# TD3

$(X,Y) \sim P$ sur $\mathbb{R} \times \{0,1\}$.

$(x_0,y_0) \in \mathbb{R}\times\{0,1\}$ $\quad g_{(x_0,y_0)} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} y_0 & \text{si } x \leq x_0 \\ 1-y_0 & \text{si } x > x_0 \end{cases}$

$\mathcal{G} = \{ g_{(x_0,y_0)} : (x_0,y_0) \in \mathbb{R}\times\{0,1\} \}$

---

1) Soit $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}\times\{0,1\}$.

$$\begin{aligned}
L(x_0,y_0) &= P\left[Y \neq g(X)\right] = P\left[Y = y_0,\ g(X) = 1-y_0\right] + P\left[Y = 1-y_0,\ g(X) = y_0\right] \\
&= P\left[Y = y_0,\ X > x_0\right] + P\left[Y = 1-y_0,\ X \leq x_0\right] \\
&= P\left[X > x_0 \mid Y = y_0\right] P\left[Y = y_0\right] + P\left[X \leq x_0 \mid Y = 1-y_0\right] P\left[Y = 1-y_0\right] \\
&= \left[(1-F_1(x_0))p + F_0(x_0)(1-p)\right] \mathbb{1}_{\{y_0 = 1\}} + \\
&\quad \left[(1-F_0(x_0))(1-p) + F_1(x_0)p\right] \mathbb{1}_{\{y_0=0\}}.
\end{aligned}$$

---

2) D'après la question précédente on a

$$L_0 = \inf_{(x_0,y_0)} \left\{ \left[(1-F_1(x_0))p + F_0(x_0)(1-p)\right] \mathbb{1}_{\{y_0=1\}} + \left[(1-F_0(x_0))(1-p) + F_1(x_0)p\right] \mathbb{1}_{\{y_0=0\}} \right\}$$

Rappel : $F_1$ et $F_0$ fdr donc à val dans $[0,1]$.

$p$ proba donc $\in [0,1]$

$F_1$ et $F_0$ fdr donc $\lim\limits_{x_0 \to -\infty} F_1(x_0) = \lim\limits_{x_0 \to -\infty} F_0(x_0) = 0$

▶ $(x_0, y_0) = (-\infty, 0)$

$$\lim_{x_0 \to -\infty} L\big(g_{(x_0,0)}\big) = \lim_{x_0 \to -\infty} \big(1 - F_0(x_0)\big)(1-p) + F_1(x_0)\,p = 1-p.$$

▶ $(x_0, y_0) = (-\infty, 1)$

$$\lim_{x_0 \to -\infty} L\big(g_{(x_0,1)}\big) = \lim_{x_0 \to -\infty} \big(1 - F_1(x_0)\big)p + F_0(x_0)\,(1-p) = p.$$

On en conclut que $L_0 \leq p \wedge (1-p) \leq 1/2$.

---

3) Posons $\phi : x \in \mathbb{R} \longmapsto p\,F_1(x) - (1-p)\,F_0(x) \in [0,1]$

D'après la Q°1, on a $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \{0,1\}$

$$L(x_0,y_0) = \begin{cases} p\big(1 - F_1(x_0)\big) + (1-p)\,F_0(x_0) & \text{si } y_0 = 1 \\ p\,F_1(x_0) + (1-p)\big(1 - F_0(x_0)\big) & \text{si } y_0 = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} p - \phi(x_0) & \text{si } y_0 = 1 \\ \phi(x_0) + 1 - p & \text{si } y_0 = 0 \end{cases}$$

donc $L_0 = \inf\limits_{(x_0,y_0)} L(x_0,y_0) = \inf\limits_{x} \min\big\{p - \phi(x),\ \phi(x) + 1 - p\big\}$

$$= \inf_x \left( \frac{(\cancel{p} - \cancel{\phi(x)}) + (\cancel{\phi(x)} + 1 - \cancel{p}) - \big|(p - \phi(x)) - (\phi(x) + 1 - p)\big|}{2} \right)$$

