Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П.Королёва»

Институт информатики, математики и электроники
Факультет информатики
Кафедра технической кибернетики

Отчет по лабораторной работе No2
по курсу «Оптоинформационные технологии и системы»

Вариант 6

Выполнил студент:	Наумов М. Е.
Группа:	6409
Преподаватель:	Кириленко М.С.

Самара 2019

ЗАДАНИЕ

1. Реализовать одномерное финитное преобразование Фурье с помощью применения алгоритма БПФ.

2. Построить график гауссова пучка e^{-x^2}. Здесь и далее для каждого графика следует строить отдельно графики амплитуды и фазы. Амплитуда находится как модуль каждого значения функции, фаза – как аргумент (или с помощью функции atan2).

3. Убедиться в правильности реализации преобразования, подав на вход гауссов пучок e^{-x^2} – собственную функцию преобразования Фурье. На выходе тоже должен получиться гауссов пучок (построить график на правильной области определения $[-\tilde{b}, \tilde{b}]$). Рекомендуемая входная область: $[-a, a] = [-5, 5]$.

4. Реализовать финитное преобразование Фурье стандартным методом численного интегрирования (например, методом прямоугольников). Важно: необходимо вычислить интеграл для каждого дискретного значения u, чтобы получить результат в виде вектора. На вход преобразования вновь следует подавать гауссов пучок.

5. Построить результаты двух разных реализаций преобразования на одном изображении (одно для амплитуды, одно для фазы) и убедиться, что они совпадают.

6. Используя первую реализацию преобразования, подать на вход световое поле, отличное от гауссова пучка, в соответствии со своим вариантом. Построить графики самого пучка и результата преобразования.

7. Рассчитать аналитически результат преобразования своего варианта поля и построить график на одной системе координат с результатом, полученным в предыдущем пункте.

АЛГОРИТМ РЕАЛИЗАЦИИ ОПТИЧЕСКОГО ФИНИТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ЧЕРЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БПФ

1. Провести дискретизацию входной функции $f(x)$ в вектор f с размерностью N.
2. Дополнить вектор f и слева, и справа необходимым числом нулей до размерности M.
3. Разбить вектор f на две половины и поменять их местами.
4. Выполнить БПФ от f и умножить результат на шаг h_x , получив вектор F.
5. Разбить вектор F на две половины и поменять их местами.
6. «Вырезать» центральную часть вектора F, оставив N элементов.

Выполнение задания

1. Одномерное финитное преобразование Фурье записывается в виде (1);

$$F_a(u) = \Phi_a\left[f(x)\right](u) = \int\limits_{-a}^{a} f(x)e^{-2\pi ixu}\,dx, \tag{1}$$

где $f(x)$ – финитная функция, $F_a(u)$ – спектр, Φ_a – оператор финитного преобразования Фурье.

Приведём реализацию одномерного финитного преобразования Фурье (полный код представлен в приложении А):

```
function [F, b]=solve_with_fft(f, a, N, M)
  xs = transpose(linspace(-a, a, N + 1))(1:N);
  h_x = 2 * a / N;

  discrete_f = f(xs);
  num_zeros = floor((M - N) / 2);
  extended_f = extend_with_zeros(discrete_f, num_zeros);
  swapped_f = swap_parts(extended_f);

  F = fft(swapped_f) * h_x;
  F = swap_parts(F);
  F = get_central(F, num_zeros, N);

  b = N^2 / (4 * a * M);
endfunction
```

2. На рисунке 1 изображены: график гауссова пучка, графики амплитуды и фазы.

