数であるが，dq_i/dt は $\Delta q_i/\Delta t$ の極限値であり分数ではないことに注意せよ．また，導関数という名前からも分かるように，dq_i/dt もまた t についての関数である．つまり，t の値が変化すれば dq_i/dt の値も変化する．dq_i/dt を $q_i'(t)$ と表すこともある．

まず，左項の $[\pi(s_i) - \pi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})]$ であるが，これは，t **時における戦略** s_i **の戦略グループの平均利得と社会全体の平均利得の差に** dq_i/dt **が比例する**ことを示している．このことをより具体的に言うと次のようになる．社会の中で平均的に得られる利得よりも，戦略 s_i をとったときに平均的に得られる利得の方が高ければ，戦略 s_i に乗り換えるプレイヤーが増えるし，逆に戦略 s_i をとったときに平均的に得られる利得の方が低ければ，戦略 s_i をとり続けるプレイヤーが減る．もし，戦略グループの平均利得と社会全体の平均利得が等しければ，プレイヤーは増えも減りもしない．そして，戦略グループの平均利得と社会全体の平均利得との差が大きければ大きいほど（マイナス方向に大きければ大きければ大きいほど），戦略グループの増え方（減り方）は大きくなる．

そして，右項に q_i があるのは，t **時における戦略グループの大きさに** dq_i/dt **が比例する**ことを示している．つまり，戦略グループの平均利得と社会全体の平均利得との差が一定のとき，戦略グループが大きければ大きいほど，戦略グループの増え方（減り方）は大きくなる．

社会における戦略グループの分布を示す $(q_1, q_2, \ldots, q_K)$ のそれぞれの要素について dq_i/dt が式 (8.8) によって定義された微分方程式系[*3]

$$\begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = [\pi(s_1) - \pi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})]q_1 \\ \dfrac{dq_2}{dt} = [\pi(s_2) - \pi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})]q_2 \\ \quad\vdots \\ \dfrac{dq_K}{dt} = [\pi(s_K) - \pi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})]q_K \end{cases} \tag{8.9}$$

のことを**レプリケーター・ダイナミクス** (replicator dynamics) という[*4]．

[*3] さしあたりは，微分方程式とは，時間 t を変数とする関数（ここでは $q_i = q_i(t)$）と，その導関数（ここでは dq_i/dt であるが，さらに高次の導関数を取り上げることもある）とを含む方程式のことである，と理解しておけばよい．

[*4] あえて，日本語に訳せば「複製物の力学」ということになろうか．おおまかには，社会における部分集団の増減についての力学と考えればよい．

8.4　交通ルール調整ゲームのレプリケータ・ダイナミクス

では実際に交通ルール調整ゲームのレプリケータ・ダイナミクスを検討しよう．戦略 L をとる戦略グループの割合を q_1, 戦略 R をとる戦略グループの割合を $q_2 = 1 - q_1$ とする．

戦略 L グループの平均利得は,

$$\pi(L) = 2 \cdot q_1 + 0 \cdot q_2 = 2q_1$$

である．そして，戦略 R グループの平均利得は,

$$\pi(R) = 0 \cdot q_1 + 1 \cdot q_2 = q_2$$

である．最後に，社会全体の平均利得は

$$\pi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}) = q_1\pi(L) + q_2\pi(R)$$

となるので，交通ルール調整ゲームのレプリケータ・ダイナミクスは

$$\begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = [\pi(L) - \pi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})]q_1 = (\pi(L) - \pi(R))(1 - q_1)q_1 \\ \dfrac{dq_2}{dt} = [\pi(R) - \pi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})]q_2 = (\pi(R) - \pi(L))(1 - q_1)q_1 \end{cases}$$

である．ここで

$$\frac{dq_1}{dt} = -\frac{dq_2}{dt}$$

が成り立つので，q_1 の挙動を分析すれば q_2 の挙動も完全に把握することができる[*5]．ゆえに，以下では dq_1/dt を分析する．

[*5] より一般的にいえば $q_2 = 1 - q_1$ のとき,

$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{d(1 - q_1)}{dt} = -\frac{dq_1}{dt}.$$

8.5　レプリケータ・ダイナミクスの分析

8.5.1　定常点

微分方程式系において，時間 t に対して不変な点がある場合，そのような点を**定常点** (stationary point) という[*6]．2 つの戦略グループの分布 (q_1, q_2) についていえば，

$$\frac{dq_1}{dt} = 0, \qquad \frac{dq_2}{dt} = 0$$

となる点 (q_1^*, q_2^*) が定常点である．定常点はいったんその状態に落ち着いたら，その状態から変化することはないという意味で，これまでゲームの分析で用いてきた「均衡」と相同の概念である．

では，交通ルール調整ゲームのレプリケータ・ダイナミクスにおいて定常点はどこにあるだろうか．ところで，dq_1/dt の値は q_1 の値によって変わってくるので，dq_1/dt は q_1 の関数でもある．このことを明示するために

$$f(q_1) = \frac{dq_1}{dt} = (\pi(L) - \pi(R))(1 - q_1)q_1 \tag{8.10}$$

と記述することにしよう．このとき，レプリケータ・ダイナミクスの定常点は $f(q_1^*) = 0$ となる $(q_1^*, 1 - q_1^*)$ である．ここで,

$$\pi(L) - \pi(R) = 2q_1 - (1 - q_1) = 0 \iff q_1 = \frac{1}{3}$$

であるので，$f(q_1^*) = 0$ となる q_1^* は $0, 1, 1/3$ の 3 つである．ゆえに，定常点は $(0, 1), (1, 0), (1/3, 2/3)$ である[*7]．具体的にいえば，$(0, 1)$ は社会の全員が R を選択する状態，$(1, 0)$ は社会の全員が L を選択する状態であり，$(1/3, 2/3)$ は社会の 33% が L を選択し，残りの 66% が R を選択している状態である．

