定積分と不定積分

01ca0125 鈴木藍
2002 年 4 月 30 日

目 次

概 要

定積分、不定積分の定義を明らかにしそれぞれの関係を考える。また、課題の $\sin x$, $\cos x$, e^x を積分した関数をプロットし確認した。
考察では、定積分と不定積分の関係について、不定積分の公式、円の面積について考察した。

レポートの目的

定積分と不定積分の関係と定義を調べる。微分についてもあわせて考えてゆきたい。また、積分した式をプロットすることで積分の図形的な意味を確認する。

1 用語の定義

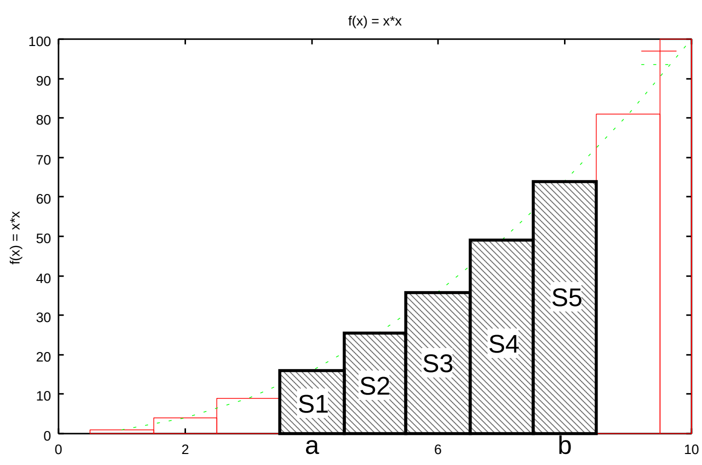
基本的な事ではあるが、改めて確認してみた。

1.1 面積とは

面積とは、基準となる長さを一辺に持つ正方形を 1 という面積を持つと決め、その正方形がある図形にいくつ入っているかという量。
この正方形を小さくして使えばある図形の複雑な部分でも当てはめられるので、面積をはかる事ができる。

1.2 数値積分

$f(x) = x * x$ の式を棒グラフと線でプロットすると、以下のグラフが表示される。



$f(x) = x * x$ で表示される棒グラフ一つの面積は棒の底辺の幅が $dx = \frac{b-a}{5}$, 縦の長さが $f(a+dx)$ で, 面積は 縦かける横、$f(a+dx)dx$ で求められる。求められたそれぞれの面積を S1, S2, S3, S4, S5 とした時、これらの合計が $f(x) = x * x$ の a から b までの斜線の面積となる。もっと正確に面積を求める為には、棒の底辺の幅を狭くすれば良い。数値積分ではこの幅を極限まで狭くして、ほぼ正確な面積を求める事が出来る。

また、ここで $y = x$ として、y 軸を速さ、 x 軸を時間として面積を求めると、この面積の値は距離になる。

2 定積分

2.1 定積分の定義

関数 $y = f(x)$ は、区間 a, b 上で定義されているとする。この時,a から b を細かく分割した $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ を考え、その幅を $dx_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, 3, \cdots, n,$ とする。区間のはば dx_i がどれも小さくなるように、分割を無限に細かくする時、($\lim_{dx\to 0} \frac{b-a}{dx}$ 和 $f(x_1)dx_1 + f(x_2)dx_2 + \cdots + f(x_n)dx_n$ が分割の取り方に無関係に一定値 (極限) に近付いていくとするならば、これを記号

$$\int_a^b f(x)dx$$

で表し、関数 $f(x)$ の区間 a, b 上 (または a から b 迄) の定積分という。
この時、関数 $f(x)$ は a から b 上で積分可能 (または可積分、可積) という。区間 a, b を積分区間、$f(x)$ を被積分関数、 x を積分変数という。$\int_a^b$ の a をこの定積分の下限 (または下端)、b を上限 (または上端) という。
a までの区間の式 $\int_0^b f(a)dx$ を $F(a)$, b までの区間の式 $\int_0^b f(b)dx$ を $F(b)$ とすると a から b までの区間の面積は

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

で表す事が出来る。
定積分とは、1.1.2 で面積を求める方法の極限である。底辺 dx 極めて狭くして求めた面積 S1,S2 $\cdots$ の和を S_n とすると、極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が、関数 f および 実数 a, b だけから 一つ決まるなら、関数 f は a から b までの積分が可能である。この時の定積分 $\int_a^b f(x)dx$ を次のように定義する。