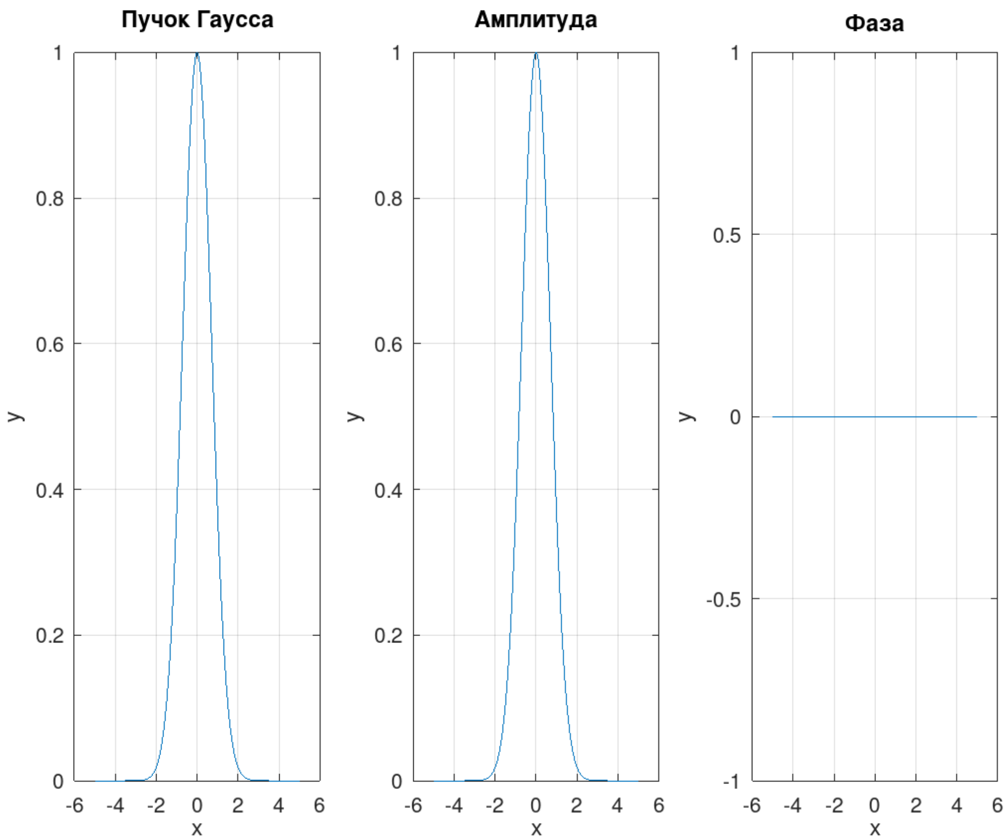

Рисунок 1 – Графики гауссова пучка, амплитуды и фазы

3. Проверка правильности реализации преобразования Фурье. На вход подается гауссов пучок, на выходе получаем другой гауссов пучок – рисунок 2. Построены также графики амплитуды и фазы.

