

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П.КОРОЛЁВА»

ИНСТИТУТ ИНФОРМАТИКИ, МАТЕМАТИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ
ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ТЕХНИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

**Отчет по лабораторной работе №2
по курсу «Оптоинформационные технологии и системы»
Вариант 9**

Выполнил студент:

Белоусов А. А.

Группа:

6409

Преподаватель:

Кириленко М.С.

Самара 2019

ЗАДАНИЕ

1. Реализовать одномерное финитное преобразование Фурье с помощью применения алгоритма БПФ.
2. Построить график гауссова пучка e^{-x^2} . Здесь и далее для каждого графика следует строить отдельно графики амплитуды и фазы. Амплитуда находится как модуль каждого значения функции, фаза – как аргумент (или с помощью функции atan2).
3. Убедиться в правильности реализации преобразования, подав на вход гауссов пучок e^{-x^2} – собственную функцию преобразования Фурье. На выходе тоже должен получиться гауссов пучок (построить график на правильной области определения $[-\tilde{b}, \tilde{b}]$). Рекомендуемая входная область: $[-a, a] = [-5, 5]$.
4. Реализовать финитное преобразование Фурье стандартным методом численного интегрирования (например, методом прямоугольников). Важно: необходимо вычислить интеграл для каждого дискретного значения u , чтобы получить результат в виде вектора. На вход преобразования вновь следует подавать гауссов пучок.
5. Построить результаты двух разных реализаций преобразования на одном изображении (одно для амплитуды, одно для фазы) и убедиться, что они совпадают.
6. Используя первую реализацию преобразования, подать на вход световое поле, отличное от гауссова пучка, в соответствии со своим вариантом. Построить графики самого пучка и результата преобразования.
7. Рассчитать аналитически результат преобразования своего варианта поля и построить график на одной системе координат с результатом, полученным в предыдущем пункте.

АЛГОРИТМ РЕАЛИЗАЦИИ ОПТИЧЕСКОГО ФИНИТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ЧЕРЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БПФ

1. Провести дискретизацию входной функции $f(x)$ в вектор f с размерностью N .
2. Дополнить вектор f и слева, и справа необходимым числом нулей до размерности M .
3. Разбить вектор f на две половины и поменять их местами.
4. Выполнить БПФ от f и умножить результат на шаг h_x , получив вектор F .
5. Разбить вектор F на две половины и поменять их местами.
6. «Вырезать» центральную часть вектора F , оставив N элементов.

Выполнение задания

1. Одномерное финитное преобразование Фурье записывается в виде (1);

$$F_a(u) = \Phi_a[f(x)](u) = \int_{-a}^a f(x)e^{-2\pi i x u} dx, \quad (1)$$

где $f(x)$ – финитная функция, $F_a(u)$ – спектр, Φ_a – оператор финитного преобразования Фурье.

Приведём реализацию одномерного финитного преобразования Фурье (полный код представлен в приложении А):

2. На рисунке 1 изображены: график гауссова пучка, графики амплитуды и фазы.

