追レポート 行列式の計算

01ca0125 鈴木 藍

2002 年 5 月 13 日

目 次

概 要

休んだ授業内容の理解を目的にレポートを書いた。課題としては、3×3, 4×4, 5×5 の行列式の計算をもらったが、行列式についても調査を行って行列式の基本的な性質をまとめた。

レポートの目的

行列式についての調査をすることと、一般的な計算方法をみにつける。同時に休むとこのような状態になることを覚える。

1 行列式とは

授業に出席出来なかったので、行列式について調査した。

1.1 行列式の定義

n 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

に対して A の行列式

$$detA = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

が定義される。この時、この式を a_{ij} を成分とし、ある性質を満たす関数と定義する。行列 A のそれぞれの成分 a_{ij} に具体的な数を代入すると、一つの数になるので、行列とは区別される。

1.2 行列式の基本的な性質

1.2.1 1. 単位行列の行列式は 1

以下のような行列式の事。

$$|E_n| = \begin{vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

1.2.2 2. どの行に対しても線形

例えば 第一行に関して線形とは以下の式の事。

$$
\begin{vmatrix}
\alpha a_{11}+\beta b_{11} & \alpha a_{12}+\beta b_{12} & \dots & \alpha a_{1n}+\beta b_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \alpha \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
\end{vmatrix}
\quad \beta \begin{vmatrix}
b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\
b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn}
\end{vmatrix}
$$

1.2.3 3. 行を交換すると行列式は符号を変える

次の行列は第 1 行と第 2 行を交換したものである。このことはどの二つの行の交換でも言える。

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
\end{vmatrix}
= - \begin{vmatrix}
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
\end{vmatrix}
$$

1.3 行列式の有用な性質

以降のことはまだ理解しきれていないこともあるが一年次の基礎数学の行列の演算の性質でならったことが含まれていた。

1.3.1 4. 同じ行が 2 つあれば行列式は 0 になる

例えば、第 1 行と第 2 行が同じなら以下の式が成り立つ。

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
\end{vmatrix} = 0
$$

1.3.2 5. ある行の何倍かを他の行から引いても行列式は変わらない

ガウスジョルダンのはきだし法を習った時に使った。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}-\alpha a_{11} & a_{22}-\alpha a_{12} & \dots & a_{2n}-\alpha a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

1.3.3 6. ある行がゼロベクトルなら行列式は 0

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = 0$$

1.3.4 7. 行列 A が三角行列ならばその行列式は主対角線上の要素の積

上三角行列の場合は以下の式になる。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = a_{11} \dots a_{mn}$$

1.3.5 8. 行列 A が正則行列 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

与えられた行列が正則行列かどうかを判別できる。

1.3.6 9. $|AB| = |A||B|$

A が逆行列 A^{-1} を持つ場合、$AA^{-1} = E_n$ にこの性質を適用すれば $|A||A^{-1}| = |E_n| = 1$ となる。

1.3.7 10. $|A^T| = |A|$

この性質があることで、先程の性質 2 〜 6 までの「行」という字を「列」に変えても成り立つらしい。

1.3.8 11. 余因子展開

n 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \vdots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

に対して、a_{ij} を含む、行 (第 i 行) と 列 (第 j 列) を除いて出来る $(n-1)$ 次正方行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

の行列式に $(-1)^{i+j}$ をかけたものを行列 A の (i, j) 余因子といい A_{ij} という記号で表す。以下の式

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}Ai2 + \ldots + a_{in}A_{in}$$

を行列式の余因子展開、または展開公式と言う。行列式はどの行に対しても この余因子展開ができる。以下の式も、これを使ったものである。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

1.4 $Cramer$ の公式

行列 A を n 次正方行列 (逆行列のある行列) とする。連立一次方程式 $Ax = b$ の解の 第 i 成分 x_i は

$$x_i = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

となる。 証明も調べたが、あまり理解できなかった。

1.5 行列式の計算の方針

1.5.1 基本方針

行列式の値を変えないように行列の基本変形を行い、ある行 (または列) になるべく多くの 0 (ゼロ) を作る。どの行 (または列) に注目するかは与えられた行列をみて判断する。

