第 7 章 演習1 競争種

01ca0125 鈴木 藍
2002 年 7 月 16 日

目 次

概 要

第 7 章 の概要を理解した後に、演習問題を解く。

レポートの目的

今回は、はじめにを理解した後に問題を良く考えて解いてみる。

1 章の概要

1.1 はじめに

ここでは、微分方程式でなりたつ物を扱う。解法としては解析的に解く事が困難だということを前提として話を進めていて、相平面と言う二つの現象の関係を表す事が出来る座標を使ってその関数の解が、どのような軌道を取るかを予測する事で解を定めている。また、平衡点という特殊な点のごく近い所で解がどのように変化するかを観測し、スケッチをもとに予測をする。

1.2 競争種：生存闘争

ある同じ食物を巡って争う二つの生物をモデル化している。ここではどちらか一方が強いという仮定をしている。

2 演習

2.1 (i) 捕食者 - 被食者

捕食者 - 被食者 の相互作用の単純なモデルは

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x + y \\ \frac{dy}{dt} &= -x + y\end{aligned}$$

であたえられる。初期個体数が $x(0) = y(0) = 1000$ であるとして、未来の x と y を決定せよ。被食者はいつ絶滅するか。
ここでは、x を捕食者、y を被食者としている。

2.2 解

まず、この二つの式の形を見て、解を $x = e^{rt}$ と仮定する。そして、r は (7.8) 式

$$r^2 - (a + d)r + ad - bc = 0$$

から、

$$r^2 - 2r + 2 = 0$$

となる。判別式で見ると、

$$\sqrt{-4} = 2i$$

となるので、複素解となる。式を解くと、

$$\begin{aligned}
r &= \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \\
r &= \frac{2}{2} \pm \frac{\sqrt{-4}}{2} \\
r &= 1 \pm \frac{2i}{2} \\
r &= 1 \pm i
\end{aligned}$$

よって、r は

$$r = 1 \pm i$$

となり、これを x の解に当てはめると

$$x = A_1 e(1+i)t + B_1 e^{(1-i)t}$$

となる。これはオイラーの公式に直すと、

$$\begin{aligned}
x &= A_1 e(1+i)t + B_1 e^{(1-i)t} \\
x &= A_1 et + it + B_1 e^{t-it} \\
x &= A_1 ete^{it} + B_1 e^t e^{-it} \\
x &= e^t(A_1 e^{it} + B_1 e^{-it}) \\
x &= e^t(A_1 \cos t + A_1 i \sin t + B_1 \cos t - B_1 i \sin t) \\
x &= e^t((A_1 + B_1)\cos t + i(A_1 - B_1)\sin t)
\end{aligned}$$

ここで、A_1, B_1 は定数なので、さらに A, B と置き換えて

$$x = e^t(A\cos t + B\sin t)$$

となる。(i は考えない。) さらに、y を求める。

$$\frac{dx}{dt} = x + y$$

であるから、これを変形して、

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= x + y \\
-y &= -\frac{dx}{dt} + x \\
y &= \frac{dx}{dt} - x
\end{aligned}$$

この x に、先程求めた式を代入して、

$$y = (e^t(A\cos t + B\sin t))' - e^t(A\cos t + B\sin t)$$

$e^t(A\cos t + B\sin t)$ を t で微分すると、

$$(e^t(A\cos t + B\sin t))'$$

$$
\begin{aligned}
&= A(e^t\cos t)' + B(e^t\sin t)' \\
&= A(e^t\cos t - e^t\sin t) + B(e^t\sin t + e^t\cos t) \\
&= Ae^t\cos t - Ae^t\sin t + Be^t\sin t + Be^t\cos t
\end{aligned}
$$

$-e^t(A\cos t + B\sin t)$ を合わせて、

$$
\begin{aligned}
Ae^t\cos t - Ae^t\sin t + Be^t\sin t + Be^t\cos t \\
-e^tA\cos t - e^tB\sin t \\
&= -Ae^t\sin t + Be^t\cos t \\
&= Be^t\cos t - Ae^t\sin t \\
&= e^t(B\cos t - A\sin t)
\end{aligned}
$$

よって

$$y = e^t(B\cos t - A\sin t)$$

となる。そして、初期値 は 1000 なので $A = B = 1000$ である。よって、それぞれの x, y は

$$
\begin{cases}
x = 1000e^t(\cos t + \sin t) \\
y = 1000e^t(\cos t - \sin t)
\end{cases}
$$

である。ここで、被食者、y が 0 になる時を調べるのであるから、$y = 0$ となるような式を求める。ここで、$e^t(\cos t - \sin t)$ の $(\cos t - \sin t)$ が 0 になればよいのであるが、もし t が 0 になっても 0 にならないのでどちらかの関数に統一する。

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
\cos\alpha &= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}
$$

という公式を用いる。θ は、t なので、わからないのは $\sqrt{a^2+b^2}, \alpha$ である。α は $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ から導き出す。

$$
\begin{aligned}
-\sin\alpha &= -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

