部分積分と置換積分の計算

01ca0125 鈴木藍

2002 年 5 月 2 日

目 次

概要 **3**

レポートの目的 **3**

1 今回使う基本的な公式 **3**

1.1 部分積分 3

1.2 置換積分 3

2 宿題 **4**

2.1 部分積分 4

2.2 置換積分 4

3 部分積分 **4**

3.1 $\int e^x \cos x dx$ 4

3.2 $\int x^2 e^x dx$ 5

4 置換積分 **5**

4.1 $\int (2x+1)^{15} dx$ 5

4.2 $\int \cos(3x+1) dx$ 6

5 追加の問題 **7**

5.1 $\int x(\log x)^2 dx$ 7

まとめ・結論 **8**

感想 **8**

参考文献 **9**

概 要

授業中出された練習問題を、部分積分、置換積分を使って解く。また、置き換えや 式の変形などは、細かく言葉で書くようにした。

レポートの目的

前回まで勉強してきた微分積分を、実際に公式を使って計算する。この練習問題で、積分の計算過程での式の変形に慣れる。

1 今回使う基本的な公式

1.1 部分積分

積分の式を計算するために、掛け算の微分の公式を使って積分の公式の形に変形してゆく手法。微分の掛け算の公式は

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

である。この式の両辺を x で微分すると、

$$\int (f(x)g(x))'dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

微分したものを積分すると、もとの関数になるので

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

これを移行して

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$\int x\cos(x)dx$ などの式の形に近いのでこの公式を使って計算することが出来る。

1.2 置換積分

置換積分では、微分の公式である合成関数の公式を使って積分の公式で計算できる形に変形させる。$\int f(x)dx$ を $F(t)dt$ のような形にして解く。

合成関数の公式は

$$(F(x(t)))' = F'(x(t))x'(t)$$

これに両辺を t で積分したものが公式である。

$$\int (F(x))dx = \int F'(x(t))x'(t)dt$$

2　宿題

授業中に出された 部分積分と置換積分のそれぞれ 2 問づつともう一問、あわせて 5 問を計算する。

2.1　部分積分

- $\int e^x \cos x dx$
- $\int x^2 e^x dx$

2.2　置換積分

- $\int (2x+1)^{15} dx$
- $\int \cos(3x+1) dx$

- $\int x(\log x)^2 dx$

以上

3　部分積分

3.1　$\int e^x \cos x dx$

まず、公式にあてはめる為に $f(x) = \cos x,\ g(x) = e^x$ とおく。また、e^x を積分したものは e^x, $\cos(x)$ を積分したものは $\sin(x)$ である。

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x - \sin x dx$$

ここで、$\int e^x - \sin x dx$ をさらに部分積分する。$f(x) = -\sin x,\ g(x) = e^x$ とおいて、

$$\int e^x - \sin x dx \quad = \quad e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x) dx$$

もとの式に戻って

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - (e^x(-\cos x) + \int e^x \cos x dx)$$
$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

ここで 右辺と左辺の $\int e^x \cos x dx$ が同じなので、右辺の式を移項すると

$$2\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x$$

左辺の 2 をとって

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x \sin x + e^x \cos x$$

右辺の e^x をくくって

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)$$

よってこの式は

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)$$

となる。

3.2 $\int x^2 e^x dx$

まず、公式にあてはめる為に $f(x) = e^x, \, g(x) = x^2$ とおく。これを当てはめて

$$\int x^2 e^x dx = e^x x^2 - \int e^x 2x dx$$

ここで k が定数の時、$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ だから

$$\int x^2 e^x dx = e^x x^2 - 2\int e^x x dx$$

となる。さらに $\int e^x x dx$ を部分積分して、$f(x) = e^x, \, g(x) = x$ とおくと

$$\int e^x x dx = e^x x - \int e^x dx$$
$$\int e^x x dx = e^x x - e^x$$

これを先程の式に戻して

$$\int x^2 e^x dx = e^x x^2 - 2(e^x x - e^x)$$

e^x でくくって

$$\int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2)$$

よってこの式は

$$\int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2)$$

となる。

4 置換積分

4.1 $\int (2x+1)^{15} dx$

公式に当てはめるために $t = 2x + 1$ とする。さらに、関数 $F(x) = x^{15}$ とする。

$$\int (F(x))dx = \int (t)^{15} dt$$
$$\int (F(x))dx = \int F'(t) \cdot x'(t) dt$$