これらの定常点が，もともとの交通ルール調整ゲームにおける 3 つの（混合戦略）ナッシュ均衡を構成するそれぞれの戦略に対応していることを確認しよう．実際に，任意の対称ゲームにおいて，両プレイヤーの出す手が同一となるナッシュ均衡（これ

[*6] 「静止点」や「不動点」とも呼ばれる．

[*7] 以下，定常点を記述するとき，ベクトル表記を省略して，q_1 の値だけを書くことがある．

を対称ナッシュ均衡 (symmetric Nash equilibrium) という）が存在するならば，対称ナッシュ均衡を構成するそれぞれの混合戦略は，レプリケータ・ダイナミクスにおいて必ず定常点となることが知られている*8．とくに，対称ナッシュ均衡が純粋戦略ではない完全な混合戦略によって成り立っている場合，その混合戦略とレプリケータ・ダイナミクスにおける 1 つの定常点は完全に一対一対応する*9.

要するに，混合拡大したゲームの対称ナッシュ均衡，とくに純粋戦略ではない完全な混合戦略によって成り立つ対称ナッシュ均衡は，それぞれの純粋戦略グループの割合が 1 つの社会において拮抗する状態として解釈できるのである.

8.5.2　位相図

さて，定常点以外では，モデルはどのように動くのであろうか．定常点以外では $f(q_1)$ の正負は $(\pi(L) - \pi(R))$ に依存して決まる．具体的には，$q_1 > 1/3$ のときには，$f(q_1) > 0$ なので，q_1 は増加する．一方．$q_1 < 1/3$ のとき $f(q_1) < 0$ なので，q_1 は減少していくことがわかる.

より厳密に，定常点を含む系の時間的変化を把握するために，$f(q_1) = dq_1/dt$ のグラフを描くことにする．これを**位相図** (phase diagram) という.

まずは，図 8.2 からも $0, 1/3, 1$ が定常点となることが確認できるだろう．そして $f(q_1) > 0$ のとき，q_1 は時間の経過とともに増大する．つまり，図で言えば右側の $q_1^* = 1$ の方向へと動いていく．逆に，$f(q_1) < 0$ のとき，q_1 は時間の経過とともに減少する．図上では左側の $q_1^* = 0$ の方向へと動いていく.

つまり，3 つの定常点以外の点を初期値 q_1^0 としてスタートした場合，必ず最終的には 0 か 1 の定常点へと辿り着くのである.

---

*8 ただし，逆は必ずしも成り立たない．つまり，定常点であるからといって，それが元のゲームで対称ナッシュ均衡を構成する混合戦略であるとは限らない.

*9 この辺りの議論は詳しくは，J. W. ウェイブルの『進化ゲームの理論』の説明 (**?**, 100–12) を参照のこと.

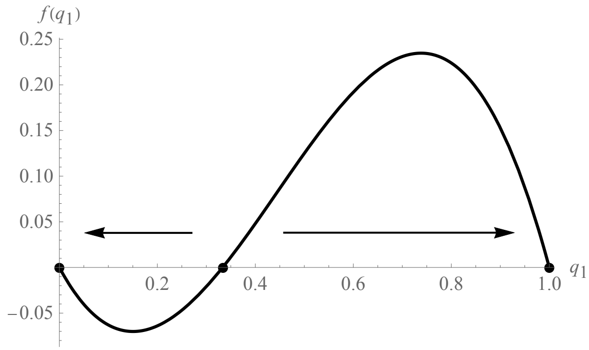

図 8.2　交通ルール調整ゲームの位相図

8.5.3　定常点の安定性

次に，3 つある定常点を安定性という観点から評価しよう．ここで，漸近安定ならびに不安定という概念を導入する．

ある定常点 $\boldsymbol{q}$ が**漸近安定である** (asymptotically stable) とは，定常点の小さな任意の変化に対して，$\boldsymbol{q}$ に戻る運動が生じることである．そして，ある定常点 $\boldsymbol{q}$ が**不安定である** (unstable) とは，逆に，定常点の小さな任意の変化に対して，$\boldsymbol{q}$ から遠ざかる運動が生じることである．

ここでいう，定常点の小さな任意の変化とは，具体的にはプレイヤー間の学習エラーや，社会への参入プレイヤーの登場によって，戦略グループ分布が定常点からほんの少しだけ変化する事態のことである．そのような攪乱要因による揺らぎに対して，定常点が安定であるかどうかが問題となる．

図 8.2 の位相図からも分かるとおり，定常点 $q_1^* = 0$ において，何らかの攪乱要因によって q_1 が若干増加したとしても，0 の近くでは $f(q_1) < 0$ なので，結局時間の経過とともに q_1 は 0 へと戻っていく．同様のことは定常点 $q_1^* = 1$ についても言えるので，定常点 $q_1^* = 0$ ならびに $q_1^* = 1$ は漸近安定であることが確認できる**【このことを確認せよ】**．