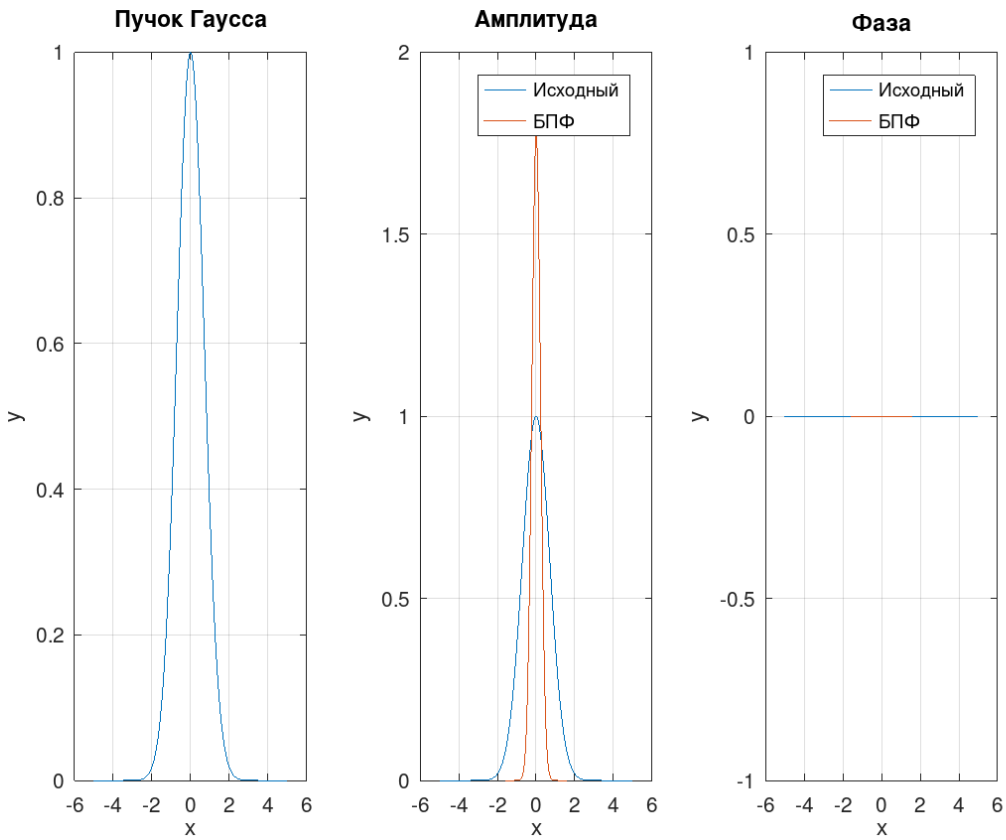

Рисунок 2 – Графики гауссова пучка, амплитуды и фазы

4. Реализуем финитное преобразование Фурье стандартным методом численного интегрирования – методом прямоугольников (2).

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}(x_i - x_{i-1}). \tag{2}$$

Приведём реализацию метода численного интегрирования (полный код представлен в приложении А):

```
function integral = num_integration(f,a,b,n)
    width = (b-a)/n;
    x = linspace(a,b,n);
    integral = width * sum( f( (x(1:n-1)+x(2:n))/2 ) );
end
```

5. Сравнение преобразований Фурье: стандартным методом численного интегрирования и с помощью применения алгоритма БПФ. Результаты изображены на рисунке 3.

