Aitana Menárguez Box

PEE Q1

1. $p(x_1^T, y) = p(y) \cdot p(x_1 | y) \cdot p(x_2 | x_1, y) \cdot$
$\cdot \, p(x_3 | x_1, y) \cdot p(x_4 | x_3, y)$

2. No todas las gramáticas probabilísticas tienen por qué ser consistentes y, por tanto, generar lenguajes probabilísticos. Es decir, una gramática probabilística $G_\theta = (G, P)$ puede NO cumplir:

$\sum_{x \in L(G)} P_\theta(x) = 1$, que es la condición que debería cumplir el lenguaje que genera la gramática para ser probabilístico.

Por otro lado, no todos los lenguajes probabilísticos pueden ser generados por una gramática probabilística, ya que no todas las gramáticas consistentes pueden ser expresadas mediante un polinomio. Por ejemplo: para el lenguaje probabilístico $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$, $\phi(a^n b^n) = \frac{1}{e\, n!}$, no hay polinomio que pueda definir la gramática que lo genera $\Rightarrow \nexists\, G_\theta \,/\, \phi(x) = P_\theta(x) \;\; \forall x \in L$

3. Se trata de demostrar $Z(x; \theta) = \sum_S \alpha_T(S) \ldots$

$$Z(x;\theta) = \underbrace{\sum_{y' \in y^*}}\; \prod_{t=1}^{T} \Psi_t(y'_{t-1}, y'_t, x_t);$$

$$Z(x;\theta) = \sum_S \sum_{\substack{y_1^T; \\ y_T = S}} \prod_{i=1}^{T} \Psi_i(y_{i-1}, y_i, x_i)$$

si $\alpha_T(s) = \sum_{y_1^T;\ y_T = s} \prod_{i=1}^{T} \Psi_i(y_{i-1}, y_i, x_i)$

entonces $\boxed{Z(x;\theta) = \sum_s \alpha_T(s)}$,

con lo que queda demostrado

4. Obtención de estados y transiciones: (probabilísticos)

T_1				T_2			
0	a : a / 0,3	0		0	a : a / 1	1	
~~0~~	~~b : b / 0,3~~	~~0~~					
0	a : a / 0,2	1					
~~0~~	~~b : b / 0,2~~	~~2~~					
0	b : b / 0,3	0		1	b : b / 1	2	
0	b : b / 0,2	2					
~~1~~	~~a : a / 0,15~~	~~1~~		1	b : b / 1	2	
1	b : b / 0,15	1					
~~1~~	~~a : a / 0,1~~	~~3~~					
1	b : b / 0,1	3					
~~1~~	~~a : a / 0,25~~	~~2~~					
1	b : b / 0,25	2					
0	a : a / 0,3	0		2	a : a / 1	3	
0	a : a / 0,2	1					
2	a : a / 0,3	2		2	a : a / 1	3	
~~2~~	~~b : b / 0,3~~	~~3~~					
2	a : a / 0,2	1					
~~2~~	~~b : b / 0,2~~	~~1~~					

probabilístico! (1 · 0,3)