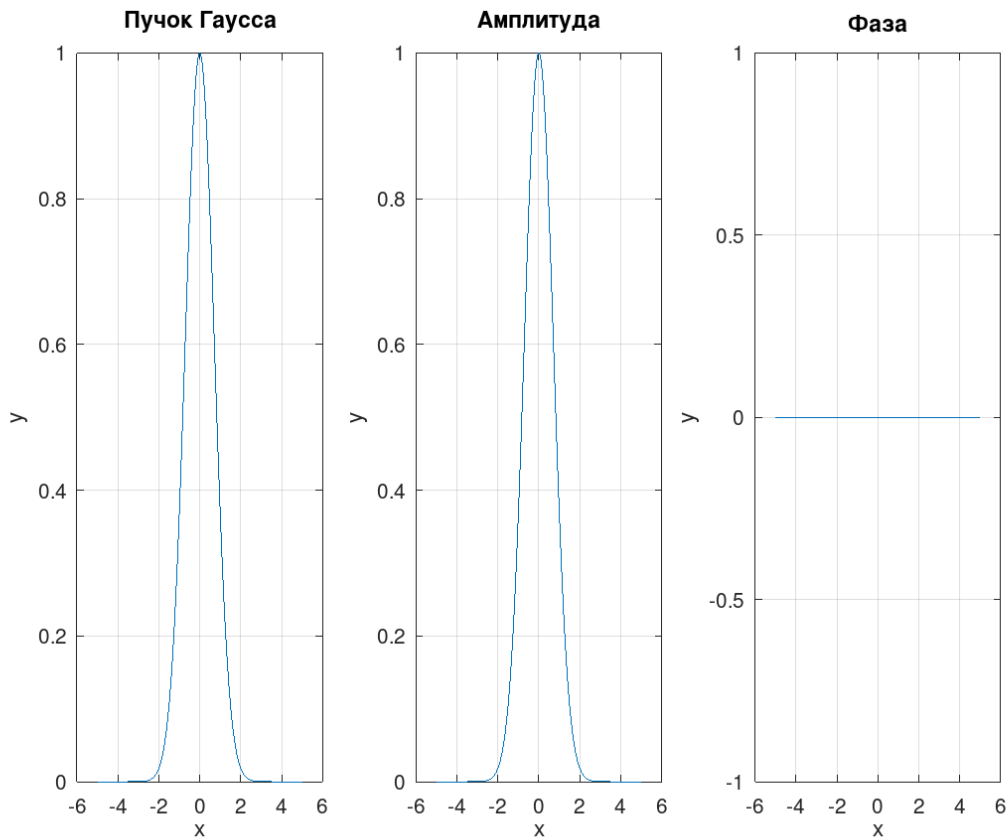


Рисунок 1 – Графики гауссова пучка, амплитуды и фазы

3. Проверка правильности реализации преобразования Фурье. На вход подается гауссов пучок, на выходе получаем другой гауссов пучок – рисунок 2. Построены также графики амплитуды и фазы.

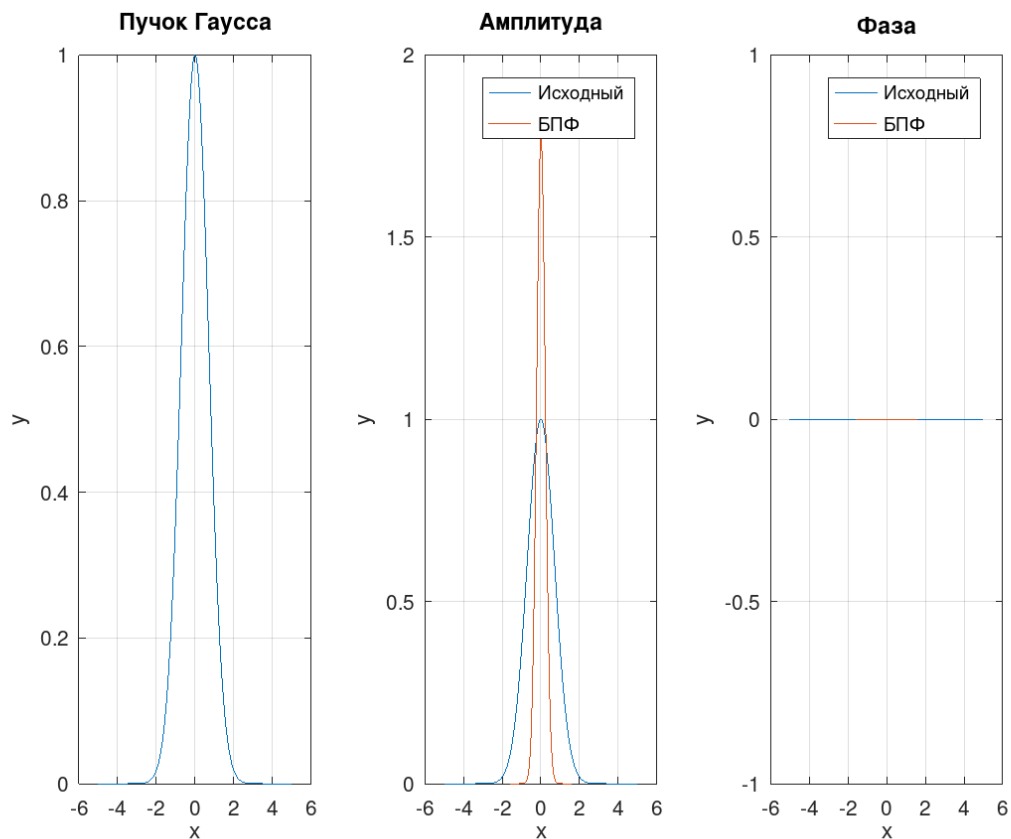


Рисунок 2 – Графики гауссова пучка, амплитуды и фазы

4. Реализуем финитное преобразование Фурье стандартным методом численного интегрирования – методом прямоугольников (2).