この式を使って、dx と dt の関係を調べる。

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d(2x+1)}{dx}$$
$$\frac{dt}{dx} = 2$$
$$dx = \frac{1}{2}dt$$

この dx を、問題の式にあてはめると

$$\int t^{15}\frac{1}{2}dt$$
$$\frac{1}{2}\int t^{15}dt$$

積分して

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{16}}{16}$$
$$frac132t^{16}$$

t を元に戻して

$$frac132(2x+1)^{16}$$

よって、この式は

$$frac132(2x+1)^{16}$$

となる。

4.2 $\int \cos(3x+1)dx$

公式に当てはめる為に、$t = 3x+1$ とする。公式

$$\int (F(x))dx = \int F'(t)\cdot x'(t)dt$$

この $x'(t)$ について解けば、dx と dt の関係を得ることが出来るから、

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d(3x+1)}{dx}$$
$$\frac{dt}{dx} = 3$$
$$dx = \frac{1}{3}dt$$

これを

$$\int cos(t)dt$$

に当てはめると

$$\int cos(t)\frac{1}{3}dt$$
$$\frac{1}{3}\int cos(t)dt$$

積分して

$$\frac{1}{3}sin(t)$$

t を元に戻して

$$\frac{1}{3}sin(3x+1)$$

よってこの式は

$$\frac{1}{3}sin(3x+1)$$

となる。

5　追加の問題

5.1　$\int x(\log x)^2dx$

まず、公式に当てはめるために $f'(x)=x,\ g(x)=(\log x)^2$ とする。また、$f(x)=\frac{x^2}{2}$ となる。この式を部分積分して

$$\int x(\log x)^2dx=\frac{x^2}{2}(\log x)^2-\int\frac{x^2}{2}((\log x)^2)'dx \tag{1}$$

また、$((\log x)^2)'$ は合成関数であるから、$F(x)=x^2$ とおいてこれを解く。

$$((\log x)^2)'=F'(\log x)\log' x$$
$$((\log x)^2)'=2\log x\frac{1}{x}$$
$$((\log x)^2)'=\frac{2\log x}{x}$$

そして $\int\frac{x^2}{2}((\log x)^2)'dx$ を解くと、

$$\int\frac{x^2}{2}((\log x)^2)'dx=\int x\log xdx$$

さらに、$\int x\log xdx$ を部分積分すると $f'(x)=x,\ g(x)=\log x$ とおいて

$$\int x\log xdx=\frac{x^2}{2}\log x-\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx$$
$$\int x\log xdx=\frac{x^2}{2}\log x-\int\frac{x}{2}dx$$
$$\int x\log xdx=\frac{x^2}{2}\log x-\int\frac{1}{2}xdx$$
$$\int x\log xdx=\frac{x^2}{2}\log x-\frac{1}{2}\int xdx$$

$\int xdx$ を積分して

$$\int xdx=\frac{x^2}{2}$$

これを戻して

$$\int x\log x dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}$$
$$\int x\log x dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}$$

この式が

$$\int \frac{x^2}{2}((\log x)^2)' dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}$$

となる。これを 1 の式に当てはめると

$$\int x(\log x)^2 dx = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - (\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}) \tag{2}$$
$$\int x(\log x)^2 dx = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}\log x + \frac{x^2}{4} \tag{3}$$

$\frac{x^2}{4}$ で全体をくくって

$$\int x(\log x)^2 dx = \frac{x^2}{4}(2(\log x)^2 - 2\log x + 1) \tag{4}$$

よって、この式は

$$\int x(\log x)^2 dx = \frac{x^2}{4}(2(\log x)^2 - 2\log x + 1) \tag{5}$$

となる。

まとめ・結論

まだ何に使うのかは分からないが、部分積分や置換積分を使えば、複雑な積分の計算が行えることがわかった。しかし、理解度はまだ低いので練習をさらに重ねることが必要だと感じた。

感想

はじめは何をやっているかわからなかった。記号の置き換えが複雑であることと、目的がよく分からないことが原因だと感じたが、ある程度なれて、作業として行えるようになった。
ここまでの理解を助けてくれた原君に感謝したい。

参考文献

[1] 定積分と不定積分
http://www.toyota-ct.ac.jp/ math/katsu/text/cal1/c66.pdf
2002/ 5/1 参照