線形微分方程式

慶應大学商学部 小宮英敏

この講義では n 階定係数線形微分方程式の解空間が n 次元線型空間をなすことの理解を目標に, その周辺のトピックスを解説しながら進んでいく. 予備知識としては微分法は当然であるが, 簡単な積分法の知識, 線形代数も必要である. これらのことについてもできるかぎり丁寧に解説を加えていく.

まず線形代数のトピックスの中で線型空間の定義から始めよう．線型空間とは同じ形のベクトルや行列をひとまとめに考えたときに表れてくる抽象的な概念であるが, ひとたび理解できれば様々な例を共通して認識することを可能にする便利な考えかたである．

集合 V があり, それに属す任意の 2 つの要素 $x, y \in V$ に対し, 和 $x+y$ が定義されておりその和 $x+y$ は再び V に属し, また V の任意の要素 x と任意の実数 $\lambda \in R$ に対し, そのスカラー倍 $\lambda \cdot x$ が定義されていてそれは再び V に属しており, 以下の性質を満すとき三つ組 $(V, +, \cdot)$ は**線型空間**であるという．(普通スカラー倍 $\lambda \cdot x$ の $\cdot$ は省略する.)

1. $\forall x, y, z \in V,\ (x+y)+z = x+(y+z)$
2. $\forall x, y \in V,\ x+y = y+x$
3. $\exists 0 \in V,\ \forall x \in V,\ x+0 = x$
4. $\forall x \in V,\ \exists y \in V,\ x+y = 0$
5. $\forall x, y \in V,\ \lambda \in R,\ \lambda(x+y) = \lambda x + \mu x$
6. $\forall x \in V,\ \lambda, \mu \in R,\ (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$
7. $\forall x \in V,\ \lambda, \mu \in R,\ (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$
8. $\forall x \in V;\ 1x = x$

上の定義の解説をする．1 は加法に関する結合法則が, 2 は加法に関する交換法則が成立することを示している．3 における 0 を**零元**とよぶ．4 における y を x の加法に関する**逆元**とよび, 普通 $-x$ と表す．5, 6 はスカラー倍に関して分配法則が成立することを示している．7 はスカラー倍に関する結合法則である．最後に 8 は V の要素の 1 倍はそれ自身であることを要請している．

講義では線型空間の例として, n–ベクトル全体の集合 R^n や $m \times n$–行列全体の集合 $\mathcal{M}_{m,n}$ をあげた．この講義では実数全体の集合 R 上で定義された実数値関数をすべて集めた集合 F をいつも考える．この F が我々の考察の全世界であり, これは線形空間の性質をすべてみたしている．

問 1 線型空間 F においてその零元はどのような関数だろうか．また, $x^2 \in F$ に対して, その逆元はなにか.

線型空間 V の有限個の要素 $x_1, \ldots, x_n$ に対して, 各要素になんらかのスカラーを掛け, それらを足し合せたもの

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \tag{1}$$

を $x_1, \ldots, x_n$ の**線形結合**という.

$x_1, \ldots, x_n$ はその線形結合をつくり零元 0 に等しくしたときに, 必然的にその係数がすべて 0 になるとき, $x_1, \ldots, x_n$ は**線形独立**であるという. 線形独立でないとき**線形従属**であるという. すなわち, $\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 \neq 0$ なる λ_i があり, $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ とできるとき, $x_1, \ldots, x_n$ は線形従属であるという.

V の無限部分集合 A については, A の任意の有限部分集合が常に線形独立であるとき, A は線形独立であるという. A の有限部分集合のうち 1 つでも線形従属であるものがあるとき, A は線形従属であるという.

問 2 x^2, x^3 は線形独立かどうかを判定しなさい. x^2, e^x はどうか.

問 3 $1, x, x^2, x^3, \ldots$ は線形独立か.

問 4 e^{ax}, e^{bx} が線形独立であるための条件を求めなさい.

線形空間 V の部分集合 S は次の性質をみたすとき, **部分空間**であるという.

1. $x, y \in S$ ならば, $x + y \in S$.
2. $x \in S$, $\lambda \in R$ ならば, $\lambda x \in S$.

問 5 微分方程式 $y' = 3y$ の解をすべて集めた集合は F の部分空間であることを示しなさい.

V の部分集合 A について, A の有限部分集合の線形結合をすべて集めた集合を $[A]$ とかき, これを A から**生成される部分空間**とよぶ. $[A]$ は実際上で定義した部分空間の性質をみたしていることが次のようにして分る. $x, y \in [A]$ とすると, $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$, $y = \mu_1 y_1 + \cdots + \mu_n y_n$ なる $\lambda_i, \mu_i \in R$ が存在する. よって,

$$x + y = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \mu_1 y_1 + \cdots + \mu_n y_n \tag{2}$$

となるが, これは $x+y$ が $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m$ の線形結合でかかれていることを示しているので, $x+y\in[A]$ となる. また, $\lambda\in R$ とすると,

$$\lambda x=(\lambda\lambda_1)x_1+\cdots+(\lambda\lambda_n)x_n \tag{3}$$

と計算できるので, λx は $x_1,\dots,x_n$ の線形結合となっている. よって, $\lambda x\in[A]$ である. 以上で, $[A]$ が部分空間であることが示せた. これが $[A]$ を A から生成される部分空間という名前でよぶ根拠である.

さらに, $[A]$ は A を含む部分空間のうちで最小であるという特徴をもつ. 正確にかくと, $S\supset A$, かつ S は部分空間ならば, $S\supset[A]$ が成立するという性質をもっている. 実際, $S\supset A$, かつ S は部分空間であるとすると, 帰納法から A の有限部分集合の線形結合はすべて S に属するが, これは $S\supset[A]$ を主張していることに他ならない.

S を線形空間 V の部分空間とし, $B\subset S$ とする. B は線形独立で, かつ $[B]=S$ となっているとき, S の**基底**であるという. S は有限集合の基底をもつとき**有限次元**であるといい, 無限集合の基底をもつとき**無限次元**であるという. S が有限次元でその基底に属する要素の個数が n であるとき S は n 次元であるという.

問 6 A は線型空間 V の線形独立な部分集合であるとき, A は $[A]$ の基底であることを確認しなさい.

問 7 F の部分集合として, n 次以下の整関数全体からなる集合を P_n とかくことにすると, P_n は $n+1$ 次元部分空間であることを示しなさい.