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n$$

2.2 定積分とは

定積分とは、値 (面積など) を求める事である。

3 不定積分

3.1 不定積分の定義

関数 f は 実数 a から 実数 b まで積分可能であるとする。 a, b が属するある区間において関数 F と f について、$\frac{dy}{dx}F(x) = f(x)$ となる時、F は f の原始関数 であるという。原始関数とは、導関数と逆の概念である。

同じ区間を定義域とする関数 f と F と G とについて、F, G が f の原始関数であるならば $G(x) = F(x) + C$ (C は定数) とすると、関数 f の原始関数 のうちのどれか一つを

$$\int f(x)dx$$

と表記し、これを $f(x)$ の不定積分という。

3.2　不定積分とは

不定積分とは、ある関数 f の原始関数を求めることである。また、不定積分をもとめることを $f(x)$ を積分するといい、積分される関数 $f(x)$ を被積分関数という。

4　課題

$\sin x$, $\cos x$, e^x を f(x) とした定積分、不定積分を計算し、プロットして確認する。

4.1　不定積分と定積分の計算

4.1.1　不定積分の計算方法

不定積分の公式から調べた関数を計算するプログラムと数値積分を使って、その近似値を求めるプログラムを二つ用意して、並べてプロットした。

4.1.2　定積分の計算方法

今回は、-2 から -1 ままでの範囲を求める式を $F(-1)$, -2 から 1 までの範囲を求める式を $F(1)$ として $F(b) - F(a)$ の値を定積分として計算した。範囲の求め方は、不定積分の公式から調べた関数を計算する方法を使った。