一方，残る定常点 $q_1^* = 1/3$ の場合，1/3 から若干でも減少すると，q_1 は 0 へと遠

ざかってしまう．また，1/3 からのわずかな増加は 1 への移行を帰結する．ゆえに，定常点 $q_1^* = 1/3$ は不安定である．

以上，3 つの定常点を安定性という観点から峻別することができた．$(0, 1)$ や $(1, 0)$ という戦略グループの分布状態は，わずかな変化や揺らぎに対して頑健な均衡状態であるのに対して，$(1/3, 2/3)$ という分布状態の場合，そのような分布がたまたま実現した場合その状態は均衡状態になるものの，ほんのわずかな変化やゆらぎによってたちまちその均衡状態は破綻してしまう，そのような脆い均衡状態であることがわかった．そして，より頑健な均衡状態である漸近安定定常点の方が，不安定な定常点と比較して，より実現可能性が高いと考えられるのである．

8.5.4　漸近安定点の実現可能性

定常点 0 と 1 が漸近安定であることが分かったが，ではそのうちどちらの方がより実現可能性が高いと言えるだろうか．このことを考えるために，吸引域という概念を導入しよう．ある定常点 $\boldsymbol{q}^*$ の**吸引域** (basin of attraction) とは，時間の経過とともに $\boldsymbol{q}^*$ に収束するような，初期値 $\boldsymbol{q}^0$ の集合のことである．つまり簡単に言えば，最終的に $\boldsymbol{q}^*$ に落ち着くような $\boldsymbol{q}$ の領域のことである．

それぞれの定常点の吸引域を確認しよう．まずは漸近安定となる 2 つの定常点についてである．定常点 $q_1^* = 0$ の吸引域は $0 \leq q_1^0 < 1/3$ であり，定常点 $q_1^* = 1$ の吸引域は $1/3 < q_1^0 \leq 1$ である．一方，漸近安定でない定常点 $q_1^* = 1/3$ の吸引域は $q_1^0 = 1/3$ のただ 1 点である．

吸引域の分析から分かることは，第一に，初期値に依存して最終的な定常点が変わってくるということである．第二に，2 つの漸近安定点を比較すると，もし初期状態，つまり社会における戦略グループの初期構成がランダムに決まるとすれば，最終的に定常点 $q_1^* = 1$ に収束する可能性の方が，定常点 $q_1^* = 0$ に収束する可能性よりも高いということである．より具体的に言えば，初期値 q_1^0 が一様分布するという条件のもとでは，定常点 $q_1^* = 0$ に収束する確率は 1/3 であるのに対して，定常点 $q_1^* = 1$ に収束する確率は 2/3 となる．つまり，定常状態 $(1, 0)$ が $(0, 1)$ に比べて 2 倍実現の可能性が高いということである．

8.5.5　ゲームの解釈

最後に，交通ルール調整ゲームのレプリケータ・ダイナミクスの分析結果をまとめながら，結果を具体的なゲーム状況に照らして解釈しよう．

まず，レプリケータ・ダイナミクスの定常点として，$(0,1),(1,0),(1/3,2/3)$ の 3 点が見出された．これらは 1 回限りの交通ルール調整ゲームにおいて対称ナッシュ均衡を構成する混合戦略と一対一対応する．つまり対称ナッシュ均衡における混合戦略は，レプリケータ・ダイナミクスにおいて定常状態となる戦略グループの分布として解釈することができるのである．

さらに, 3 つの定常点は, 漸近安定となる $(0,1),(1,0)$, 逆に不安定となる $(1/3,2/3)$ に分けることができた．そのうち不安定点 $(1/3,2/3)$ は，新参者が社会に入ってくるとか，あるプレイヤーのミスといった外在的攪乱要因によってたちまち崩れてしまう状態であり，極めて不安定な定常状態である．反対に，漸近安定となる $(0,1),(1,0)$ は外在的攪乱要因に対して頑健である．こうしたことから，長期的な時間的経過を考慮した場合，漸近安定な定常点 $(0,1),(1,0)$ の方が，不安定点 $(1/3,2/3)$ よりも実現可能性が高いと判断できる．

さらに，吸引域を調べると，$(0,1)$ の吸引域は $0 \leq q_1^0 < 1/3$ となる $(q_1^0, 1-q_1^0)$ であり，$(1,0)$ の吸引域は $1/3 < q_1^0 \leq 1$ となる $(q_1^0, 1-q_1^0)$ である．おおまかに言えば，左側通行 L の戦略グループが 33% 以下で右側通行 R の戦略グループが 66% 以上の状態でダイナミックスがスタートした場合，最終的には全員が R を選択する状態に至る．逆に，左側通行 L の戦略グループが 33% 以上で右側通行 R の戦略グループが 66% 以下の状態では，最終的には全員が L を選択する状態に至る．

つまり，初期分布が何か特定の条件によって決まっていない場合，つまりランダムに決まる場合，最終的に全員が左側通行 L をとる状態に至る可能性の方が高い．そして，ひとたび全員が左側通行 L をとると，これは外在的な攪乱要因にも強い安定した結果となって長期的に続いていくことが予想できる．ただし，初期値の取り方によっては，全員が R というパレート最適ではない状態が長期的に安定して実現する可能性もある．この結果は，ある種の不合理な慣習が長期的な伝統として社会に定着し，ちょっとしたことでは変化しない状況として解釈できよう．