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)(x_i - x_{i-1}). \quad (2)$$

Приведём реализацию метода численного интегрирования (полный код представлен в приложении А):

5. Сравнение преобразований Фурье: стандартным методом численного интегрирования и с помощью применения алгоритма БПФ. Результаты изображены на рисунке 3.

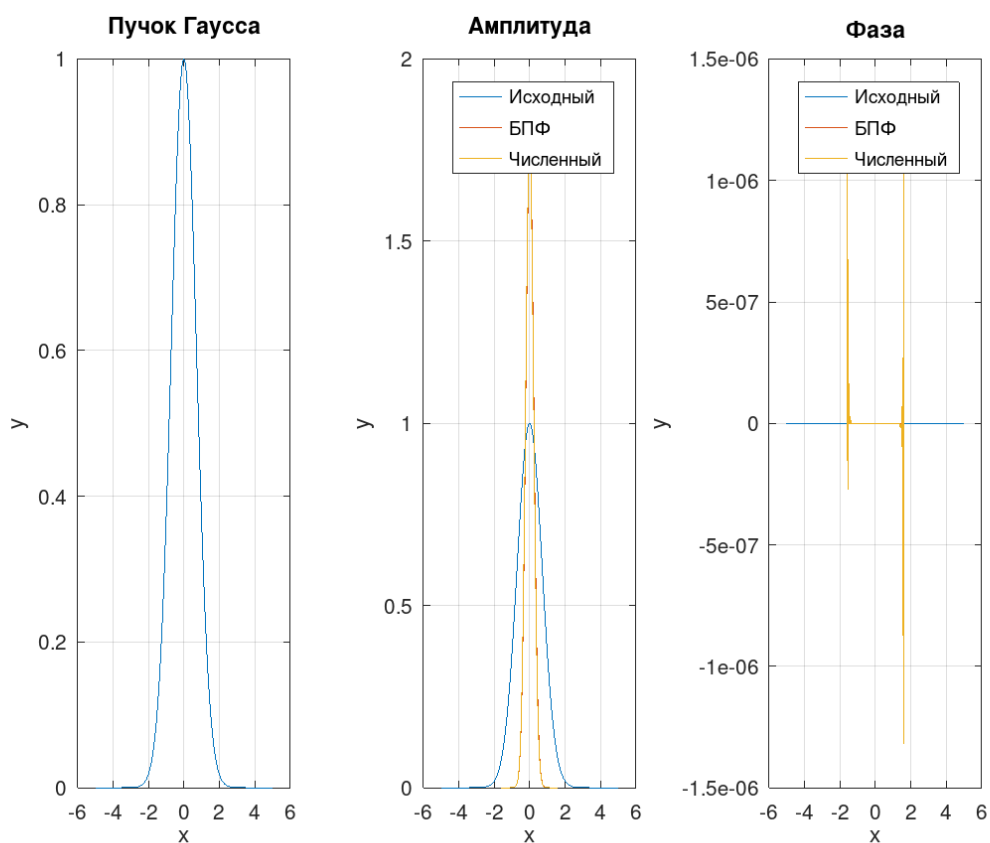


Рисунок 3 – Сравнение преобразований Фурье

Как видно из рисунка 3, численное преобразование Фурье, посчитанное с помощью метода прямоугольников совпадает с преобразованием Фурье, вычисленным с помощью алгоритма БПФ.

6. На вход подается функция: $(4x^2 - 2)e^{-\frac{x^2}{2}}$, используется реализация преобразования Фурье через БПФ. Графики самого пучка и результат преобразования изображены на рисунке 4.

