例題 電荷密度が極座標表示 (r, θ, ϕ) で r の関数，$\rho(r) = \rho_0(r/a)$ と与えられた時，原点を中心とする半径 a の球の内部にある電荷 Q を求めなさい．

もし，あなたがこの問題の答えを

$$Q = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0 \tag{1}$$

とするのであれば，大きな間違いです．以下の説明を**完全に理解するまで**良く読んで下さい．

一般に，ある量の密度 (電荷密度でも，質量密度でも，エネルギー密度でもよいです．密度とはその点における単位体積当りの平均量のこと) が r, θ, ϕ の関数 $f(r, \theta, \phi)$ で与えられるとき，半径 a の球内にあるこの物理量の総量 (もし，f が電荷密度ならば電荷)F は，積分によって求めなくてはなりません．座標 r を r から $r + dr$ へ，座標 θ を θ から $\theta + d\theta$ へ，座標 ϕ を ϕ から $\phi + d\phi$ へ動かすときに，座標点 (r, θ, ϕ) は小さな領域を作り，この小さな領域の体積は

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

となります．[1]

この小さな領域の内部にある量 (もし，f が電荷密度ならば小さな領域内の電荷) は fdV です．それゆえ，求めたい量は

$$F = \int f(r, \theta, \phi) dV = \int_0^a dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \; r^2 \sin\theta f(r, \theta, \phi) \tag{2}$$

となります．ここでどうして積分区間がこのようになるのかもきっちり理解してください (覚えてはいけません．考えて必ず納得してください)．

もし，密度 f が r のみの関数 (つまり，θ と ϕ によらない) とすると，(2) 式は

$$F = \int_0^a dr \; 4\pi r^2 f(r) \tag{3}$$

となります．なぜなら，

$$\int_0^\pi \sin\theta d\theta = 2, \qquad \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

だからです．

もちろん，(3) 式には幾何学的な意味があります．つまり，半径 a の球を厚さ dr の薄い球殻の重なり (玉ねぎの皮のような) にわけたとしましょう．すると，f は r のみの関数なので，半径 r の薄い球殻上では同じ値をとります．球殻の体積は $4\pi r^2 dr$ ですから[2]，

[1] この式 (特になぜ $\sin\theta$ がかかるか) が理解できない人は，図を書いて小さな領域の 3 つの辺の長さを考えましょう．それでも分からない人は必ず教官に質問して下さい．

[2]「球の表面積 $\times$ 厚さ」です．

ひとつの薄い球殻が担っている量は $4\pi r^2 f(r)dr$ です．(3) 式はこれを全ての球殻について積分したものです．

(3) 式より，f が定数であるような**非常に特殊な場合**にのみ，$F = (4/3)\pi a^3 f$(つまり，球の体積 $\times$ 密度) となることがわかります．さらに，もっと特殊な場合として $f = 1$ の場合，もちろん (2) 式や (3) 式は球の体積 ($(4/3)\pi a^3$) そのものを与えます．

さて，例題の答えを求めてください．答えは，

$$Q = \pi a^3 \rho_0 \tag{4}$$

です．この答えは (1) 式の値より小さいですね．なぜなら，(1) 式では間違って球の外側の一番高い密度が球の内部にも一様に存在すると考えて求めたためです．

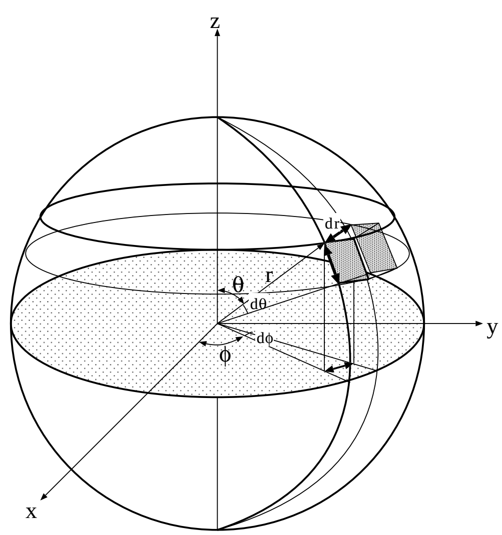
同様の考え方で密度がもっと複雑な関数で与えられたり，円柱座標 (R, ϕ, z)[3]で与えられた場合にも対応できるはずです．以下の問に答えてください．[4]

問 1 電荷密度が極座標表示 (r, θ, ϕ) で $\rho = \rho_0(r/a)\sin\theta$ と与えられた時，原点を中心とする半径 a の球の内部にある電荷 Q を求めよ．

問 2 z 軸を中心軸とする半径 a，長さ b の円柱がある．円柱の下面と上面はそれぞれ $z = -b/2$ と $z = b/2$ にある．円柱内部の電荷密度が円柱座標 (R, ϕ, z) によって $\rho = \rho_0 \cos(\pi z/b)(R/a)$ と与えられるとき，円柱内部にある電荷 Q を求めよ．

もちろん，同様の考え方は面積分にも応用できます．例えば以下の問題では，球面を小さな面要素に分割することで積分によって答えを求めることができます．[5]

問 3 地球上の温度が $f(\theta) = f_0(1 - \xi\cos 2\theta)$ であるとき，地球表面全体の平均温度を求めよ．ただし，θ は余緯度 (北極点を基準にし，南極点を π とする緯度) である．



[3] R は z 軸からの距離
[4] 問 1 の答え:$(\pi^2/4)a^3\rho_0$．問 2 の答え:$(4/3)a^2 b\rho_0$
[5] 問 3 の答え:$f_0(1 + \xi/3)$