斉次連立 1 次方程式

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1m}x_m & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\cdots+ & a_{2m}x_m & = & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\cdots+ & a_{mm}x_m & = & 0 \end{array}\right. \tag{4}$$

の解とその係数行列

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \tag{5}$$

に関して次の定理が成立する。

定理 1 斉次連立 1 次方程式 (14) の解が自明の解 $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ のみであるための必要十分条件は $|A| \neq 0$ である。

この定理は線形代数の理論の中で最も重要な定理のひとつであるが、その証明はここでは与えないがどの線形代数の教科書にも必ず書いてあるのでその証明を読んだことのない人は自分で勉強してほしい。

次の形の微分方程式をこれから考察していく．

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = g(x) \tag{6}$$

ここで, a_i は実定数で g は連続関数とする．この微分方程式の解ひとつひとつを**特殊解**という．微分方程式 (6) の $g(x)$ を 0 にしたもの

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0 \tag{7}$$

を (6) に対応する**斉次**微分方程式という．

定理 2 微分方程式 (6) の解で, 初期条件 $y(a) = \alpha_0, y'(a) = \alpha_1, \ldots, y^{(n-1)}(a) = \alpha_{n-1}$ をみたすものはただ一つ存在する．

この定理の証明はここでは与えず、認めて議論を進めていく。この定理を認めると、次の命題はこの定理の系として簡単にでてくる。

系 1 斉次微分方程式 (7) の解で、初期条件 $y(a) = y'(a) = \cdots = y^{(n-1)}(a) = 0$ をみたすものは $y(x) = 0$ に限る。

問 8 斉次微分方程式 $y'' + py' + qy = 0$ の初期条件 $y(a) = 1, y'(a) = 0$ をみたす解を $y_1(x)$ とし、$y(a) = 0, y'(a) = 1$ をみたす解を $y_2(x)$ とする。このとき、$y(a) = 1, y'(a) = 1$ をみたす解を y_1, y_2 をつかい求めなさい。また、$y(a) = 3, y'(a) = -6$ をみたす解を求めなさい。

問 9 微分方程式 $y' + py = g(x)$ のひとつの特殊解を $z(x)$ とし、それに対応する斉次方程式 $y' + py = 0$ の恒等的には 0 とならない解を $y_1(x)$ とすればもとの微分方程式の解は C を任意定数として $y(x) = z(x) + Cy_1(x)$ の形にすべて表わされることを示しなさい。

無限回微分可能な関数の全体の集合を C^∞ で表す。

命題 1 C^∞ は F の部分空間である。

微分方程式 (6) に関して、C^∞ からそれ自身への写像 L を

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y, \quad y \in C^\infty \tag{8}$$

で定義する。

命題 2 上で定義した写像 L は線形である。すなわち、任意の $f, g \in C^\infty$ と $c \in R$ に対し、つぎの性質が成立する。

1. $L(f+g) = Lf + Lg$
2. $L(cf) = cLf$

この命題の結論となっているふたつの性質を満す写像のことを**線形作用素**という。斉次微分方程式 $Ly = 0$ の解をすべて集めた集合を S と表わす。線型空間の理論の用語では、S は線形作用素 L の**核**または**零空間**とよばれる。

命題 3 S は部分空間である。したがって、斉次微分方程式の解の線形結合は再び解となる。

この部分空間となっている解の集合 S の基底となっている解の組を微分方程式 $Ly = 0$ の**基本解**という。

問 10 微分方程式 $Ly = g_1(x)$ のひとつの解を $y_1(x)$ とし、$Ly = g_2(x)$ のひとつの解を $y_2(x)$ とすると、 $y_1(x) + y_2(x)$ はどのような微分方程式の解となっているか。また、$y_1(x) - y_2(x)$ ではどうか。

m この関数 $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ について、次の m 次行列式 $W(x)$

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_m(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_m'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(m-1)}(x) & f_2^{(m-1)}(x) & \cdots & f_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{9}$$

をこれらの関数の**ロンスキー行列式**という。

このロンスキー行列式を使い、関数の線形独立性を検査することができる。

命題 4 $W(a) \neq 0$ なる点 a が存在するならば、$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ は線形独立である。

証明 $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_m f_m = 0$ が成立しているとする。この式の両辺を 1 回、2 回、$\cdots$, $(m-1)$ 回微分した式の a における値を書き並べると、

$$\begin{aligned} \lambda_1 f_1(a) + \cdots + \lambda_n f_m(a) &= 0 \qquad (10) \\ \lambda_1 f_1'(a) + \cdots + \lambda_n f_m'(a) &= 0 \qquad (11) \\ &\vdots \qquad (12) \\ \lambda_1 f_1^{(m-1)}(a) + \cdots + \lambda_m f_m^{(m-1)}(a) &= 0 \qquad (13) \end{aligned}$$

となる。 ここで、これを λ_i を未知数とする連立 1 次方程式とみるとその係数行列の行列式は $W(a)$ にほかならない。$W(a) \neq 0$ の仮定と定理 1 から、必然的に $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$ となり $f_1, \ldots, f_m$ は線形独立である。Q.E.D.

この命題の逆は必ずしも成立しない。その例は次の問を参照。

問 11 ふたつの関数 $f_1(x) = x^3, f_2(x) = |x|^3$ は線形独立であるが、そのロンスキー行列式は常に 0 であることを示しなさい。

命題 5 n この関数 $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ が線形独立な $Ly = 0$ の解ならば、これらの関数のロンスキー行列式 $W(x)$ はすべての x にたいして $W(x) \neq 0$ である。

証明 a を任意の実数とする。次の $W(a)$ に対応する行列を係数行列とする連立 1 次方程式を考える。

$$\begin{aligned} y_1(a)x_1 + \cdots + y_n(a)x_n &= 0 \qquad (14) \\ y_1'(a)x_1 + \cdots + y_n'(a)x_n &= 0 \qquad (15) \\ &\vdots \qquad (16) \\ y_1^{(n-1)}(a)x_1 + \cdots + y_n^{(n-1)}(a)x_n &= 0 \qquad (17) \end{aligned}$$

この方程式の任意の解を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とし、これを使い

$$u = \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n \qquad (18)$$

と u を定義すればこの $u(x)$ は微分方程式 $Ly = 0$ の解であることは、命題 3 より保証される。また、$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ が上記連立 1 次方程式の解であることから、

$$u(a) = u'(a) = \cdots = u^{(n-1)}(a) = 0 \tag{19}$$

が成立するので、系 1 よりこの初期条件を満足する解は一意的に 0 のみである。よって、$u = 0$、すなわち

$$\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n = 0 \tag{20}$$

が結論される。$y_1, \dots, y_n$ は線形独立であるので、$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ がえられる。これは上記連立 1 次方程式の解は自明な解に限ることを主張しているので、定理 1 より $W(a) \neq 0$ となる。a は任意の実数だったので、すべての x に対して $W(x) \neq 0$ となる。Q.E.D.