第 9 章

2×2 対称ゲームのレプリケーターダイナミクス分析

本章では，2×2 対称ゲームのレプリケータ・ダイナミクスを定義し，4 類型のそれぞれについて分析する．

9.1　2×2 対称ゲームのレプリケーターダイナミクス

4 章および 7 章で検討した 2×2 対称ゲームをふたたび取り上げる（表 9.1）．

表 9.1　2×2 対称ゲームの一般的記述（再掲）

	C	D
C	$R,\ R$	$S,\ T$
D	$T,\ S$	$P,\ P$

2×2 対称ゲームの一般的記述をもとにレプリケータ・ダイナミクスを定義しよう．戦略 C をとる戦略グループの割合を q_1，戦略 D をとる戦略グループの割合を $1 - q_1$ とする．

戦略 C グループの平均利得は,

$$\pi(C) = Rq_1 + S(1 - q_1) \tag{9.1}$$

である．そして，戦略 D グループの平均利得は,

$$\pi(D) = Tq_1 + P(1 - q_1) \tag{9.2}$$

である．最後に，社会全体の平均利得は

$$\pi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}) = q_1 \pi(C) + (1 - q_1)\pi(D) \tag{9.3}$$

である．ここから，2×2 対称ゲームのレプリケータ・ダイナミクスを dq_1/dt で代表させて定義すると，

$$\begin{aligned}\frac{dq_1}{dt} &= [\pi(C) - \pi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})]q_1 & (9.4)\\ &= (\pi(C) - \pi(D))(1 - q_1)q_1 & (9.5)\\ &= (\alpha q_1 - \beta(1 - q_1))(1 - q_1)q_1 & (9.6)\end{aligned}$$

である．ただし

$$\alpha = R - T, \quad \beta = P - S$$

である．導関数 dq_1/dt が q_1 の関数であることを強調して，以下

$$f(q_1) = \frac{dq_1}{dt} = (\alpha q_1 - \beta(1 - q_1))(1 - q_1)q_1 \tag{9.7}$$

とも表記する．

さて，ここで定常点を確認しよう．$f(q_1^*) = 0$ となる q_1^* は $0, 1, \beta/(\alpha + \beta)$ の 3 点である．ただしこのままでは，最後の $\beta/(\alpha + \beta)$ が，端点を含まない q_1 の定義域内に収まっているかどうかが不明である．そこで，

$$0 < \frac{\beta}{\alpha + \beta} < 1 \tag{9.8}$$

が成立する条件を検討する．

(1) $\alpha+\beta > 0$ のとき．$\alpha+\beta$ を不等式 (9.8) のそれぞれの辺にかけると, $0 < \beta < \alpha+\beta$ となる．ゆえに不等式 (9.8) が成立する条件は $\alpha > 0$ かつ $\beta > 0$ である．

(2) $\alpha+\beta < 0$ のとき．$\alpha+\beta$ を不等式 (9.8) のそれぞれの辺にかけると, $0 > \beta > \alpha+\beta$ となる．ゆえに不等式 (9.8) が成立する条件は $\alpha < 0$ かつ $\beta < 0$ である．

(3) $\alpha + \beta = 0$ のとき．$\beta/(\alpha + \beta)$ は不定形となるので解はない．

結局，$\alpha\beta > 0$ となるとき，つまり α と β の符号が一致するときに条件 (9.8) が成立する．まとめると，

- $\alpha\beta > 0$ のとき，定常点は $0, 1, \beta/(\alpha+\beta)$ の 3 点,
- $\alpha\beta < 0$ のとき，定常点は $0, 1$ の 2 点.

9.2　4 類型におけるレプリケータ・ダイナミックス

以下，2×2 対称ゲームの 4 類型についてレプリケータ・ダイナミックスの帰結を分析する.

9.2.1　Type I　非ジレンマ状況

非ジレンマ状況の条件は $R > T, P < S$，つまり $\alpha > 0, \beta < 0$ であった．ゆえに，非ジレンマ状況のレプリケータ・ダイナミクスにおける定常点は $q_1^* = 0$ と $q_1^* = 1$ の 2 種類である．また，式 (9.7) より，$\alpha > 0, \beta < 0$ のとき，$0 < q_1 < 1$ の範囲で $f(q_1) > 0$ である.

つまり，このタイプのダイナミクスでは不安定な定常点 $q_1^* = 0$ を除くすべての初期状態から出発すると，最終的には漸近安定な定常点 $q_1^* = 1$ に収束する．**全員が C を選択するという社会の戦略分布が進化的に頑健な帰結となるのである.**

ここで，以前表 4.2 で示した非ジレンマ状況の数値例をもとに $f(q_1)$ のグラフ，つまりダイナミックスの位相図を描いてみる（図 9.1）．具体的な数値は $R = 5, S = 3, T = 1, P = 0$ である.

9.2.2　Type II　囚人のジレンマ

囚人のジレンマタイプの条件は，$R < T, P > S$ であり，このとき $\alpha < 0, \beta > 0$ である．ゆえに，このタイプにおいても定常点は $q_1^* = 0$ と $q_1^* = 1$ の 2 種類である．式 (9.7) より，$\alpha < 0, \beta > 0$ のとき，$0 < q_1 < 1$ の範囲で $f(q_1) < 0$ である.