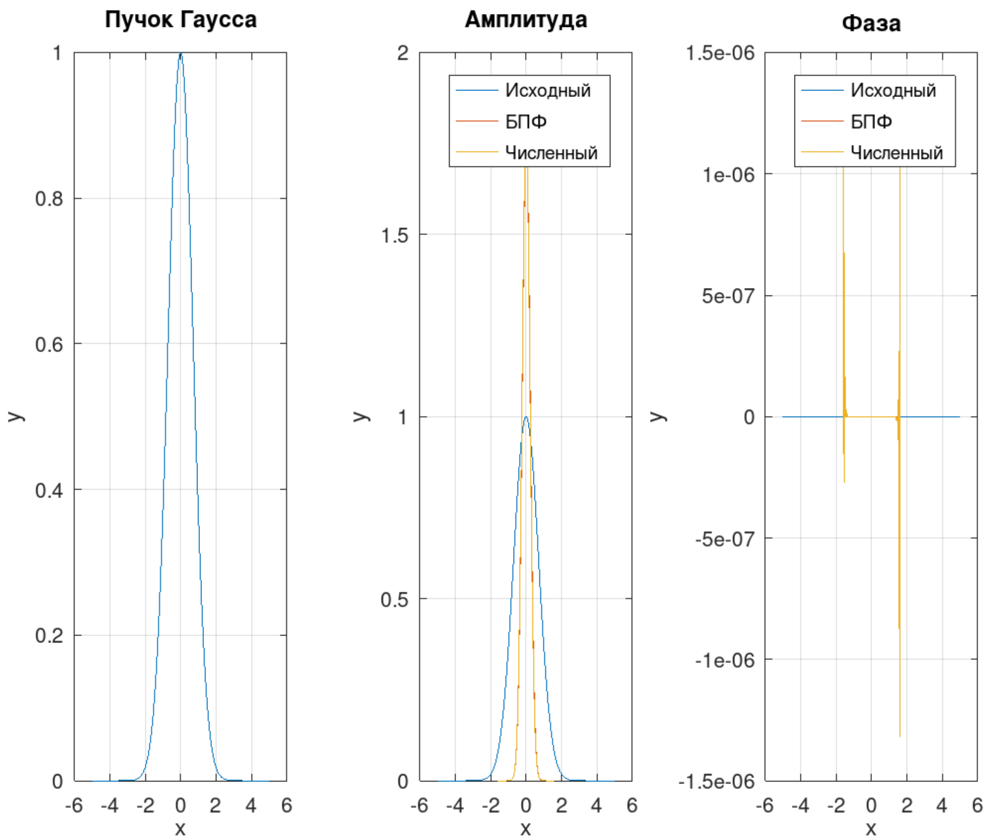

Рисунок 3 – Сравнение преобразований Фурье

Как видно из рисунка 3, численное преобразование Фурье, посчитанное с помощью метода прямоугольников совпадает с преобразованием Фурье, вычисленным с помощью алгоритма БПФ.

6. На вход подается функция: $(4x^2 - 2)e^{\frac{-x^2}{2}}$, используется реализация преобразования Фурье через БПФ. Графики самого пучка и результат преобразования изображены на рисунке 4.

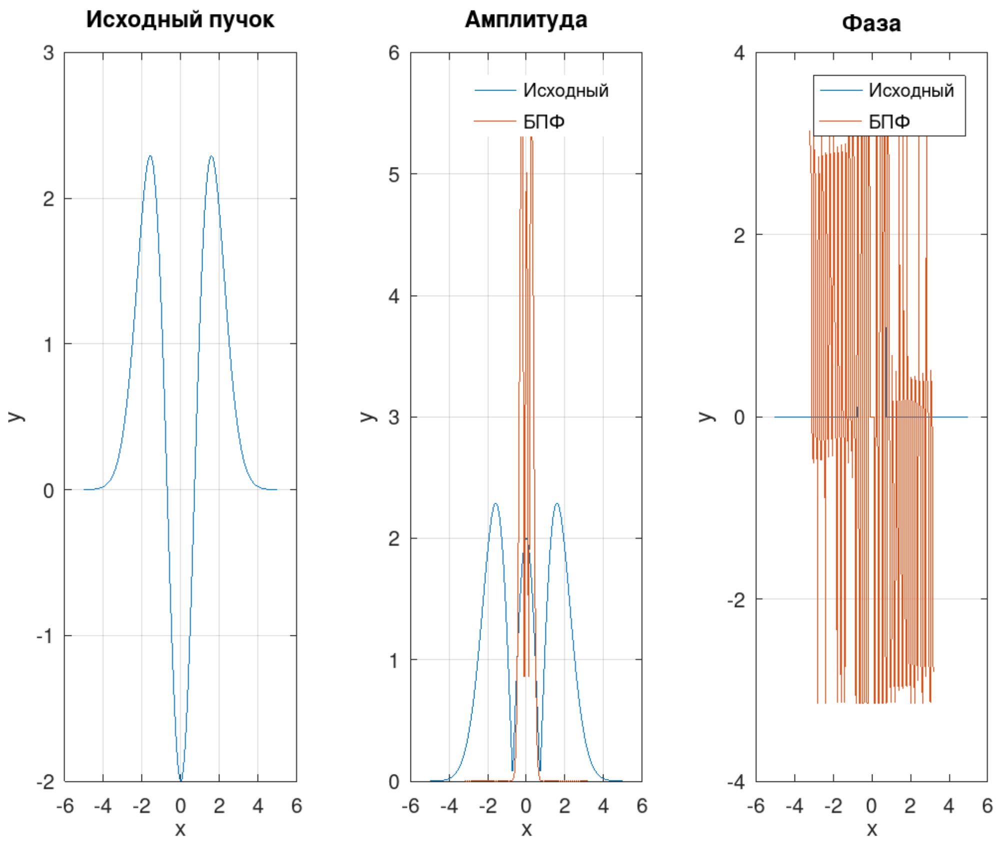

Рисунок 4 – Графики пучка, амплитуды и фазы

7. Найдём аналитическую форму для преобразования Фурье функции $(4x^2-2)e^{\frac{-x^2}{2}}$.