5　$\sin x$ を積分する

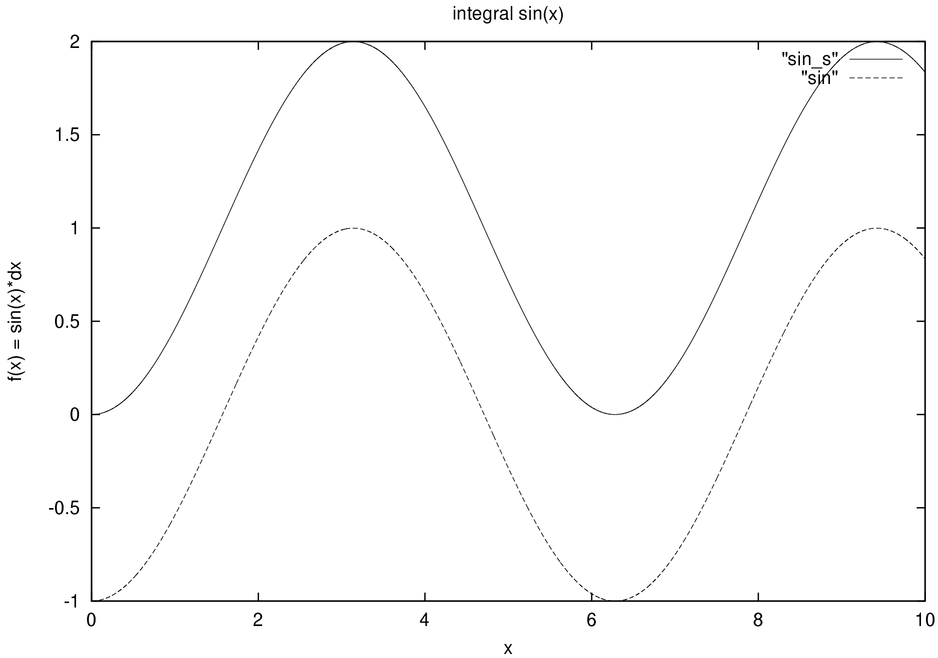
5.1　$\sin x$ の不定積分

$\sin x$ を傾きとしてもつ関数は、公式集より

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

である。

5.2 $\sin x$ の不定積分 をプロットする



積分定数として 計算した値に -1 している。

5.3 $\sin x$ の-1 から 1 までの定積分を計算する

計算結果は、 1.000000 であった。

6 $\cos x$ を積分する

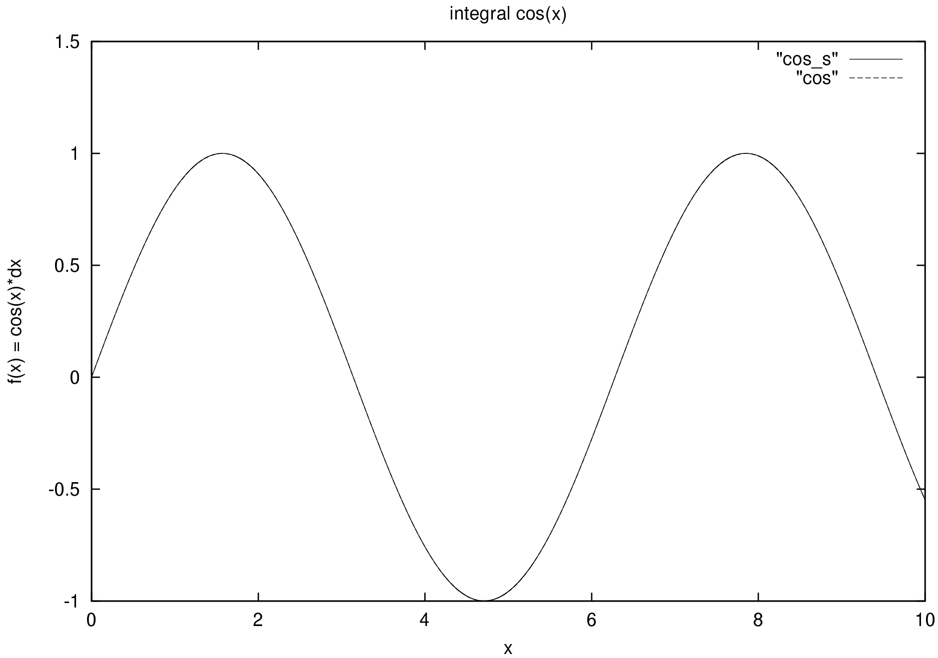
6.1 $\cos x$ の不定積分

$\cos x$ を傾きとしてもつ関数は、公式集より

$$\int \cos x dx = \sin x$$

である。

6.2 $\cos x$ の不定積分 をプロットする



こちらは正確にプロットされた。

6.3 $\cos x$ の-1 から 1 までの定積分を計算する

計算結果は、やはり 1.000000 であった。

7 e^x を積分する

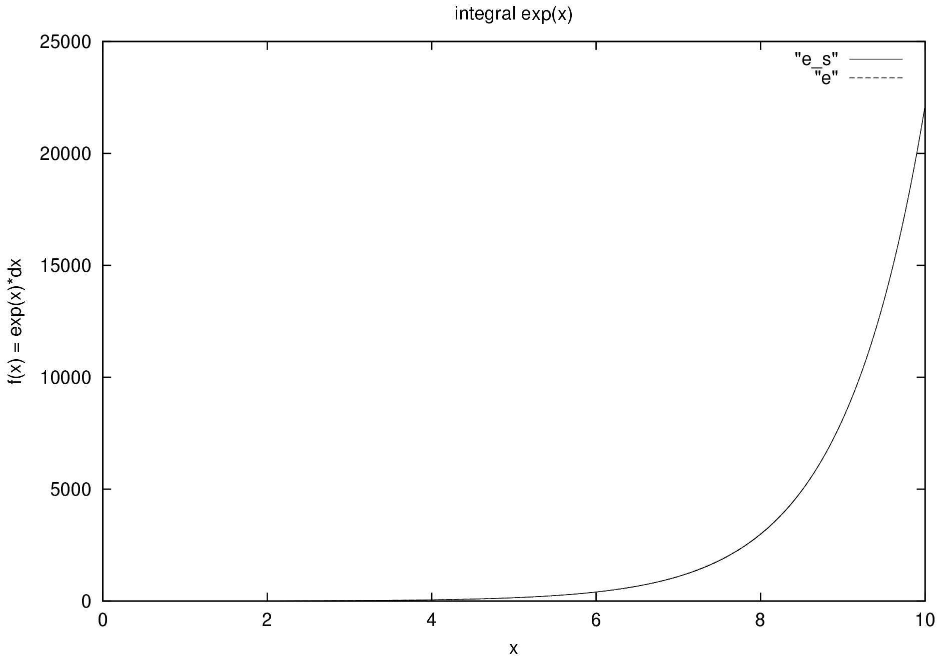
7.1 e^x の不定積分

e^x を傾きとしてもつ関数は、公式集より

$$\int e^x dx = e^x$$

である。
積分は微分の逆演算であるから、やはり e^x の積分は e^x である。

7.2　e^x の不定積分 をプロットする



こちらも正確にプロットされている。e^x と、e^x に dx をかけて足し込んでいく値が同じなのが不思議な感じがする。

7.3　e^x の-1 から 1 までの定積分を計算する

計算結果は、また 1.000000 であった。

8　課題のまとめ

$\sin x$, $\cos x$, e^x の同じ範囲の定積分は 全て同じ面積であった。確かにグラフを見た感じ、-1 から 1 までの面積は 1 になりそうな気がする。定積分が、その関数の面積をたどっていると想像しながらグラフを見ると、なかなか面白いと思う。

9　考察

9.1　定積分と不定積分の関係

不定積分の式は

$$\int f(x)dx$$

で、$F(x)$ と表すとする。
定積分の式

$$\int_a^b f(x)dx$$

は、不定積分を使って表す事が出来る。定積分の式は a から b までの範囲の面積を求めているから、b までの範囲の面積から a までの面積を引いたものが、この式と等しくなる。よって、

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

と表す事が出来る。

9.2　不定積分の公式について

積分とは、$f(x)$ を傾きとする 関数を求める事であるから不定積分を $F(x)$ と表すと、この関係は

$$\frac{dy}{dx}F(x) = f(x)$$

