線 形 代 数

慶應大学商学部 小宮英敏

1 行列式の定義

$\{1,2,,3\}$ から $\{1,2,,3\}$ の 1 対 1 の写像を普通 $\{1,2,,3\}$ の**置換**とよぶ. $\{1,2,3\}$ の置換をすべて集めた集合を $S(3)$ とかく. $\{1,2,3\}$ の置換は $\{1,2,3\}$ の順列と同一視することができるので, $S(3)$ の要素の個数は 3! 個であることに注意しよう.

3 次の正方行列 A に対して, その**行列式**$\det A$, または $|A|$ を

$$\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S(3)} \mathrm{sgn}\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \tag{1}$$

で定義する. このように数式で正確に定義すると行列式の定義は大変複雑にみえるが, いいたいことは, 行列の第 1 行から第 3 行まで各行から一つずつ成分を取り出して掛け合わせるのだが, その成分を取り出すときに同じ列から取らないようにするという制約を 1 対 1 の写像で表現しているにすぎない. そして, このような 3 個の要素の取り出し方は全部で 3! 通りあるので, 和は 3! 個の和となっている. 各々の 3 個の要素の積には sgnσ なる係数が掛けてあるが, これは σ の性質により, $+1$ か -1 の値をとる. $+1$ をとるか -1 をとるかは, σ が偶置換であるか奇置換であるかによる. $1,2,,3$ の並びから 2 つの要素を入れ替えることにより σ を作ったとき, 偶数回の入れ替えで作れる場合に σ は偶置換といい, 奇数回の入れ替えで作れる場合に σ は奇置換という. ある置換を達成するときに, 入れ換えの仕方によって偶数回であったり奇数回であったりすることが起ると sgnσ は整合的に定義することはできないが, **そのようなことは起らない**ことが分っている.

以上述べたことを正確に理解するために置換について詳しくみていくことにしよう。$\{1,2,3\}$ の置換すべてを明示すると以下の 6 つになる。

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

これら全部を集めた集合が $S(3)$ である。このうち、$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ は実際には置き換えが行なわれていないが、置換のひとつと考えこれを**恒等置換**をいい、1 とかく。これは数字の 1 ではないので、混乱しないように。

$\sigma, \tau \in S(3)$ に対し、このふたつの置換から新たな置換を次のようにしてつくりだす。即ち、σ という写像に引き続き τ という写像を行いその結

果に注目した写像を考える。記号では、$\tau\sigma$ と並べてかく。これを σ と τ の**合成**または**積**という。例を挙げると、$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とすると、$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ となる。この積という名前は普通の数の積と似た性質をもつ。まず、$\rho, \sigma, \tau \in S(3)$ に対し、$\rho(\sigma\tau) = (\rho\sigma)\tau$ が常に成立する。しかし、$\tau\sigma = \sigma\tau$ が常に成立するとは限らない。これは数とは異なる性質である。

$\sigma \in S(3)$ に対し、その逆置換 σ^{-1} を σ の逆写像として定義する。従って、$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = 1$ が成立する。

$\sigma_0 \in S(3)$ をひとつ固定する。このとき、$\varphi : S(3) \to S(3)$ を $\varphi(\sigma) = \sigma\sigma_0$ で定義すると、 φ は 1 対 1 の写像となり $\{\varphi(\sigma) | \sigma \in S(3)\} = S(3)$ が成立する。同様に $\psi : S(3) \to S(3)$ を $\psi = \sigma_0\sigma$ と定義すると、ψ はやはり 1 対 1 の写像となり $\{\varphi(\sigma) | \sigma \in S(3)\} = S(3)$ が成立する。

置換のうちで $\{1, 2, 3\}$ のふたつの要素のみが互いに対応しあい、他の要素は不変であるものを**互換**という。互換を表わす記号は互いに対応しあう要素、たとえば、i と j のとき、それを括弧でくくって表わす。即ち、(i, j) とかく。例えば、$(1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ である。$S(3)$ の互換をすべて挙げると、$(1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $(1, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $(2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ の 3 つである。実際、${}_3C_2$ こあるはずである。σ を互換とすると、$\sigma\sigma = 1$, $\sigma^{-1} = \sigma$ が成立する

いかなる置換も互換の積として表わすことができることがしられている。実際、

$$
\begin{aligned}
1 &= (1, 2)(1, 2) & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} &= (2, 3) \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} &= (1, 3)(1, 2) & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} &= (1, 2) \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} &= (1, 2)(1, 3) & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} &= (1, 3)
\end{aligned}
$$

である。左側に並んだ置換は偶数個の互換の積で表され、右側の置換は奇数個の互換の積で表されているが、どのような表し方をしても奇偶の別は変化しないことがしられている。偶数個の互換の積として表される置換を**偶置換**といい、奇数個の互換の積として表される置換を**奇置換**という。置

換 σ に対し、その**符号**$\mathrm{sgn}\sigma$ を

$$\mathrm{sgn}\sigma = \begin{cases} 1, & \sigma \text{ が偶置換} \\ -1, & \sigma \text{ が奇置換} \end{cases} \tag{2}$$