Сделаем замену $x = \sqrt{2}t$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (4x^2-2)e^{\frac{-x^2}{2}} e^{-2\pi i x u}\, dx = \sqrt{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (8t^2-2)e^{-t^2} e^{-2\pi i t(u\sqrt{2})}\, dt.$$

Воспользуемся линейностью интегрирования:

$$\sqrt{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (8t^2-2)e^{-t^2} e^{-2\pi i t(u\sqrt{2})}\, dt = 2\sqrt{2}(4\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} e^{-2\pi i t(u\sqrt{2})}\, dt - \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-2\pi i t(u\sqrt{2})}\, dt) \tag{3}$$

Докажем следующие два соотношения:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-2\pi i t u}\, dt = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 u^2}, \tag{4}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} t f(t) e^{-2\pi i t u}\, dt = -\frac{1}{2\pi i}\frac{dF}{du}(u). \tag{5}$$

Для доказательства (4), выделим полный квадрат:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-2\pi i t u}\, dt = e^{-\pi^2 u^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\pi i u)^2}\, dt.$$

Сделаем замену $\xi = t - \pi i u$:

$$e^{-\pi^2 u^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\pi i u)^2}\, dt = e^{-\pi^2 u^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi.$$

Подставив интеграл Пуассона, получаем:

$$e^{-\pi^2 u^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 u^2}.$$

Докажем (5):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dF}{du}(u) e^{2\pi i t u}\, du = F(u) e^{2\pi i u t}|_{u=\infty}^{\infty} - 2\pi i t \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{2\pi i t u}\, du,$$

где первое слагаемое, в силу высокой осциляции, можно считать нулём. Таким образом получаем:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dF}{du}(u) e^{2\pi i t u}\, du = -2\pi i t f(t).$$

Заметим что, из (5) следует (6):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t) e^{-2\pi i t u}\, dt = \frac{1}{4\pi^2} \frac{d^2 F}{du^2}(u), \tag{6}$$

Полсе подстановки (4) и (6) в (3) и упрощения, получаем:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (4x^2 - 2) e^{\frac{-x^2}{2}} e^{-2\pi i x u}\, dx = -2\sqrt{2\pi}(8\pi^2 u^2 - 1) e^{-2pi^2 u^2}.$$

Результаты аналитического преобразования Фурье и преобразования Фурье через БПФ практически совпадают - рисунок 5.

