EX 1 $\quad \mathcal{G}$ classe finie de f

$$L(g) = P\left[g(X) \neq Y\right] \qquad g \in \mathcal{G}$$

$(X_i, Y_i)_{1 \leq i \leq n} \quad \underline{\underline{iid}} \quad (X, Y)$

$$L_n(g) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{\{g(X_i) \neq Y_i\}}$$

1) pour $g \in \mathcal{G}$ on a $L_n(g) \in [0,1]$ donc $\inf_{g \in \mathcal{G}} L_n(g)$ existe

si $L(g) = 0$ ie $P\left[g(X) \neq Y\right] = 0$ alors

$$P\left[L_n(g) = 0\right] = P\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{\{g(X_i) \neq Y_i\}} = 0\right]$$

$$= P\left[g(X_1) = Y_1, \dots, g(X_n) = Y_n\right]$$

$$= P\left(g(X) = Y\right)^n = 1 .$$

Comme $\exists g \in \mathcal{G}$ tq $L(g) = 0$ alors $\exists g \in \mathcal{G}$ tq $L_n(g) = 0$ avec proba 1

$\Rightarrow$ avec proba 1, $\inf_{\mathcal{G}} L_n(g) = \min_{\mathcal{G}} L_n(g) = 0$.

2) $n \in \mathbb{N} \qquad \varepsilon \in [0,1[\qquad L(\hat{g}_n)$ var. al.

$P\left[L(\hat{g}_n) > \varepsilon\right]$?

Comme $P\left[L_n(\hat{g}_n) = 0\right] = 1$, on a

$$P\left[L(\hat{g}_n) > \varepsilon\right] = P\left[L(\hat{g}_n) > \varepsilon ; L_n(\hat{g}_n) = 0\right]$$

or $\quad L(\hat{g}_n) > \varepsilon$ et $L_n(\hat{g}_n) = 0 \Rightarrow \exists g \in \mathcal{G}_{bad}$ tq $L_n(g) = 0$.

ie l'évén $\{L(\hat{g}_n) > \varepsilon\} \cap \{\underbrace{L_n(\hat{g}_n)}_{=0}\} \subset \bigcup_{g \in \mathcal{G}_{bad}} \{L_n(g) = 0\}$.

donc $\quad P[L(\hat{g}_n) > \varepsilon] \leq P\left[\bigcup_{g \in \mathcal{G}_{bad}} \{L_n(g) = 0\}\right]$

$$\leq \sum_{g \in \mathcal{G}_{bad}} \underbrace{P[L_n(g) = 0]}$$

$$P\big(g(X) = Y\big)^n \quad (\text{cf } 1)$$

$$= \big(1 - L(g)\big)^n$$

et pour $g \in \mathcal{G}_{bad}$ $\quad L(g) > \varepsilon$ $\quad$ donc $\quad 1 - L(g) < 1 - \varepsilon$

$$(1 - L(g))^n < (1 - \varepsilon)^n$$

et $\quad |\mathcal{G}_{bad}| \leq |\mathcal{G}|$

ccl° : $\quad P[L(\hat{g}_n) > \varepsilon] \leq |\mathcal{G}| (1 - \varepsilon)^n$.

Rq : on a $\quad 1 - \varepsilon \leq e^{-\varepsilon}$ $\quad$ qd $\quad \varepsilon \geq 0$.

en effet, $\quad f(\varepsilon) := e^{-\varepsilon} - 1 + \varepsilon$

$f'(\varepsilon) = 1 - e^{-\varepsilon} \geq 0$ ssi $1 \geq e^{-\varepsilon}$ vrai pr $\varepsilon \geq 0$

ε	0	$+\infty$
f'	$+$	
f	0	$\nearrow$

De man gén $\quad e^x \geq \underbrace{1 + x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

tg en 0 de e^x qui est cvx donc tjs $\geq$ sa tg

donc on peut même écrire $\quad P[L(\hat{g}_n) > \varepsilon] \leq |\mathcal{G}| e^{-n\varepsilon}$

$\forall \varepsilon > 0$.

