第 2 章 はじめに

01ca0125 鈴木 藍

2002 年 6 月 11 日

目 次

概 要

第 2 章 の主題である 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = ky$ の解法を理解し実際に 解を導いた。

レポートの目的

これから始まる 第 2 章の中心となる 微分方程式の解法を 理解する。

1 主題となる微分方程式

1.1 モデル

この章での基本となる微分方程式は 以下の式である。

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

多くの現象や問題は、この式で解けるとのこと。

2 微分方程式を解く

はじめに 16 ページ中程の「変数分離」がわからなかったのでしらべた。

2.1 変数分離とは

右辺が x のみの関数と x のみの関数の積の形で表される微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

を変数分離形 (separation of variables) という。ただし，$f(x)$ は x のみに依存する関数で，y には依存しない。同様に $g(y)$ は y だけの関数である。$g(y) \neq 0$ であれば，この式の両辺を $g(y)$ で割り，さらに x で積分することで

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C \qquad (C \text{ は定数})$$

が得られる。

2.2 式の展開

変数分離形を用いて 微分方程式を展開する。右辺の y を 右辺に移動し、左辺の dx を右辺に移動する。

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dy}{dx}\frac{1}{y} &= \int ky\frac{1}{y} \\
\int \frac{dy}{dx}\frac{1}{y}dx &= \int kdx \\
\int \frac{dy}{y} &= \int kdx
\end{aligned}
$$

ここで、k は定数なので、両辺を積分すると

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y} &= \int kdx \\
\log y &= kx + A \qquad (A\text{ は任意定数})
\end{aligned}
$$

ここで、任意定数 A を求める。 $x = x_0, y = y_0$ と x, y に仮に値を入れる。 よって、A は

$$
\begin{aligned}
\log y_0 &= kx_0 + A \\
\log y_0 - kx_0 &= A
\end{aligned}
$$

となる。これを $\log y = kx + A$ に代入して

$$
\begin{aligned}
\log y &= kx + \log y_0 - kx_0 \\
\log y - \log y_0 &= kx - kx_0
\end{aligned}
$$

これをまとめて

$$
\log \frac{y}{y_0} = k(x - x_0)
$$

となる。これを計算して

$$
\begin{aligned}
\log \frac{y}{y_0} &= k(x - x_0) \\
\log \frac{y}{y_0} &= k(x - x_0) \log_e e \\
\log \frac{y}{y_0} &= \log_e e^{k(x-x_0)} \\
\frac{y}{y_0} &= e^{k(x-x_0)} \\
\frac{y}{y_0}y_0 &= e^{k(x-x_0)}y_0 \\
y &= e^{k(x-x_0)}y_0
\end{aligned}
$$

よって、y は

$$
y(x) = e^{k(x-x_0)}y_0
$$

となる。このモデルは、序章の 人口モデルで導き出した解と同じ形である。17 ページの図 2.1 も、序章で作成したプログラムが描いたグラフと同じ形をしている。

3 疑問点

ここで、なぜ変数分離のテクニックを用いているのかがよくわからない。序章で 同じ形の微分方程式を解いた時と同じく、

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= ky \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= k \\ \int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx &= \int kdx \\ \int \frac{dy}{y} &= kx + A \\ \log y &= kx + A \qquad (A\text{ は任意定数})\end{aligned}$$

というように導ける。ただ手法を紹介しただけなのだろうか。

まとめ・結論

序章で使った微分方程式と同じ形をしていたが、解き方は以前と別の手法を使っていた。基本的な形は変わらないようである。

感想

ただ式があっても、なにを表すのかはよく分からないが基本的な解法は ある程度わかった。今後、応用が出来ればいいと思う。

参考文献

[1] 変数分離形
http://www4.justnet.ne.jp/ masema/separation.html 2002 年 6 月 10 日 参照

[2] 変数分離形微分方程式
http://next1.cc.it-hiroshima.ac.jp/MULTIMEDIA/diffpub/node5.html
2002 年 6 月 10 日 参照