1.3 方向場と微分方程式

関数 $y(t)$ の (t, y) 平面上でのグラフを考えたとき, $t = t_0$ での関数の微分の値（微分係数）$y'(t_0)$ は, 点 $(t_0, y(t_0))$ での関数 $y(t)$ のグラフの接線の傾きをあらわす．すなわち, 点 $(t_0, y(t_0))$ での関数 $y(t)$ のグラフの接線の傾きは, ベクトル

$$(1, y'(t_0))$$

であらわすことができる.

微分方程式

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{1.1}$$

という形の微分方程式を考え, その一般解 $\{y_C(t)\}$ のグラフに対して, 各点で上のような接線の傾きを考えると,

接線の傾きをあらわす, 点 $(t, y(t))$ におけるベクトル $(1, y'(t))$

を得ることができる．この時, (1.1) より $y'(t) = f(t, y(t))$ なので, このベクトルは $(1, f(t, y(t)))$ と書くことができる．ここで得られた, 点 $(t, y(t))$ におけるベクトル $(1, f(t, y(t)))$ 全体を**方向場** (**direction field**) と呼ぶ.

この方向場は, 微分方程式 (1.1) のみからきめることができる．この時, 微分方程式 (1.1) の解とは, 各点で方向場できめられた傾きの接線をもつ曲線全体に他ならない.

2 単独１階線形常微分方程式

2.1 線形常微分方程式とは？

2.1.1 微分方程式が線形とはどういうことか？

Definition 2.1.1 未知関数 $y(t)$ に対する常微分方程式が**線形** (**linear**) であるとは, 常微分方程式が y, $y', \cdots, y^{(n)}$ に関して線形（一次）であることを言う.

Example 2.1.2

1. １階常微分方程式が線形であるとは, y, y' に関して線形であることであり, 具体的には

$$y'(t) + a(t)y(t) + b(t) = 0$$

と書けている．したがって,

$$y'(t) + t^3 y(t) + e^t = 0$$

は線形であり, y の係数となっている関数 $a(t)$, y に関しては「定数項」となっている関数 $b(t)$ が線形な関数かどうかは, 微分方程式が線形であることには無関係である.

2. ２階常微分方程式が線形であるとは, y, y', y'' に関して線形であることであり, 具体的には

$$y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) + b(t) = 0$$

と書けている.

3. 常微分方程式

$$y''(t) + y'(t)y(t) = 0, \quad \sin(y'(t)) + \cos(y(t)) = 1$$

はともに線形常微分方程式ではない．わかりにくければ,

$$y(t) \mapsto X, \quad y'(t) \mapsto Y, \quad y''(t) \mapsto Z$$

と書換えてみると, 上の２つの常微分方程式は, それぞれ

$$Z + XY = 0, \quad \sin(Y) + \cos(X) = 1$$

と書くことができる．これらはともに X, Y, Z に関して１次式ではない．

2.1.2 線形常微分方程式の性質

Theorem 2.1.3 １階線形常微分方程式

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0 \tag{2.2}$$

を考える．このとき, 次が成り立つ．

1. 恒等的に 0 となる関数は (2.2) の解である．
2. $y(t)$ を (2.2) の任意の解としたとき, 任意の $C \in \mathbb{R}$ に対して, $Cy(t)$ も再び (2.2) の解となる．（**斉次性**）
3. $y_1(t)$, $y_2(t)$ を (2.2) の任意の２つの解としたとき, $y_1(t) + y_2(t)$ も再び (2.2) の解となる．（**重ねあわせの原理**）

Remark 2.1.4 これらの性質は, 「関数を微分する」という写像 $\dfrac{d}{dt}$ が「線形」であること, すなわち,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(0) = 0, \\
&\frac{d}{dt}(Cy(t)) = C\frac{d}{dt}y(t), \\
&\frac{d}{dt}(y_1(t) + y_2(t)) = \frac{d}{dt}y_1(t) + \frac{d}{dt}y_2(t)
\end{aligned}$$

から導かれる結果である．

Definition 2.1.5 １階線形常微分方程式 (2.2) を**斉次**１階線形常微分方程式と呼ぶ．

2.2 １階線形常微分方程式の解法

2.2.1 斉次１階線形常微分方程式の解法

2.2.1.1 解法１

（解法については省略）