3) $E\Big[\underset{\text{à val ds } [0,1]}{L(\hat{g}_n)}\Big] = \int_0^{+\infty} P\big[L(\hat{g}_n) > \varepsilon\big]\, d\varepsilon$

$\forall u > 0$ on a $E\big[L(\hat{g}_n)\big] \leq u + \int_u^{+\infty} P\big[L(\hat{g}_n) \geq \varepsilon\big]\, d\varepsilon$

$$\leq u + \int_u^{+\infty} |\mathcal{G}|\, e^{-n\varepsilon}\, d\varepsilon = u + |\mathcal{G}| \left[-\frac{1}{n} e^{-n\varepsilon}\right]_u^{+\infty}$$

$$= u + |\mathcal{G}| \frac{1}{n} e^{-nu} =: \phi(u)$$

$\phi'(u) = 1 + \frac{|\mathcal{G}|}{\cancel{n}}(-\cancel{n})e^{-nu} = 1 - |\mathcal{G}|e^{-nu}$ $\qquad \phi'(u) = 0$ ssi $1 = |\mathcal{G}|e^{-nu}$

$\phi''(u) = n|\mathcal{G}|\, e^{-nu} > 0$ $\qquad \frac{\ln|\mathcal{G}|}{n} = u$

u	0		$\ln\lvert\mathcal{G}\rvert/n$		$+\infty$
ϕ''			$+$		
ϕ'	$1-\lvert\mathcal{G}\rvert$	$-$ ↗	0	$+$ ↗	1
ϕ	$\frac{\lvert\mathcal{G}\rvert}{n}$	↘	$\frac{\ln(e\lvert\mathcal{G}\rvert)}{n}$	↗	$+\infty$

$$\phi\left(\frac{\ln|\mathcal{G}|}{n}\right) = \frac{\ln|\mathcal{G}|}{n} + \frac{|\mathcal{G}|}{n}\exp\left\{-\cancel{n}\frac{\ln|\mathcal{G}|}{\cancel{n}}\right\}$$

$$= \frac{\ln|\mathcal{G}|}{n} + \frac{\cancel{|\mathcal{G}|}}{n} \times \frac{1}{\cancel{|\mathcal{G}|}}$$

$$= \frac{1}{n}\left(1 + \ln|\mathcal{G}|\right)$$

$$= \frac{\ln(e|\mathcal{G}|)}{n}$$

donc la plus petite borne qu'on puisse trouver est bien

$\frac{\ln(e|\mathcal{G}|)}{n}$.

EX2

1) $L(\eta_n) - L^* = P\left[2\,\mathbb{1}_{\{\eta_n(X) \geq 1/2\}} - 1 \neq Y\right] - P\left[2\,\mathbb{1}_{\{\eta(X) \geq 1/2\}} - 1 \neq Y\right]$

$$= E\left[\mathbb{1}_{\{Y=1\}}\mathbb{1}_{\{\eta_n(X) < 1/2\}} + \mathbb{1}_{\{Y=-1\}}\mathbb{1}_{\{\eta_n(X) \geq 1/2\}}\right]$$

$$- E\left[\mathbb{1}_{\{Y=1\}}\mathbb{1}_{\{\eta(X) < 1/2\}} + \mathbb{1}_{\{Y=-1\}}\mathbb{1}_{\{\eta(X) \geq 1/2\}}\right]$$

$$= E\left[\mathbb{1}_{\{Y=1\}}\left(\mathbb{1}_{\{\eta_n(X) < 1/2\}} - \mathbb{1}_{\{\eta(X) < 1/2\}}\right)\right]$$

$$+ E\left[\mathbb{1}_{\{Y=-1\}}\left(\mathbb{1}_{\{\eta_n(X) \geq 1/2\}} - \mathbb{1}_{\{\eta(X) \geq 1/2\}}\right)\right]$$

$$\overset{E[E[\cdot|X]]}{=} E\left[\eta(X)\left(\mathbb{1}_{\{\eta_n(X) < 1/2\}} - \mathbb{1}_{\{\eta(X) < 1/2\}}\right)\right]$$

$$+ E\left[(1-\eta(X))\left(\underbrace{\mathbb{1}_{\{\eta_n(X) \geq 1/2\}} - \mathbb{1}_{\{\eta(X) \geq 1/2\}}}\right)\right]$$

$$= 1 - \mathbb{1}_{\{\eta_n(X) < 1/2\}} - 1 + \mathbb{1}_{\{\eta(X) < 1/2\}}$$

$$= -\left(\mathbb{1}_{\{\eta_n(X) < 1/2\}} - \mathbb{1}_{\{\eta(X) < 1/2\}}\right)$$

$$= E\left[(2\eta(X) - 1)\left(\mathbb{1}_{\{\eta_n(X) < 1/2\}} - \mathbb{1}_{\{\eta(X) < 1/2\}}\right)\right]$$

$$= 2\,E\left[(\eta(X) - 1/2)\left(\mathbb{1}_{\{\eta_n(X) < 1/2\}} - \mathbb{1}_{\{\eta(X) < 1/2\}}\right)\right]$$