(0,0)
=> a : a / 0,3 (0,1) ✓ *
=> a : a / 0,2 (1,1) ✓ *

(0,1)
=> b : b / 0,3 (0,2) ✓
=> b : b / 0,2 (2,2) ✓

(1,1)
=> b : b / 0,15 (1,2) ✓
=> b : b / 0,1 (3,2) ✓
=> b : b / 0,25 (2,2) ✓

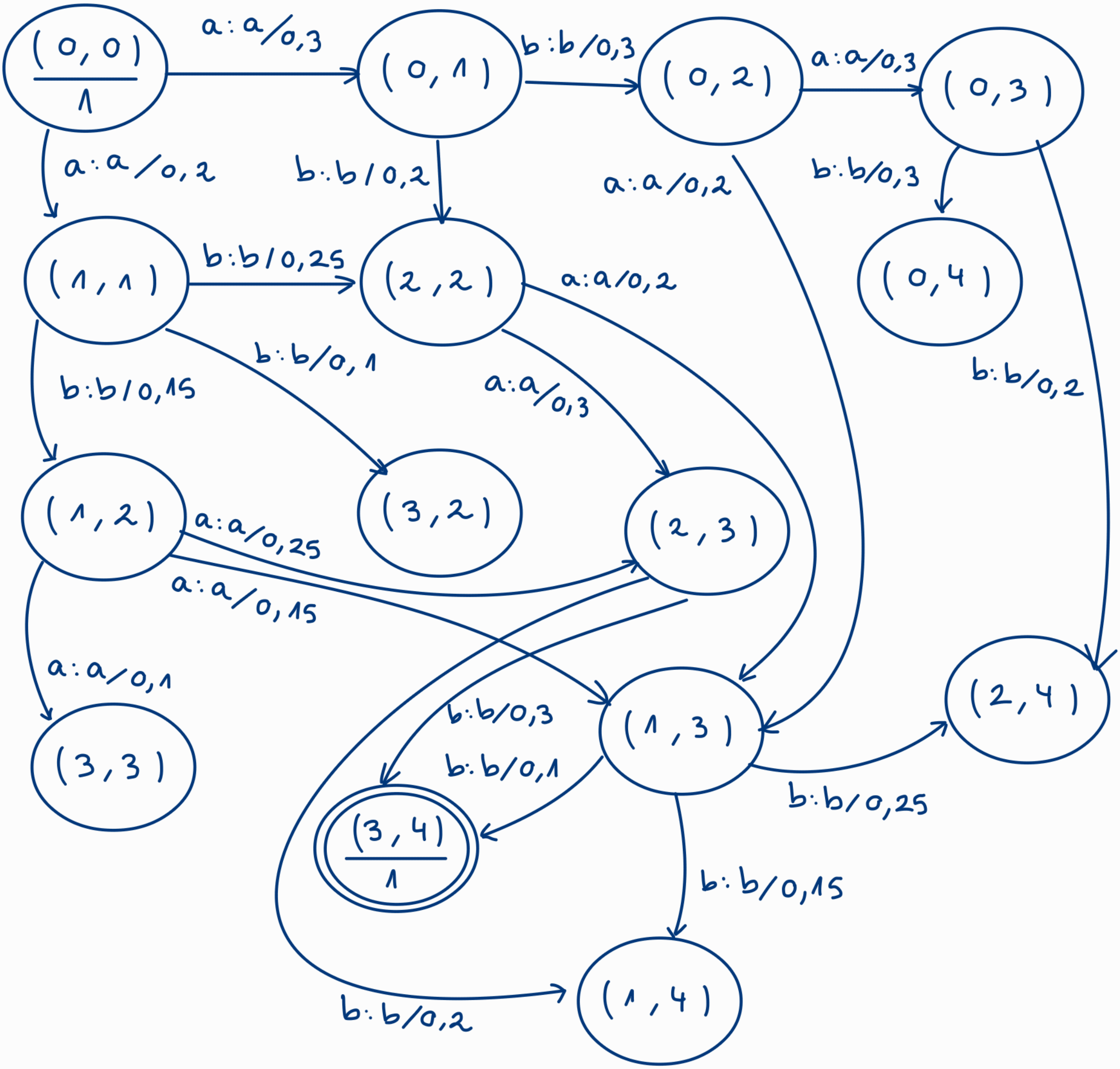
(0,2)
=> a : a / 0,3 (0,3) ✓
=> a : a / 0,2 (1,3) ✓