以下の目的で、多くの 0 を作ってゆく。

- 注目した行 (または列) で行列式を展開する。
- 上三角行列 (または下三角行列) の行列式に変形する。
- A'_{11}, A'_{22} を正方行列として、

$$\begin{vmatrix} A'_{11} & A_{12} \\ O & A'_{22} \end{vmatrix} \quad や \quad \begin{vmatrix} A'_{11} & O \\ A_{12} & A'_{22} \end{vmatrix}$$

といった 形の行列式に変形する。

2　3×3 の計算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

3　4×4 の計算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}\left(a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{24} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \right) \\ &- a_{12}\left(a_{21} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{24} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} \right) \\ &+ a_{13}\left(a_{21} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{22} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{24} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \right) \\ &- a_{14}\left(a_{21} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} - a_{22} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} + a_{24} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$= a_{11}(a_{22}(a_{33}a_{44}-a_{34}a_{43})-a_{23}(a_{32}a_{44}-a_{34}a_{42})+a_{24}(a_{32}a_{43}-a_{33}a_{42})) - a_{12}(a_{21}(a_{33}a_{44}-a_{34}a_{43})-a_{23}(a_{31}a_{44}-a_{34}a_{41}$$

4　5×5 の計算

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55}
\end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}\begin{vmatrix}
a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\
a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\
a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\
a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55}
\end{vmatrix}
- a_{12}\begin{vmatrix}
a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\
a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\
a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\
a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55}
\end{vmatrix}
+ a_{13}\begin{vmatrix}
a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{25} \\
a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\
a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45} \\
a_{51} & a_{52} & a_{54} & a_{55}
\end{vmatrix}
$$

$$
- a_{14}\begin{vmatrix}
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{35} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55}
\end{vmatrix}
+ a_{15}\begin{vmatrix}
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54}
\end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}\left(a_{22}\begin{vmatrix}
a_{33} & a_{34} & a_{35} \\
a_{43} & a_{44} & a_{45} \\
a_{53} & a_{54} & a_{55}
\end{vmatrix}
- a_{23}\begin{vmatrix}
a_{32} & a_{34} & a_{35} \\
a_{42} & a_{44} & a_{45} \\
a_{52} & a_{54} & a_{55}
\end{vmatrix}
+ a_{24}\begin{vmatrix}
a_{32} & a_{33} & a_{35} \\
a_{42} & a_{43} & a_{45} \\
a_{52} & a_{53} & a_{55}
\end{vmatrix}
- a_{25}\begin{vmatrix}
a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{42} & a_{43} & a_{44} \\
a_{52} & a_{53} & a_{54}
\end{vmatrix} \right)
$$

$$
- a_{12}\left(a_{21}\begin{vmatrix}
a_{33} & a_{34} & a_{35} \\
a_{43} & a_{44} & a_{45} \\
a_{53} & a_{54} & a_{55}
\end{vmatrix}
- a_{23}\begin{vmatrix}
a_{31} & a_{34} & a_{35} \\
a_{41} & a_{44} & a_{45} \\
a_{51} & a_{54} & a_{55}
\end{vmatrix}
+ a_{24}\begin{vmatrix}
a_{31} & a_{33} & a_{35} \\
a_{41} & a_{43} & a_{45} \\
a_{51} & a_{53} & a_{55}
\end{vmatrix}
- a_{25}\begin{vmatrix}
a_{31} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{43} & a_{44} \\
a_{51} & a_{53} & a_{54}
\end{vmatrix} \right)
$$

