常微分方程式 (II)

1　線形微分方程式

1 階常微分方程式で

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

の形のものを **(1 階) 線形微分方程式**という．

解法：式 (1) の両辺に $e^{\int Pdx}$ を掛ければ，

$$e^{\int Pdx}\frac{dy}{dx} + Pe^{\int Pdx}y = Qe^{\int Pdx} \tag{2}$$

左辺を変形して，

$$\begin{aligned} & e^{\int Pdx}\frac{dy}{dx} + Pe^{\int Pdx}y \\ &= e^{\int Pdx}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d}{dx}e^{\int Pdx}\right)y \\ &= \frac{d}{dx}\left(e^{\int Pdx}y\right). \end{aligned} \tag{3}$$

ゆえに，式 (1) は，

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int Pdx}y\right) = Qe^{\int Pdx} \tag{4}$$

両辺を積分して，

$$e^{\int Pdx}y = \int Qe^{\int Pdx}dx + c \tag{5}$$

両辺を $e^{\int Pdx}$ で割れば，

$$y = e^{-\int Pdx}\left(\int Qe^{\int Pdx}dx + c\right) \tag{6}$$

2　ベルヌーイの微分方程式

1 階常微分方程式で

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1) \tag{7}$$

の形のものを**ベルヌーイの微分方程式**という．

解法：未知関数の変換

$$z = y^{1-n} \tag{8}$$

を行えば，式 (7) は z を未知関数とする線形微分方程式となる．

3　完全微分方程式

1 階微分方程式は，

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{9}$$

の形で表すことができる．もし，この式 (9) の左辺がそのまま 1 つの関数 $u(x,y)$ の全微分 $du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy$ に等しければ，これを**完全微分方程式**という．

式 (9) が完全微分方程式であるための必要十分条件は，

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{10}$$

である．

解法：

1. 式 (9) において，$du(x,y) = Pdx + Qdy$ であれば，その一般解は $u(x,y) = c$ となる．
2. 式 (9) が完全微分方程式であれば，その一般解は，

   $$\int Pdx + \int \left[Q - \frac{\partial}{\partial y}\int Pdx\right]dy = c \tag{11}$$

   である．

4　積分因数

式 (9) は完全微分方程式ではないが，両辺にある関数 $\lambda(x,y)$ を掛けて得られる方程式

$$\lambda(x,y)P(x,y)dx + \lambda(x,y)Q(x,y)dy = 0 \tag{12}$$

が完全微分方程式になることがある．この様な関数 $\lambda(x,y)$ を式 (9) の**積分因数 (積分因子)** という．

1 階微分方程式 $Pdx + Qdy = 0$ について，

$$\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{Q}$$

が x だけの関数であれば，これを $\psi(x)$ として，$\lambda = \exp\left(-\int \psi(x)dx\right)$ は積分因数である．同様に，

$$\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P}$$

が y だけの関数であれば，これを $\psi(y)$ として，$\lambda = \exp\left(\int \psi(y)dy\right)$ は積分因数となる．

一般に，1 階微分方程式の積分因数は必ず存在するが，それはただ一つではない．1 階微分方程式の積分因数を求めるには，色々と工夫する必要がある．この積分因数を視察によって見出すのに，次の書式は有用である．

$$d(xy) = ydx + xdy \tag{13}$$

$$d(x^2 \pm y^2) = 2xdx \pm 2ydy \tag{14}$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2} \tag{15}$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2} \tag{16}$$

$$d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \tag{17}$$

$$d\left(\tan^{-1}\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} \tag{18}$$

$$d\left(\frac{x-y}{x+y}\right) = \frac{2ydx - 2xdy}{(x+y)^2} \tag{19}$$

$$d\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{2xdy - 2ydx}{(x-y)^2} \tag{20}$$

5 演習問題

1. （線形微分方程式）次の微分方程式の一般解を求めよ．
   (a) $y' + 2xy = 4x$
   (b) $y' + y\cos x = \sin x \cos x$
2. （ベルヌーイの微分方程式）次の微分方程式の一般解を求めよ．
   (a) $y' - y = xy^5$
   (b) $xy' + y = x\sqrt{y} \quad (x > 0)$
3. (完全微分方程式) 次の微分方程式の一般解を求めよ．
   (a) $(y + 3x)dx + xdy = 0$
   (b) $(\cos y + y\cos x)dx + (\sin x - x\sin y)dy = 0$
4. (積分因数) 積分因数を求めて，次の微分方程式の一般解を求めよ．
   (a) $2xydx + (y^2 - x^2)dy = 0$
   (b) $(1 - 2x^2y)dx + x(2y - x^2)dy = 0$