命題 4 と命題 5 を組合せると次の定理が得られる。

定理 3 微分方程式 $Ly = 0$ の n この解 $y_1, y_2, \dots, y_n$ に対し、そのロンスキー行列式 $W(x)$ について次の 2 つの場合のいずれかが成立する。

1. すべての x に対し、$W(x) \neq 0$.

2. すべての x に対し、$W(x) = 0$.

$y_1, y_2, \dots, y_n$ は、1 の場合には線形独立であり、2 の場合には線形従属である。

証明 命題 4 と命題 5 より，$W(a) \neq 0$ なる a が存在することと $y_1, \dots, y_n$ が線形独立であることは必要十分である．よって，すべての x について $W(x) = 0$ であることと $y_1, \dots, y_n$ が線形従属であることが必要十分である．また, 命題 5 より線形独立ならばすべての x について $W(x) \neq 0$ であるのでこれはやはり線形独立であることと必要十分になる．Q.E.D.

問 12 e^x, e^{-x} は微分方程式 $y'' - y = 0$ の線形独立な解であることを示しなさい。

問 13 関数 $ax+b$, $cx+d$ が線形独立であるための必要十分条件を a, b, c, d を使い表しなさい。

問 14 $y_1(x)=1,\ y_2(x)=\cos x,\ y_3(x)=\sin x$ は微分方程式 $y^{(3)}+y'=0$ の線形独立な解であることを示しなさい。

定理 4 斉次微分方程式 $Ly=0$ の解をすべて集めた解空間 S は関数空間 F の n 次元部分空間である.

証明 $Ly=0$ の基本解，すなわち S を生成する線形独立な n 個の要素をみつければよい．任意の実数 a を一つ選び固定する．$Ly=0$ の解 y_1 で初期条件 $y_1(a)=1, y_1'(a)=y_1''(a)=\cdots=y_1^{(n-1)}=0$ を満たすものを考える．このような解の存在は定理 9 より保証される．同様にして, $y_2(a)=0, y_2'(a)=1, y_2''(a)=\cdots=y_2^{(n-1)}=0$ なる解 y_2 も存在する．以下同様にして，解 $y_3, y_4, \ldots, y_n$ を考える.

まずこれらの n 個の解が線形独立であることを示す．その a における ロンスキー行列式 $W(a)$ は

$$W(a)=\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}=1\neq 0 \tag{21}$$

だから, 命題 4(または、定理 3) より線形独立であることがわかる.

次にこれらの関数が解空間 S を生成していることを示す．y を任意の S の要素とする．このとき,

$$y(x)=y(a)y_1(x)+y'(a)y_2(x)+\cdots+y^{(n-1)}(a)y_n(x) \tag{22}$$

が成立することを証明する．右辺を $u(x)$ とおくと，$u(x)$ は解であり $u(a)=y(a), u'(a)=y'(a), \ldots, u^{(n-1)}(a)=y^{(n-1)}(a)$ と初期条件が一致しているので, 定理 9 の解の一意性の主張より $y=u$ でなくてはならない．これで, 任意の解 y は $y(a), \ldots, y^{(n-1)}(a)$ を係数とする $y_1, \ldots, y_n$ の線形結合として表されたことになる．Q.E.D.

定理 5 $y_1, \ldots, y_n$ が $Ly=0$ の一組の基本解であり, z が $Ly=g(x)$ のひとつの特殊解であるとする．このとき，$Ly=g(x)$ の任意の解 y は

$$y(x)=\lambda_1 y_1(x)+\cdots+\lambda_n y_n(x)+z(x) \tag{23}$$

と適当な係数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を使い表現することができる.

証明 $y-z$ は $L(y-z)=Ly-Lz=g(x)-g(x)=0$ より S に属することに注意すれば良い．Q.E.D.

問 15 $y''-y=0$ の一般解を求めなさい．

問 16 $y''-y=x$ の一般解を求めなさい．

問 17 微分方程式 $Ly=0$ を考える．$k=1,\dots,n$ に対し, 解 y_k で初期条件 $y_k(a)=y_k'(a)=\cdots=y_k^{(k-1)}(a)=1, y_k^{(k)}(a)=\cdots=y_k^{(n-1)}(a)=0$ を満たすものを考えると，$y_1,\dots,y_n$ は基本解であることを示しなさい．

問 18 $y^{(3)}+y'=0$ の一般解を求めなさい．

問 19 $y^{(3)}+y'=x$ の一般解を求めなさい．

実数全体の集合 R 上で定義された複素数値関数の全体を F_C とかく．F_C は複素数をスカラーとして線形空間をなす．一般にスカラーとして複素数をとる線形空間は**複素線形空間**, 実数をスカラーとしてとる線形空間は**実線形空間**という．

F はそれ自身として実線形空間とみることもできるし, また, $F\subset F_C$ であるので複素線形空間 F_C の部分集合としてその要素の実係数の線形結合に閉じているという意味で F は F_C の**実部分空間**であるということもある．しかし, F は F_C の複素部分空間にはなっていないことに注意しよう．実際 $f(x)=x^2$ の i 倍 $if(x)=ix^2$ は実数値ではないので $if\notin F$ である．

$z\in F_C$ とすると $u,v\in F$ が存在して, $z(x)=u(x)+iv(x)$ とかけているが，z の導関数 z' を $z'(x)=u'(x)+iv'(x)$ で定義する．

命題 6 $z(x)=u(x)+iv(x)\in F_C$, $u(x),v(x)\in F$ としたとき,

$$Lz \Longleftrightarrow Lu=0 \text{ かつ } Lv=0 \tag{24}$$

命題 7 $f_1,\dots,f_n\in F$ に対して, $f_1,\dots,f_n$ が F 内で線形独立であることと F_C 内で線形独立であることは同値である．

$\alpha=a+ib$ を複素数として, F_C に属する関数 $x\mapsto e^{\alpha x}$ を

$$e^{\alpha x}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx),\quad x\in R \tag{25}$$

で定義する．

命題 8

$$(e^{\alpha x})' = \alpha(e^{\alpha x}) \tag{26}$$

問 20 $\cos x$, $\sin x$ は $y'' + y = 0$ の解であることを, 複素数値関数を使い示しなさい.