$$
+ a_{13}\left(a_{21}\begin{vmatrix}
a_{32} & a_{34} & a_{35} \\
a_{42} & a_{44} & a_{45} \\
a_{52} & a_{54} & a_{55}
\end{vmatrix}
- a_{22}\begin{vmatrix}
a_{31} & a_{34} & a_{35} \\
a_{41} & a_{44} & a_{45} \\
a_{51} & a_{54} & a_{55}
\end{vmatrix}
+ a_{24}\begin{vmatrix}
a_{31} & a_{32} & a_{35} \\
a_{41} & a_{42} & a_{45} \\
a_{51} & a_{52} & a_{55}
\end{vmatrix}
- a_{25}\begin{vmatrix}
a_{31} & a_{32} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{44} \\
a_{51} & a_{52} & a_{54}
\end{vmatrix} \right)
$$

$$
- a_{14}\left(a_{21}\begin{vmatrix}
a_{32} & a_{33} & a_{35} \\
a_{42} & a_{43} & a_{45} \\
a_{52} & a_{53} & a_{55}
\end{vmatrix}
- a_{22}\begin{vmatrix}
a_{31} & a_{33} & a_{35} \\
a_{41} & a_{43} & a_{45} \\
a_{51} & a_{53} & a_{55}
\end{vmatrix}
+ a_{23}\begin{vmatrix}
a_{31} & a_{32} & a_{35} \\
a_{41} & a_{42} & a_{45} \\
a_{51} & a_{52} & a_{55}
\end{vmatrix}
- a_{25}\begin{vmatrix}
a_{31} & a_{32} & a_{33} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} \\
a_{51} & a_{52} & a_{53}
\end{vmatrix} \right)
$$

$$
+ a_{15}\left(a_{21}\begin{vmatrix}
a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{42} & a_{43} & a_{44} \\
a_{52} & a_{53} & a_{54}
\end{vmatrix}
- a_{22}\begin{vmatrix}
a_{31} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{43} & a_{44} \\
a_{51} & a_{53} & a_{54}
\end{vmatrix}
+ a_{23}\begin{vmatrix}
a_{31} & a_{32} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{44} \\
a_{51} & a_{52} & a_{54}
\end{vmatrix}
- a_{24}\begin{vmatrix}
a_{31} & a_{32} & a_{33} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} \\
a_{51} & a_{52} & a_{53}
\end{vmatrix} \right)
$$

$$
= a_{11}\left(a_{22}\left(a_{33}\begin{vmatrix}
a_{44} & a_{45} \\
a_{54} & a_{55}
\end{vmatrix}
- a_{34}\begin{vmatrix}
a_{43} & a_{45} \\
a_{53} & a_{55}
\end{vmatrix}
+ a_{35}\begin{vmatrix}
a_{43} & a_{44} \\
a_{53} & a_{54}
\end{vmatrix} \right)\right.
$$

$$
- a_{23}\left(a_{32}\begin{vmatrix}
a_{44} & a_{45} \\
a_{54} & a_{55}
\end{vmatrix}
- a_{34}\begin{vmatrix}
a_{42} & a_{45} \\
a_{52} & a_{55}
\end{vmatrix}
+ a_{35}\begin{vmatrix}
a_{42} & a_{44} \\
a_{52} & a_{54}
\end{vmatrix} \right)
$$

$$
+ a_{24}\left(a_{32}\begin{vmatrix}
a_{43} & a_{45} \\
a_{53} & a_{55}
\end{vmatrix}
- a_{33}\begin{vmatrix}
a_{42} & a_{45} \\
a_{52} & a_{55}
\end{vmatrix}
+ a_{35}\begin{vmatrix}
a_{42} & a_{43} \\
a_{52} & a_{53}
\end{vmatrix} \right)
$$

$$+a_{25}\left(a_{32}\begin{vmatrix}a_{43} & a_{45}\\ a_{53} & a_{55}\end{vmatrix} \quad -a_{33}\begin{vmatrix}a_{42} & a_{45}\\ a_{52} & a_{55}\end{vmatrix} \quad +a_{34}\begin{vmatrix}a_{42} & a_{43}\\ a_{52} & a_{53}\end{vmatrix}\right)\Bigg)$$

