#

4. Случайная величина с равной вероятностью принимает любое значение на интервале $(-1, 1)$, кроме 0, и принимает значения 0 и 2 с одинаковой вероятностью.

a) По выборке объема n найти оценки параметров случайной величины методом моментов и методом максимального правдоподобия.
b) Проверить оценки на несмещенность и состоятельность.
c) Исследовать эти оценки на эффективность с помощью неравенства Крамера–Рао.

$$\xi \sim g(x) = p_1\{(-1,0)\cup(0,1)\} + p_2\{0\} + p_2\{2\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_{-1}^{1} p_1\,dx + 2p_2 + 0 = 1 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{2} - p_2$$

$$p_1 = \Theta$$

$$g = \Theta\{(-1,0)\cup(0,1)\} + \left(\frac{1}{2}-\Theta\right)\{0,2\},\ \Theta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$$

$$\alpha_1 = M[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} x\,g\,dx = \int_{-1}^{1} x g\,dx + 0 + 2\left(\frac{1}{2}-\Theta\right) = 1-2\Theta$$
$$\alpha_2 = M[\xi^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 g\,dx = \int_{-1}^{1} x g\,dx + 0 + 4\left(\frac{1}{2}-\Theta\right) = 2-\frac{10}{3}\Theta$$
$$D[\xi] = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 2-\frac{10}{3}\Theta - 1 + 4\Theta - 4\Theta^2 = -4\Theta^2 + \frac{2}{3}\Theta + 1$$

- ОММ

$$\alpha_1 = \overline{1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$
$$1-2\Theta = \bar{x} \qquad \widetilde{\Theta} = 0{,}5(1-\bar{x})$$

- $M[\widetilde{\Theta}] = M\left[\frac{1}{2}(1-\bar{x})\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}M[\xi] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \Theta = \Theta$

$\widetilde{\Theta}$ - несмещенная

- $D[\widetilde{\Theta}] = D\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\bar{x}\right] = \frac{1}{4}D[\bar{x}] = \frac{1}{4n^2}\,n\,D[\xi] =$

$$= -\frac{\Theta^2}{n} + \frac{\Theta}{6n} + \frac{1}{4n} \to 0 \quad n\to\infty$$

$\widetilde{\Theta}$ - состоятельная

- эффективность
  - регулярность модели
  - непрер. диффер. по Θ
  - $\frac{d}{d\Theta}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\Theta} g(x,\Theta)\,dx = 0$

$$\int_{-1}^{1} \frac{d}{d\Theta} p(x,\Theta)dx + \frac{d}{d\Theta}\left(\frac{1}{2}-\Theta\right) + \frac{d}{d\Theta}\left(\frac{1}{2}-\Theta\right) = 2 - 1 - 1 = 0$$

- $I(\Theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \ln g(x,\Theta)}{\partial \Theta} \right)^2 g(x,\Theta)\, dx =$

$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\Theta^2}\, \Theta\, dx + \frac{\left(\frac{1}{2} - \Theta\right)^2}{\left(\frac{1}{2} - \Theta\right)^2} = \frac{2}{\Theta} + \frac{2}{\frac{1}{2} - \Theta} = \frac{2}{\Theta(1-2\Theta)}$

$I(\Theta) > 0$ непрер на $\Theta \in (0, \frac{1}{2})$

$\Rightarrow$ модель регулярна

- модель регул, оценка несмещ, $D[\hat{\Theta}]$ ср на $\forall$ комп $\in (0, \frac{1}{2}) \Rightarrow$ по достат усл оценка регулярна

$\Rightarrow$ условие Крамера-Рао $\quad D[\hat{\Theta}] \geq \frac{1}{n I(\Theta)}$

$$\frac{\Theta^2}{n} + \frac{\Theta}{6n} + \frac{1}{4n} \geq \frac{\Theta(1-2\Theta)}{2n}$$