(2,2)
=> a : a / 0,3 (2,3) ✓
=> a : a / 0,2 (1,3) ✓

1 a:a / 0,15 1	2 a:a / 1 3	(1,2)
~~1 b:b / 0,15 1~~		=> a:a / 0,15 (1,3) ✓
1 a:a / 0,1 3		=> a:a / 0,1 (3,3) ✓
~~1 b:b / 0,1 3~~		=> a:a / 0,25 (2,3) ✓
1 a:a / 0,25 2		
~~1 b:b / 0,25 2~~		
0 b:b / 0,3 0	3 b:b / 1 4	(0,3)
0 b:b / 0,2 2		=> b:b / 0,3 (0,4) ✓
		=> b:b / 0,2 (2,4) ✓
~~1 a:a / 0,15 1~~	3 b:b / 1 4	(1,3)
1 b:b / 0,15 1		=> b:b / 0,15 (1,4) ✓
~~1 a:a / 0,1 3~~		=> b:b / 0,1 (3,4) ✓
1 b:b / 0,1 3		=> b:b / 0,25 (2,4) ✓
~~1 a:a / 0,25 2~~		
1 b:b / 0,25 2		
~~2 a:a / 0,3 2~~	3 b:b / 1 4	(2,3)
2 b:b / 0,3 3		=> b:b / 0,3 (3,4) ✓
~~2 a:a 0,2 1~~		=> b:b / 0,2 (1,4) ✓
2 b:b / 0,2 1		

ya no quedan estados de los cuales generar sus transiciones; ahora se dibuja:

La composición sería:



5.

$$\boxed{P(U=1 \mid E=1)} \qquad P(A,B) = P(B \mid A) \cdot P(A)$$

$$P(U \mid E) = \frac{P(U,E)}{P(E)} = \frac{P(E \mid U) \cdot P(U)}{P(E)} =$$

$$= \frac{P(E=1 \mid U=1) \cdot P(U=1)}{P(E=1)} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}398}{0{,}4786} = \boxed{0{,}7484}$$

$$P(U=1) = \sum_{I,H,E} P(I,H,U=1,E) = A + B = 0{,}3582 + 0{,}0398 =$$
$$= \boxed{0{,}398}$$

$$\begin{aligned}
A = {} & P(I=0) \cdot P(H=0) \cdot P(U=1 \mid I=0, H=0) \cdot P(E=1 \mid U=1) + \\
& + P(I=1) \cdot P(H=0) \cdot P(U=1 \mid I=1, H=0) \cdot P(E=1 \mid U=1) + \\
& + P(I=0) \cdot P(H=1) \cdot P(U=1 \mid I=0, H=1) \cdot P(E=1 \mid U=1) + \\
& + P(I=1) \cdot P(H=1) \cdot P(U=1 \mid I=1, H=1) \cdot P(E=1 \mid U=1) =
\end{aligned}$$

$$0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}9 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}9$$
$$+ 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}0378 + 0{,}0972 + 0{,}126 + 0{,}0972$$
$$= 0{,}3582$$

$$\begin{aligned}
B = {} & P(I=0) \cdot P(H=0) \cdot P(U=1 \mid I=0, H=0) \cdot P(E=0 \mid U=1) + \\
& + P(I=1) \cdot P(H=0) \cdot P(U=1 \mid I=1, H=0) \cdot P(E=0 \mid U=1) + \\
& + P(I=0) \cdot P(H=1) \cdot P(U=1 \mid I=0, H=1) \cdot P(E=0 \mid U=1) + \\
& + P(I=1) \cdot P(H=1) \cdot P(U=1 \mid I=1, H=1) \cdot P(E=0 \mid U=1) =
\end{aligned}$$

$$= 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}1 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}1 +$$
$$+ 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}0042 + 0{,}0108 + 0{,}014 + 0{,}0108 = 0{,}0398$$

$$P(E=1) = \sum_{I,H,U} P(I,H,U,E=1) = C+D = 0{,}3582 + 0{,}1204 = \boxed{0{,}4786}$$