$$-a_{12}\Bigg(a_{21}\left(a_{33}\begin{vmatrix}a_{44} & a_{45}\\ a_{54} & a_{55}\end{vmatrix} \quad -a_{34}\begin{vmatrix}a_{43} & a_{45}\\ a_{53} & a_{55}\end{vmatrix} \quad +a_{35}\begin{vmatrix}a_{43} & a_{44}\\ a_{53} & a_{54}\end{vmatrix}\right)$$

$$-a_{23}\left(a_{31}\begin{vmatrix}a_{44} & a_{45}\\ a_{54} & a_{55}\end{vmatrix} \quad -a_{34}\begin{vmatrix}a_{41} & a_{45}\\ a_{51} & a_{55}\end{vmatrix} \quad +a_{35}\begin{vmatrix}a_{41} & a_{44}\\ a_{51} & a_{54}\end{vmatrix}\right)$$

$$-a_{24}\left(a_{31}\begin{vmatrix}a_{43} & a_{45}\\ a_{53} & a_{55}\end{vmatrix} \quad -a_{33}\begin{vmatrix}a_{41} & a_{45}\\ a_{51} & a_{55}\end{vmatrix} \quad +a_{35}\begin{vmatrix}a_{41} & a_{43}\\ a_{51} & a_{53}\end{vmatrix}\right)$$

$$-a_{25}\left(a_{31}\begin{vmatrix}a_{43} & a_{44}\\ a_{53} & a_{54}\end{vmatrix} \quad -a_{33}\begin{vmatrix}a_{41} & a_{44}\\ a_{51} & a_{54}\end{vmatrix} \quad +a_{34}\begin{vmatrix}a_{41} & a_{43}\\ a_{51} & a_{53}\end{vmatrix}\right)\Bigg)$$

$$+a_{13}\Bigg(a_{21}\left(a_{32}\begin{vmatrix}a_{44} & a_{45}\\ a_{54} & a_{55}\end{vmatrix} \quad -a_{34}\begin{vmatrix}a_{42} & a_{45}\\ a_{52} & a_{55}\end{vmatrix} \quad +a_{35}\begin{vmatrix}a_{42} & a_{44}\\ a_{52} & a_{54}\end{vmatrix}\right)$$

$$-a_{22}\left(a_{31}\begin{vmatrix}a_{44} & a_{45}\\ a_{54} & a_{55}\end{vmatrix} \quad -a_{34}\begin{vmatrix}a_{41} & a_{45}\\ a_{51} & a_{55}\end{vmatrix} \quad +a_{35}\begin{vmatrix}a_{41} & a_{44}\\ a_{51} & a_{54}\end{vmatrix}\right)$$

$$-a_{24}\left(a_{31}\begin{vmatrix}a_{42} & a_{45}\\ a_{52} & a_{55}\end{vmatrix} \quad -a_{32}\begin{vmatrix}a_{41} & a_{45}\\ a_{51} & a_{55}\end{vmatrix} \quad +a_{35}\begin{vmatrix}a_{41} & a_{42}\\ a_{51} & a_{52}\end{vmatrix}\right)$$

$$+a_{25}\left(a_{31}\begin{vmatrix}a_{42} & a_{44}\\ a_{52} & a_{54}\end{vmatrix} \quad -a_{32}\begin{vmatrix}a_{41} & a_{44}\\ a_{51} & a_{54}\end{vmatrix} \quad +a_{34}\begin{vmatrix}a_{41} & a_{42}\\ a_{51} & a_{52}\end{vmatrix}\right)\Bigg)$$

$$-a_{14}\Bigg(a_{21}\left(a_{32}\begin{vmatrix}a_{43} & a_{45}\\ a_{53} & a_{55}\end{vmatrix} \quad -a_{33}\begin{vmatrix}a_{42} & a_{45}\\ a_{52} & a_{55}\end{vmatrix} \quad +a_{35}\begin{vmatrix}a_{42} & a_{43}\\ a_{52} & a_{53}\end{vmatrix}\right)$$

$$-a_{22}\left(a_{31}\begin{vmatrix}a_{43} & a_{45}\\ a_{53} & a_{55}\end{vmatrix} \quad -a_{33}\begin{vmatrix}a_{41} & a_{45}\\ a_{51} & a_{55}\end{vmatrix} \quad +a_{35}\begin{vmatrix}a_{41} & a_{43}\\ a_{51} & a_{53}\end{vmatrix}\right)$$

