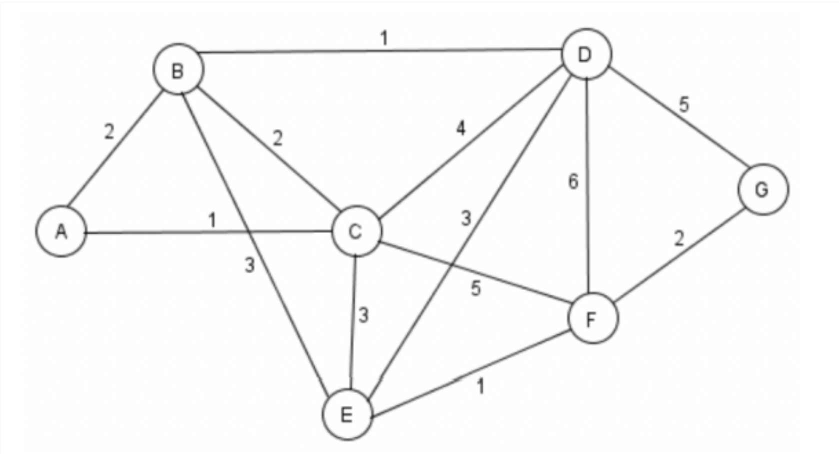
ECOLE MAROCAINE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
Membre de HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Révision générale (exercices corrigés)

Filière : Ingénierie Informatique et Réseaux
Recherche opérationnelle
Prof. Zineb TABBAKH

Exercice 1 :

Soit le graphe G (S, A) ci-dessous



Première partie I : Dans cette partie nous considérons le graphe non valué

Une université doit planifier l'utilisation de ses salles de classe pour le nouveau semestre. Les cours doivent être répartis dans les salles disponibles de manière à éviter tout conflit d'horaire. Le graphe G(S, A) ci-dessus représente les salles de classe (sommets) et les cours qui partagent des étudiants (arêtes). Si deux cours partagent des étudiants, ils ne peuvent pas se dérouler en même temps.

1. **Le graphe est-il connexe ? Complet ? Justifiez.**

   R1 : oui le graphe est connexe, car il existe une chaine entre chaque paire de sommets. En d'autres termes, nous pouvons partir de n'importe quel sommet et atteindre n'importe quel autre sommet en suivant une série d'arêtes.

   R2 : Le graphe n'est pas complet, car il y a des sommets qui ne sont pas reliés entre eux par des arêtes. Par exemple, les sommets A et E ne sont pas reliés par une arête.

2. **Existe-t-il une chaîne eulérienne dans le graphe ? Justifiez.**

   Pour vérifier s'il existe une chaîne eulérienne, nous devons calculer le degré de chaque sommet

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
Degré	**2**	**4**	**5**	**5**	**4**	**4**	**2**

   Il y a deux sommets qui ont un degré impair, donc il existe une chaîne eulérienne.

3. **Le graphe est-il Hamiltonien ? Si oui, proposez un cycle Hamiltonien.**

   Oui, le graphe est hamiltonien. Pour le vérifier, il faut chercher un cycle qui passe exactement une fois par chaque sommet du graphe. Comme il existe un cycle hamiltonien, par exemple EFGDBACE, cela confirme que le graphe est hamiltonien.

4. **Proposez une planification pour l'horaire des cours afin d'organiser tous les cours sans conflit d'horaire, tout en minimisant le nombre total de plages horaires utilisées.**

