常微分方程式 (II) 演習問題解答

1. （線形微分方程式）次の微分方程式の一般解を求めよ．

   (a) $y' + 2xy = 4x$

   $P(x) = 2x,\ Q(x) = 4x$ より，

   $$\begin{aligned} y &= e^{-\int 2xdx}\left[\int 4xe^{\int 2xdx}dx + c\right] \\ &= e^{-x^2}\left[\int 4xe^{x^2}dx + c\right] \\ &= 2 + ce^{-x^2} \end{aligned}$$

   で与えられる．

   (b) $y' + y\cos x = \sin x \cos x$

   $P(x) = \cos x,\ Q(x) = \sin x \cos x$ より，

   $$\begin{aligned} y &= e^{-\int \cos xdx}\left[\int \sin x \cos x e^{\int \cos xdx}dx + c\right] \\ &= e^{-\sin x}\left[\int \sin x \cos x e^{\sin x}dx + c\right] \end{aligned}$$

   $\sin x = t$ と置けば，

   $$\int t \cos x e^t \frac{1}{\cos x}dt = e^t(t-1)$$

   となるから，

   $$\begin{aligned} y &= e^{-\sin x}\left[e^{\sin x}(\sin x - 1) + c\right] \\ &= \sin x - 1 + ce^{-\sin x} \end{aligned}$$

   で与えられる．

2. （ベルヌーイの微分方程式）次の微分方程式の一般解を求めよ．

   (a) $y' - y = xy^5$

   $z = y^{1-5} = y^{-4}$ とおくと，$z' = -4y^{-5}y'$．与えられた方程式の両辺に $-4y^{-5}$ をかけてから，z と z' を代入すると

   $$z' + 4z = -4x$$

となり，線形微分方程式となる．よって，

$$z = e^{-\int 4dx}\left[\int -4xe^{\int 4dx}dx + c\right]$$
$$= \frac{1}{4} - x + ce^{-4x}$$

となる．z を元に戻すと

$$y^{-4} = \frac{1}{4} - x + ce^{-4x}$$

で与えられる．

(b) $xy' + y = x\sqrt{y} \quad (x > 0)$

$z = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}$ とおくと，$z' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'$ となる．両辺に $\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$ を掛けてから，z, z' を代入すると

$$z' + \frac{1}{2x}z = \frac{1}{2}$$

となり，線形微分方程式となる．よって，

$$z = e^{-\int \frac{1}{2x}dx}\left[\int \frac{1}{2}e^{\int \frac{1}{2x}dx}dx + c\right]$$
$$= \frac{1}{3}x + cx^{-\frac{1}{2}}$$

となる．z を元に戻すと

$$y = \left(\frac{1}{3}x + cx^{-\frac{1}{2}}\right)^2$$

で与えられる．

3. (完全微分方程式) 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(a) $(y + 3x)dx + xdy = 0$

$P(x, y) = y + 3x$, $Q(x, y) = x$ とおくと，$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ より，与式は完全微分方程式である．よって，

$$\int y + 3xdx + \int \left[x - \frac{\partial}{\partial y}\int y + 3xdx\right]dy = c$$
$$\therefore \quad yx + \frac{3}{2}x^2 = c$$

となる．

(b) $(\cos y + y\cos x)dx + (\sin x - x\sin y)dy = 0$

$P(x,y) = \cos y + y\cos x$, $Q(x,y) = \sin x - x\sin y$ とおくと，$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ より，与式は完全微分方程式である．よって，

$$\int \cos y + y\cos x dx + \int \left[\sin x - x\sin y - \frac{\partial}{\partial y}\int \cos y + y\cos x dx\right] dy = c$$

$$\therefore \quad x\cos y + y\sin x = c$$

となる．

4. (積分因数) 積分因数を求めて，次の微分方程式の一般解を求めよ．

(a) $2xydx + (y^2 - x^2)dy = 0$

両辺を $\dfrac{1}{y^2}$ で割ると，

$$\frac{2x}{y}dx + \frac{(y^2 - x^2)}{y^2}dy = 0$$

$P = \dfrac{2x}{y}$, $Q = \dfrac{y^2 - x^2}{y^2}$ とおくと，$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ より，完全微分方程式となる．すなわち，$\dfrac{1}{y^2}$ が積分因数である．これより，

$$\int \frac{2x}{y}dx + \int \left[1 - \frac{x^2}{y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\int \frac{2x}{y}dx\right] dy = c$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{y} + y = c$$

となる．

(b) $(1 - 2x^2y)dx + x(2y - x^2)dy = 0$

$P = 1 - 2x^2y$, $Q = 2xy - x^3$ とおくと，$\dfrac{Q_x - P_y}{Q} = \dfrac{1}{x}$ となり，$\lambda = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = \dfrac{1}{x}$ が積分因数となり，与式は,

$$\frac{1 - 2x^2y}{x}dx + (2y - x^2)dy = 0$$

となる．よって,

$$\int \frac{1 - 2x^2y}{x}dx + \int \left[2y - x^2 - \frac{\partial}{\partial y}\int \frac{1 - 2x^2y}{x}dx\right] dy = c$$

$$\therefore \quad \log|x| - x^2y + y^2 = c$$

となる．