シミュレーション課題

01ca0125 鈴木藍

2002 年 4 月 25 日

目 次

概 要

テイラー展開について調べ、$\sin x$ などの関数を 4 項まで展開した。また、展開した式を使って C 言語で sin 関数を実装し、どれくらい近似した値が計算できるかを実験した。表示は gnuplot を使い、用意されている sin 関数と並べて表示してみた。

レポートの目的

テイラー展開は、sin 関数が小数点をサポートされていない環境で必要だった時に使った。その時はただ、公式とソースを見てそのまま書き写していただけだったが今回改めて勉強しようと思う。

1 テイラー展開とは

1.1 テイラーの定理

関数 $f(x)$ は 2 点,a,b(a $\neq$ b) を含む区間 D で n 回微分可能とする。この時、区間 D に次の関係式をみたす c が存在する。

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)(b-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

1.2 テイラー展開

テイラー展開とは、関数 $f(x)$ が無限回微分可能ならば、以下のような展開が出来るという定理である。

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

ここで、$f^{(n)}(a)$ は関数 $f(x)$ を n 回微分したものに $x = a$ の値を代入したものとする。

1.3 マクローリン展開

テイラー展開で、特に $a = 0$ とおいた場合、この展開は特別にマクローリン展開と呼ばれている。

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

マクローリン展開は、e^x,$\sin x$, $\cos x$ 等の値を求めるには非常に有効である。

2 $\sin x$ の展開

マクローリン展開を使って $\sin x$ を展開する

2.1 $\sin x$ の微分

$\sin(0) = 0, \sin^{(1)}(0) = \cos(0) = 1, \sin^{(2)}(0) = sin(0) = 0,\ \sin^{(3)}(0) = cos(0) = -1, \sin^{(4)}(0) = 0, \cdots$

(以降は循環する)

2.2 展開する

$f(x) = \sin(x)$ とする

$$
\begin{aligned}
f(x) &= sin(0) + \frac{\sin^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{\sin^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{\sin^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{\sin^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{\sin^5(0)}{5!}x^5 + \frac{\sin^6(0)}{6!}x^6 + \frac{\sin^7(0)}{7!}x^7 \\
f(x) &= \frac{\cos(0)}{1!}x + \frac{sin(0)}{2!}x^2 + \frac{cos(0)}{3!}x^3 + \frac{\sin(0)}{4!}x^4 + \frac{\cos(0)}{5!}x^5 + \frac{sin(0)}{6!}x^6 + \frac{cos(0)}{7!}x^7 \\
f(x) &= \frac{\cos(0)}{1!}x + \frac{sin(0)}{2!}x^2 + \frac{cos(0)}{3!}x^3 + \frac{\sin(0)}{4!}x^4 + \frac{\cos(0)}{5!}x^5 + \frac{sin(0)}{6!}x^6 + \frac{cos(0)}{7!}x^7 \\
f(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}
\end{aligned}
$$

また、和の表記を使うと

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

よって、$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$ が得られる

3 $\cos x$ の展開

3.1 $\cos x$ の微分

$\cos(0) = 1, \cos^{(1)}(0) = sin(0) = 0, \cos^{(2)}(0) = cos(0) = -1,\ \cos^{(3)}(0) = \sin(0) = 0, \cos^{(4)}(0) = \cos(0) = 1, \cdots$

(以降は循環する)

3.2 展開する

$f(x) = \cos(x)$ とする

$$
\begin{aligned}
f(x) &= cos(0) + \frac{\cos^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{\cos^2(0)}{2!}x^2 + \frac{\cos^3(0)}{3!}x^3 + \frac{\cos^4(0)}{4!}x^4 + \frac{\cos^5(0)}{5!}x^5 + \frac{\cos^{(6)}(0)}{6!}x^6 \\
f(x) &= 1 + \frac{cos(0)}{2!}x^2 + \frac{\cos(0)}{4!}x^4 + \frac{cos(0)}{6!}x^6 \\
f(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}
\end{aligned}
$$