問 21 $z(x) = u(x) + iv(x)$ が $Ly = 0$ の解ならば, $\overline{z}(x) = u(x) - iv(x)$ も $Ly = 0$ の解であることを示しなさい.

複素数値の無限回微分可能な関数の全体を C_C^∞ で表わす．作用素 $D : C_C^\infty \to C_C^\infty$ を $Dy = y'$ で定義する．一般に二つの作用素 $S, T : C_C^\infty \to C_C^\infty$ と $a \in C$ に対し, $S+T$, ST, aS をそれぞれ以下の式で定義する.

$$(S+T)y = Sy + Ty \tag{27}$$

$$(ST)y = S(Ty) \tag{28}$$

$$(aS)y = aSy \tag{29}$$

また, $m = 0, 1, 2, \ldots$ について, $S^0 = I$, $S^m = S(S^{m-1})$ を定義する．さらに一般に, $f(t)$ を t の多項式としたときに, $f(t)$ の t に形式的に作用素 S を代入した作用素を $f(S)$ で表わす．この定義を踏襲して今我々が考察している微分方程式

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y, \quad y \in C_C^\infty \tag{30}$$

を見直してみる．このとき，多項式 $f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ を考えると $f(D) = L$ となっている．この意味でこの多項式 $f(t)$ は微分方程式 $Ly = 0$ の**特性多項式**または**固有多項式**であるという．また，$f(t) = 0$ を**特性方程式**または**固有多項式**という．特性方程式の根を**特性根**という.

問 22 $y'' - 3y' + 2y = 0$ の特性多項式, 特性方程式, 特性根を求めなさい.

定理 6 [除法定理] $f(t)$, $g(t)$ を二つの多項式で, $g(t) \neq 0$ とすると,

$$f(t) = q(t)g(t) + r(t), \quad r(t) = 0 \text{ または } \deg r < \deg g \tag{31}$$

をみたす多項式 $q(t)$ と $r(t)$ が存在する.

定理 7 [因数定理] 多項式 $f(t)$ に対し,

$$f(t) \text{ が } t - \alpha \text{で割りきれる} \Longleftrightarrow \alpha \text{が } f(t) = 0 \text{ の根である} \tag{32}$$

証明 $\Rightarrow$) $f(t)=q(t)(t-\alpha)$ とかけているので，$f(\alpha)=0$ である．

$\Leftarrow$) 定理 6 より $f(t)=q(t)(t-\alpha)+r(t)$ とかけていて，$r(t)$ は定数 c である．仮定より $r(\alpha)=0$ だから, $r(t)=c=0$ となり $f(t)=q(t)(t-\alpha)$ となる．これは $f(t)$ が $t-\alpha$ で割りきれていることに他ならない．Q.E.D.

多項式 $f(t)$ は $(t-\alpha)^k$ で割りきれ $(t-\alpha)^{k+1}$ では割りきれないとき, k を $f(t)$ の根 α の**重複度**といい，α は $f(t)$ の k **重根**であるという．すなわち，これは $f(t)$ が $f(t)=q(t)(t-\alpha)^k$ と因数分解され, $q(\alpha)\neq 0$ が成立していることと同値である．(因数定理より)

定理 8 [代数学の基本定理] 定数ではない多項式は少なくとも一つの複素数の根を持つ.

系 2 n 次多項式は n 個の 1 次多項式の積に分解される．従って, k 重根を k 個の根と数えることにすると n 次多項式は n 個の根を持つことになる.

証明 $f(t)$ を n 次多項式とする．代数学の基本定理より $f(t)$ は根を持つのでこれを k_1 重根 α_1 であるとすると, 因数定理より $f(t)=q_1(t)(t-\alpha_1)^{k_1}$ と因数分解される．もし，$k_1=n$ であれば $q_t(t)$ は定数となるのでこれで証明は終わる． 一方, $k_1<n$ であるときには, $q_1(t)$ は定数ではないので再び代数学の基本定理より k_2 重根 α_2 を持つ．従って, 因数定理より $q_1(t)=q_2(t)(t-\alpha_2)^{k_2}$ とかけるので，$f(t)=q_2(t)(t-\alpha_1)^{k_1}(t-\alpha_2)^{k_2}$ となる．ここで再び $n=k_1+k_2$ の場合と $n>k_1+k_2$ の場合に分けて考察を進めることにより最終的に $k_1+\cdots+k_m=n$ なる k_i と複素数 α を使い $f(t)=\alpha(t-\alpha_1)^{k_1}\cdots(t-\alpha_m)^{k_m}$ と因数分解される．Q.E.D.

2 つの多項式 $f(t)$, $g(t)$ はある多項式 $h(t)$ によって割り切れるとき $h(t)$ は $f(t)$ と $g(t)$ の共通因数であるという．定数以外に共通因数を持たない 2 つの多項式は**互いに素**であるという.

命題 9 多項式 $f(t)$ と $g(t)$ が互いに素であるための必要十分条件は $f(t)$ と $g(t)$ が共通の根を持たないことである.

証明 $f(t)$ と $g(t)$ が共通の根 α をもつとすると，因数定理より $f(t)=k(t)(t-\alpha)$, $g(t)=l(t)(t-\alpha)$ とかけていることになるので定数ではない共通の因数 $t-\alpha$ をもつことになる.

逆に, $f(t)$ と $g(t)$ は互いに素でないとすると, 定数ではない共通の因数 $h(t)$ が存在する．代数学の基本定理より $h(t)$ は根 α をもつがこれは $f(t)$, $g(t)$ 共通の根となる．Q.E.D.

