第 5 章 演習 力学的振動 (追追レポート)

01ca0125 鈴木 藍

2002 年 7 月 8 日

目 次

概 要

線形 2 階常微分方程式 の解法まとめ、理解した解法を使って前回解いた演習問題をやり直した。

レポートの目的

線形 2 階常微分方程式 の解法を理解する。理解した上で、演習「力学的振動」を解く。

1　はじめにについて

1.1　前回理解できなかった部分

- 線形 2 階微分方程式を解く方法

2　今回、やったこと

2.1　「はじめに」について

はじめにを読むと、突然流れが変わっているような変な作りの文章構造になっていたので、これをはっきりさせた。行った事は

- はじめに の文章を、文脈で区切った
- 区切った所が、他の文脈とどういった関連を持っているのかを考えた
- 区切った範囲で、わからない所を調べた
- 文章構造をまとめた
- 以上を理解した上で、問題をいくつか解いた

である。今回は、この内容と、前回からの予定であった演習問題を解く所までやってみた。

3　線形 2 解微分方程式の解法

今回解く式は

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = f(x) \tag{5.1}$$

で、a, b は定数である。この式の特徴を挙げると

$$\begin{cases} \text{・非同次である。(右辺が 0 でない)} \\ \text{・線形である。(定数倍、和を取るという演算と順序を交換しても成り立つ)} \end{cases}$$

である。

3.1 何を求めるか

y は x についての関数である。(5.1) 式から、y がどんな関数かを求める。
$\rightarrow y = \ldots$ の式
又、ここの $f(x)$ は、$y(x)$ からなる関数である。

3.2 手順

前回同様に、

1. 式の形を見る
2. y を仮定する
3. 同次方程式の一般解を求める
4. 非同次方程式の特解を求める

という形で求める。

3.3 1. (5.1) 式の一般解の形

(5.1) 式の一般解は 106 頁 (5.3) 式より、常に

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) \tag{5.3}$$

という形をとる。

- $y(x) \ldots$ 求めたい関数
- $y_c(x) \ldots$ (5.1) 式の方程式から、非同次項[1] を除いた 同次方程式 [2]の一般解
- $y_p(x) \ldots$ (5.1) 式 (非同次方程式) の一般解

3.4 2. 同次方程式の一般解を求める

ここで求めたい同次方程式は

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0 \tag{5.2}$$

である。

3.4.1 2.1 y を仮定する

ここでは、積分をせずに、$y = e^{mx}$ と仮定する。

[1]右辺。両辺を定数倍し、それをもとに戻す演算をしても、もとに戻らない原因となっている項
[2]左辺

→ 何故か？
(5.2) 式の形を見て、「線形かつ同次の微分方程式で、しかも係数が定数」という形であること、つまり

$$\begin{cases} \text{・線形である} \\ \text{・同次である} \\ \text{・係数が定数である} \end{cases}$$

を満たしているならば、解を e^{mx} とするとうまくゆく場合が多いとわかっているからである。
※ y を仮定するにあたり

これからも、e^{mx} を解として仮定する機会がでて来るが、指数が複素数だった時の事も考える。ここで、公式

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases} \tag{1.1}$$

を使う。これは オイラーの公式と呼ばれている。

3.4.2 2.2 一般解を求める

$y = e^{mx}$ と仮定したので、これを (5.2) 式にあてはめて、

$$\begin{aligned} (e^{mx})'' + a(e^{mx})' + be^{mx} &= 0 \\ m^2e^{mx} + ame^{mx} + be^{mx} &= 0 \\ e^{mx}(m^2 + am + b) &= 0 \end{aligned}$$

となる。全ての x に対して成立しなければならないので

$$m^2 + am + b = 0 \tag{5.5}$$

となる。ここで、この m は、仮定した解 $y = e^{mx}$ の m でこれがどのような値かを知りたい。(5.5) 式は 2 次方程式なので、m の解は二つある。この二つの解を、それぞれ m_1, m_2 とする。107 頁 (5.4) 式 の通り、(5.2) 式 の解は $y_c(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$ という形をとるので、それぞれの $y(x)$ を e^{m_1x}, e^{m_2x} とすると y_c は

$$y_c(x) = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x} \tag{5.6}$$

これが (5.2) 式の一般解である。こうなると、m_1, m_2 の解が重要になる。なぜなら、一般解は m_1, m_2 に依存した形になるからである。そこで (5.5) から 判別式を作り、どの様な値をとるかによって 式の形を定める事が出来る。
(判別式は省略した。また、判別式 (ii) の重解で、一つを $y_2 = xe^{2x}$ としているが解説文は見付けたが、まだ理解しきれていない。考え方としては、m_1 と m_2 が極めて近い値である事を仮定している。)

3.5 2.3 特解を求める

これは、初期値などを定められないと求める事が出来ない。

4　107 頁 9 行目の「容易にわかる」は容易なのか

容易さ加減がわからなかったので考えてみたが、どうやって $\sin(x)+\cos(x)$ が出て来たのかがわからなかった。しかし、$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ を日本語で言うと、求めたいのは

「2 階微分した y と y をたすと、0 になるような y」

である。

4.1　一般解

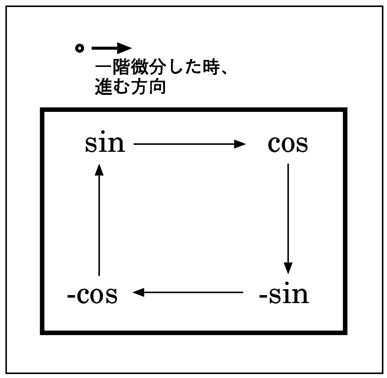

図 1. 微分と三角関数

を見て $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ に代入すると

$$\underbrace{-\sin(x)-\cos(x)}_{\frac{d^2y}{dx}}+\underbrace{\sin(x)+\cos(x)}_{y}=0$$