ゆえに，非ジレンマ状況におけるダイナミクスとは逆に $q_1^* = 1$ が不安定定常点となり，$q_1^* = 0$ は $0 \leq q_1^0 < 1$ を吸引域としてもつ漸近安定点となる．この場合，**全員が D を選択するという戦略分布が進化的に頑健な帰結となるのである.** しかしながら注意しておきたいのは，ジレンマ状況においても全員が C という均衡状態が達成される可能性があるということである．ただし，それは（初期値の分布にもよるが）

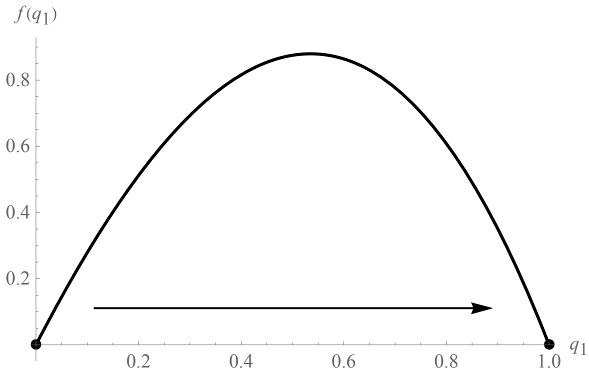

図 9.1　非ジレンマ状況の位相図（$R = 5, S = 3, T = 1, P = 0$）

限りなく 0 に近い可能性であって，しかも，もし全員 C という均衡状態が達成されたとしても，ほんのわずかな攪乱によって，たちまちに全員 D 状態へと動き出してしまう極めて不安定なものであるが.

先と同様に，表 4.3 で示した非ジレンマ状況の数値例 $R = 3, S = 0, T = 5, P = 1$ をもとにダイナミックスの位相図を描く（図 9.2）.

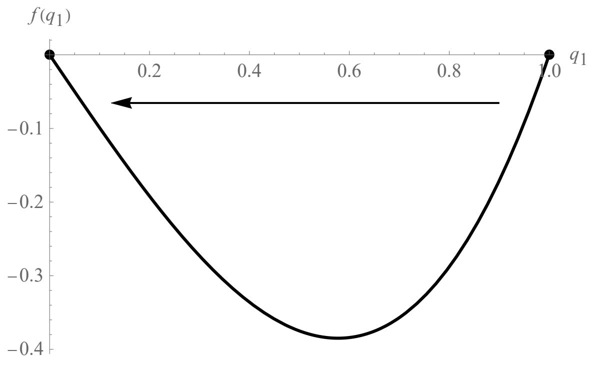

図 9.2　囚人のジレンマ状況の位相図（$R = 3, S = 0, T = 5, P = 1$）

9.2.3　Type III　調整ゲーム

8 章で調整ゲームの具体例を検討したが，ここでふたたび一般的に分析する．調整ゲームの条件は $R > T, P > S$ で，$\alpha > 0, \beta > 0$ である．ゆえに，このタイプにおいては定常点は $q_1^* = 0$ と $q_1^* = 1$ ならびに $q_1^* = \beta/(\alpha+\beta)$ の 3 種類である．$f(q_1)$ の正負は,

$$f(q_1)\begin{cases} < 0 & (0 < q_1 < \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\text{のとき}) \\ = 0 & (q_1 = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\text{のとき}) \\ > 0 & (1 > q_1 > \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\text{のとき}) \end{cases}$$

である．このとき，$q_1^* = 0$ と $q_1^* = 1$ は漸近安定，$q_1^* = 1/3$ は不安定となる．$q_1^* = 0$ の吸引域は $0 \leq q_1^0 < \beta/(\alpha+\beta)$ であり，$q_1^* = 1$ の吸引域は $\beta/(\alpha+\beta) < q_1^0 \leq 1$ である．ゆえに，このタイプのダイナミクスにおいては，全員が D を選択するという戦略分布か，もしくは全員が C を選択するという戦略分布が進化的に頑健な帰結となり，どちらの状態に落ち着くかは初期値に依存するのである．

図 9.3 は数値例 $R = 5, S = 0, T = 3, P = 1$ におけるダイナミクスの位相図である．

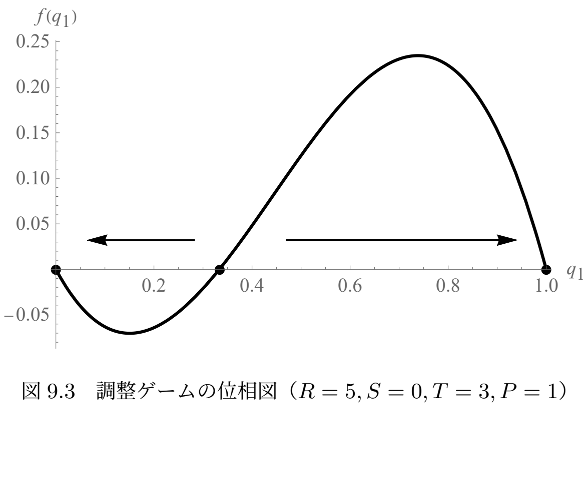

図 9.3　調整ゲームの位相図（$R = 5, S = 0, T = 3, P = 1$）

9.2.4 Type IV チキンゲーム

最後にチキンゲームのタイプを分析しよう．このとき，条件は $R < T, P < S$ であるので，$\alpha < 0, \beta < 0$ である．よって，調整ゲームの場合と同様，定常点は $q_1^* = 0$ と $q_1^* = 1$ ならびに $q_1^* = \beta/(\alpha+\beta)$ の3種類である．