命題 10 多項式 $f(t)$, $g(t)$ が互いに素であるならば,

$$p(t)f(t) + q(t)g(t) = 1 \tag{33}$$

をみたす多項式 $p(t)$, $q(t)$ が存在する．

証明 次のような多項式の集合 A を考える．

$$A = \{p(t)f(t) + q(t)g(t) : p(t), q(t) \text{ は多項式 }\}. \tag{34}$$

この集合 A は, $h(t), l(t) \in A$ ならば $h(t)+l(t) \in A$ という性質と $h(t) \in A$, $m(t)$ が多項式ならば $m(t)h(t) \in A$ という性質をもつことは容易に証明できる (下の問参照)．証明を完了するには $1 \in A$ を示せば良い．A に属する 0 ではない多項式のうちでその次数が最小なもののうちのひとつを $r(t)$ とする．以下 $r(t)$ が定数であることが示せれば目的は達成される．除法定理より $f(t) = q_1(t)r(t) + r_1(t)$ となる多項式 $q_1(t)$ と $r_1(t)$ があり，$r_1(t) = 0$ または $\deg r_1 < \deg r$ である．$r_1(t) = f(t) - q_1(t)r(t)$ で，$f(t), r(t) \in A$ であることより，$r_1(t) \in A$．したがって，$\deg r_1 < \deg r$ とはならないので，$r_1(t) = 0$ である．即ち, $f(t) = q_1(t)r(t)$．同様に, $g(t) = q_2(t)r(t)$ となるので，$r(t)$ は $f(t)$ と $g(t)$ に共通の因数となる．従って, $f(t)$ と $g(t)$ は互いに素であるので $r(t)$ は定数である．Q.E.D.

問 23 上の証明に表れた集合 A について以下の主張を証明しなさい．

1. $f(t), g(t) \in A$ ならば $f(t) + g(t), f(t) - g(t) \in A$.
2. $f(t) \in A$ で $h(t)$ が多項式ならば，$h(t)f(t) \in A$.
3. $f(t), g(t) \in A$ ならば，$f(t)$ を $g(t)$ で割った余りは A に属す.

補題 1 $f(t)$, $g(t)$ を互いに素な多項式とすると, 二つの微分方程式 $f(D) = 0$, $g(D) = 0$ に共通な解は $y = 0$ のみである．

証明 命題 10 より $p(t)f(t)+q(t)g(t) = 1$ を満たす多項式 $p(t)$, $q(t)$ が存在する．この式の t に微分作用素 D を代入すると, $p(D)f(D)+q(D)g(D) = I$ をうる．よって,

$$\begin{aligned} y &= \{p(D)f(D) + q(D)g(D)\}y && (35)\\ &= p(D)\{f(D)y\} + q(D)\{g(D)y\} && (36)\\ &= p(D)0 + q(D)0 && (37)\\ &= 0. && (38) \end{aligned}$$

Q.E.D.

補題 2 $f(t)$, $g(t)$ が互いに素な多項式ならば, 微分方程式 $f(D)g(D)=0$ の基本解は, 2 つの微分方程式 $f(D)=0$ と $g(D)=0$ のそれぞれの基本解をあわせたものである.

証明 2 つの微分方程式 $f(D)y=0$ と $g(D)y=0$ のそれぞれの階数を m, n とする. このとき微分方程式 $f(D)g(D)y=0$ の階数は $m+n$ である. $f(D)=0$ の基本解を $y_1,\dots,y_m$, $g(D)=0$ の基本解を $z_1,\dots,z_n$ とする. $f(D)g(D)=g(D)f(D)$ であることに注意すると, これら $m+n$ 個の関数は $f(D)g(D)y=0$ の解であることは明らか. 従って, これらの関数が線形独立であることが示せれば証明は終わる.

$$\lambda_1y_1+\cdots+\lambda_my_m+\mu_1z_1+\cdots+\mu_nz_n=0 \tag{39}$$

とする. これを変形して

$$\lambda_1y_1+\cdots+\lambda_my_m=-(\mu_1z_1+\cdots+\mu_nz_n) \tag{40}$$

とすると, 左辺は $f(D)y=0$ の解であり, 右辺は $g(D)y=0$ の解となっている. 従って, 補題 1 より両辺とも 0 となる. $y_1,\dots,y_m$ も $z_1,\dots,z_n$ も線形独立であることより

$$\lambda_1=\cdots=\lambda_m=\mu_1=\cdots=\mu_n=0 \tag{41}$$

が出て, $y_1,\dots,y_m,z_1,\dots,z_n$ が線形独立であることが示せた. Q.E.D.

一般の定数係数線形微分方程式 $f(D)y=0$ について系 2 より $f(t)=\alpha(t-\alpha_1)^{k_1}\cdots(t-\alpha_m)^{k_m}$ と因数分解され, $(t-\alpha_i)^{m_i}$ と $(t-\alpha_j)^{m_j}$ は互いに素であるので, 補題 2 より $(D-\lambda I)^ky=0$ のかたちの微分方程式の解がわかれば $f(D)y=0$ の解はそれらの解を単純に合わせることにより得られることになる.

補題 3 $f(t)$ を多項式, α を複素数, $k(x)$ を関数とするとき,

$$f(D)(k(x)e^{\alpha x})=e^{\alpha x}f(D+\alpha I)(k(x)) \tag{42}$$

が成立する.

証明 まず $f(t)=t^m(m=0,1,\dots)$ の形の多項式について m に関する帰納法で証明する. $m=0$ のときは両辺とも $k(x)e^{\alpha x}$ となり等しいので良

い． m のとき成立するとして, $m+1$ の場合を証明する.

$$\begin{aligned}
& D^{m+1}(k(x)e^{\alpha x}) && (43)\\
&= D\{D^m(k(x)e^{\alpha x})\} && (44)\\
&= D\{e^{\alpha x}(D+\alpha I)^m(k(x))\} && (45)\\
&= D(e^{\alpha x})(D+\alpha I)^m(k(x)) + e^{\alpha x}D((D+\alpha I)^m(k(x))) && (46)\\
&= \alpha e^{\alpha x}(D+\alpha I)^m(k(x)) + e^{\alpha x}(D+\alpha I)^m D(k(x)) && (47)\\
&= e^{\alpha x}(D+\alpha I)^m(\alpha I)(k(x)) + e^{\alpha x}(D+\alpha I)^m D(k(x)) && (48)\\
&= e^{\alpha x}(D+\alpha I)^{m+1}(k(x)) && (49)
\end{aligned}$$

が成立するので, $m+1$ の場合も良い.

次に $f(t)$ が一般の多項式の場合の証明に移る.
$f(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ とすると,

$$\begin{aligned}
& f(D)(k(x)e^{\alpha x}) && (50)\\
&= a_n D^n(k(x)e^{\alpha x}) + a_{n-1}D^{n-1}(k(x)e^{\alpha x}) + \cdots + \\
&\qquad a_1 D(k(x)e^{\alpha x}) + a_0(k(x)e^{\alpha x}) && (51)\\
&= a_n e^{\alpha x}(D+\alpha I)^n(k(x)) + a_{n-1}e^{\alpha x}(D+\alpha I)^{n-1}(k(x)) + \cdots + \\
&\qquad a_1 e^{\alpha x}(D+\alpha I)(k(x)) + a_0 e^{\alpha x}k(x) && (52)\\
&= e^{\alpha x} f(D+\alpha I)(k(x)) && (53)
\end{aligned}$$

となり，証明が終わる．Q.E.D.