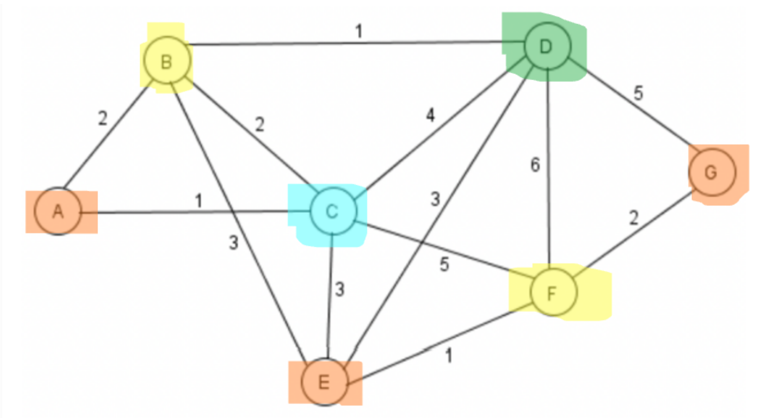
Afin d'organiser l'horaire des cours sans conflit d'horaire tout en minimisant le nombre total de plages horaires utilisées, nous pouvons appliquer le concept de la coloration des graphes. Une arête relie deux sommets si les cours correspondants ne peuvent pas être programmés au même moment.

- La première étape consiste à identifier les ensembles stables, c'est-à-dire des groupes de cours qui peuvent se dérouler simultanément sans conflit.
  Nous avons les ensembles stables suivants :
  S1 = {A, E, G}, S2 = {B, F}, S3 = {C}, S4 = {D}.
  Il y a 4 ensembles stables, donc le nombre chromatique est inférieur ou égal à 4 ($\alpha(G) \leq 4$).

- Le plus grand sous-graphe complet est d'ordre 4 (exemple : CDEF), donc $\alpha(G) \geq 4$.
  Ainsi, le nombre chromatique est égal à 4.

La planification proposée :

$H_1 : A, E, G.$
$H_2 : B, F.$
$H_3 : C.$
$H_4 : D.$



Deuxième partie : Dans cette partie nous considérons le graphe valué

L'université se compose de plusieurs sites dispersés dans la ville. Pour faciliter la mobilité des étudiants et du personnel entre ces sites, l'université souhaite optimiser son service de navette. Le graphe G (S, A) ci-dessus représente les différents sites de l'université (sommets) et les trajets directs des navettes (arêtes), avec des temps de trajet entre chaque site.

5. **Identifiez le plus court chemin pour une navette entre le site A et le site G. Donnez également le temps de trajet total.**

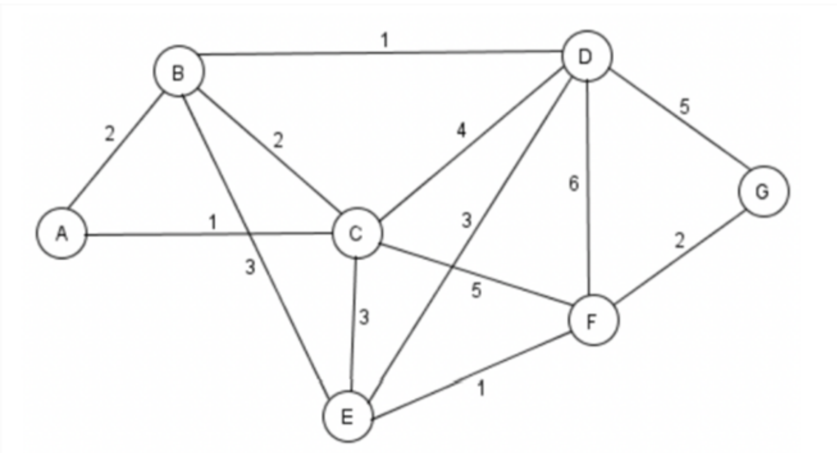
	d(A)	d(B)	d(C)	d(D)	d(E)	d(F)	d(G)	P
0	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
1		2,A	1,A	∞	∞	∞	∞	C
2		2,A		5,C	4,C	6,C	∞	B
3				3,B	4,C	6,C	∞	D
4					4,C	6,C	8,D	E
5						5,E	8,D	F
6							7,F	G

Pour déterminer le plus court chemin à partir du tableau de Dijkstra, je commence par la destination qui est G. Je recherche la colonne correspondante à G et j'ajoute le prédécesseur marqué, qui est F. Ensuite, je recherche la colonne F et j'ajoute le prédécesseur marqué, qui est E, et ainsi de suite jusqu'à atteindre le sommet A.
Le plus court chemin entre A et G :