このとき $f(q_1)$ の正負は，

$$f(q_1)\begin{cases} > 0 & (0 < q_1 < \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\text{のとき}) \\ = 0 & (q_1 = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\text{のとき}) \\ < 0 & (1 > q_1 > \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\text{のとき}) \end{cases}$$

である．ここから $q_1^* = \beta/(\alpha+\beta)$ の吸引域は $0 < q_1^0 < 1$ となり，漸近安定となることが分かる．逆に，$q_1^* = 0$ と $q_1^* = 1$ の吸引域はそれぞれただ1点であり，これらの定常点は不安定であることが分かる．このことは具体例（$R = 3, S = 1, T = 5, P = 0$）の位相図を見ればより直感的に理解できるだろう．

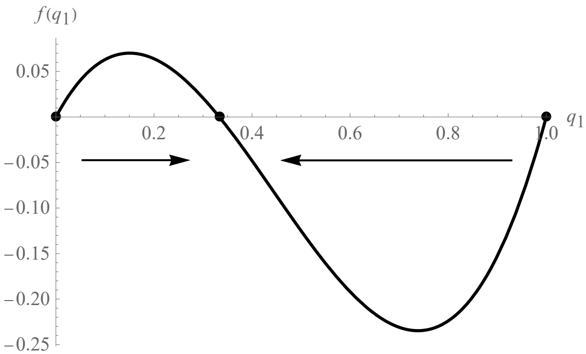

図9.4 チキンゲームの位相図（$R = 3, S = 1, T = 5, P = 0$）

チキンゲームの場合，初期値が0と1の場合を除いて，漸近安定である $q_1^* = \beta/(\alpha+\beta)$ に収束していく．つまり，社会の $\beta/(\alpha+\beta)$ の割合が C を選択し，

$\alpha/(\alpha+\beta)$ の割合が D を選択するという戦略分布が進化的に頑健な帰結となるのである.

これは，ある意味で大変興味深い結果かもしれない．というのも，公共財供給問題としてチキンゲームを解釈すると，進化的に辿り着く結果は，$100\alpha/(\alpha+\beta)\%$ の「フリーライダー」が $100\beta/(\alpha+\beta)\%$ の「正直者」に「寄生」している状態とも見なすことができるからである．しかもこれは安定した結果であって，少しばかりのフリーライダーが，反省して正直者になったとしても，あるいは少しばかりの正直者が態度を変えてフリーライダーに変貌したとしても，しばらくすると元の分布に必ず戻るのである.

このようにチキンゲームのレプリケーターダイナミクスの帰結は，公共財供給問題やさらに一般的に社会における協力問題を考える際に，極めて示唆深いものである.

ここまで，2×2 対称ゲームの 4 類型についてレプリケータ・ダイナミックスを分析してきた．ここでは抽象的な分析を進めてきたが，こうした結果が社会学的にどのような意義をもっているか，そして具体的にどのような社会的問題と関連するかを一度考えてみてほしい.

第 10 章

レプリケーターダイナミクス分析の補足

この章では，8 章と 9 章の補足として，ポテンシャル関数を導入して，より直感的に 2×2 対称ゲームのレプリケーターダイナミクスを分析するとともに，定常点の安定性分析を解析的に行う．そして最後に，進化ゲームにおけるもう一つの重要な概念である，進化的安定戦略（ESS）との関連について若干言及する．

本章は本講義の必須範囲ではないが，興味のある受講者は各自フォローしてほしい．

10.1　ポテンシャル関数

10.1.1　ポテンシャル関数の導入

$dq_1/dt = f(q_1)$ において，時間 t の経過による $q_1 = q_1(t)$ の挙動を，より直感的に理解するためのグラフ表現を考える．特に，定常点から離れたり近づいたりする動きを直感的に理解するためには，山の斜面をボールが転がるようなイメージが都合がよいだろう．より具体的には次のようなグラフである．

(1) 不安定定常点が山の頂上となる．$f(q_1)$ 上で不安定点から q_1 が離れていく動きを，山の頂上からボールが山の斜面を転がり落ちる動きと一致させる．
(2) 漸近安定点が谷底となる．$f(q_1)$ 上で漸近安定点へと q_1 が近づいていく動きを，谷底へとボールが斜面を転がり落ちる動きと一致させる．

このような山や谷を描くグラフを $g(q_1)$ とする．

直感的には図 10.1 を見ればわかるように，先の 2 つの要請を満たすようにグラフ $g(q_1)$ を描くとすれば，$f(q_1)$ と，$g(q_1)$ の傾きの符号を逆転したものを対応させるの