補題 4 m 個の関数

$$e^{\alpha x},\ xe^{\alpha x},\ x^2e^{\alpha x},\ \ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x} \tag{54}$$

は微分方程式 $(D-\alpha I)^m y = 0$ の基本解である.

証明 $j = 0, 1, \ldots, m-1$ に対して $k(x) = x^j$ とおくと補題 3 より

$$(D-\alpha I)^m(x^j e^{\alpha x}) = e^{\alpha x}(D-\alpha I+\alpha I)^m(x^j) = e^{\alpha x}D^m(x^j) = 0 \tag{55}$$

となるので，$x^j e^{\alpha x}$ はすべて解となっている.

線形独立性については,

$$\lambda_1 e^{\alpha x} + \lambda_2\, xe^{\alpha x} + \cdots + \lambda_m x^{m-1}e^{\alpha x} = 0 \tag{56}$$

とすると, $e^{\alpha x} > 0$ であるので，それで割ることにより

$$\lambda_1 + \lambda_2\, x + \cdots + \lambda_m x^{m-1} = 0 \tag{57}$$

をうる．1, x, …, x^{m-1} は独立であるので $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$ がでる．Q.E.D.

定理 9 定数係数線形微分方程式 $f(D)y = 0$ において，$\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ をその特性根とし，これらの重複度をそれぞれ $m_1, \ldots, m_p$ とする．このとき，各特性根 α_i に対応して補題 4 でえられた m_i 個の関数をすべてあわせた $m_1 + \cdots + m_p$ 個の関数は $f(D)y = 0$ の基本解である．

証明 補題 2 と補題 4 より明らか．Q.E.D.

補題 5 α が $f(t)$ の k 重根であるための必要十分条件は

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots f^{(k-1)}(\alpha) = 0, \quad f^{(k)}(\alpha) \neq 0 \tag{58}$$

が成立することである．

証明 α が $f(t)$ の k 重根であると仮定する．$f(t) = q(t)(t-\alpha)^k$, $q(\alpha) \neq 0$ と書けている．$i = 0, 1, \ldots, k-1$ に対して, $f^{(i)}(t) = r(t)(t-\alpha)^{k-i}$, $r(\alpha) \neq 0$ と書けていることが i に関する帰納法により次のようにして分かる．$i = 0$ の場合は明らか．i のとき成立していると仮定すると，$r(\alpha) \neq 0$ なる $r(t)$ があり，

$$\begin{aligned}
f^{(i+1)}(t) &= (f^{(i)})'(t) && (59)\\
&= (r(t)(t-\alpha)^{k-i})' && (60)\\
&= r'(t)(t-\alpha)^{k-i} + r(t)((t-\alpha)^{k-i})' && (61)\\
&= \{r'(t)(t-\alpha) + (k-i)r(t)\}(t-\alpha)^{k-i-1} && (62)\\
&= p(t)(t-\alpha)^{k-(i+1)} && (63)
\end{aligned}$$

となる．ここで，$p(t) = r'(t)(t-\alpha) + (k-i)r(t)$ とおいた．$p(\alpha) = (k-i)r(\alpha) \neq 0$ であるので，帰納法の証明が完成した．よって，

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots f^{(k-1)}(\alpha) = 0 \tag{64}$$

が成立する．さらに、$f^{(k-1)}(t) = r(t)(t-\alpha)$, $r(\alpha) \neq 0$ であるので, $f^{(k)}(t) = r'(t)(t-\alpha) + r(t)$ より, $f^{(k)}(\alpha) = r(\alpha) \neq 0$ である。

逆に,

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots f^{(k-1)}(\alpha) = 0, \quad f^{(k)}(\alpha) \neq 0 \tag{65}$$

を仮定すると, $f(t) = q(t)(t-\alpha)^k$, $q(\alpha) \neq 0$ と $f(t)$ が表現されることを k に関する帰納法で証明する．$k = 1$ のときは，因数定理より $f(t) = q(t)(t-\alpha)$ と書けている．$f'(t)$ を計算すると, $f'(t) = q'(t)(t-\alpha) + q(t)$ であるので, $f'(\alpha) = q(\alpha) \neq 0$ である．k のとき成立していると仮定して, $k+1$ の場合を証明する．

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots f^{(k)}(\alpha) = 0, \quad f^{(k+1)}(\alpha) \neq 0 \tag{66}$$

を仮定する．f' を元にして考えると k の場合の仮定をみたしているので $f'(t) = q(t)(t-\alpha)^k$, $q(\alpha) \neq 0$ とかけている．ここで

$$(k+1)p(t) + p'(t)(t-\alpha) = q(t) \tag{67}$$

を満たす多項式 $p(t)$ をとれば，(実際, このようにとれることは係数比較をすることにより分かる) $(p(t)(t-\alpha)^{k+1})' = q(t)(t-\alpha)^k$ となるので, $f(t) = p(t)(t-\alpha)^{k+1} + c$ と表現されることになる．ここで $f(\alpha) = 0$ より $c = 0$ となるので，$f(t) = p(t)(t-\alpha)^{k+1}$ である。式 (67) より $p(\alpha) = q(\alpha)/(k+1) \neq 0$ であるので，α は $k+1$ 重根であることが示せた．Q.E.D.

補題 6 $f(t)$ は**実係数**の多項式とする．複素数 α が $f(t)$ の k 重根ならば, その共役 $\overline{\alpha}$ も k 重根である．

証明 α が $f(t)$ の k 重根であれば，補題 5 より

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots f^{(k-1)}(\alpha) = 0, \quad f^{(k)}(\alpha) \neq 0 \tag{68}$$

が成立するが, 一般に実係数多項式 $g(t)$ に対して, $g(\overline{\alpha}) = \overline{g(\alpha)}$ が成立するので,

$$f(\overline{\alpha}) = f'(\overline{\alpha}) = \cdots f^{(k-1)}(\overline{\alpha}) = 0, \quad f^{(k)}(\overline{\alpha}) \neq 0 \tag{69}$$

が成立し, 再び補題 5 により, $\overline{\alpha}$ は $f(t)$ の k 重根である．Q.E.D.