A→C→E→F→G

Le temps de trajet total = 7

6. **Proposez un arbre couvrant minimal pour le réseau de transport entre les sites de l'université.**



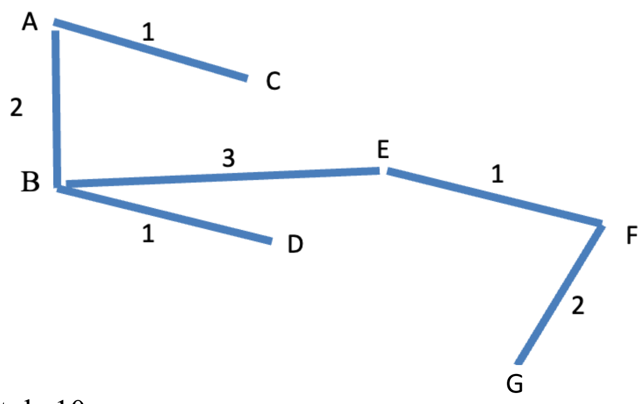
→ **Algorithme de Kruskal :**

Étape 1 : trier les arêtes par poids croissant

AC : 1 ; BD : 1 ; EF :1 ; AB : 2 ; BC : 2 ; FG: 2 ; BE : 3 ; EC : 3 ; ED : 3 ; CD : 4 ; CF : 5 ; DG : 5 ; DF : 6.

Étape 2 : Sélectionner les n-1 arêtes qui ne génèrent pas un cycle (6 arêtes)

AC: 1 +
BD: 1 +
EF: 1 +
AB: 2 +
BC: 2 **X (génère un cycle).**
FG: 2 +
BE: 3 +



Le poids de l'arbre couvrant minimal est de 10.

$$w(G') = 1 + 2 + 1 + 3 + 1 + 2 = 10$$

Exercice 2

Trois usines de pièces mécaniques sont prévues pour alimenter trois magasins chaque jour. Les usines peuvent produire respectivement 100, 180, 200. La demande de chaque magasin est de 135, 175, 170 respectivement. Les coûts de transport par pièce mécanique sont résumés dans le tableau ci-dessous :

	Magasin 1	**Magasin 2**	**Magasin 3**
Usine 1	6 $	7 $	4 $
Usine 2	5 $	3 $	6 $
Usine 3	8 $	5 $	7 $

Les coûts indiqués dans le tableau représentent le coût de transport par pièce mécanique.

1. **Formuler le problème pour minimiser le coût de transport entre les usines et les magasins**

$$\begin{cases} \min 6x_{11} + 7x_{12} + 4x_{13} + 5x_{21} + 3x_{22} + 6x_{23} + 8x_{31} + 5x_{32} + 7x_{33} \\ \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 180 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 200 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 135 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 175 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 170 \\ \\ x_{ij} \geq 0, i = 1,2,3;\ j = 1,2,3 \end{cases}$$

2. **Déterminer une solution réalisable pour ce problème à l'aide d'un algorithme d'initialisation. Calculer le coût total de la solution initiale proposée.**

   La solution réalisable de base obtenue par la méthode de coin Nord-Ouest :

	Magasin 1	**Magasin 2**	**Magasin 3**	**Offre**
Usine 1	6 \$ **100**	7 \$	4 \$	100
Usine 2	5 \$ **35**	3 \$ **145**	6 \$	180
Usine 3	8 \$	5 \$ **30**	7 \$ **170**	200
Demande	135	175	170	