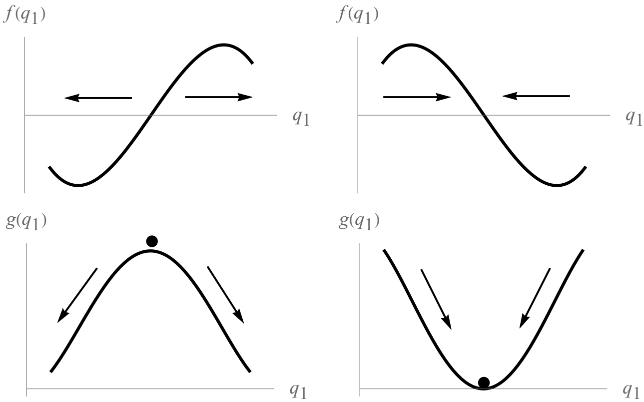

図 10.1　$g(q_1)$ の決め方

がよいだろう．つまり，

$$f(q_1) = -g'(q_1) = -\frac{dg(q_1)}{dq_1} \tag{10.1}$$

である．この式は，端的に $g(q_1)$ が $f(q_1)$ の不定積分にマイナスをかけたものであることを示している[*1]．つまり，

$$g(q_1) = -\int f(q_1)dq_1 = -\int \frac{dq_1}{dt}dq_1 \tag{10.2}$$

である．この関数 g のことを力学系では特に**ポテンシャル関数** (potential function) とよぶ[*2]．

[*1] f と F が同じ区間で定義された x の関数で，$F' = f$ が成立するとき F を f の不定積分といい，これを $\int f(x)dx$ と表す．

[*2] ここではポテンシャル関数を直感的に導入しているが，より理論的な導入については力学系（常微分方程式系）の参考書を当たってほしい．

10.1.2　2×2 対称ゲームのポテンシャル関数の導入

2×2 対称ゲームにおけるレプリケータ・ダイナミクスの式

$$f(q_1) = \frac{dq_1}{dt} = (\alpha q_1 - \beta(1-q_1))(1-q_1)q_1 \tag{10.3}$$

より，具体的にポテンシャル関数を導出すると，

$$g(q_1) = -\int f(q_1)dq_1 = \frac{\alpha+\beta}{4}(q_1)^4 - \frac{\alpha+2\beta}{3}(q_1)^3 + \frac{\beta}{2}(q_1)^2 + C \tag{10.4}$$

となる．最後の C は積分定数である．

以下，図 10.2 から図 10.5 まで，それぞれのタイプの具体例についてのポテンシャル関数を示す．

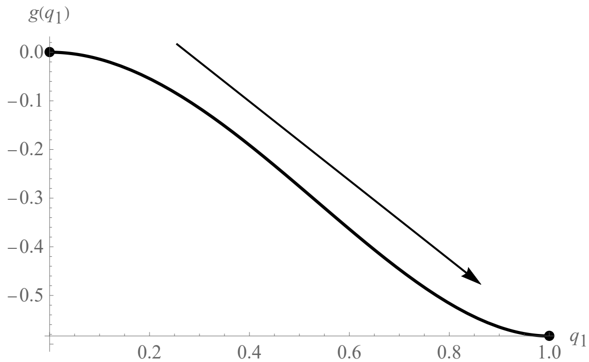

図 10.2　非ジレンマ状況のポテンシャル関数（$R = 5, S = 3, T = 1, P = 0$）

10.2　定常点の安定性分析

ここでは，これまでグラフによる直感的理解で行ってきた局所安定性の分析を解析的に行う*3.

---

*3 ここで行う分析は，微分方程式系をテイラー展開によって線形近似し，固有値の条件を見る分析方法と，形式的には同じである．

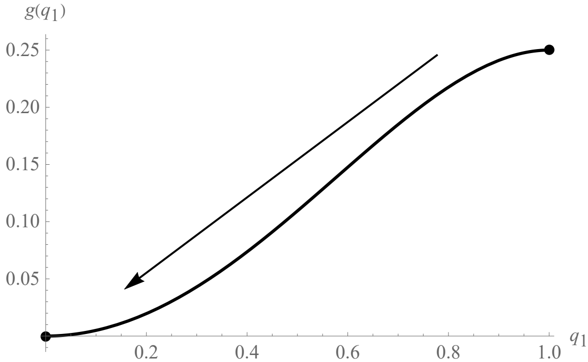

図 10.3　囚人のジレンマ状況のポテンシャル関数（$R = 3, S = 0, T = 5, P = 1$）

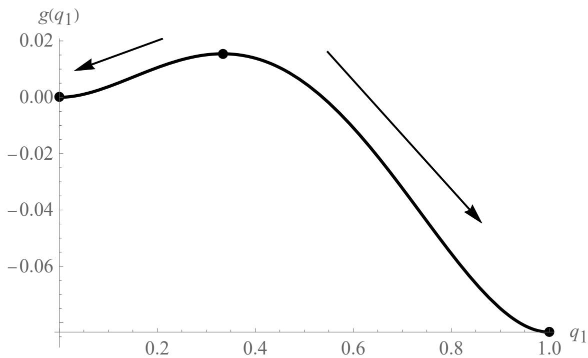

図 10.4　調整ゲームのポテンシャル関数（$R = 5, S = 0, T = 3, P = 1$）

ポテンシャル関数において，谷底にあたる部分が漸近安定になり，山の頂上にあたる部分が不安定になるのであった．つまり，定常点が漸近安定になるか不安定になるかは，ポテンシャル関数における極大値，極小値の 2 階の条件と対応しているのである．