補題 7 α, β を 0 ではない複素数とする．複素線形空間の $2m$ 個の要素 $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_m$ が線形独立ならば次の $2m$ 個の要素も線形独立である．

$$\alpha(x_1 + y_1),\ \alpha(x_2 + y_2),\ \ldots,\ \alpha(x_m + y_m), \tag{70}$$

$$\beta(x_1 - y_1),\ \beta(x_2 - y_2),\ \ldots,\ \beta(x_m - y_m). \tag{71}$$

証明

$$\lambda_1(x_1+y_1)+\cdots+\lambda_m(x_m+y_m)+\mu_1(x_1-y_1)+\cdots+\mu_m(x_m+y_m)=0 \tag{72}$$

とすると，これを変形して

$$(\alpha\lambda_1+\beta\mu_1)x_1+\cdots+(\alpha\lambda_m+\beta\mu_m)x_m+(\alpha\lambda_1-\beta\mu_1)y_1+\cdots+(\alpha\lambda_m-\beta\mu_m)y_m=0 \tag{73}$$

線形独立性より $\alpha\lambda_i+\beta\mu_i=0,\ \alpha\lambda_i-\beta\mu_i=0$ がすべての $i=1,2,\ldots,m$ に対して成立する．これより, $\lambda_i=\mu_i=0$ が導かれるのをみるのは簡単である．Q.E.D.

補題 8 $\alpha=a+ib$ を $b\neq 0$ なる複素数とし，$g(t)=(t-\alpha)^m(t-\overline{\alpha})^m$ とする．このとき，$2m$ 個の関数

$$e^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\cos bx,\ \ldots,\ x^{m-1}e^{ax}\cos bx, \tag{74}$$

$$e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\sin bx,\ \ldots,\ x^{m-1}e^{ax}\sin bx \tag{75}$$

は, 微分方程式 $g(D)y=0$ の基本解である．

証明 $(t-\alpha)^m$ と $(t-\overline{\alpha})^m$ は互いに素であるので補題 2 と補題 4 より次の $2m$ 個の関数が $g(D)y=0$ の基本解となる．

$$e^{\alpha x},\ xe^{\alpha x},\ x^2e^{\alpha x},\ \ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x} \tag{76}$$

$$e^{\overline{\alpha}x},\ xe^{\overline{\alpha}x},\ x^2e^{\overline{\alpha}x},\ \ldots,\ x^{m-1}e^{\overline{\alpha}x} \tag{77}$$

従って,

$$e^{ax}\cos bx=\frac{1}{2}(e^{\alpha x}+e^{\overline{\alpha}x}),\quad e^{ax}\sin bx=\frac{1}{2i}(e^{\alpha x}-e^{\overline{\alpha}x}) \tag{78}$$

などの式に注意することにより, 次の $2m$ 個の関数

$$e^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\cos bx,\ \ldots,\ x^{m-1}e^{ax}\cos bx, \tag{79}$$

$$e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\sin bx,\ \ldots,\ x^{m-1}e^{ax}\sin bx \tag{80}$$

は $g(D)y=0$ の解である．また，これらは補題 7 より線形独立であり, 基本解となる．Q.E.D.

今までのことを総合すると次の実係数の線形微分方程式の解に関する定理が得られる．

定理 10 定数係数線形微分方程式 $f(D)y = 0$ の係数がすべて実数である場合, その特性根 α が実数ならばその重複度に応じて x の冪と $e^{\alpha x}$ の積で表わされる解と, $\Im\alpha \neq 0$ がならばその重複度に応じて x の冪と $\cos bx$ または $\sin bx$ の積で表わされる解の組み合わせでその基本解が得られる.

定理 11 2 階実定係数線形微分方程式 $y'' + cy + d = 0$ の基本解は, 特性方程式 $t^2 + ct + d = 0$ が

1. 2 実根 p, q を持つときには, e^{px}, e^{qx};

2. 重根 p を持つときには, e^{px}, xe^{px};

3. 複素根 $a \pm ib$ を持つときには, $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$

で与えられる.

証明 定理 10 より明らか. Q.E.D.

問 24 微分方程式 $y'' - 3y' + 2y = 0$ を解きなさい.

問 25 微分方程式 $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 6y'' - 4y' + y = 0$ を解きなさい.

問 26 微分方程式 $(D^2 + 1)^3 y = 0$ を解きなさい.

問 27 微分方程式 $y'' + 4y' - 5y = 0$ を解きなさい.

問 28 微分方程式 $y^{(6)} - 64y = 0$ を解きなさい.

問 29 微分方程式 $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ を解きなさい.

問 30 関数 $\cos x$, $\sin(x + a)$ が線形独立になるための a に関する条件を求めなさい.

定理 12 定数係数線形微分方程式 $Ly = 0$ の特性根の実部がすべて負とする. この時, $Ly = 0$ の任意の解 y に対し, 正の数 M と正の数 a が存在し,

$$|y(x)| \leq Me^{-ax}, \quad x \geq 0 \tag{81}$$

が成立する. 従って, $Ly = 0$ のすべての解に対し, $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ が成立する.

証明 特性根を $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, それぞれの重複度を $k_1, \ldots, k_m$ とすると，基本解は

$$y_{r,s} = x^r e^{\alpha_s}, \quad 0 \le r \le k_s - 1,\ 1 \le s \le m \tag{82}$$

とかける．$\alpha_s = a_s + ib_s$ とすると, 仮定より, $a_s < -a, (s = 1, \ldots, m)$ なる $a > 0$ がある．$x \ge 0$ とすると，

$$\left|\frac{y_{r,s}(x)}{e^{-ax}}\right| = x^r |e^{(\alpha_s + a)x}| \tag{83}$$

$$= x^r |e^{(a_s + a)x}(\cos b_s x + i \sin b_s x)| \tag{84}$$

$$= x^r e^{(a_s + a)x}. \tag{85}$$

$a_s + a < 0$ より, $\lim_{x\to\infty} x^r e^{(a_s+a)x}$ となるから，これは有界となる．従って,

$$\left|\frac{y_{r,s}(x)}{e^{-ax}}\right| \le M_{r,s}, \quad x \ge 0 \tag{86}$$

なる $M_{r,s} > 0$ が存在する．即ち，

$$|y_{r,s}(x)| \le M_{r,s} e^{-ax}. \tag{87}$$

一般解 $y(x)$ は

$$y(x) = \sum_{s=1}^{m} \sum_{r=0}^{k_s-1} \lambda_{r,s} y_{r,s}(x) \tag{88}$$

とかけているので,

$$|y(x)| \le \sum_{s=1}^{m} \sum_{r=0}^{k_s-1} |\lambda_{r,s}||y_{r,s}(x)| \tag{89}$$

$$\le \left(\sum_{s=1}^{m} \sum_{r=0}^{k_s-1} |\lambda_{r,s}||M_{r,s}| \right) e^{-ax}. \tag{90}$$

従って, $\sum_{s=1}^{m} \sum_{r=0}^{k_s-1} |\lambda_{r,s}| M_{r,s} = M$ とすればよい．Q.E.D.