$\forall x \in \mathcal{X}$ posons $h(x) = \mathbb{1}_{\{\eta_n(x) < 1/2\}} - \mathbb{1}_{\{\eta(x) < 1/2\}}$.

- $\forall x \in \mathcal{X}$ on a $\boxed{\left(\eta(x)-\frac{1}{2}\right) h(x) = \left|\eta(x)-\frac{1}{2}\right| \, |h(x)|}$ (*)

En effet :

- si $\left.\begin{array}{l}\eta_n(x) < 1/2 \text{ et } \eta(x) < 1/2 \\ \text{ou } \eta_n(x) \geq 1/2 \text{ et } \eta(x) \geq 1/2\end{array}\right|$ i.e. $g_n(x) = g^*(x)$ alors $h(x) = 0$ et (*) est vraie

- si $\eta_n(x) < 1/2$ et $\eta(x) \geq 1/2$ (ie. $g_n(x) < g^*(x)$) alors $h(x) = 1 = |h(x)|$

  et $\eta(x) - \frac{1}{2} \geq 0$ donc $\eta(x) - \frac{1}{2} = \left|\eta(x) - \frac{1}{2}\right|$

- si $\eta_n(x) \geq 1/2$ et $\eta(x) < 1/2$ (i.e. $g_n(x) > g^*(x)$) alors $h(x) = -1$ et

  $\eta(x) - \frac{1}{2} \leq 0$ donc $\left(\eta(x) - \frac{1}{2}\right) h(x) = \left|\eta(x) - \frac{1}{2}\right| \times |h(x)|$.

En outre, $\forall x \in \mathcal{X}$ on a $\boxed{\left|\eta(x) - \frac{1}{2}\right| |h(x)| \leq |\eta(x) - \eta_n(x)| \, |h(x)|}$

- si $g_n(x) = g^*(x)$ alors $\left|\eta(x) - \frac{1}{2}\right| |h(x)| = 0 = |\eta(x) - \eta_n(x)| \, |h(x)|$

- si $\eta_n(x) < 1/2$ et $\eta(x) \geq 1/2$ alors $|h(x)| = 1$ et

  $|\eta(x) - \eta_n(x)| = \eta(x) - \eta_n(x) \geq \eta(x) - \frac{1}{2} = \left|\eta(x) - \frac{1}{2}\right|$.

- si $\eta_n(x) \geq 1/2$ et $\eta(x) < 1/2$ alors $|h(x)| = 1$ et

  $|\eta(x) - \eta_n(x)| = \eta_n(x) - \eta(x) \geq \frac{1}{2} - \eta(x) = \left|\eta(x) - \frac{1}{2}\right|$.

On obtient donc :

$$(**) \quad L(g_n) - L^* \leq 2 E\left[|\eta(X) - \eta_n(X)| \, |h(X)|\right] \geq 0$$

et par Cauchy-Schwartz : $L(g_n) - L^* \leq 2 \sqrt{E\left[(\eta(X) - \eta_n(X))^2\right]} \sqrt{E\left[h(X)^2\right]}$

Or d'après $(*)$ et l'hyp que $\forall x \in \mathcal{X}$ $|\eta(x) - \frac{1}{2}| \geq \delta$ on a aussi

$$L(g_n) - L^* = 2\, E\left[|\eta(X) - 1/2|\, |h(X)|\right]$$

$$\geq 2\delta\, E\left[|h(X)|\right] \geq 2\delta\, E\left[|h(X)|^2\right] \quad \text{car } |h(X)| \in \{0,1\}.$$

donc $\sqrt{E\left[|h(X)|^2\right]} \leq \sqrt{\dfrac{L(g_n) - L^*}{2\delta}}$

d'où $L(g_n) - L^* \leq \dfrac{2}{\sqrt{2\delta}} \sqrt{E\left[(\eta(X) - \eta_n(X))^2\right]}\ \sqrt{L(g_n) - L^*}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{L(g_n) - L^*} \leq \frac{2}{\sqrt{2\delta}} \sqrt{E\left[(\eta(X) - \eta_n(X))^2\right]}$$

$$\Rightarrow L(g_n) - L^* \leq \frac{4}{2\delta} E\left[(\eta(X) - \eta_n(X))^2\right] = \frac{2}{\delta} E\left[(\eta_n(X) - \eta(X))^2\right]$$