と定義する。一般に、$\mathrm{sgn}(\tau\sigma) = (\mathrm{sgn}\tau)(\mathrm{sgn}\sigma)$ が成立することを各自確認しておこう。

ここまできて行列式の定義の意味が明らかになった。行列式の定義式 (1) において和をとる項 $\mathrm{sgn}\sigma a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}$ は全部で置換 σ の数だけすなわち 6 個ある。各置換 σ に対し、その符号と, $(1,\sigma(1))$ 成分, $(2,\sigma(2))$ 成分, $(3,\sigma(3))$ 成分を掛け合せ 6 個すべてを足し合せたものが行列式となるわけである。以下の問題を解いて行列式の定義が理解できているか、試してみなさい。答は右辺に書いてある。

問 1 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -31,\ \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0,\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -30,$
$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 16,\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix} = ab,\ \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$

2 行列式の基本性質

行列 $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対し、${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ を A の**転置行列**という。$B = {}^tA$ ということは、$b_{ij} = a_{ji}$ が成立していることに他ならないことに注意しよう。

定理 1 $|{}^tA| = |A|$ が成立する。

証明 ${}^tA$ の (i,j) 成分を b_{ij} とすると、

$$|{}^tA| = \sum_{\sigma\in S(3)} \mathrm{sgn}\sigma b_{1\sigma(1)}b_{2\sigma(2)}b_{3\sigma(3)} \tag{3}$$

$$= \sum_{\sigma\in S(3)} \mathrm{sgn}\sigma a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3} \tag{4}$$

上の和は 6 項の和となっているが、ある置換 $\sigma \in S(3)$ のひとつに注目する。その注目した σ の逆置換を τ で表わすことにする。$\mathrm{sgn}\sigma a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3}$ に表れる $\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)$ のどれかは 1 であるはずだから $\sigma(i) = 1$ となる

i が必ずある。この両辺に τ を作用されると、$i = \tau(1)$ である。τ は σ の逆置換であることを思い出そう。よって、$a_{\sigma(i)i} = a_{1\tau(1)}$ となる。同様に考えると、$\sigma(j) = 2$ となる j をみつけることができ、$a_{\sigma(j)j} = a_{2\tau(2)}$ となり、$\sigma(k) = 3$ となる k をみつけることができ、$a_{\sigma(k)k} = a_{3\tau(3)}$ となる。また、$\mathrm{sgn}\tau = \mathrm{sgn}\sigma$ であることに注意すれば、

$$\mathrm{sgn}\sigma a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3} = \mathrm{sgn}\tau a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)} \tag{5}$$

となる。σ が $S(3)$ の 6 この置換をすべて動くとき、その逆置換も $S(3)$ の置換をすべて動くからその和は等しくなる。即ち、

$$\sum_{\sigma\in S(3)} \mathrm{sgn}\sigma a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3} = \sum_{\tau\in S(3)} \mathrm{sgn}\tau a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)} \tag{6}$$

が成立するので、 $|{}^tA| = |A|$ となる。Q.E.D.

行列式の定義は各行から列が重複しないように成分を取り出し掛け合せそれに取り出し方を表現する置換の符号を掛けたものをすべて足し合わせたものだが、上の証明から各**列**から行が重複しないように成分を取り出し掛け合せそれに取り出し方を表現する置換の符号を掛けたものをすべて足し合わせたものと考えてもよいことが分る。

数を縦に 3 つ並べ括弧でくくったものを**列ベクトル**という。2 つの列ベクトル $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ について、その**和**と**スカラー倍**を $a + b = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$, $ka = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$ でそれぞれ定義する。行列式 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ について、その縦の 3 列を列ベクトルとみて、$|A| = |a_1\ a_2\ a_3|$ と表現することがある。ここで、$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ である。

列ベクトルに対応して、行ベクトルの概念もあるが、その定義は明らかなので説明は省略する。行列式 $|A|$ の 3 行をそれぞれ行ベクトルをみなし、それらを上から b_1, b_2, b_3 とすると、$|A| = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix}$ とかくことがある。

定理 2 (線型性)
各行および各列に関して和が別れる。即ち、

$$|a_1\ a_2 + a_2'\ a_3| = |a_1\ a_2\ a_3| + |a_1\ a_2'\ a_3|, \tag{7}$$

$$\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 + b_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3' \end{vmatrix} \tag{8}$$

など。

ある列または行が k 倍されているときは、その k を行列式の前に出すことができる。即ち、

$$|ka_1\ a_2\ a_3| = k|a_1\ a_2\ a_3|, \tag{9}$$

$$\begin{vmatrix} b_1 \\ kb_2 \\ b_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} \tag{10}$$

など。

証明

$$|a_1\ a_2 + a_2'\ a_3| = \sum_{\sigma \in S(3)} \mathrm{sgn}\sigma a_{\sigma(1)1}(a_{\sigma(2)2} + a'_{\sigma(2)2})a_{\sigma(3)3} \tag{11}$$

$$= \sum_{\sigma \in S(3)} \mathrm{sgn}\sigma a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3} + \sum_{\sigma \in S(3)} \mathrm{sgn}\sigma a_{\sigma(1)1}a'_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3} \tag{12}$$

$$= |a_1\ a_2\ a_3| + |a_1\ a_2'\ a_3| \tag{13}$$

Q.E.D.