Les variables de base sont :

$$x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{32}, et\ x_{33}$$

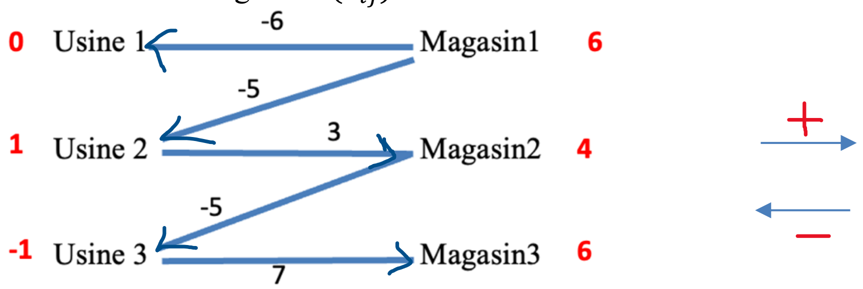
Le coût total = 100*6+35*5+145*3+30*5+170*7 = 2550

3. **Trouver une solution optimale de ce problème à l'aide de l'algorithme d'optimisation Stepping-Stone. Calculer le coût total de la solution optimale.**

   Pour rechercher la solution optimale, nous allons utiliser l'algorithme de Stepping Stone.

1^{ere} itération :

La première étape consiste à déterminer les potentiels de destination (v_j) et d'origine (u_i) afin de calculer les coûts marginaux (δ_{ij}) des variables hors base.



$\delta_{12} = C_{12} - v_2 + u_1 = 7 - 4 + 0 = 3$

$\delta_{13} = C_{13} - v_3 + u_1 = 4 - 6 + 0 = -2$

$\delta_{23} = C_{23} - v_3 + u_2 = 6 - 6 + 1 = 1$

$\delta_{31} = C_{31} - v_1 + u_3 = 8 - 6 - 1 = 1$

Nous avons trouvé un seul coût marginal négatif dans la case (1,3). Par conséquent, en ajoutant une quantité **X** à la case (1,3), je vais réduire le coût total de transport.

Dans le tableau de transport suivant, je vais ajouter la quantité **X** en équilibrant le problème.

	Magasin 1	**Magasin 2**	**Magasin 3**	**Offre**
Usine 1	**100 -X**		**+X**	100
Usine 2	**35 +X**	**145 -X**		180
Usine 3		**30 +X**	**170 -X**	200
Demande	135	175	170	

Pour déterminer la valeur de **X**, nous allons utiliser la condition de positivité. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} X \geq 0 \\ 100 - X \geq 0 \\ 145 - X \geq 0 \\ 170 - X \geq 0 \end{cases} \Rightarrow X = 100 \ au \ max$$

Nous obtenons la solution de base suivante

	Magasin 1	**Magasin 2**	**Magasin 3**	**Offre**
Usine 1	6 \$ ___	7 \$ ___	4 \$ **100**	100
Usine 2	5 \$ **135**	3 \$ **45**	6 \$ ___	180
Usine 3	8 \$ ___	5 \$ **130**	7 \$ **70**	200
Demande	135	175	170	

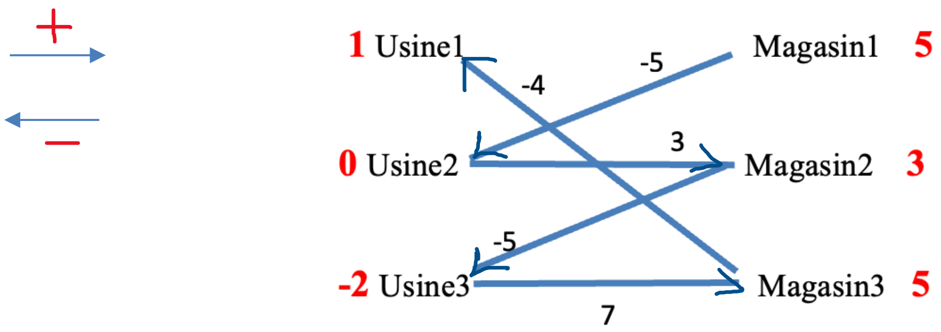
Les variables de base sont :

$$x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{32}, et \ x_{33}$$

Le coût total = 2550 – 2 * 100 = 2350

2ème itération :

Les potentiels de destination (v_j) et d'origine (u_i) :



Les coûts marginaux (δ_{ij}) des variables hors base :

$$\delta_{11} = C_{11} - v_1 + u_1 = 6 - 5 + 1 = 2$$

$$\delta_{12} = C_{12} - v_2 + u_1 = 7 - 3 + 1 = 5$$

$$\delta_{23} = C_{23} - v_3 + u_2 = 6 - 5 + 0 = 1$$

$$\delta_{31} = C_{31} - v_1 + u_3 = 8 - 5 - 2 = 1$$

Tous les coûts marginaux sont positifs, donc la solution obtenue est optimale, avec un coût minimal égal à 2350.