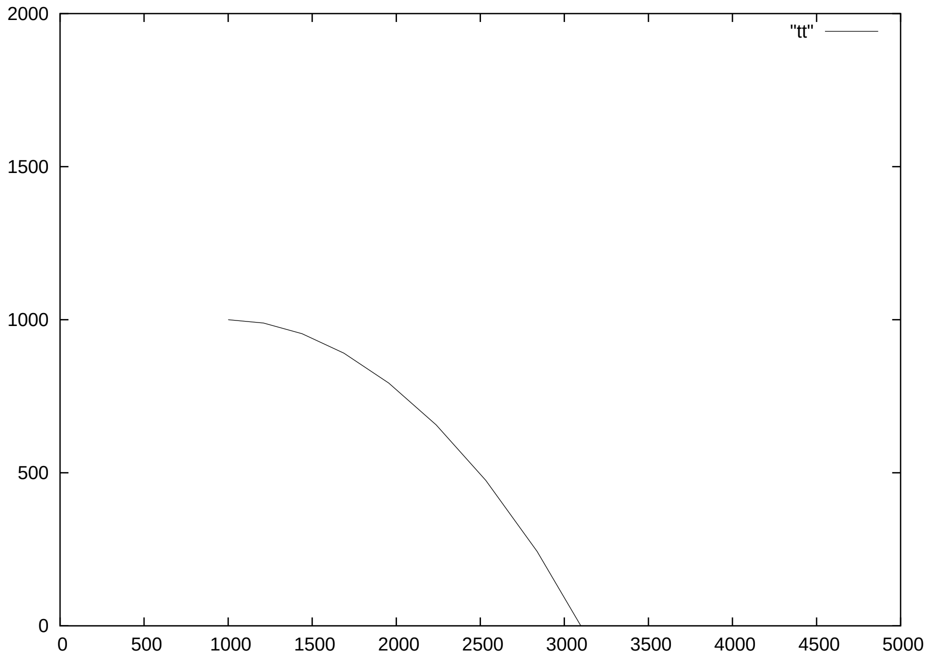
なので、 $\sin\alpha = -\sin 45^\circ$ となる。45 ° は $\frac{\pi}{4}$ であるので $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ となる。よって、y の式は

$$y = 1000e^t(-\sqrt{2}\sin(t - \frac{\pi}{4}))$$

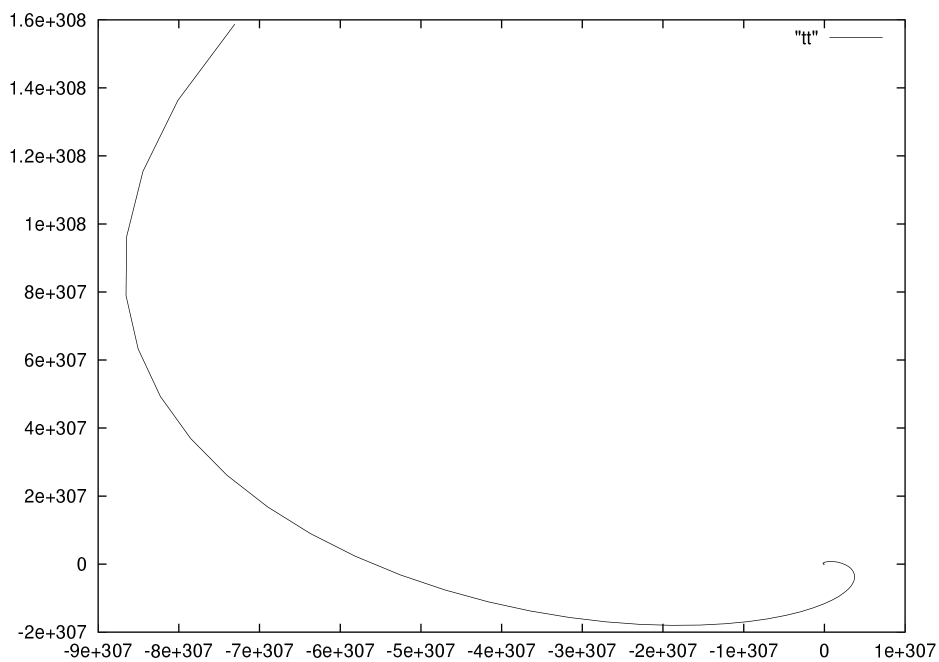
と書き換えられる。y が 0 になるような、t の値を求める。括弧の中を t を求める式に変形して、

$$
\begin{aligned}
-\sqrt{2}\sin(t - \frac{\pi}{4}) &= 0 \\
t - \frac{\pi}{4} &= 0 \\
t &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

ここで、答えでは $t = \left(n + \frac{1}{4}\right)\pi \ \ (n = 0, 1, 2 \ldots)$ としているが、確かに n の値を 変化させてゆくと、式全体が $y = 0$ となる。そして、どちらの x, y も初期値が 1000 であるなら、第一象限に座標があるので、y が 0 になるときの t は $\frac{\pi}{4}$ の時である。以下は 厳密解をプロットした図である。



範囲指定しないと、渦を巻いているような図になった。



(ii) 以降
まだ理解出来ていません。

3 予定

まだ理解できていない部分が溜っているので、予定をまとめる。

- 第 5 章 の演習問題と、解法を理解する。
- 第 7 章 はじめにの理解と、演習問題を解く。

理解できた所までをレポートにまとめておきたいと思う。

まとめ・結論

これまでは、時間とそのモデルの関係を見てきたが、この章ではある現象と現象の関係を表す微分方程式に関する章であった。解法としては、全体的な関係に常に気を配って解くような形であったが前章をしっかり理解していれば、もう少しスマートに理解できたのではないかと思う。

感想

今回も、とくことが出来た問題が 1 つしかなかったが、なんとか自力で出来た所がとても多かったので、少し自分で問題を解く事が出来る自信がついた。いままで、答えを見てから何故そうなるのかを考える事が多かったが、今回は今までの知識を使って問題を解く事が出来た。最後の方は、答えを見てから理解をしたが、方針は自分で考え、その通りに解いたらいい所まで行きつく事ができた。今まで 問題を見てきて、自分で解く自信が全く無かったのだが、今回の演習問題を解いた事はとても大きな収穫だと思った。

参考文献

[1] 物理のための三角関数
http://doraneco.pos.to/physics/column/sankaku.html
2002 年 7 月 15 日 参照