---

2) On suppose $L^* = 0$.

Si on reprend le calcul précédent au point $(**)$ on obtient :

$L(g_n) \leq 2\, E\left[|\eta(X) - \eta_n(X)|\, |h(X)|\right]$ et d'après l'inégalité de Hölder $\forall q \geq 1$

$$E\left[|\eta(X) - \eta_n(X)|\, |h(X)|\right] \leq E\left[|\eta(X) - \eta_n|^q\right]^{1/q} E\left[|h(X)|^{q/q-1}\right]^{q-1/q}$$

or $|h(X)| \in \{0,1\}$ donc $|h(X)|^{q/q-1} = |h(X)|$

et on remarque que $|h(X)| = 1_{\{g_n(X) \neq g^*(X)\}}$

$$\overset{p.s.}{=} 1_{\{g_n(X) \neq Y\}} \quad \text{car } L^* = 0.$$

donc $E[|h(X)|] = L(g_n)$.

Par conséquent, on a $\forall q \geq 1$ ▸ si $L(g_n) \neq 0$

$$\frac{L(g_n)}{(L(g_n))^{\frac{q-1}{q}}} \leq 2 \; E\left[|\eta(X) - \eta_n(X)|^q\right]^{1/q}$$

$$\Leftrightarrow \quad (L(g_n))^{1-\frac{q-1}{q}} = (L(g_n))^{1/q} \leq 2\; E\left[|\eta(X) - \eta_n(X)|^q\right]^{1/q}$$

$$\Rightarrow \quad L(g_n) \leq 2^q \; E\left[|\eta(X) - \eta_n(X)|^q\right].$$

▸ Si $L(g_n) = 0$ alors l'inégalité reste évidemment vraie.

---

3) $$|L(g_n) - L(g)| = \left|2E\left[(\eta(X) - 1/2)\left(1_{\{\eta_n(X) < 1/2\}} - 1_{\{\eta'(X) < 1/2\}}\right)\right]\right|$$

Jensen comme précédemment

$$\leq 2\; E\left[|\eta(X) - 1/2| \left| 1_{\{\eta_n(X) < 1/2\}} - 1_{\{\eta'(X) < 1/2\}}\right|\right]$$

$$\leq E\left[\left|1_{\{\eta_n(X) < 1/2\}} - 1_{\{\eta'(X) < 1/2\}}\right|\right]$$

car par déf $|\eta(X) - 1/2| \leq 1/2$

or $\forall x$ $\quad \left|\mathbb{1}\{\eta_n(x)<1/2\} - \mathbb{1}\{\eta'(x)<1/2\}\right| = \begin{cases} 0 & \text{si } \eta_n(x)<1/2 \text{ et } \eta'(x)<1/2 \\ & \text{ou } \eta_n(x)\geq 1/2 \text{ et } \eta'(x)\geq 1/2 \\ 1 & \text{si } \eta_n(x)<1/2 \text{ et } \eta'(x)\geq 1/2 \\ & \text{ou } \eta_n(x)\geq 1/2 \text{ et } \eta'(x)<1/2 \end{cases}$

donc $\quad E\left[\left|\mathbb{1}\{\eta_n(X)<1/2\} - \mathbb{1}\{\eta'(X)<1/2\}\right|\right] =$

$$= P\left[\eta_n(X)<1/2\ ,\ \eta'(X)\geq 1/2\right] + P\left[\eta_n(X)\geq 1/2\ ,\ \eta'(X)<1/2\right]$$