Exercice 3

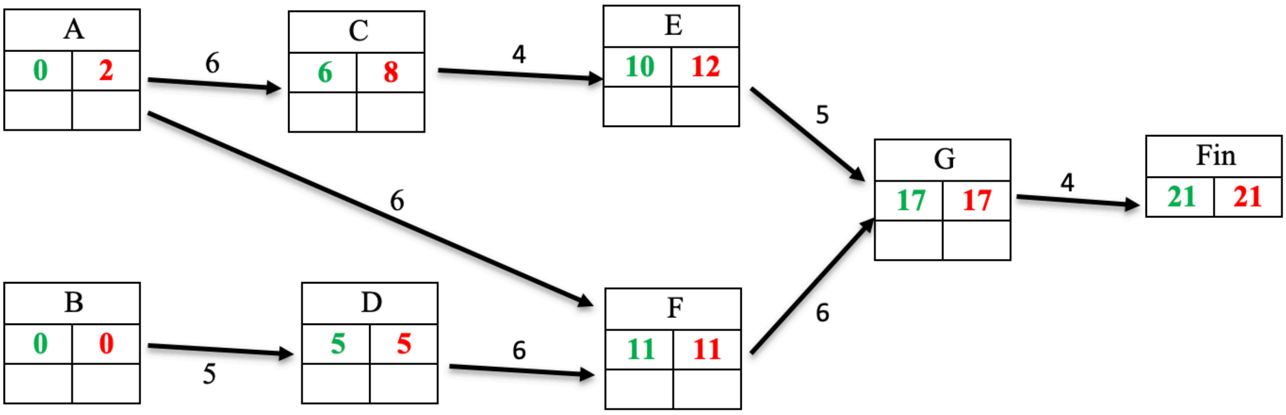
Un projet peut être décomposé en 7 tâches, dans le tableau ci-dessous, on indique pour chaque tâche, sa durée et les tâches immédiatement antérieurs

Tâche	A	B	C	D	E	F	G
Tâche antérieur	------	--------	A	B	C	A , D	E , F
Durée	6	5	4	6	5	6	4

1. **Déterminer les niveaux des tâches.**

Tâche	A	B	C	D	E	F	G
Niveau	1	1	2	2	3	3	4

2. **Construire le graphe d'ordonnancement du projet et calculer les dates au plus tôt et au plus tard de chaque tache.**



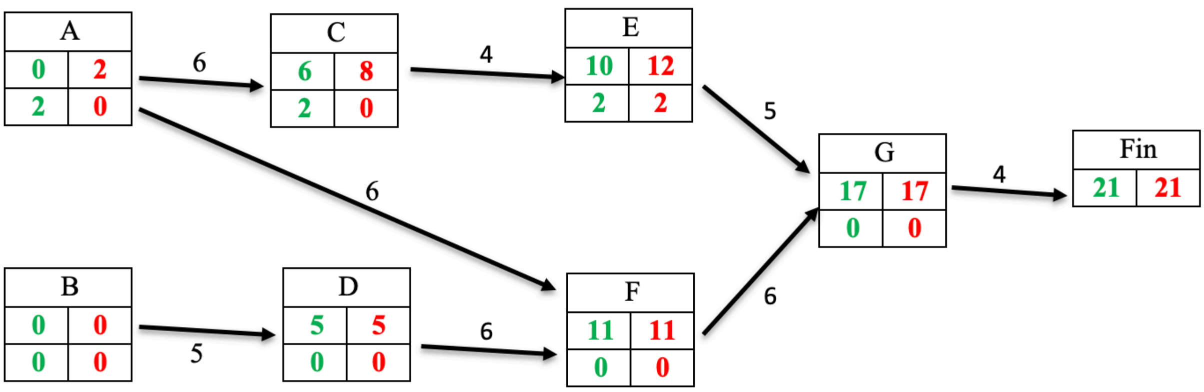
3. **Identifier le chemin critique. Quelle est la durée minimale du projet ?**