と表す事が出来、この時 $f(x)$ は $\frac{dx}{dy}F(x)$ の導関数である。
導関数から不定積分を求めるには、公式 $\frac{dy}{dx}x^m = mx^{m-1}$ から両辺を m で割って

$$\frac{dy}{dx}(\frac{x^m}{m}) = x^{m-1}$$

となる。ここで、$m-1$ を n とおいて、$n = m+1$ とする。

$$\frac{dy}{dx}(\frac{x^n+1}{n+1}) = x^n$$

となる。0 で割ることは出来ないので、$n \neq -1$ である。
よって、

$$n \neq -1 \Rightarrow \int x^n dx = \frac{x^n+1}{n+1} + C$$

(C は積分定数である) となる。

9.3　円の数値積分

たまたま 円が目に入ったので数値積分の式を作った。
ここでは、円周を極限まで分割した 一つ を dx , 半径を r, 円周を $2\pi r$ とする。底辺を dx , 高さ

を r とする三角形の面積を S とし、これを円周分足した値が円の面積である。
三角形の面積は 底辺×高さ ÷ 2 であるから、一つの面積は $\frac{dxr}{2}$。これを円周分たすから、

$$\frac{dxr}{2}2\pi r$$

これを計算して

$$dx\pi r^2$$

ここで dx は極限まで小さくなる。(なくならない程度に) よって、

$$\pi r^2$$

が得られる。

まとめ・結論

定積分は一つの値を求めること、不定積分は ある傾きをもつ関数を求めることであった。もし、傾きを持たない関数でも数値積分を使えば近似解が得られることが分かった。グラフをみると、微分と積分の関係がすこし分かりそうな気がするがまだはっきりしないので、もう少し調べてみたい。

感想

定積分と不定積分の概念を理解するのに 2 日かかった。それがすべてといってもいいくらい重要なことだったので、その 2 日はほとんどレポートはすすまなかったが、わかったとたんに今まで読んでいた文章が見違えた。概念を理解することは大切である。

参考文献

[1] 積分 1
http://isweb23.infoseek.co.jp/school/phaos/int1/index.html
2002/ 4/28 参照

[2] 定積分と不定積分
http://www.toyota-ct.ac.jp/ math/katsu/text/cal1/c60.pdf
2002/ 4/28 参照

[3] 微分・積分の講座
http://www.geocities.co.jp/Technopolis-Mars/5427/diff-int01.html
2002/ 4/28 参照

[4] 積分とは
http://www.markun.cs.shinshu-u.ac.jp/learn/biseki/no_5/teigi.html
2002/ 4/28 参照

[5] 積分の発想と定義
http://www.sannet.ne.jp/kazumoto/Lecture10.html
2002/ 4/28 参照