シミュレーション課題

01ca0125 鈴木藍

2002年4月25日

目 次

概 要

出題された各問題を、$\frac{f(x-h)-f(x)}{h}$ を使って解く。

レポートの目的

多項式以外に、sin や e を微分することで式の変形に慣れる。また、これらを微分する際に必要な公式などを調べて、知識を付ける。

1 $3x^3 + 2x^2 + x + 1$ の微分

$f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$ であるから、これを導関数に当てはめて

$$\frac{3(x+h)^3 + 2(x+h)^2 + (x+h) + 1 - (3x^3 + 2x^2 + x + 1)}{h}$$

展開して

$$\frac{3(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) + 2(x^2 + 2xh + h^2) + x + h + 1 - 3x^3 - 2x^2 - x - 1}{h}$$

$$\frac{3x^3 + 9x^2h + 9xh^2 + 3h^3 + 2x^2 + 4xh + 2h^2 + x + h + 1 - 3x^3 - 2x^2 - x - 1}{h}$$

これらを約分してゆき、

$$9x^2 + 9xh + 3h^2 + 4x + 2h + 1$$

となる。ここで $h \to 0$ であるから

$$9x^2 + 4x + 1$$

を得る。

また、微分法の公式を用いて確認すると

- n が実数の時 $y = x^n$ ならば $y' = nx^{n-1}$
- k が定数の時 $y = k$ ならば $y' = 0$

この二つを使い、$f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$ の各項に当てはめる。

$$\begin{aligned} y' &= 3(x^3) \\ &= 3(3x^2) \\ &= 9x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= 2(x^2) \\ &= 2(2x^1) \\ &= 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= x \\ &= 1x^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

1 は定数なので

$$\begin{aligned} y' &= 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって $9x^2+4x+1$ を得る事が出来る。

2 $\sin x$ の微分

ここでは Δx を限りなく 0 に近付く角度とする。
$\sin x$ を導関数に当てはめると

$$\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x}$$

加法定理 $\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x)$ により、

$$\frac{\sin(x)\cos(\Delta x)+\sin(\Delta x)\cos(x)-\sin(x)}{\Delta x}$$

$\sin(x)$ でくくって

$$\frac{\sin(x)(\cos(\Delta x)-1)}{\Delta x}+\frac{\sin(\Delta x)\cos(x)}{\Delta x}$$

ここで、$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ であるから

$$\frac{\sin(x)(\cos(\Delta x)-1)}{\Delta x}+\cos(x)$$

$\frac{\sin(x)(\cos(\Delta x)-1)}{\Delta x}$ の分子と分母に $\cos(\Delta x)+1$ をかける

$$\frac{\sin(x)(\cos(\Delta x)-1)(\cos(\Delta x)+1)}{\Delta x(\cos(\Delta x)+1)}+\cos(x)$$

$$\frac{\sin(x)(\cos^2(\Delta x)-1)}{\Delta x(\cos(\Delta x)+1)}+\cos(x) \tag{1}$$

ここで、$\cos^2 x+\sin^2 x=1$ なので、これを変形して、

$$\cos^2 x-1=-\sin^2 x$$

これを先程の (1) にあてはめて

$$\frac{\sin(x)-\sin^2(\Delta x)}{\Delta x(\cos(\Delta x)+1)}+\cos(x)$$

$$\frac{\sin(x)(-\sin^2(\Delta x))(\sin(\Delta x))}{\Delta x(\cos(\Delta x)+1)}+\cos(x)$$

$\frac{\sin x}{x}=1$ なので

$$\frac{\sin(x)(-\sin^2(\Delta x))}{\cos(\Delta x)+1}+\cos(x)$$

$\sin 0=0$,$\cos 0=1$ であるから、

$$\frac{0}{2}+\cos(x)$$

よって、

$$(\sin x)'=\cos x$$

$$(x\to 0)$$

が得られる。

3 e^x の微分

e^x を導関数に当てはめると

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

この式を e^x でくくる

$$\frac{e^h - 1}{h} \cdot e^x \tag{2}$$

ここで、

$$C = \frac{e^h - 1}{h}$$

とおく。この式を e を求める式になおして

$$Ch = e^h + 1$$

$$e^h = Ch + 1$$

$$e = (Ch + 1)^{\frac{1}{h}} \tag{3}$$

ここで $Ch = t$ とおきかえて

$$h = \frac{t}{C}$$

なので

$$e = (t + 1)^{\frac{1}{\frac{t}{C}}}$$

$$e = (t + 1)^{\frac{C}{t}}$$

C を外に出して

$$e = \{(t + 1)^{\frac{1}{t}}\}^C$$

これで、(3) とこの $(t + 1)^{\frac{1}{t}}$ を同じ性質を持つ物として

$$e = e^C$$

となる。よって $C = 1$ であるから、(2) にあてはめると

$$1 \cdot e^x$$

したがって

$$e' = e^x$$

$$(h \to 0)$$

が得られる。

まとめ・結論

導関数を使えば、式は長くなるが sin や e を微分する事が出来た。

感想

初めて微分を勉強したので、sin の微分はとても難しかった。また、自然対数が何かを知らなかったのでそこから調べた事も時間がかかった。今回は、微分法の基本的な公式も覚えたのでこれから使っていきたい。

参考文献

[1] 三角関数 $\sin x, \cos$ の微分について
http://takeno.iee.niit.ac.jp/ shige/TeX/latex2html/sinprime/node2.html
2002/ 4/21 参照

[2] 指数函数と対数函数の微分
http://isweb23.infoseek.co.jp/school/phaos/diff2/explog.htm
2002/ 4/21 参照

[3] 微分積分
http://homepage1.nifty.com/noric/Math/Diff_Inte/Diff_Inte.htm
2002/ 4/21 参照

[4] 自然対数の図形的意味
http://www.nikonet.or.jp/spring/sanae/MathTopic/e/e.htm
2002/ 4/21 参照