$$\begin{aligned} C = {} & P(I=0)\cdot P(H=0)\cdot P(U=1 \mid I=0,H=0)\cdot P(E=1\mid U=1) + \\ & + P(I=1)\cdot P(H=0)\cdot P(U=1\mid I=1,H=0)\cdot P(E=1\mid U=1) + \\ & + P(I=0)\cdot P(H=1)\cdot P(U=1\mid I=0,H=1)\cdot P(E=1\mid U=1) + \\ & + P(I=1)\cdot P(H=1)\cdot P(U=1\mid I=1,H=1)\cdot P(E=1\mid U=1) = A = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = {} & 0{,}7\cdot 0{,}6\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9 + 0{,}3\cdot 0{,}6\cdot 0{,}6\cdot 0{,}9 + 0{,}7\cdot 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}9 + \\ & + 0{,}3\cdot 0{,}4\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9 = 0{,}0378 + 0{,}0972 + 0{,}126 + 0{,}0972 = 0{,}3582 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D = {} & P(I=0)\cdot P(H=0)\cdot P(U=0 \mid I=0,H=0)\cdot P(E=1\mid U=0) + \\ & + P(I=1)\cdot P(H=0)\cdot P(U=0\mid I=1,H=0)\cdot P(E=1\mid U=0) + \\ & + P(I=0)\cdot P(H=1)\cdot P(U=0\mid I=0,H=1)\cdot P(E=1\mid U=0) + \\ & + P(I=1)\cdot P(H=1)\cdot P(U=0\mid I=1,H=1)\cdot P(E=1\mid U=0) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = {} & 0{,}7\cdot 0{,}6\cdot 0{,}9\cdot 0{,}2 + 0{,}3\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4\cdot 0{,}2 + 0{,}7\cdot 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}2 + \\ & + 0{,}3\cdot 0{,}4\cdot 0{,}1\cdot 0{,}2 = 0{,}0756 + 0{,}0144 + 0{,}028 + 0{,}0024 = 0{,}1204 \end{aligned}$$

6. $\alpha_t(S)$ será la puntuación para $x_1 \dots x_t$ con fin en $y_t = S \in \mathcal{Y}$

Inicialización:

nulo, inicializar

$$\alpha_1(S) = \Psi_1(y_{-1}=\#,\ y_0=\#,\ y_1=S,\ x_1)$$

$$\alpha_2(S') = \sum_S \alpha_1(S)\cdot \Psi_2(y_0=\#,\ y_1=S,\ y_2=S',\ x_2)$$

para los anteriores

nulo, no recursión

Recursión:

$$\alpha_t(S'') = \sum_{S'}\sum_{S} \alpha_{t-2}(S)\cdot \alpha_{t-1}(S')\cdot \Psi_3(y_{t-2}=S,\ y_{t-1}=S',\ y_t=S'',\ x_t)$$

Resultado final: la puntuación para x es

$$\sum_S \alpha_T(S)$$

7. Si en las reglas de forma $X \longrightarrow ZY$, el no terminal Z deriva un terminal, sabemos entonces que el hijo derecho de X será siempre de longitud igual a $\underline{1}$ (sin tener en cuenta ϵ como terminal). Es decir $K=1$, no hay que explorar más valores de K; el algoritmo será:

<u>Inicialización</u>: $\forall A \in N$; $l=1$; $\forall i: 0 \dots T-1$;

$$e(A, i, i+1) = p(A \rightarrow b) \cdot \delta(b, x_{i+1})$$

<u>Recursión</u>: $\forall A \in N$; $\forall l: 2 \dots T$; $\forall i: 0 \dots T-l$;

$$e(A, i, i+l) = \sum_{B,C \in N} \{ p(A \rightarrow BC) \cdot e(B, i, i+1) \cdot e(C, i+1, i+l) \}$$

<u>Resultado final</u>: la probabilidad de la frase es

$$P_\theta(x) = e(S, 0, T)$$

→ Coste temporal: $O(N^2)$ y lineal con la talla de la cadena.