$$+a_{23}\left(a_{31}\begin{vmatrix}a_{42} & a_{45}\\ a_{52} & a_{55}\end{vmatrix} \quad -a_{32}\begin{vmatrix}a_{41} & a_{45}\\ a_{51} & a_{55}\end{vmatrix} \quad +a_{35}\begin{vmatrix}a_{41} & a_{42}\\ a_{51} & a_{52}\end{vmatrix}\right)$$

$$-a_{25}\left(a_{31}\begin{vmatrix}a_{42} & a_{43}\\ a_{52} & a_{53}\end{vmatrix} \quad -a_{32}\begin{vmatrix}a_{41} & a_{43}\\ a_{51} & a_{53}\end{vmatrix} \quad +a_{33}\begin{vmatrix}a_{41} & a_{42}\\ a_{51} & a_{52}\end{vmatrix}\right)\Bigg)$$

$$+a_{15}\Bigg(a_{21}\left(a_{32}\begin{vmatrix}a_{43} & a_{44}\\ a_{53} & a_{54}\end{vmatrix} \quad -a_{33}\begin{vmatrix}a_{42} & a_{44}\\ a_{52} & a_{54}\end{vmatrix} \quad +a_{34}\begin{vmatrix}a_{42} & a_{43}\\ a_{52} & a_{53}\end{vmatrix}\right)$$

$$-a_{22}\left(a_{31}\begin{vmatrix}a_{43} & a_{44}\\ a_{53} & a_{54}\end{vmatrix} \quad -a_{33}\begin{vmatrix}a_{41} & a_{44}\\ a_{51} & a_{54}\end{vmatrix} \quad -a_{34}\begin{vmatrix}a_{41} & a_{43}\\ a_{51} & a_{53}\end{vmatrix}\right)$$

$$+a_{23}\left(a_{31}\begin{vmatrix}a_{42} & a_{44}\\ a_{52} & a_{54}\end{vmatrix} \quad -a_{32}\begin{vmatrix}a_{41} & a_{44}\\ a_{51} & a_{54}\end{vmatrix} \quad +a_{34}\begin{vmatrix}a_{41} & a_{42}\\ a_{51} & a_{52}\end{vmatrix}\right)$$

$$-a_{24}\left(a_{31}\begin{vmatrix}a_{42} & a_{43}\\ a_{52} & a_{53}\end{vmatrix} \quad -a_{32}\begin{vmatrix}a_{41} & a_{43}\\ a_{51} & a_{53}\end{vmatrix} \quad +a_{33}\begin{vmatrix}a_{41} & a_{42}\\ a_{51} & a_{52}\end{vmatrix}\right)\Bigg)$$

$$= \quad a_{11}(a_{22}(a_{33}(a_{44}a_{55}-a_{45}a_{54})-a_{34}(a_{43}a_{55}-a_{45}a_{53})+a_{35}(a_{43}a_{54}-a_{44}a_{53})) \qquad -a_{23}(a_{32}(a_{44}a_{55}-a_{45}a_{54})-a_{34}(a_{42}a_{55}$$

まとめ・結論

行列式の演算を使えば、次元の多いものも計算が出来るような気がするが、まだ気がするだけでどのように応用すれば良いかは見えて来ない。また、行列式の計算は人間が手でするものではなく、計算機に行わせるものである。

感想

TEX のソースが 1500 行を越えた。もう、休まないと心に誓った。
行列の計算は、計算機にさせるものであることは確信した。

参考文献

[1] 線形台数：行列式の定義
http://www.fbc.keio.ac.jp/ hkomiya/education/senkei_daisu_2001-0.2.pdf
2002 年 5 月 12 日参照

[2] 行列式虎の巻
http://www.ne.jp/asahi/nishimura/takashi/jyugyou/linear/det-1.pdf
2002 年 5 月 12 日参照