定理 3 (交代性)
二つの列 (行) を取り換えると行列式の値は -1 倍される。たとえば、

$$|a_1\ a_3\ a_2| = -|a_1\ a_2\ a_3|, \tag{14}$$

$$\begin{vmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} \tag{15}$$

など。

証明　互換 $(2,3)$ を ρ とおく。$(a_1\ a_3\ a_2)$ の (i,j) 成分を b_{ij} とおくと、$b_{ij}=a_{i\rho(i)}$ が成立する。従って、

$$|a_1\ a_3\ a_2| = \sum_{\sigma\in S(3)} \mathrm{sgn}\sigma b_{1\sigma(1)}b_{2\sigma(2)}b_{3\sigma(3)} \tag{16}$$

$$= \sum_{\sigma\in S(3)} \mathrm{sgn}\sigma a_{1\rho\sigma(1)}a_{2\rho\sigma(2)}a_{3\rho\sigma(3)} \tag{17}$$

$$= -\sum_{\sigma\in S(3)} \mathrm{sgn}(\rho\sigma) a_{1\rho\sigma(1)}a_{2\rho\sigma(2)}a_{3\rho\sigma(3)} \tag{18}$$

$$= -\,|a_1\ a_2\ a_3| \tag{19}$$

Q.E.D.

以上の定理 2 と定理 3 を総合すると、次の定理が簡単に導かれる。

定理 4

1. 2 つの列 (行) が一致する行列式は 0 である。
2. 1 つの列 (行) の成分がすべて 0 である行列式の値は 0 である。
3. 1 つの列 (行) にある数をかけたものを他の列 (行) に加えても行列式の値は変らない。

問 2 定理 4 を証明しなさい。

行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ の第 i 行と第 j 列を除いて得られる 2 次の正方行列の行列式を Δ_{ij} とかく。これは全部で 9 つある。

$$\widetilde{a}_{ij} = (-1)^{(i+j)}\Delta_{ij} \tag{20}$$

とおき、この $\widetilde{a}_{ij}$ を A の (i,j) 成分 a_{ij} の**余因子**という。

定理 5 (余因子展開定理)

$$|A| = a_{1j}\widetilde{a}_{1j} + a_{2j}\widetilde{a}_{2j} + a_{3j}\widetilde{a}_{3j} \quad j=1,2,3 \tag{21}$$

$$|A| = a_{i1}\widetilde{a}_{i1} + a_{i2}\widetilde{a}_{i2} + a_{i3}\widetilde{a}_{i3} \quad i=1,2,3 \tag{22}$$

証明 (21) について。j をひとつ固定して考える。その後 i をひとつとる。A の第 (i,j) 成分以外の j 列の成分をすべて 0 とした行列を A_i とかくと、$|A|=|A_1|+|A_2|+|A_3|$ が成立していることは列に関する線型性よりわかる。ここで、たとえば、$j=2$ で $i=1$ の場合を考え、$a_{ij}=a_{12}$ を行列

式の左上隅に行と列を交換しながら移動することを考えると以下の式をうる。

$$|A_1| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{(1-1)+(2-1)} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}\Delta_{12}a_{12} = a_{12}\widetilde{a}_{12}. \tag{23}$$

一般的に、$|A_i| = a_{ij}\widetilde{a}_{ij}$ が成立するので、$|A| = a_{1j}\widetilde{a}_{1j} + a_{2j}\widetilde{a}_{2j} + a_{3j}\widetilde{a}_{3j}$ がでる。

(22) についても同様に考察できる。Q.E.D.

定理 5 より次の定理が導かれる。

定理 6

$$a_{1i}\widetilde{a}_{1j} + a_{2i}\widetilde{a}_{2j} + a_{3i}\widetilde{a}_{3j} = \begin{cases} |A|, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{24}$$

$$a_{i1}\widetilde{a}_{j1} + a_{i2}\widetilde{a}_{j2} + a_{i3}\widetilde{a}_{j3} = \begin{cases} |A|, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{25}$$

証明 たとえば、

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} \\ x_2 & a_{22} & a_{23} \\ x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = x_1\widetilde{a}_{11} + x_2\widetilde{a}_{21} + x_3\widetilde{a}_{31} \tag{26}$$

と余因子展開できるが、$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$ とすれば、定理の $i = j = 1$ の場合がでて、$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$ とすれば、$i = 1 \neq 2 = j$ の場合で左辺は同じ列をもつ行列式となるので 0 に等しくなる。他の場合も同様に考察することができる。Q.E.D.

問 3 問 1 を今まで得た知識を利用してスマートに解きなさい。