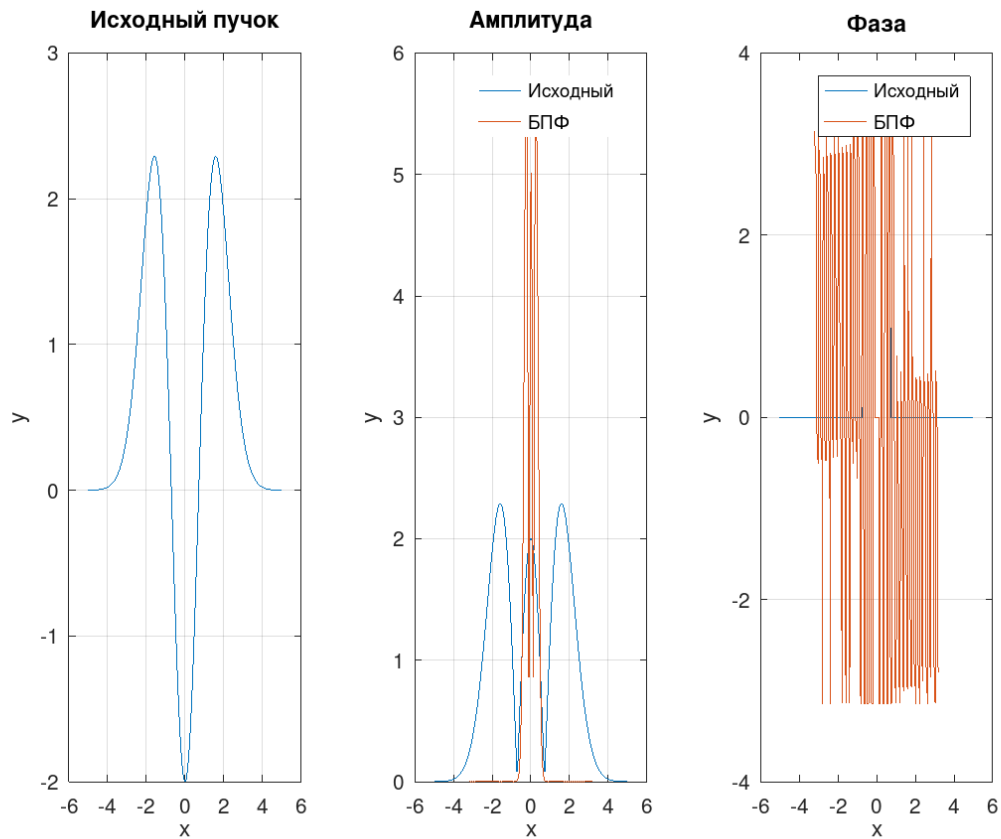


Рисунок 4 – Графики пучка, амплитуды и фазы

7. Найдём аналитическую форму для преобразования Фурье функции $(4x^2 - 2)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Сделаем замену $x = \sqrt{2}t$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (4x^2 - 2)e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-2\pi i x u} dx = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} (8t^2 - 2)e^{-t^2} e^{-2\pi i t(u\sqrt{2})} dt.$$

Воспользуемся линейностью интегрирования:

$$\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} (8t^2 - 2)e^{-t^2} e^{-2\pi i t(u\sqrt{2})} dt = 2\sqrt{2} \left(4 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} e^{-2\pi i t(u\sqrt{2})} dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-2\pi i t(u\sqrt{2})} dt \right) \quad (3)$$

Докажем следующие два соотношения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-2\pi i t u} dt = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 u^2}, \quad (4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t f(t) e^{-2\pi i t u} dt = -\frac{1}{2\pi i} \frac{dF}{du}(u). \quad (5)$$

Для доказательства (4), выделим полный квадрат:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-2\pi i t u} dt = e^{-\pi^2 u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\pi i u)^2} dt.$$

Сделаем замену $\xi = t - \pi i u$:

$$e^{-\pi^2 u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\pi i u)^2} dt = e^{-\pi^2 u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi.$$

Подставив интеграл Пуассона, получаем:

$$e^{-\pi^2 u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 u^2}.$$

Докажем (5):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF}{du}(u) e^{2\pi i t u} du = F(u) e^{2\pi i t u} \Big|_{u=-\infty}^{\infty} - 2\pi i t \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{2\pi i t u} du,$$