$$\frac{d^2 g(q_1)}{dq_1^2} = g''(q_1) \tag{10.5}$$

と書くと，条件は次のようになる．

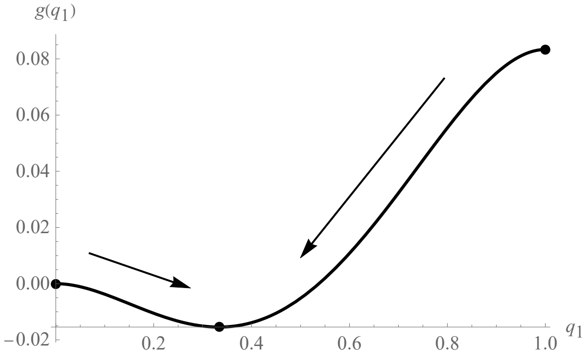

図 10.5　チキンゲームのポテンシャル関数（$R = 3, S = 1, T = 5, P = 0$）

- 定常点 q_1^* において $g''(q_1^*) > 0$ であれば，q_1^* は漸近安定である．
- 定常点 q_1^* において $g''(q_1^*) < 0$ であれば，q_1^* は不安定である．

ここで，

$$g''(q_1) = -\frac{df(q_1)}{dq_1} = -f'(q_1) \tag{10.6}$$

なので，条件は次のように言い換えられる．

- 定常点 q_1^* において $f'(q_1^*) < 0$ であれば，q_1^* は漸近安定である．
- 定常点 q_1^* において $f'(q_1^*) > 0$ であれば，q_1^* は不安定である．

この条件を元に 2×2 対称ゲームについての分析を行う．このとき $f'(q_1)$ は

$$f'(q_1) = \frac{df(q_1)}{dq_1} = -3(\alpha+\beta)(q_1)^2 + 2(\alpha+2\beta)q_1 - \beta \tag{10.7}$$

で与えられる．

10.2.1　定常点 $q_1^* = 0$ のとき

定常点 $q_1^* = 0$ のとき，

$$f'(q_1^*) = -\beta \tag{10.8}$$

である．**Type II** 囚人のジレンマならびに **Type III** 調整ゲームのとき $\beta > 0$ であり，$f'(q_1^*) < 0$ なので，定常点 $q_1^* = 0$ は**漸近安定**である．

Type I 非ジレンマ状況ならびに **Type IV** チキンゲームのとき $\beta < 0$ であり，$f'(q_1^*) > 0$ なので，定常点 $q_1^* = 0$ は**不安定**である．

10.2.2　定常点 $q_1^* = 1$ のとき

定常点 $q_1^* = 1$ のとき，

$$f'(q_1^*) = -\alpha \tag{10.9}$$

である．**Type I** 非ジレンマ状況ならびに **Type III** 調整ゲームのとき $\alpha > 0$ であり，$f'(q_1^*) < 0$ なので，定常点 $q_1^* = 1$ は**漸近安定**である．

一方，**Type II** 囚人のジレンマならびに **Type IV** チキンゲームのとき $\alpha < 0$ であり，$f'(q_1^*) > 0$ なので，定常点 $q_1^* = 0$ は**不安定**である．

10.2.3　定常点 $q_1^* = \beta/(\alpha + \beta)$ のとき

定常点 $q_1^* = \beta/(\alpha+\beta)$ が $0 < q_1^* < 1$ となる場合，つまり $\alpha\beta > 0$ のケースのみ分析する．

$$f'(q_1^*) = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} \tag{10.10}$$

となる．$\alpha < 0$ かつ $\beta < 0$ のとき，$\alpha + \beta < 0$ なので $f'(q_1^*) < 0$ である．ゆえに，**Type IV** チキンゲームのとき定常点 $q_1^* = \beta/(\alpha+\beta)$ は**漸近安定**である．

逆に，$\alpha > 0$ かつ $\beta > 0$ のとき，$\alpha + \beta > 0$ なので $f'(q_1^*) > 0$ である．ゆえに，**Type III** 調整ゲームのとき定常点 $q_1^* = \beta/(\alpha+\beta)$ は**不安定**である．

10.3　進化的安定戦略との関連

進化ゲームの文脈でしばしば取り上げられるのが**進化的安定性** (evolutionary stability) の基準である．この基準は，プレイヤー全員がある戦略（この場合混合戦略を含む）をとっている社会に，別の戦略をとるごく少数の侵入者[*4]が侵入したとき

[*4] 生物学的進化論の文脈では突然変異体と解釈される．

に，その侵入を時間の経過とともに結果的に排除できるか，あるいは侵入者の増加を許すか，ということにかかわる．

すべての可能な侵入戦略に対して進化的安定であるような戦略のことを**進化的安定戦略** (evolutionary stable strategy)，略して ESS という．

この ESS という枠組みと，これまで検討してきたレプリケータ・ダイナミクスの枠組みは非常に密接に関連する．実際，2×2 対称ゲームの場合，レプリケータ・ダイナミクスにおける漸近安定点と ESS は完全に一致する．さらに，より一般的に対称ゲームをもとにした進化ゲームにおいて戦略 $\boldsymbol{p}$ が ESS ならば，戦略 $\boldsymbol{p}$ は必ずレプリケータ・ダイナミクスにおける漸近安定点になる[*5]．

レプリケータ・ダイナミクスと ESS との関連について，さらに進化ゲーム一般について，より詳細な議論について知りたい場合は，まずは『進化的意志決定』(**?**) を参照されたい．さらに，より厳密で包括的なテキストとしては，数学的には高級であるが,『進化ゲームの理論』(**?**) がある．

[*5] ただし，逆は必ずしも成り立たない．命題と証明は**?**, 85–6 を参照のこと．