Quel que soit $\delta'>0$

▶ $\{\eta'(X)\geq 1/2\} = \{\eta'(X)-1/2\geq\delta'\}\cup\{0\leq \eta'(X)-1/2<\delta'\}$

puis $\quad \{\eta_n(X)<1/2\}\cap\{\eta'(X)-1/2\geq\delta'\} \subseteq \{|\eta'(X)-\eta_n(X)|\geq\delta'\}$

et $\quad \{\eta_n(X)<1/2\}\cap\{0\leq\eta'(X)-1/2<\delta'\} \subseteq \{|\eta'(X)-1/2|<\delta'\}$

donc $\quad P\left[\eta_n(X)<1/2,\ \eta'(X)\geq 1/2\right] \leq P\left[|\eta'(X)-1/2|<\delta'\right] + P\left[|\eta'(X)-\eta_n(X)|\geq\delta'\right]$

▶ $\{\eta'(X)<1/2\} = \{1/2-\eta'(X)\geq\delta'\}\cup\{0\leq 1/2-\eta'(X)<\delta'\}$

puis $\quad \{\eta_n(X)\geq 1/2\}\cap\{1/2-\eta'(X)\geq\delta'\} \subset \{|\eta'(X)-\eta_n(X)|\geq\delta'\}$

et $\quad \{\eta_n(X)\geq 1/2\}\cap\{0\leq 1/2-\eta'(X)<\delta'\} \subset \{|\eta'(X)-1/2|<\delta'\}$

donc $\quad P\left[\eta_n(X)\geq 1/2\ ,\ \eta'(X)<1/2\right] \leq P\left[|\eta'(X)-1/2|<\delta'\right] + P\left[|\eta'(X)-\eta_n(X)|\geq\delta'\right]$

d'où $\forall \delta'>0$ $\quad |L(g_n) - L(g)| \leq 2\, P\left[|\eta'(X) - 1/2| < \delta'\right] + 2\, P\left[|\eta'(X) - \eta_n(X)| \geq \delta'\right]$

Soit $\varepsilon > 0$, on veut trouver $N > 0$ tq $n \geq N \Rightarrow |L(g_n) - L(g)| < \varepsilon$

▶ Par hyp $P[\eta'(X) = 1/2] = P[|\eta'(X) - 1/2| = 0] = 0$.

donc on peut choisir $\delta' = \delta'_0$ tel que $P\left[|\eta'(X) - 1/2| < \delta'\right] \leq \varepsilon/2$.

(si on avait une masse $m>0$ en 0, on aurait tjs $P[|\eta'(X) - 1/2| < \delta'] \geq m$ et on ne pouvait pas descendre en dessous)

▶ Par l'inégalité de Markov, $P\left[|\eta'(X) - \eta_n(X)| \geq \delta'\right] \leq \dfrac{E\left[|\eta'(X) - \eta_n(X)|\right]}{\delta'}$

et par hyp $\exists N = N(\varepsilon, \delta'_0) > 0$ tq $\forall n \geq N$ on a

$$E\left[|\eta'(X) - \eta_n(X)|\right] \leq \frac{\delta'_0 \varepsilon}{2}.$$

On a donc bien obtenu ce qu'on voulait.

---

4) Par hyp $P[Z = 1 \mid Y = -1, X] = P[Z = 1 \mid Y = -1] = a < 1/2$

donc $P[Z = -1 \mid Y = -1, X] = 1 - P[Z = 1 \mid Y = -1] = P[Z = -1 \mid Y = -1] = 1 - a > 1/2$

de même $P[Z = -1 \mid Y = 1, X] = P[Z = -1 \mid Y = 1] = b < 1/2$

donc $P[Z = 1 \mid Y = 1, X] = P[Z = 1 \mid Y = 1] = 1 - b > 1/2$

Donc $\forall x \in \mathcal{X}$ $\quad \eta'(x) = (1-b)\,\eta(x) + a\,(1 - \eta(x)) = \eta(x)\,(1-b-a) + a$

et $\quad 1 - \eta'(x) = (1-a)\,(1 - \eta(x)) + b\,\eta(x) = (1 - \eta(x))\,(1-a-b) + b$

On a vu en Q° 1) qu'on pouvait écrire

$$L(g) - L^* \leq 2\, E\left[|\eta(X) - \eta'(X)|\, \mathbb{1}\{g(X) \neq g^*(X)\}\right].$$