где первое слагаемое, в силу высокой осцилляции, можно считать нулём. Таким образом получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF}{du}(u) e^{2\pi i t u} du = -2\pi i t f(t).$$

Заметим что, из (5) следует (6):

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t) e^{-2\pi i t u} dt = \frac{1}{4\pi^2} \frac{d^2 F}{du^2}(u), \quad (6)$$

После подстановки (4) и (6) в (3) и упрощения, получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (4x^2 - 2) e^{\frac{-x^2}{2}} e^{-2\pi i x u} dx = -2\sqrt{2\pi} (8\pi^2 u^2 - 1) e^{-2\pi^2 u^2}.$$

Результаты аналитического преобразования Фурье и преобразования Фурье через БПФ практически совпадают - рисунок 5.

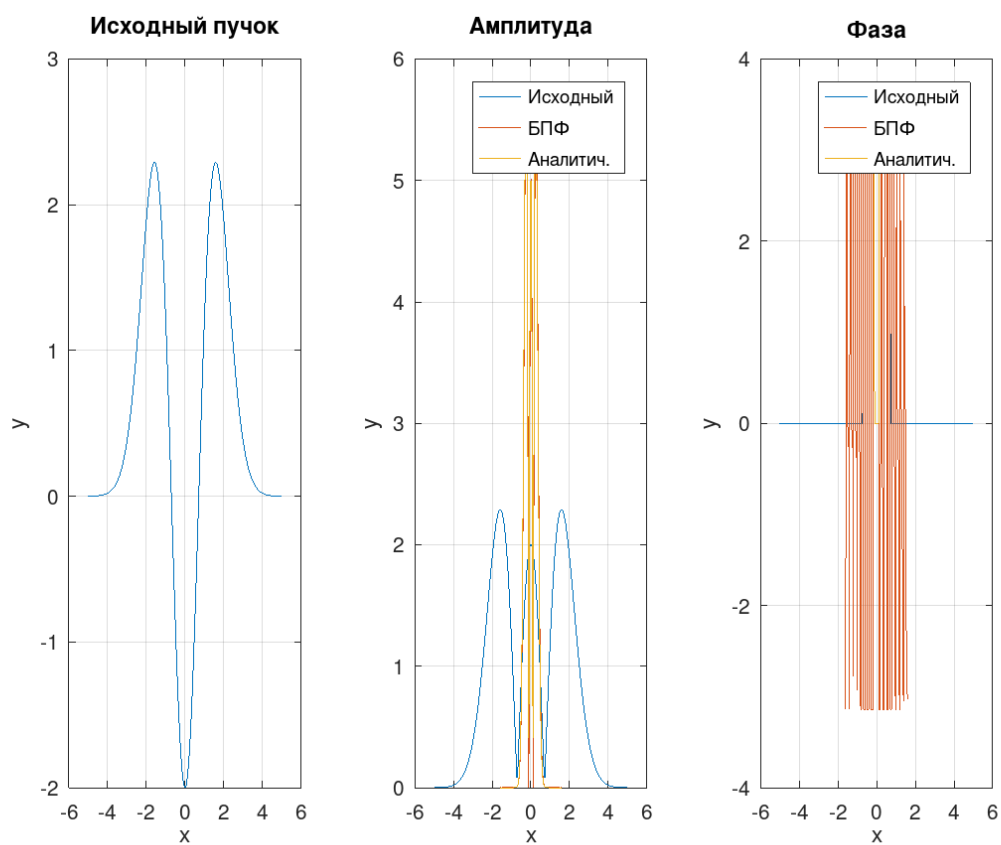


Рисунок 5 – Результаты аналитического решения и преобразования Фурье через БПФ

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной лабораторной работе было реализовано одномерное финитное преобразование Фурье с помощью метода БПФ, а так же с помощью метода численного интегрирования. Был рассчитан теоритический результат преобразования Фурье для функции $(4x^2 - 2)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Построены графики для сравнения результатов различных преобразований. Было выяснено, что результаты аналитического преобразования Фурье и преобразования Фурье чеерз БПФ.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Код программы