CE QU'IL FAUT RETENIR DU PREMIER COURS

- Probas, Stats Utiles partout.
- Probabilités fréquentistes, Variables aléatoires
- On doit faire une étude analytique pour résoudre les problèmes "probabilistes".
- La somme des probabilités = 1
- Espérance Mathématique
- Variance
- Ecart-type
- Variables Aléatoires Indépendantes
- Indépendance de deux évènements.

Probabilité Conditionnelle :

$Prob(6) = \frac{1}{6}$ $\quad$ $Prob(pair) = \frac{1}{2}$

$Prob(6 / pair) = \frac{1}{3}$

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}, \quad \forall B \qquad \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{6} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{3}$$

En d'autres termes : $\mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$

Si $(B_n)_{n \in I}$ est une partition de A

On a : $\mathbb{P}(A) = \sum_{n \in I} \mathbb{P}(A/B_n) \cdot \mathbb{P}(B_n)$ (formule de probabilité totale)

et pour tout $k \in I$

$$\mathbb{P}(B_k / A) = \frac{\mathbb{P}(A/B_k) \cdot \mathbb{P}(B_k)}{\sum_{n \in I} \mathbb{P}(A/B_n) \cdot \mathbb{P}(B_n)} \quad \text{(formule de Bayes)}$$

EXEMPLE : FORMULE DE BAYES

S	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Soit $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$B_1 = \{4, 5\}$ $B_2 = \{6, 7\}$ $B_3 = \{8, 9\}$

$P(B_1/A)$? $P(B_2/A)$? $P(B_3/A)$?

$$P(B_2/A) = \frac{P(A/B_2) \cdot P(B_2)}{P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2) + P(A/B_3) \cdot P(B_3)}$$

$$= \frac{11/36}{7/36 + 11/36 + 9/36} = \frac{11}{27}$$

De même : $P(B_1/A) = \frac{7}{27}$

$P(B_3/A) = \frac{9}{29}$

Exercice :

Une urne contient deux pièces de monnaie. Une honnête et une biaisée qui donne face avec une probabolité $1/3$.

On en extrait une, on la lance et on obtient face.

Quelle est la probabolité pour qu'il s'agisse de la pièce honnête ?

Par la formule des Probabilités Totales

$$\mathbb{P}(\text{face}) = \mathbb{P}(\text{face}/\text{honnête}) \cdot \mathbb{P}(\text{honnête}) + \mathbb{P}(\text{face}/\text{biaisée}) \cdot \mathbb{P}(\text{biaisée})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

$$\mathbb{P}(\text{honnête}/\text{face}) = \frac{P(\text{face}/\text{honnête}) \cdot P(\text{honnête})}{P(\text{face})}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{5}{12}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5}$$

ou

Par la formule de Bayes

$$\mathbb{P}(\text{honnête}/\text{face}) = \frac{P(\text{face}/\text{honnête}) \cdot P(\text{honnête})}{P(\text{face}/\text{honnête}) \cdot P(\text{honnête}) + P(\text{face}/\text{biaisée}) \cdot P(\text{biaisée})}$$

on retrouve la même chose

CE QU'IL FAUT RETENIR

Dans le cas d'une **Partition**

on applique
la formule des Probabilités Totales
et /ou
la formule de Bayes