となるので、たしかに y は $\sin(x)+\cos(x)$ である。

4.2　特解

もし、$y(x)$ が x だとすると

$$(x)''+x=x$$

となり、たしかに y_p の一つは x である。

5　演習 力学的振動 (やりなおし)

(i) から、理解した 解法を使って解き直した。

5.1　(a)

与えられた値は 全ての $t>0$ に対して、$F=0, t=0$ ならば $x=a, \frac{dx}{dt}=0$ である。

5.1.1 抵抗を無視した式の解

抵抗を無視した時の式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

である。ここでも x の解を e^{mt} として式を変形する。

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x &= 0 \\
\frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega^2 x \\
\frac{d^2e^{mt}}{dt^2} &= -\omega^2 e^{mt} \\
m^2 e^{mt} &= -\omega^2 e^{mt} \\
m^2 &= -\omega^2 \\
m &= \pm i\sqrt{\omega^2}
\end{aligned}$$

となる。解は $i\omega, -i\omega$ となり、$e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}$、よって、

$$x = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

である。初期値を与えられているので、定数 A, B を求める。$t = 0$ の時に $x = a, \frac{dx}{dt} = 0$ であるから

$$\begin{aligned}
x(0) &= Ae^{i\omega 0} + Be^{-i\omega 0} \\
x(0) &= A + B \\
x(0) &= A + B = a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x'(0) &= A(e^{i\omega 0})' + B(e^{-i\omega 0})' \\
x'(0) &= Ai\omega e^{i\omega 0} - Bi\omega e^{-i\omega 0} \\
x'(0) &= Ai\omega - Bi\omega \\
x'(0) &= i\omega(A - B) \\
x'(0) &= i\omega(A - B) = a
\end{aligned}$$

これらの A, B を連立して求める。すると、$A = B = \frac{a}{2}$ が求められる。これを、先程求めた一般解に当てはめて、

$$\begin{aligned}
x &= \frac{a}{2}e^{i\omega t} + \frac{a}{2}e^{-i\omega t} \\
x &= \frac{a}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})
\end{aligned}$$

となる。さらに、$e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}$ はオイラーの公式を使って直すと、

$$\begin{aligned}
x &= \frac{a}{2}(\cos\omega t + \sin\omega t + \cos\omega t - \sin\omega t) \\
x &= \frac{a}{2}(\cos\omega t + \cos\omega t) \\
x &= \frac{a}{2}2\cos\omega t \\
x &= a\cos\omega t
\end{aligned}$$

よって、特解は

$$x = a\cos\omega t$$

となる。これは、単振動と同じ式である。

5.2 (b)

今度は 外力を考慮して解く。与えられた値は $F = F_0 \cos at, t = 0$ ならば $x = 0, \frac{dy}{dx} = 0$ である。式は

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x &= F(t) \\ \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x &= F_0 \cos at \end{aligned}$$

となる。ここで、仮定として $x = A\cos\alpha t$ としている。(答えに書いてあった為。理由はよくわからないが、よくこの式を見ると、111 頁 (5.10) 式の右辺にある解に似ている。と、いう解釈をしてみた。)

$$\begin{aligned} (A\cos\alpha t)'' + \omega^2 \cos\alpha t &= F_0 \cos\alpha t \\ -A\alpha^2 \cos\alpha t + \omega^2 \cos\alpha t &= F_0 \cos\alpha t \\ A\cos\alpha t(-\alpha^2 + \omega^2) &= F_0 \cos\alpha t \\ \frac{A\cos\alpha t(-\alpha^2 + \omega^2)}{\cos\alpha t(-\alpha^2 + \omega^2)} &= \frac{F_0 \cos\alpha t}{\cos\alpha t(-\alpha^2 + \omega^2)} \\ A &= \frac{F_0}{(-\alpha^2 + \omega^2)} \end{aligned}$$

式変形は以上だが、ここから 特解を求めている。求めたいのは $\alpha = \omega$ の時なので $x = A\cos\omega t$ として求める。

$$\begin{aligned} (A\cos\omega t)'' + \omega^2 \cos\omega t &= F_0 \cos\omega t \\ -A\omega^2 \cos\omega t + \omega^2 \cos\omega t &= F_0 \cos\omega t \end{aligned}$$

この時点で、左辺が消えてしまう。(何故？) 今回は、ここで止まってしまった。

5.3 これからの予定

式変形を調査。また、方程式の解法をもうすこし調査し 出来るようにする。また、独立、従属の意味も 部分的にしかわからないので一つの解となる関数が 何故独立と関係があるのかを調べる。

まとめ・結論

やっと 解法のアウトラインが見えて来た気がするがまだ不明な点が多い。しかし、演習 (a) は、答え通りの解法ではなく、自力で解いてみたので 成果はあったと思う。この調子で、進めてみたい。

感想

関数 y が y_c, y_p との和で成り立っている状況にまだ会っていないような気がする。第 5 章 5.2 節 力学的振動では y_c は 0 に近付く物として 式から外している。二つが揃ってしまうと、複雑な関数になるのかと思った。

参考文献

[1] キーポイント微分方程式
著者 佐野 理
2001 年 7 月 16 日 発行 (第 11 版)