$$= \inf_x \frac{1}{2}\left(1 - |2p - 2\phi(x) - 1|\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \sup_x \left| p - \phi(x) - 1/2 \right| = \frac{1}{2} - \sup_x \left| \phi(x) - p + 1/2 \right|$$

$$L_0 = \frac{1}{2} - \sup_x \left| p F_1(x) - (1-p)F_0(x) - p + 1/2 \right|$$

Lorsque $p = \frac{1}{2}$ ça donne

$$L_0 = \frac{1}{2}\left(1 - \sup_x |F_1(x) - F_0(x)|\right)$$

---

4) Par définition, on a $L^* \leq L_0$.

▶ D'après la Q°1) on a aussi $L_0 \leq 1/2$ donc $L^* = \frac{1}{2} \Rightarrow L_0 = \frac{1}{2}$.

▶ Supposons maintenant que $L_0 = 1/2$.

Alors d'après la Q°2), comme $L_0 \leq p \wedge (1-p) \leq 1/2$

on a forcément $p = 1/2$.

D'après la Q°3) cela implique aussi $\sup_x |F_1(x) - F_0(x)| = 0$

ie $F_1(x) = F_0(x) \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow X|Y=0 \overset{\mathcal{L}}{=} X|Y=1$.

Par conséquent, $\forall g \in \mathcal{G}$ on a

$$L(g) = P[Y \neq g(X)] = \frac{1}{2}\left(P[g(X)=0|Y=1] + P[g(X)=1|Y=0]\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{P[g(X)=0|Y=1] + P[g(X)=1|Y=1]}_{1}\right) = \frac{1}{2}.$$

et finalement $L^* = \frac{1}{2}$.

5) Soit $Z$ une v.a.r et $t \geq 0$.

Posons $Z^* = Z - E[Z]$. $\quad (E[Z^*] = 0)$

On remarque que

$$t = E[t - Z^*] \leq E\left[(t - Z^*) 1_{\{Z^* < t\}}\right]$$

donc par Cauchy-Schwartz :

$$t^2 \leq E\left[(t-Z^*)^2\right] E\left[\left(1_{\{Z^* < t\}}\right)^2\right]$$

$$= E\left[t^2 + (Z^*)^2 - 2tZ^*\right] P[Z^* < t]$$

$$= \Big(\underbrace{E[(Z^*)^2]}_{= V(Z) \text{ par définition}} + t^2\Big) P[Z - E[Z] < t]$$

donc $\quad P[Z - E(Z) < t] \geq \dfrac{t^2}{V(Z) + t^2}$

$\Leftrightarrow \quad 1 - P[Z - E(Z) \geq t] \geq \dfrac{t^2}{V(Z) + t^2}$

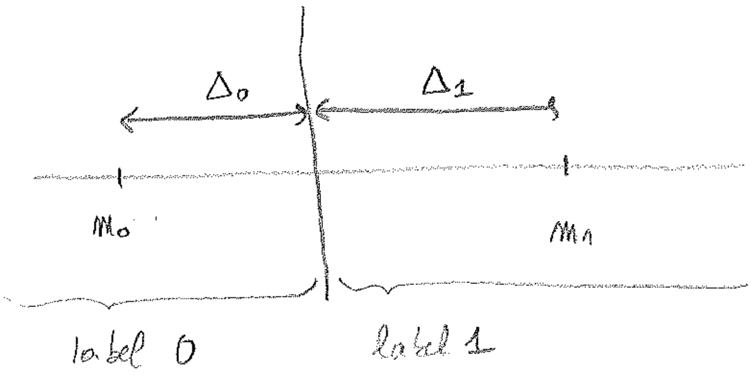
$\Leftrightarrow \quad P[Z - E(Z) \geq t] \leq 1 - \dfrac{t^2}{V(Z) + t^2} = \dfrac{V(Z)}{V(Z) + t^2}$.