On va regarder quand on a $g(x) \neq g^*(x)$ pour $x \in \mathcal{X}$

▶ si $\eta(x) \geq 1/2$ et $\eta'(x) < 1/2$ ie

$$\eta(x) \geq 1/2 \quad \text{et} \quad \eta(x) < \frac{1}{2} \times \frac{1-2a}{1-b-a}$$

possible que si $1 < \dfrac{1-2a}{1-b-a} \Leftrightarrow \cancel{1} - b - a < \cancel{1} - 2a \Leftrightarrow a < b$

▶ si $\eta(x) < 1/2$ et $\eta'(x) \geq 1/2$ ie

$$\eta(x) < 1/2 \quad \text{et} \quad \eta(x) \geq \frac{1}{2} \times \frac{1-2a}{1-b-a}$$

possible que si $\dfrac{1-2a}{1-b-a} < 1 \Leftrightarrow a > b$

On en déduit que
$$\begin{aligned}
L^* &= E\left[\eta(X) \wedge (1-\eta(X))\right] \\
&\geq E\left[\eta(X) \wedge (1-\eta(X))\, \mathbb{1}\{g(X) \neq g^*(X)\}\right] \\
&= E\left[\eta(X) \wedge (1-\eta(X)) \,\middle|\, g(X) \neq g^*(X)\right] P\left[g(X) \neq g^*(X)\right] \\
&\geq \begin{cases} \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1-2b}{1-b-a}\, P\left[g(X) \neq g^*(X)\right] & \text{si } a < b \\[2ex] \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1-2a}{1-b-a}\, P\left[g(X) \neq g^*(X)\right] & \text{si } a > b \end{cases}
\end{aligned}$$

$$1 - \frac{1-2a}{2(1-b-a)} = \frac{2-2b-2a-1+2a}{2(1-b-a)} = \frac{1-2b}{2(1-b-a)}$$

E2.7

re $\quad L^* \geq \frac{1}{2} \times \frac{1-2(a \vee b)}{1-b-a} \; P\left[g(x) \neq g^*(x)\right]$

Par ailleurs

- si $\underline{a < b}$ et $g(x) \neq g^*(x)$

alors $\quad |\eta(x) - \eta'(x)| = \eta(x) - \eta'(x) = \eta(x) - (1-b-a)\,\eta(x) - a$

$$= \eta(x)\,(b+a) - a$$

$$< \frac{1}{2} \times \frac{(b+a)(1-2a)}{1-b-a} - a$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{b - \cancel{2ab} + a - \cancel{2a^2} - 2a + \cancel{2ab} + \cancel{2a^2}}{1-b-a}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{b-a}{1-b-a}$$

- si $\underline{a > b}$ et $g(x) \neq g^*(x)$

alors $\quad |\eta(x) - \eta'(x)| = \eta'(x) - \eta(x) = -(b+a)\,\eta(x) + a$

$$\leq -\frac{b+a}{1-b-a} \times \frac{1-2a}{2} + a$$

$$= \frac{2a - \cancel{2ab} - \cancel{2a^2} - b + \cancel{2ab} - a + \cancel{2a^2}}{2(1-b-a)}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{a-b}{1-a-b}$$

donc lorsque $g(x) \neq g^*(x)$ on a $|\eta(x) - \eta'(x)| \leq \frac{1}{2} \, \frac{|a-b|}{1-a-b}$

On déduit de tout ça que :

$$L(g) - L^* \leq 2\, E\left[|\eta(X) - \eta'(X)| \, \mathbb{1}\{g(X) \neq g^*(X)\}\right] = 2\, E\left[|\eta(X) - \eta'(X)| \;\middle|\; g(X) \neq g^*(X)\right] \times P\left[g(X) \neq g^*(X)\right]$$

$$\leq \frac{|a-b|}{\cancel{1-a-b}} \times 2L^* \frac{\cancel{1-b-a}}{1-2(a \vee b)} = 2L^* \frac{|a-b|}{1-2(a \vee b)}.$$

- Lorsque $a = b$

$$\eta'(x) = (1-2a)\,\eta(x) + a$$

$$\eta'(x) \geq 1/2 \iff \eta(x) \geq \frac{1}{2} \times \frac{1-2a}{1-2a} = \frac{1}{2}$$

on retombe donc sur le classifieur de Bayes !

