#

4. Случайная величина с равной вероятностью принимает любое значение на интервале $(-1, 1)$, кроме 0, и принимает значения 0 и 2 с одинаковой вероятностью.

a) По выборке объема n найти оценки параметров случайной величины методом моментов и методом максимального правдоподобия.

b) Проверить оценки на несмещенность и состоятельность.

c) Исследовать эти оценки на эффективность с помощью неравенства Крамера–Рао.

$$\xi \sim g(x) = p_1\{(-1,0)\cup(0,1)\} + p_2\{0\} + p_2\{2\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} p_1\,dx + 2p_2 + 0 = 1 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{2} - p_2$$

$$p_1 = \Theta$$

$$g = \Theta\{(-1,0)\cup(0,1)\} + \left(\frac{1}{2}-\Theta\right)\{0,2\},\ \Theta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$$

$$\alpha_1 = M[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} x g\,dx = \int_{-1}^{1} x g\,dx + 0 + 2\left(\frac{1}{2}-\Theta\right) = 1-2\Theta$$

$$\alpha_2 = M[\xi^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 g\,dx = \int_{-1}^{1} x g\,dx + 0 + 4\left(\frac{1}{2}-\Theta\right) = 2-\frac{10}{3}\Theta$$

$$D[\xi] = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 2-\frac{10}{3}\Theta - 1 + 4\Theta - 4\Theta^2 = -4\Theta^2 + \frac{2}{3}\Theta + 1$$

- ОММ

$$\alpha_1 = \overline{\alpha}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}$$

$$1-2\Theta = \overline{x} \qquad \tilde{\Theta} = 0{,}5(1-\overline{x})$$

- $$M[\tilde{\Theta}] = M\left[\frac{1}{2}(1-\overline{x})\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}M[\xi] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \Theta = \Theta$$

$\tilde{\Theta}$ – несмещенная

- $$D[\tilde{\Theta}] = D\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\overline{x}\right] = \frac{1}{4}D[\overline{x}] = \frac{1}{4n^2}nD[\xi] =$$

$$= -\frac{\Theta^2}{n} + \frac{\Theta}{6n} + \frac{1}{4n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\tilde{\Theta}$ – состоятельная

- эффективность
- регулярность модели
- непрер дифф по Θ
- $$\frac{d}{d\Theta}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\Theta} g(x,\Theta)\,dx = 0$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{d}{d\Theta}p(x,\Theta)\,dx + \frac{d}{d\Theta}\left(\frac{1}{2}-\Theta\right) + \frac{d}{d\Theta}\left(\frac{1}{2}-\Theta\right) = 2-1-1 = 0$$

- $I(\theta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d \ln g(x,\theta)}{d\theta} \right)^2 g(x,\theta)\,dx =$

$= \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\theta^2} \theta\,dx + \frac{(\frac{1}{2}-\theta)2}{(\frac{1}{2}-\theta)^2} = \frac{2}{\theta} + \frac{2}{\frac{1}{2}-\theta} = \frac{2}{\theta(1-2\theta)}$

$I(\theta) > 0$ непрер на $\theta \in (0, \frac{1}{2})$

$\Rightarrow$ модель регулярна

- модель регул, оценка несмещ, $D[\hat{\theta}]$ огр на $\forall$ комп $\in (0, \frac{1}{2}) \Rightarrow$ по достат услов оценка регулярна

$\Rightarrow$ условие Крамера-Рао $D[\theta] \geq \frac{1}{n I(\theta)}$

$$-\frac{\theta^2}{n} + \frac{\theta}{6n} + \frac{1}{4n} \geq \frac{\theta(1-2\theta)}{2n}$$

$\neq$ про эффективность ничего нельзя сказать

- Оценка методом правдоподобия

пусть $[0,2)$ m раз

$$L(x_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n} g(x_i,\theta) = \theta^{n-m}\left(\frac{1}{2}-\theta\right)^m$$

$$(\ln L)'_\theta = \left((n-m)\ln\theta + m\ln\left(\frac{1}{2}-\theta\right)\right)'_\theta =$$

$$= \frac{n-m}{\theta} - \frac{m}{\frac{1}{2}-\theta} = \frac{n-m-2n\theta}{\theta-2\theta^2} = 0$$

$$\Rightarrow n-m = 2n\theta \Rightarrow \tilde\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{m}{n} = \frac{1}{2}(1-\nu) \text{ — ОМП}$$

- max - ? $(\ln L)''_{\theta\theta} = \frac{n-m}{\theta^2} + \frac{m(-1)^3}{(\frac{1}{2}-\theta)^2} = \frac{(1-2\theta)^2(n-m)-4m\theta^2}{\theta^2(1-\theta)^2} =$

$$= \underset{<0}{-}\frac{m\overset{>0}{(4\theta-1)}+n\overset{>0}{(1-2\theta)}}{\underset{>0}{\theta^2}\underset{>0}{(1-2\theta)^2}} < 0 \Rightarrow \max$$