$\neq$ про эффективность ничего нельзя сказать

- Оценка методом правдоподобия

пусть $\{0,1\}$ n раз

$$L(x_n, \Theta) = \prod_{i=1}^{n} g(x_i, \Theta) = \Theta^{n-m} \left(\frac{1}{2} - \Theta\right)^m$$

$$(\ln L)'_\Theta = \left((n-m)\ln\Theta + m\ln\left(\frac{1}{2} - \Theta\right)\right)'_\Theta =$$

$$= \frac{n-m}{\Theta} - \frac{m}{\frac{1}{2} - \Theta} = \frac{n - m - 2n\Theta}{\Theta - 2\Theta^2} = 0$$

$$\Rightarrow n - m = 2n\Theta \Rightarrow \hat{\Theta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{m}{n} = \frac{1}{2}(1 - \nu) \quad - \text{ОМП}$$

- max-?

$$(\ln L)''_{\Theta\Theta} = \frac{n-m}{\Theta^2} + \frac{m\,(-1)^2}{\left(\frac{1}{2} - \Theta\right)^2} = \frac{(1-2\Theta)^2(n-m) + 4m\Theta^2}{\Theta^2(1-\Theta)^2} =$$

$$= \frac{m(4\Theta - 1) + n(1 - 2\Theta)}{\Theta^2(1-2\Theta)^2} < 0 \Rightarrow \max$$

($m > 0$, $n > 0$, $\Theta^2 > 0$, $(1-2\Theta)^2 > 0$)

- $M[\hat{\Theta}] = M\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\nu\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}M[\nu] = \Theta$

$M\nu = p \quad D\nu = \frac{p(1-p)}{n}$

Θ - несмещенная

- $D[\hat{\Theta}] = D\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\nu\right] = \frac{1}{4}D[\nu] = \frac{\Theta(1-2\Theta)}{2n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

$\hat{\Theta}$ - состоятельная

- эффективность

модель регулярна, оценка несмещ., D огр на $\forall$ компакте $\subset (0, \frac{1}{2})$ $\Rightarrow$ выполнено условие для неравенства Крамера - Рао

$$\frac{\Theta(1-2\Theta)}{2n} \geq \frac{\Theta(1-2\Theta)}{2n}$$

"=" $\Rightarrow$ эффективная

- ОММ не эффективная

ОММП эффективная

№5

$\xi \sim R(\theta, 2\theta)$ $\quad g(x,\theta) = \frac{1}{\theta}\{(\theta, 2\theta)\}$

$\alpha_1 = M[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, g\, dx = \frac{1}{\theta}\int_{\theta}^{2\theta} x\, dx = \frac{3\theta}{2}$

$\alpha_2 = M[\xi^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 g\, dx = \frac{1}{\theta}\int_{\theta}^{2\theta} x^2 dx = \frac{7}{3}\theta^2$

$D[\xi] = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{7}{3}\theta^2 - \frac{9}{4}\theta^2 = \frac{1}{12}\theta^2$

- $\alpha_1 = \bar{F}_1 = \bar{x} \Rightarrow \frac{3\theta}{2} = \bar{x} \Rightarrow \tilde{\theta} = \frac{2}{3}\bar{x}$ — ОММ
- $M[\tilde{\theta}] = M[\frac{2}{3}\bar{x}] = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\theta = \theta$

$\tilde{\theta}$ – несмещенная

- $D[\tilde{\theta}] = D[\frac{2}{3}\bar{x}] = \frac{4}{9n} D[\xi] = \frac{4}{9n}\cdot\frac{1}{12}\theta \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\tilde{\theta}$ – состоятельная

- $L = \frac{1}{\theta^n}$

$x_{max} = 2\theta \Rightarrow \tilde{\theta} = \frac{x_{max}}{2}$

$\Phi(x) = (F(x))^n = \left(\int_0^x \frac{1}{\theta} dx\right) = \left(\frac{x}{\theta} - 1\right)^n$

$M[\tilde{\theta}] = M[\frac{x_{max}}{2}] = \frac{1}{2}\int_{\theta}^{2\theta} \frac{n}{\theta}\left(\frac{x}{\theta} - 1\right)^{n-1} x\, dx = \theta\frac{2n+1}{n+1}$.