EX 3 Calcul des VC dim° des classes ens suivants

a) $\mathcal{A} = \{]-\infty, x_1] \times \cdots \times]-\infty, x_d] : (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d \}$

On va mq $V_{\mathcal{A}} = d$.

Rappel : ∘ shatter coef $s(\mathcal{A}, n) = \max_{(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{R}^d} N_{\mathcal{A}}(z_1,\dots,z_n)$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$

où $N_{\mathcal{A}}(z_1,\dots,z_n) = \#$ ens dans $\{ \{z_1,\dots,z_n\} \cap A : A \in \mathcal{A} \}$.

∘ VC dim $\quad V_{\mathcal{A}} =$ le + gd $k \geq 1$ tq $s(\mathcal{A}, k) = 2^k$.
si $|\mathcal{A}| \geq 2$

* $\boxed{\text{si } d = 1}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R} : \forall z \in \mathbb{R}$

$$\{z\} \cap]-\infty, x] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } z > x \\ \{z\} & \text{si } z \leq x \end{cases}$$

donc $\quad s(\mathcal{A}, 1) = 2 = 2^1$

Par contre, $\forall z_1 < z_2 \in \mathbb{R}$

$$\{z_1, z_2\} \cap]-\infty, x] = \begin{cases} \emptyset \text{ si } & z_1 > x \\ \{z_1\} \text{ si } & z_1 \leq x < z_2 \\ \{z_1, z_2\} \text{ si } & z_2 \leq x \end{cases}$$

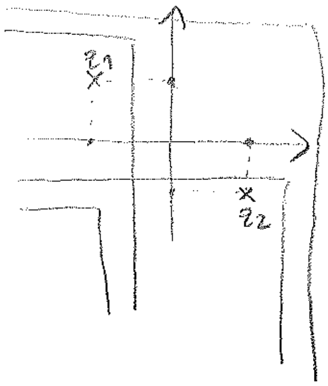
mais on ne peut pas obtenir juste $\{z_2\}$

donc $\quad s(\mathcal{A}, 2) = 3 < 2^2 = 4$

Conclusion : $\quad V_{\mathcal{A}} = 1$.

* si $\boxed{d = 2}$: on peut trouver $z_1 = (z_{11}, z_{12})$ et $z_2 = (z_{21}, z_{22})$ tq

$N_{\mathcal{A}}(z_1, z_2) = 4$. En effet, si $\quad z_{11} < z_{21} \quad$ et $\quad z_{12} > z_{22} \quad$ alors



$$\{z_1, z_2\} \cap]-\infty, x_1] \times]-\infty, x_2] = \begin{cases} \{\emptyset\} & \text{si } x_1 < z_{11} \text{ et } x_2 < z_{22} \\ \{z_1\} & \text{si } z_{11} \leq x_1 < z_{12} \text{ et } z_{12} < x_2 \\ \{z_2\} & \text{si } z_{21} \leq x_1 \text{ et } \\ & z_{22} \leq x_2 < z_{12} \\ \{z_1, z_2\} & \text{si } x_1 \geq z_{21} \text{ et } \\ & x_2 \geq z_{12} \end{cases}$$

donc $s(\mathcal{A}, 2) = 4 = 2^2$.

Par contre, si on prend 3 points on n'arrive pas à $2^3 = 8$.

* <u>Si d quelconque</u>

On peut éclater / séparer les points de la base canonique de $\mathbb{R}^d$

ie $e_1, \dots, e_d$ où $\forall j$ $e_j = (0 \dots 0, \underset{\substack{\uparrow \\ j^e \text{ comp.}}}{1}, 0 \dots 0)$:

$$\begin{matrix} \{e_1, \dots, e_d\} \\ \cap]-\infty, x_1] \times \dots \\ \times]-\infty, x_d] \end{matrix} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x_1, \dots, x_d < 0 \\ \{e_j\} & \text{si } x_j \geq 1 \text{ et } x_{-j} < 1 \\ \{e_j, e_k\} & \text{si } x_j, x_k \geq 1 \text{ et } x_{-jk} < 1 \\ \vdots & \\ \{e_1, \dots, e_d\} & \text{si } x_1, \dots, x_d \geq 1 \end{cases}$$

Par contre on ne peut pas séparer $d+1$ points : $(z_1, \dots, z_{d+1})$

sur ces $d+1$ points, on trouve d coord max :

$\forall j \in \{1, \dots, d\}$ $\exists z^{(j)} \in \{z_1, \dots, z_{d+1}\}$ tq $z_j^{(j)} = \max\{z_{1j}, \dots, z_{d+1,j}\}$

⚠ $z^{(1)}, \dots, z^{(d)}$ pas forcément distincts mais on en a au + $\underline{\underline{d}}$.