- $M[\tilde\theta] = M[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu] = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}M[\nu] = \theta$

$M\nu = p \qquad D\nu = \frac{p(1-p)}{n}$

θ — несмещенная

- $D[\tilde\theta] = D[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu] = \frac{1}{4}D[\nu] = \frac{\theta(1-2\theta)}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\tilde\theta$ — состоятельная

- Эффективность

модель регулярная, оценка несмещ.,
D огр на $\forall$ компакте $\in (0,\frac{1}{2}) \Rightarrow$
выполнено условие для неравенства
Крамера - Рао

$$\frac{\theta(1-2\theta)}{2n} \underset{=}{\geq} \frac{\theta(1-2\theta)}{2n}$$

„=" $\Rightarrow$ эффективна

- ОММ не эффективна
ОММП эффективна

ММ МП ⇒ н с эфф дос

\# Т5

$\xi \sim R(\theta, 2\theta) \qquad g(x,\theta) = \frac{1}{\theta}\{(\theta, 2\theta)\}$

$\alpha_1 = M[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} x g\,dx = \frac{1}{\theta}\int_{\theta}^{2\theta} x\,dx = \frac{3\theta}{2}$

$\alpha_2 = M[\xi^2] = \int x^2 g\,dx = \frac{1}{\theta}\int_{\theta}^{2\theta} x^2\,dx = \frac{7}{3}\theta^2$

$D[\xi] = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{7}{3}\theta^2 - \frac{9}{4}\theta^2 = \frac{1}{12}\theta^2$

- $\alpha_1 = \mathcal{F}_1 = \bar{x} \Rightarrow \frac{3\theta}{2} = \bar{x} \Rightarrow \tilde{\theta} = \frac{2}{3}\bar{x}$ ОММ

- $M[\tilde{\theta}] = M[\frac{2}{3}\bar{x}] = \frac{2}{3}\frac{3}{2}\theta = \theta$

$\tilde{\theta}$ - несмещенная

- $D[\tilde{\theta}] = D[\frac{2}{3}\bar{x}] = \frac{4}{9n}D[\xi] = \frac{4}{9n\,12}\theta \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\tilde{\theta}$ - состоятельная

- $L = \frac{1}{\theta^n}$

$x_{max} = 2\theta \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{x_{max}}{2}$

$\varphi(x) = (F(x))^n = \left(\int_0^x \frac{1}{\theta}dx\right) = \left(\frac{x}{\theta} - 1\right)^n$

$M(\hat{\theta}) = M\left(\frac{x_{max}}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_{\theta}^{2\theta}\frac{n}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}-1\right)^{n-1}x\,dx = \theta\frac{2n+1}{n+1}$.

$\hat{\theta}^* = \frac{n+1}{2n+1}\hat{\theta} = \frac{n+1}{2n+1}\frac{x_{max}}{2}$ - смещ

$M[\hat{\theta}^*]$ - исправленная оценка - несмещ

$D(\hat{\theta}^*) = D\left(\frac{n+1}{2n+1}\frac{x_{max}}{2}\right) = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^2 D(x_{max})$

$M(x_{max}^2) = \int_{\theta}^{2\theta} x^2\frac{n}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}-1\right)^{n-1}dx = 2\theta^2(2n^2+4n+1)/(n+2)(n+1)$

$D[\hat{\theta}^*] = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^2\frac{4n^2+8n+2}{(n+1)(n+2)}\theta^2 - \theta^2 = \frac{n\theta^2}{(2n+1)^2(n+2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\hat{\theta}^*$ - состоятельная

ОММ - $\tilde{\theta}_1$ ОМП - $\hat{\theta}_2^*$

• $D[\tilde\Theta_1] = \frac{\Theta^2}{27n}$ $\quad D[\tilde\Theta_2^*] = \frac{n\Theta}{(2n+1)^2(n+2)}$

$\exists N \quad \forall n \geq N \hookrightarrow D[\tilde\Theta_1] > D[\tilde\Theta_2^*]$

$\tilde\Theta_2^*$ — более эффективна

• $x_i \in [\Theta, 2\Theta]$ $\quad x_i/\Theta \in [1,2]$

$\varphi(x_{max}) = (F(x))^n = (\int_1^x dx)^n = (x-1)^n$

$x = \Theta$

$\sqrt[n]{0{,}025} + 1 < x < \sqrt{0{,}975} + 1$

$\frac{x_{max}}{\sqrt[n]{0{,}975}+1} < \Theta < \frac{x_{max}}{\sqrt[n]{0{,}025}+1}$

• $\sqrt{n}\,\frac{g(\bar{d}) - g(d)}{G(d)} \sim N(0,1)$

$G(d) = \sqrt{\nabla^T g \, K \nabla g} = \sqrt{n}\,\frac{(\tilde\Theta - \Theta)}{\frac{2}{3}\sqrt{d_2 - d_1^2}}$ $\quad \frac{\frac{2}{3}\sqrt{d_2 - d_1^2}}{\frac{2}{3}\sqrt{\bar{d}_2 - \bar{d}_1^2}} \sim N(0,1)$