---

6) ▶ Supposons que $m_0 < m_1$. Soient $\Delta_0, \Delta_1 \geq 0$ tq $m_1 - m_0 = \Delta_0 + \Delta_1$

Par définition, $L_0 \leq L(\Delta_0 + m_0, 0)$

où on rappelle que $g_{(\Delta_0 + m_0, 0)} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \Delta_0 + m_0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$




et d'après la Q°1)

$$L(\Delta_0 + m_0 \,, 0) = F_1(\Delta_0 + m_0)\,p + \big(1 - F_0(\Delta_0 + m_0)\big)(1-p)$$

$$= p\, P\big[X \leq \underbrace{\Delta_0 + m_0}_{=} \,|\, Y=1\big] + (1-p)\, P\big[X > \Delta_0 + m_0 \,|\, Y=0\big]$$

$$= p \times P\big[X \leq m_1 - \Delta_1 \,|\, Y=1\big] + (1-p)\, P\big[X > \Delta_0 + m_0 \,|\, Y=0\big] \quad (*)$$

$$= p \times P\big[-X - (-m_1) \geqslant \Delta_1 \,|\, Y=1\big] + (1-p)\, P\big[X - m_0 > \Delta_0 \,|\, Y=0\big]$$

or
- $E[-X \,|\, Y=1] = -E[X \,|\, Y=1] = -m_1$
- $V[-X \,|\, Y=1] = V[X \,|\, Y=1] = \sigma_1^2$
- $P[X - m_0 > \Delta_0 \,|\, Y=0] \leq P[X - m_0 \geq \Delta_0 \,|\, Y=0]$

donc par l'inégalité en Q°5) :

$$L(\Delta_0 + m_0, 0) \leq p \times \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \Delta_1^2} + (1-p)\frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + \Delta_0^2}$$

$$= \frac{p}{1 + \frac{\Delta_1^2}{\sigma_1^2}} + \frac{1-p}{1 + \frac{\Delta_0^2}{\sigma_0^2}}$$

En prenant $\Delta_0 = \frac{m_1 - m_0}{\sigma_1 + \sigma_0}\sigma_0$ et $\Delta_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}\Delta_0$

(ce qui donne bien $\Delta_0 + \Delta_1 = \frac{m_1 - m_0}{\sigma_0 + \sigma_1} \times \sigma_0 + \frac{m_1 - m_0}{\sigma_0 + \sigma_1}\sigma_1 = (m_1 - m_0)\frac{\sigma_0 + \sigma_1}{\sigma_0 + \sigma_1} = m_1 - m_0$)

on obtient :

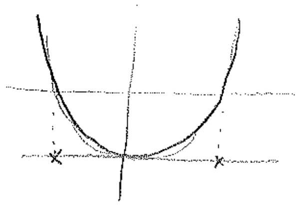
$$L(\Delta_0 + m_0, 0) = \frac{1}{1 + \frac{(m_1 - m_0)^2}{(\sigma_1 + \sigma_0)^2}}.$$

▸ On obtient la même majora° si $m_1 < m_0$ par sym à l'étape (*) et pour le m̂ choix de $\Delta_0$ et $\Delta_1$.

▸ Si $m_1 = m_0$, l'inégalité à trouver est $L_0 \leq 1$, mais c'est toujours le cas puisque $L_0 \leq 1/2$ d'après la Q°2).

<u>RMQ</u>: $$\frac{1}{1 + \frac{(m_1 - m_0)^2}{(\sigma_1 + \sigma_0)^2}} \leq \frac{1}{2} \iff 1 + \frac{(m_1 - m_0)^2}{(\sigma_1 + \sigma_0)^2} \geq 2$$

$$\iff \frac{(m_1 - m_0)^2}{(\sigma_1 + \sigma_0)^2} \geq 1$$



$$\iff (m_1 - m_0)^2 \geq (\sigma_1 + \sigma_0)^2$$

$$\iff |m_1 - m_0| \geq \sigma_1 + \sigma_0$$

---

7) (p.42)