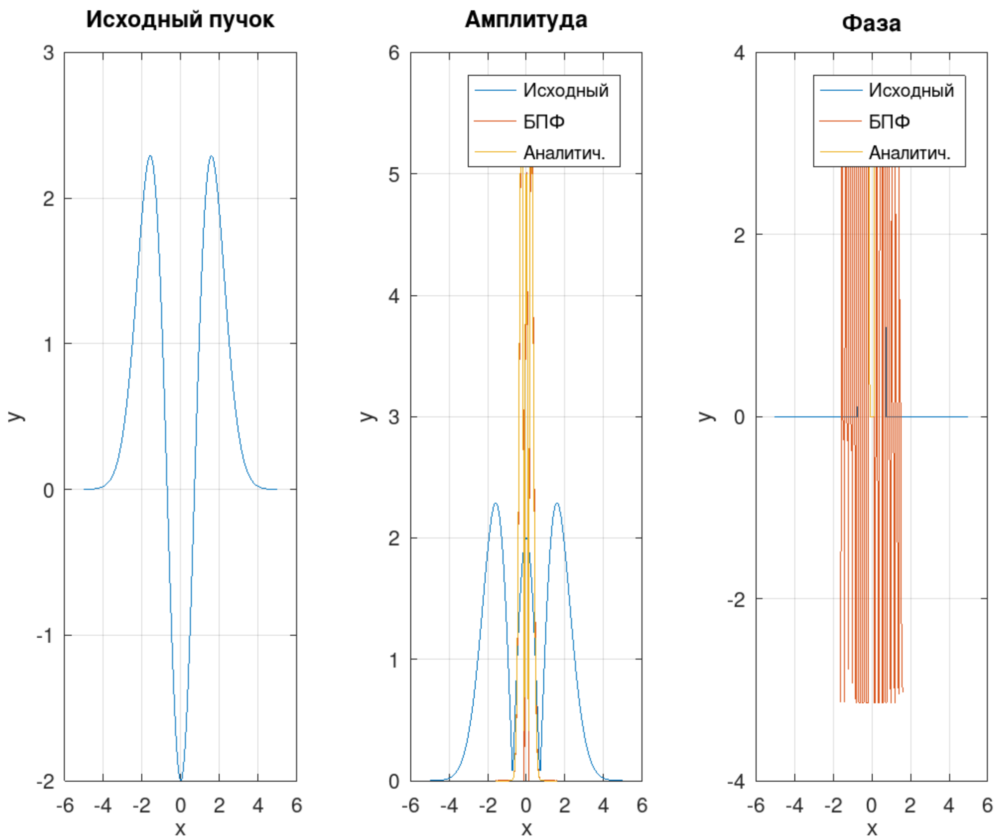

Рисунок 5 – Результаты аналитического решения и преобразования Фурье через БПФ

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной лабораторной работе было реализовано одномерное финитное преобразование Фурье с помощью метода БПФ, а так же с помощью метода численного интегрирования. Был рассчитан теоритический результат преобразования Фурье для функции $(4x^2-2)e^{\frac{-x^2}{2}}$. Построены графики для сравнения результатов различных преобразований. Было выяснено, что результаты аналитического преобразования Фурье и преобразования Фурье чеерз БПФ.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Код программы

```
function r=analytical(x)
  pi = 3.14159;
  r = (-2 * sqrt(2*pi) .* (-1 + 8 * pi.^2 * x.^2)) ./ exp(2 * pi^2 .* x.^2);
endfunction

function r=extend_with_zeros(arr, number_of_zeros)
  n = length(arr);
  r = zeros(2 * number_of_zeros + n, 1);

  for i=1:n
    r(i + number_of_zeros) = arr(i);
  endfor
endfunction

function r=gauss_f(x)
  r = exp(-x .^ 2);
endfunction

function r=get_central(arr, num_zeros, n)
  r = zeros(n, 1);
  for i = 1:n
    r(i) = arr(i + num_zeros);
  endfor
endfunction

function r=my_f(x)
  r = (4 .* (x .^ 2) .- 2) .* exp(-x .^ 2 ./ 2);
endfunction

function integral = num_integration(f,a,b,n)
    width = (b-a)/n;
    x = linspace(a,b,n);
    integral = width * sum( f( (x(1:n-1)+x(2:n))/2 ) );
end

function [F, b]=solve_with_fft(f, a, N, M)
  xs = transpose(linspace(-a, a, N + 1))(1:N);
```

```
  h_x = 2 * a / N;

  discrete_f = f(xs);
  num_zeros = floor((M - N) / 2);
  extended_f = extend_with_zeros(discrete_f, num_zeros);
  swapped_f = swap_parts(extended_f);

  F = fft(swapped_f) * h_x;
  F = swap_parts(F);
  F = get_central(F, num_zeros, N);

  b = N^2 / (4 * a * M);
endfunction

function F=solve_with_numerical(f, a, b, M)
  F = zeros(M, 1);
  us = linspace(-b, b, M);

  for u_index = 1:M
    u = us(u_index);
    F(u_index) = num_integration(@(x) f(x) .* exp(-2 .* pi .* i .* u .* x), -a, a,
     ↪  512);
  endfor
endfunction

function r=swap_parts(arr)
  n = length(arr);
  half = floor(n / 2);
  r = vertcat(arr(half + 1:n), arr(1:half));
endfunction
```