$-1{,}96 < \sqrt{n}\,\frac{\tilde\Theta - \Theta}{\frac{2}{3}\sqrt{\bar{d}_2 - \bar{d}_1^2}} < 1{,}9$

$-\frac{1{,}96}{\sqrt{n}}\,\frac{2}{3}\sqrt{\bar{d}_2 - \bar{d}_1^2} + \tilde\Theta < \Theta < \frac{1{,}96}{\sqrt{2}}\,\frac{2}{3}\sqrt{\bar{d}_2 - \bar{d}_1^2} + \tilde\Theta$

$s = \frac{n}{n-1}\sqrt{\bar{d}_2 - \bar{d}_1^2}$

• ОММ

$\frac{2}{3}\bar{x} - 3{,}92\sqrt{\frac{s^2(n-1)}{3n}} < \Theta < \frac{3}{2}\bar{x} + 3{,}92\sqrt{\frac{s^2(n-1)}{3n}}$

• ОМП

$\frac{(n+1)}{(2n+1)}\,x_{max}\left(1 - \frac{1{,}96}{\sqrt{n}}\right) < \Theta < \frac{n+1}{2n+1}\,x_{max}\left(1 + \frac{1{,}96}{\sqrt{n}}\right)$

T6

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta-1}{x^\theta} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases} \qquad \theta > 1$$

- $L(x,\theta) = \dfrac{\theta-1}{x_1^\theta} \dots \dfrac{}{x_n^\theta}$

$\ln L = n\ln(\theta-1) - \theta \sum \ln x_i$

$(\ln L)'_\theta = \dfrac{n}{\theta-1} - \sum \ln x_i = 0 \qquad (\ln L)''_{\theta\theta} = -(\theta-1)^2 < 0 \Rightarrow max$

$\hat\theta = 1 + \dfrac{n}{\sum \ln x_i}$

- $\dfrac{d}{d\theta} \int \dfrac{\theta-1}{x^\theta} dx = x^{1-\theta} \ln x$

сильно рег

$\int \dfrac{d}{d\theta} \left(\dfrac{\theta-1}{x^\theta}\right) dx = x^{1-\theta} \ln x$

$\int_1^x \dfrac{\theta-1}{x^\theta} dx = -\dfrac{1}{\hat{x}^{\theta-1}} + 1 = \dfrac{1}{2} \qquad \hat{x} = 2^{\frac{1}{\theta-1}}$

$g(\hat\theta) = 2^{\frac{1}{\theta-1}}$

$\sqrt{n}\, \dfrac{g(\hat\theta) - g(\theta)}{\sigma(\theta)} \sim N(0,1)$

$\to \sigma(\hat\theta)$

$\sigma(\hat\theta) = \sqrt{\nabla^T g(\hat\theta)\, I^{-1}(\hat\theta)\, \nabla g(\hat\theta)}$

$I(\theta) = M \ln p'_\theta{}^2 = \int_1^\infty \left(\frac{1}{\theta-1} - \ln x\right)^2 p\, dx =$

$= \int_1^\infty \left(\frac{1}{\theta-1} - \ln x\right)^2 \dfrac{\theta-1}{x^2} dx = \dfrac{1}{(\theta-1)^2}$ непрер по $\theta > 1$

$\nabla g(\hat\theta) = -\dfrac{\ln 2\, 2^{\frac{1}{\theta-1}}}{\hat\theta - 1}$

$\sigma(\hat\theta) = -\dfrac{\ln 2\, 2^{\frac{1}{\theta-1}}}{\hat\theta-1}$

$\sqrt{n}\, \dfrac{g(\hat\theta) - g(\theta)}{\sigma(\hat\theta)} \sim N(0,1)$

$$\frac{-1{,}96\ \sigma(\hat{\theta})}{\sqrt{n}} + g(\hat{\theta}) < g(\theta) < \frac{1{,}96\ \sigma(\hat{\theta})}{\sqrt{n}} + g(\hat{\theta})$$

- $$\sqrt{n}\ \frac{\hat{\theta}-\theta}{\sigma(\theta)} \sim N(0,1)$$

$$\sigma(\theta) \xrightarrow{p} \sigma(\hat{\theta})$$

$$\sigma(\hat{\theta}) = \theta - 1 \Rightarrow \sqrt{n}\ \frac{\hat{\theta}-\theta}{\theta-1} \sim N(0,1)$$

$$\frac{-1{,}96\ (\theta-1)}{\sqrt{n}} + 1 + \frac{1}{\ln x} < \theta < \frac{1{,}96\ (\theta-1)}{\sqrt{n}} + 1 + \frac{1}{\ln x_i}$$