命題 11 実係数 c, d の 2 階線形微分方程式 $y'' + cy' + dy = 0$ の特性根が負の実部をもつための必要十分条件は $c > 0$ かつ $d > 0$ である．

証明 2 次方程式の解の公式を使い考察すればでる．Q.E.D.

命題 12 実数係数多項式 $f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ のすべての根が負の実部をもつならば、

$$a_0 > 0, a_1 > 0, \ldots, a_{n-1} > 0 \tag{91}$$

が成立する。

証明 $f(t) = (t-\alpha_1)^{k_1}(t-\alpha_2)^{k_2}\cdots(t-\alpha_m)^{k_m}$ と因数分解し、α_i が実根についてはそのままとし、虚根のときには α_i と $\overline{\alpha_i}$ に対し、$(t-\alpha_i)(t-\overline{\alpha}_i) = t^2 - (\alpha_i + \overline{\alpha}_i)t + |\alpha_i|^2$ と展開すれば、$f(t)$ は $t-\alpha$ と t^2+at+b, $a, b \in R$ の形の因数に分解されるが、$t-\alpha$ の形より $\alpha < 0$ であり、t^2+at+b の形より命題 11 を使えば、$a > 0$, $b > 0$ が結論される。これらの因数を展開したものが $f(t)$ の係数を決定していることより、a_i はすべて正である。Q.E.D.

補題 9 a は任意の実数、$b > 0$, c は 0 とは異なる任意の実数として、3 次多項式 $f(t) = t^3 + at^2 + bt + c$ を考える．このとき，$f(t)$ が純虚数の根を持つための必要十分条件は, $ab = c$ である．

証明 $d \in R$ として，$f(id) = 0$ とする．$f(t) = (t+a)(t^2+b) - ab + c$ と変形できることに注意すると,

$$f(id) = (id + a)(-d^2 + b) - ab + c = 0 \tag{92}$$

より，$f(id)$ の虚部は $d(-d^2+b)$ であるから，$d(-d^2+b) = 0$．ここで，$d = 0$ とすると $c = 0$ となってしまうので仮定に反する．よって，$-d^2 + b = 0$ となり，これと式 (92) より $ab = c$ がでる．

逆に, $ab = c$ とすれば $f(t) = (t+a)(t^2+b) = 0$ となり，これより $t = i\sqrt{b}$ は純虚数の $f(t)$ の根である．Q.E.D.

補題 10 $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ なる多項式 $f(t) = t^3 + at^2 + bt + c$ を考える．このとき，$f(t)$ のすべての根が負の実部を持つための必要十分条件は, $ab > c$ である．

証明 (必要性) $ab > c$ ではないと仮定する．$ab = c$ のときは補題 9 より純虚数の解を持つので仮定に反する．次に $ab < c$ のときを考察する．$0 \leq \alpha \leq a$, $0 \leq \beta \leq b$ なる α, β について,

$$f(t; \alpha, \beta) = t^3 + \alpha t^2 + \beta t + c \tag{93}$$

と定義する．$f(t;0,0)$ の根は

$$\sqrt[3]{c}\left(\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}\right),\quad -\sqrt[3]{c} \tag{94}$$

である．$\sqrt[3]{c}(\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)) = \rho_0$ とおく。α を 0 から a まで，β を 0 から b まで連続的に動かし $f(t;\alpha,\beta)$ の根を考えることにより，ρ_0 と $f(t;a,b)$ の根の 1 つ ρ_1 を結ぶ連結曲線を複素平面上に描くことができる．仮定より ρ_1 の実部は負であるためこの曲線は虚軸をどこかで横切るので，補題 9 より，$0\le\alpha<a$, $0\le\beta<b$ なる α, β が存在し，$\alpha\beta=c$ となっているが，これは $c=\alpha\beta<ab$ となり矛盾を生じる．従って，$ab>c$ が結論される．

(十分性) $ab>c$ であるが、$f(t)$ の根のうちでその実部が非負であるもの ρ_2 が存在すると仮定する．$0\le\gamma\le c$ なる γ に対して

$$f(t;\gamma)=t^3+at^2+bt+\gamma \tag{95}$$

とおく．$f(t;0)=t(t^2+at+b)$ となるので，$f(t;0)$ の一つの根は 0 であり，他の 2 根は命題 11 より負の実部を持つ．γ_0 を十分小さい正の数とすると，$f(t;\gamma_0)$ は 2 つの負の実部を持つ根ともう一つの実根 r を持つことになる．これら 3 根の積は $-\gamma_0$ に等しいので $r<0$ である．よって，$f(t;\gamma_0)$ のすべての根は負の実部を持つことになる．γ を γ_0 から c まで連続的に動かしその根を考えることにより ρ_2 と $f(t;\gamma_0)$ の 3 根のうちの一つとを結ぶ複素平面上の連結曲線を描くことができる．これは虚軸と交わるので，補題 9 より $ab=\gamma$ なる $\gamma\le c$ が存在する．従って，$ab\le c$ となり仮定に反する．Q.E.D.

命題 13 実係数 a,b,c の 3 階線形微分方程式 $y'''+ay''+by'+cy=0$ のすべての特性根が負の実部をもつための必要十分条件は $a>0$，$b>0$, $c>0$ かつ $ab>c$ である．

証明 $y'''+ay''+by'+cy=0$ の特性多項式は $f(t)=t^3+at^2+bt+c$ である。従って、すべての特性根が負の実部をもつなら命題 12 より $a,b,c>0$ であり、さらに補題 10 より $ab>c$ となる。逆に、$a,b,c>0$, $ab>c$ とすると、補題 10 より $f(t)$ のすべての根は負の実部をもつ。Q.E.D.