また、和の表記を使うと

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{x^{2i}}{(2i)!}$$

よって、$\cos(x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$ が得られる

4　e^x の展開

4.1　e^x の微分

前回のレポートで、

$$(e^x)' = e^x$$

であることを確認した

4.2　展開する

$f(x) = e^x$ とすると、$f(0) = 1$ になる
これをマクローリン展開の式に当てはめると

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

また、和の表記法を使うと

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

5　$logx$ の展開

5.1　$logx$ の微分

$$(logx)' = /frac1x$$

5.2　展開する

6　テイラー展開の実装

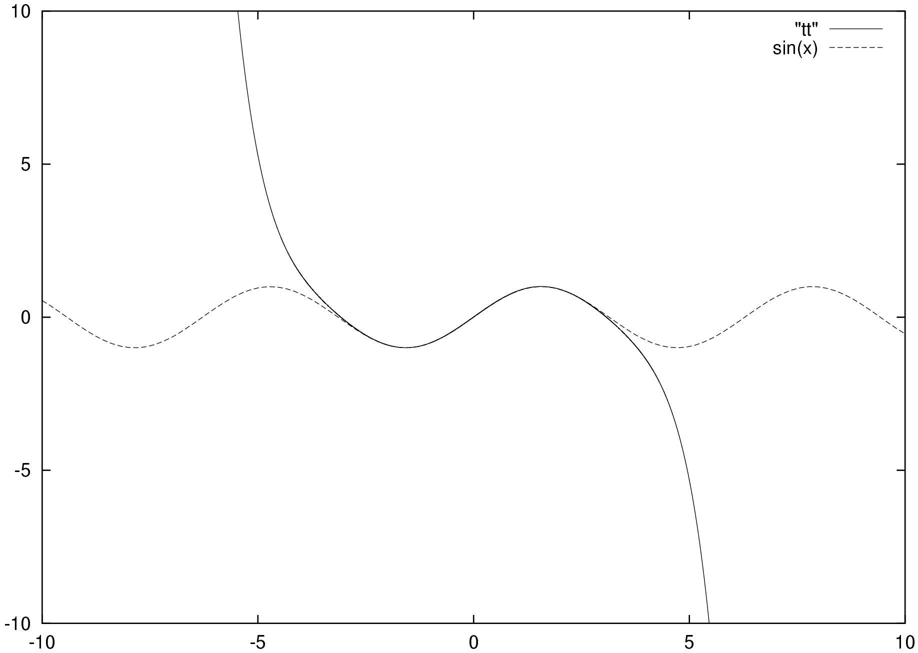
せっかくなので、C 言語で $\sin x$ のテイラー展開を実装してみた。

6.1　ソースファイル

シンプルに gnuplot で表示するようにした

```
#include <stdio.h>

double pi = 3.1415;
double ep = 0.001;

double my_sin(double rad)
{
  double  ans, rad2, rad3, rad5, rad7;

   rad2 = rad  * rad;
   rad3 = rad2 * rad;
   rad5 = rad2 * rad3;
   rad7 = rad2 * rad5;

   ans = (rad - rad3/(3*2*1)
              + rad5/(5*4*3*2*1)
              - rad7/(7*6*5*4*3*2*1));
   return ans;
}

int main()
{
  double x, y;

  for (x=-10.0; x<=10; x+=ep) {
    y = my_sin(x);
    printf("%lf %lf \n",x, y);
  }
  return 0;
}
```

以下が、gnuplot で表示した画面



gnuplot が用意している sin 関数と並べて表示しているが、十分な正確さだと感じた

まとめ・結論

テイラー展開を、詳しく知る事が出来た。この展開を使えば、微分できる物ならなんでも展開できる事が分かったが、そのために微分法をもっと知る事が必要だと感じた。

感想

テイラー展開を調べる間に、知らない言葉や概念がたくさん出て来たのでそれらをまた調べるのに時間がかかった。微分法も、このテイラー展開も、プログラミングに当てはめて考えると分かりやすいと感じた。

参考文献

[1] テイラー展開
http://markun.cs.shinshu-u.ac.jp/learn/biseki/no_9/cont09_2.html
2002/ 4/24 参照

[2] 指数函数と対数函数の微分
http://isweb23.infoseek.co.jp/school/phaos/diff2/explog.htm
2002/ 4/24 参照

[3] テイラーの定理 ～1変数～
http://www.geocities.co.jp/WallStreet-Bull/6990/taylor01.html
2002/ 4/24 参照

[4] 極大値と極小値
http://www.heisei-u.ac.jp/~fukui/pdf/mathtext5b.pdf
2002/ 4/24 参照