第 6 章 6.1 節 はじめに

01ca0125 鈴木 藍
2002 年 7 月 9 日

目 次

概 要

線形、非線形の意味を 式、現象の視点から考察し、また、これをそれぞれの節にあてはめた。
はじめにでて来る式を変形し、どのような便利さのある式なのかを考えた。

レポートの目的

前回までは 線形な微分方程式を扱って来たが、今回は非線形である。どのような違いがあり、どのようなモデルに適用されるのかを考察した。

1 言葉の整理

線形、非線形 ともに どのような事をあらわしているのかをモデルからと数式から考える。

1.1 線形とは

1.1.1 式から考えた線形

ある演算において

- 定数倍をするという演算と順序を交換してもよい
- 和をとるという演算と順序を交換してもよい

の二つの性質を満たすとき、その「演算」は線形である。
ある方程式において

- いくつかの解を加え合わせたものがまた解になっているような、解の重ね合わせが可能な性質を持つ「方程式」

を線形であるという。解の重ね合わせとは、グラフで言うと複数の波が重なる時、ある点の変位はそれらの波が「それぞれ単独に」作用するときの変位の和になる、という原理の事をいう。
¡図形的な解釈¿
もっとも簡単な演算を考える。正比例の関係の式

$$f(y) = Ay$$

これは、もし、y_1 を x とするならば Ay は Ay_1 である。線形演算である y_1 を C 倍すれば、答えも $C(Ay_1)$ となる。また、$y_1 + y_2$ を x としたときも、答えは $A(y_1 + y_2)$ となっている。図で表すと

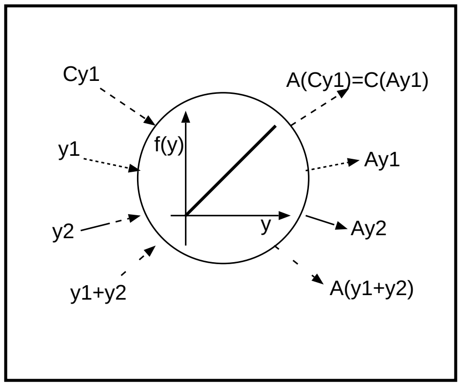

fig 1. 線形演算 $f(y) = Ay$

となる。

1.1.2 現象から考えた線形

式でいう線形をまとめたが、今度は モデル化する対象となる現象で線形とはどういう事かを考えた。
¡ 線形な現象とは ¿

- 一定な変化をする現象 (入力を定数倍すれば、出力も定数倍)
- 何かに 影響を受けないような現象 (重ね合わせの原理より)

このような現象は、どのようなものか。例えば今まで扱って来たもので、フックの法則は「ばねの張力はその伸びに比例する」とあるがこれも線形と考えられる。しかし、考えられるだけで、実際はもっとなんらかの影響を外から受けているはずである。線形な現象とは、現実にありうるのだろうか。モデルとして簡略化した時に、線形を使うのではないかと思う。

1.2 非線形とは

1.2.1 式から考えた非線形

非線形ならば、線形が成り立たないような式、すなわちある演算において

- 定数倍をするという演算と順序を交換してもよい
- 和をとるという演算と順序を交換してもよい

の二つの性質を満たす事が出来ない、また、ある方程式において

- いくつかの解を加え合わせたものがまた解になっているような、解の重ね合わせが可能でない性質を持つ「方程式」

が、非線形であるということになる。ということは、重ね合わせの原理も成り立つことがない。$\frac{d^2y}{dx^2} = -y$ は、二つの解 $\sin x, \cos x$ を持つが、二つ足し合わせた $\sin x + \cos x$ も、また $(\sin x + \cos x)'' = -(\sin x + \cos x)$ となる。こういった現象も成り立たないような式が、非線形である。

¡図形的な解釈¿
先程の、線形の例で挙げた

$$f(y) = Ay$$

を、

$$f(y) = y^2$$

と考えてみる。もし、$y = (y_1 + y_2)$ とした時、値は y_1, y_2 をそれぞれ二乗したものの和の他に、余分な $2y_1y_2$ も足し合わされている。線形の条件を満たしていない。これを図で表すと

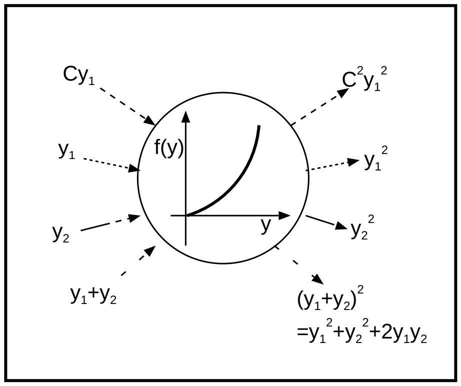

fig 2. 非線形演算 $f(y) = y^2$

となる。また、これを微分方程式で考えてみる。

$$(y^2)' - 4y = 0$$

この式は、微分される項が二乗されている。これを解くと、

$$\begin{aligned}
(y^2)' - 4y &= 0 \\
(y^2)' &= 4y \\
y' &= \pm 2\sqrt{y} \qquad (y > 0) \\
\frac{dy}{dx} &= \pm 2\sqrt{y} \\
\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} &= \pm 2\sqrt{y}\frac{1}{\sqrt{y}} \\
\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}dx &= \pm 2dx \\
\frac{1}{\sqrt{y}}dy &= \pm 2dx
\end{aligned}$$