- Le chemin critique est : B→D→F→G→Fin
  Le chemin critique est le chemin qui ne contient que des tâches critiques, où la date au plus tôt est égale à la date au plus tard.
- La durée minimale du projet = 21.

4. **En réalité, la tâche D a nécessité une durée de 7 jours. Est-ce que cela a eu une incidence sur la durée de réalisation du projet.**

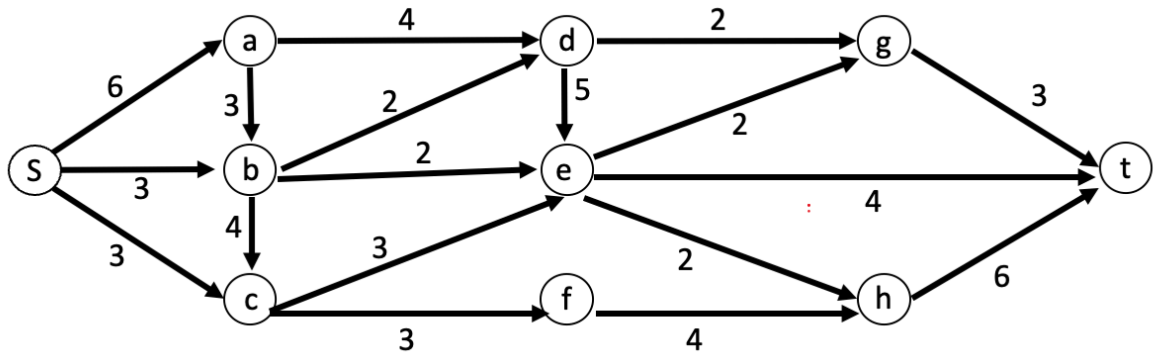
D est une tâche critique, et tout retard sur une tâche critique a un impact sur la durée totale de réalisation du projet. Par conséquent, le projet sera retardé d'un jour.

5. **Calculer la marge totale et la marge libre pour chaque tâche.**



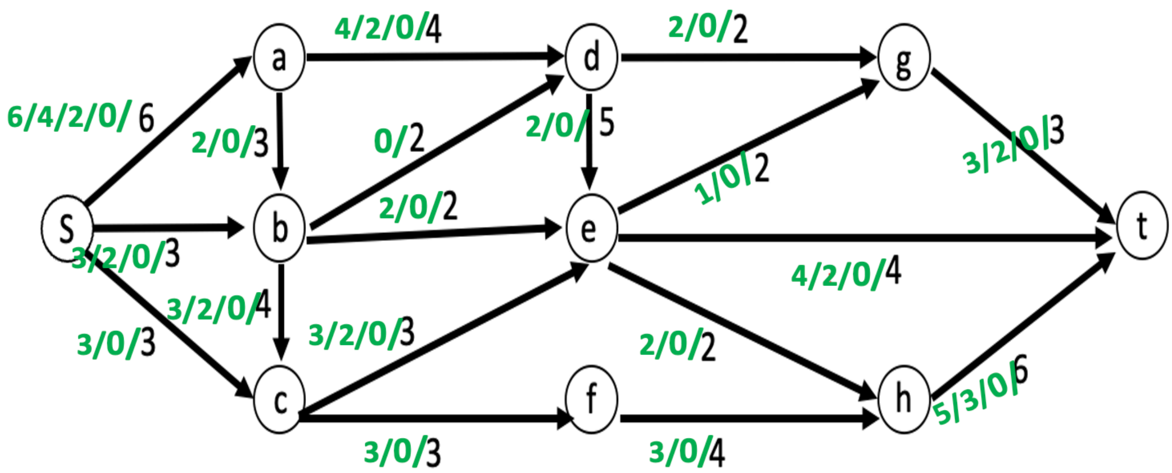
Exercice 4

Un réseau téléphonique relie la ville S à la ville t, avec des villes intermédiaires a, b, c, etc. Chaque ligne entre deux villes a une capacité maximale d'appels par unité de temps.