$\tilde{\theta}^* = \frac{n+1}{2n+1}\tilde{\theta} = \frac{n+1}{2n+1}\cdot\frac{x_{max}}{2}$ – смещ

$M[\theta^*]$ – исправленная оценка – несмещ

$D[\tilde{\theta}^*] = D[\frac{n+1}{2n+1} \frac{x_{max}}{2}] = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^2 D[x_{max}]$

$M[x_{max}^2] = \int_{\theta}^{2\theta} x^2 \frac{n}{\theta}\left(\frac{x}{\theta} - 1\right)^{n-1} dx = 2\theta^2(2n^2+4n+1)/(n+2)(n+1)$

$D[\tilde{\theta}^*] = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^2 \frac{4n^2+8n+2}{(n+1)(n+2)} \theta^2 - \theta^2 = \frac{n\theta^2}{(2n+1)^2(n+2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\tilde{\theta}^*$ – состоятельная

ОММ – $\tilde{\theta}$, ОМП – $\tilde{\theta}^*$

- $D[\tilde{\theta}_1] = \frac{\theta^2}{2n}$ $\quad D[\tilde{\theta}_2^*] = \frac{n\theta}{(2n+1)^2(n+2)}$

$\exists N \quad \forall n \geq N \Rightarrow D[\tilde{\theta}_1] > D[\tilde{\theta}_2^*]$

$\tilde{\theta}_2^*$ – более эффективная

- $x_i \in [\theta, 2\theta]$ $\quad x_i/\theta \in [1,2]$

$P(x_{max}) = (F(x))^n = (\int_1^x dx)^n = (x-1)^n$

$x = \theta$

$\sqrt[n]{0{,}025} + 1 < x < \sqrt[n]{0{,}975} + 1$

$\frac{x_{max}}{\sqrt[n]{0{,}975}+1} < \theta < \frac{x_{max}}{\sqrt[n]{0{,}025}+1}$

- $\sqrt{n}\,\frac{g(\hat{f}) - g(f)}{g'(f)} \sim N(0,1)$

$g(f) = \int_0^f g \kappa \circ g$ $\quad = \sqrt{n}\,\frac{(\overline{\theta} - \theta)}{\frac{2}{3}\sqrt{f_2 - f_1^2}}$ $\quad \frac{\frac{2}{3}\sqrt{f_2 - f_1^2}}{\frac{2}{3}\sqrt{\hat{f}_2 - \hat{f}_1^2}} \sim N(0,1)$

$-1{,}96 < \sqrt{n}\,\frac{\tilde{\theta} - \theta}{\frac{2}{3}\sqrt{f_2 - f_1^2}} < 1{,}9$

$-\frac{1{,}96}{\sqrt{n}}\,\frac{2}{3}\sqrt{f_2 - f_1^2} + \tilde{\theta} < \theta < \frac{1{,}96}{\sqrt{n}}\,\frac{2}{3}\sqrt{f_2 - f_1^2} + \tilde{\theta}$

$s = \frac{n}{n-1}\sqrt{\hat{f}_2 - \hat{f}_1^2}$

- Ответ

$\frac{2}{3}\overline{x} - \frac{3{,}92}{3n}\sqrt{s^2(n-1)} < \theta < \frac{3}{2}\overline{x} + \frac{3{,}92}{3n}\sqrt{s^2(n-1)}$

- ОММП

$\frac{(n+1)}{(2n+1)}\,x_{max}\left(1 - \frac{1{,}96}{\sqrt{n}}\right) < \theta < \frac{n+1}{2n+1}\,x_{max}\left(1 + \frac{1{,}96}{\sqrt{n}}\right)$

T6