両辺を積分して

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{y}}dy &= \pm 2dx \\
y^{-\frac{1}{2}}dy &= \pm 2dx \\
\int y^{-\frac{1}{2}}dy &= \pm \int 2dx \\
\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}dy &= \pm 2x + C
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2y^{\frac{1}{2}} &= \pm 2x + C \\
2\sqrt{y} &= \pm 2x + C \\
\sqrt{y} &= \pm x + C \\
y &= \pm (x + C)^2
\end{aligned}
$$

となる。もし、一つの解が $y_1 = x^2$ で求められたとしても、もし定数倍した $y = yC_1y_1 = C_1x^2$ ならば、ここではある $(y^2)'$ から $-4y$ を引いた物が 0 にならなければならないのだから

$$
\begin{gathered}
y' = 2C_1x, \\
(y^2)' = 4C_1^2x^2
\end{gathered}
$$

となり、解にあてはまらない。微分方程式が 非線形であった為である。

1.2.2 現象から考えた非線形

互いに作用されないのが 線形ならば、非線形は 何かに影響を受けるようなモデルが 非線形ではないかと考える。そう考えると、やはり現実世界の全てが相互作用しながら存在しているのだから、全部 非線形になる。電子や、惑星も お互いに作用しあうような 物体である。これらは、周辺との相互作用を繰り返して現象が発展してゆき、このような現象は線形現象として記述することは出来ない。

1.3 解析的に解くとは

微分方程式を数式のままで厳密に解く事を解析的に解くという。非線形系は，部分・要素に分解・分析し，それを再び集めて全体を構成するという，線形解析で許される手法もとることが出来ない。ほとんどの場合は数値計算によって解を求めることで解析が行われている。

2 134 頁 はじめに

2.1 この章の概要

ここでは、非線形と名前が出ているにもかかわらず 非線形についての解説は「非線形微分方程式は大抵のものが解析的に解けない」と書いてあるのみで今まで行って来た 2 階常微分方程式とは別の解法が紹介されている。ここでは、$\frac{dy}{dx}$ を p と置き換えるような 変数変換を行っている。

2.2 2 階常微分方程式の一般形

以下の式

$$
\frac{d^2y}{dx^2} = f\Big(y, \frac{dy}{dx}, x\Big) \tag{6.1}
$$

が 2 階常微分方程式の一般形である。これは「y を x で 2 階微分したものは、関数 f に $y, \frac{dy}{dx}, x$ を与えたも。」 と言い替えられる。ここでは、この式の特殊なもの、f は $y, \frac{dy}{dx}, x$ の任意関数であ

るから これらの一つが無い場合を考えている。そうする事で、一階常微分方程式に帰着[1]することが出来る。例えば、$\frac{dy}{dx} = p$ として、y が引数としてあらわれないならば

$$\frac{dp}{dx} = f(p, x)$$

とすることが出来る。

2.3 例を解く

例題

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 1$$

を解く。ここでも、$\frac{dy}{dx} = p$ と置いて計算をする。

$$\begin{aligned}
p\frac{dp}{dx} &= 1 \\
\int p dx &= \int dx \\
\frac{1}{2}p^2 &= x + A \\
p^2 &= 2x + 2A \\
p &= \pm(2x + 2A)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

p を戻して、

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \pm(2x + 2A)^{\frac{1}{2}} \\
\frac{dy}{dx} &= \pm\int(2x + 2A)^{\frac{1}{2}} dx
\end{aligned}$$

ここで、もう一度積分するが、置換積分したいので $(2x + 2A) = P$ として dx、を求める。両辺を dx で微分して、

$$\begin{aligned}
(2x + 2A) &= P \\
\frac{d(2x + 2A)}{dx} &= \frac{dP}{dx} \\
2 &= \frac{dP}{dx} \\
dx &= \frac{1}{2}dP
\end{aligned}$$

これを dx にあてはめて、

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \pm\int P^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}dP \\
\frac{dy}{dx} &= \pm\frac{1}{2}\int P^{\frac{1}{2}}dP \\
y &= \pm\frac{1}{2}\frac{(2x + 2A)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}} + B \\
y &= \pm\frac{1}{2}\frac{(2x + 2A)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + B
\end{aligned}$$

[1] いろいろな経過をたどって、ある状態や結果に落ち着くこと。

$$
\begin{aligned}
y &= \pm\frac{1}{2}\frac{2}{3}(2x+2A)^{\frac{3}{2}}+B \\
y &= \pm\frac{1}{3}(2x+2A)^{\frac{3}{2}}+B
\end{aligned}
$$

よって、解は

$$
y = \pm\frac{1}{3}(2x+2A)^{\frac{3}{2}}+B
$$

となる。

3 それぞれの章の式

それぞれの章は 非線形 2 階微分方程式を途中で導き出しているが、 6.2 節 惑星の運動 以外ははじめにそった解き方を行っている。また、大体は変数分離に持ち込み、そのあと普通に積分している。ただ、どれもある変数や関数が 二乗した形になっているので、非線形な微分方程式である。なぜ、非線形微分方程式では、この解法を行うのかはまだよくわからない。
どのモデルも、求めたい物などが、それぞれ何かに影響しあうようなものである。例えば、惑星は太陽の影響を、追跡は追跡する物体にといった具合である。式に関しても、やはり線形の条件を満たしていない。

まとめ・結論

世の中の現象は、むしろ線形で表される事はなく全てが非線形であるので、現実の 正確なモデルを作るためにはこの非線形微分方程式を解く事が重要である。

感想

非線形の話は面白かったが、本論中の式の変形に手間取った。まだまだ 式変形などになれる必要がある。

参考文献

[1] キーポイント微分方程式
著者 佐野 理
2001 年 7 月 16 日 発行 (第 11 版)