1. **Trouvez le nombre maximal d'appels qui peuvent passer de S à t par unité de temps. (Flot maximal).**

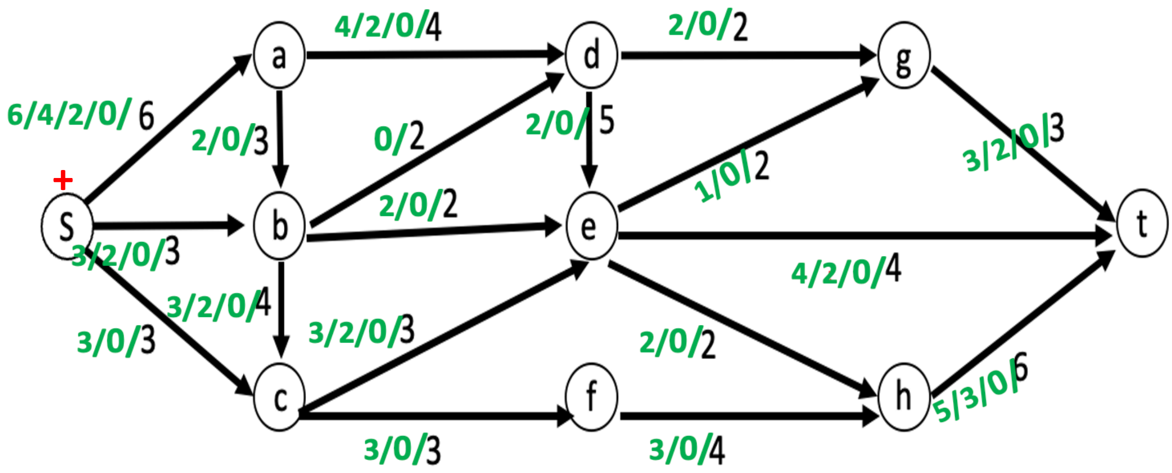
Étape 1 : Trouver un flot complet :



Chemin améliorant μ_i	$c_r(\mu_i)$
1- S→a→d→g→t	2
2- S→b→e→ t	2
3- S→c→f→h→t	3
4- S→a→b→c→e→h→t	2
5- S→a→d→e→t	2
6- S→b→c→e→g→t	1

$c_{r(\mu_1)} = \min(6,4,2,3) = 2, c_{r(\mu_2)} = \min(3,2,4) = 2, c_{r(\mu_3)} = \min(3,3,4,6) = 3,$
$c_{r(\mu_4)} = \min(4,3,4,3,2,3) = 2, c_{r(\mu_5)} = \min(2,2,5,2) = 2, c_{r(\mu_6)} = \min(1,2,1,2,1) = 1$

Étape 2 : le marquage



Le sommet t n'est pas atteint, par conséquent, le flot est maximal avec une valeur de flot égale à 12.
Le nombre maximal d'appels qui peuvent passer de S à t est :

$$v(f) = 6 + 3 + 3 = 3 + 4 + 5 = 12$$

2. **Proposer une coupe minimale associée.**

Une coupe minimale $\delta(S)$ entre s et t est une partition des sommets en deux ensembles X et Y, avec $s \in X$ et $t \in Y$, et la capacité de cette coupe est égale à la valeur du flot maximal.

X ={S} et Y = {a,b,c,d,e,f,g,h,t}

La capacité de la coupe minimale, notée $C(\delta(S))$, est égale à la somme des capacités des arcs sortant de la coupe.

$$C(\delta(S)) = 6+3+3 = 12 = v(f)$$