Donc si on prend un $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ tq $\forall j$ $x_j \geq z_j^{(j)}$, ...

le pavé $]-\infty, x_1] \times \dots \times]-\infty, x_d]$ contient tous les $\{z_1, \dots, z_{d+1}\}$

et on ne peut pas contenir juste $\{z^{(1)}, \dots, z^{(d)}\}$.

b) $\mathcal{A} = \left\{ [x_1, y_1] \times \dots \times [x_d, y_d] \;:\; (x_1, \dots, x_d), (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d \text{ et } x_1 < y_1, \dots, x_d < y_d \right\}$

On va mq. $V\mathcal{A} = 2d$.

$\geq 2d$ → Si on prend les vect de la base can. de $\mathbb{R}^d$ et leurs opposés :

$\{e_1, \dots, e_d, -e_1, \dots, -e_d\} \cap [x_1, y_1] \times \dots \times [x_d, y_d] =$

$$\begin{cases} \emptyset & \text{pour } x_1, \dots, x_d = -\frac{1}{2} \text{ et } y_1, \dots, y_d = \frac{1}{2} \\ \{e_j\} & \text{pour } x_1, \dots, x_d = -\frac{1}{2}, \quad y_j = \frac{3}{2} \text{ et } y_{-j} = \frac{1}{2} \\ \{-e_j\} & \text{—} \quad x_j = -\frac{3}{2}, \; x_{-j} = -\frac{1}{2} \quad y_1, \dots, y_d = \frac{1}{2} \\ \vdots & \\ \text{etc.} & \end{cases}$$

on trouve bien 2^{2d} sous-ens.

$< 2d+1$ → Par contre, si on prend $2d+1$ points $z_1, \dots, z_{2d+1}$

on pose $\forall j \in \{1, \dots, d\}$ $\exists \bar{z}^{(j)} \in \{z_1, \dots, z_{2d+1}\} : \bar{z}^{(j)}_j = \max\{z_{1j}, \dots, z_{2d+1,j}\}$

$\exists \underline{z}^{(j)} \in \{\dots\} : \underline{z}^{(j)}_j = \min\{z_{1j}, \dots, z_{2d+1,j}\}$

$\bar{z}^{(1)}, \dots, \bar{z}^{(d)}, \underline{z}^{(1)}, \dots, \underline{z}^{(d)}$ sont au + $2d$ points distincts

Pour tous les contenir, il faut pdt $[x_1, y_1] \times \dots \times [x_d, y_d]$

où $x_j = \underline{z}_j^{(j)}$ et $y_j = \overline{z}_j^{(j)}$ $\forall j$ mais contient alors

ts les autres pts de $\{z_1, \ldots, z_{2d+1}\}$ donc on ne peut pas

contenir juste $\{\overline{z}^{(1)}, \ldots, \overline{z}^{(d)}, \underline{z}^{(1)}, \ldots, \underline{z}^{(d)}\}$ $\underline{\text{4}}$

Ex 4

Thm 13.9 [DGL96] p. 221

$\mathcal{G}$ esp. vect de fc° $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de dim° finie $m \geq 0$

$\mathcal{A} = \{ \{x : g(x) \geq 0\} : g \in \mathcal{G} \}$

alors $V_{\mathcal{A}} \leq m$

⚠ explica° "intuitive" du Thm ?

Rmq: ça fonctionne aussi avec $g(x) \leq 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &= \{ \{x : g(x) \leq 0\} : g \in \mathcal{G} \} \\ &= \{ \{x : -g(x) \geq 0\} : g \in \mathcal{G} \} \\ &= \{ \{x : -g(x) \geq 0\} : -g \in \mathcal{G} \} \\ &= \{ \{x : h(x) \geq 0\} : h \in \mathcal{G} \} = \mathcal{A} \end{aligned}$$

Ici : $\mathcal{A} = \{ \{x = (x_1, \ldots, x_d) : \sum_{i=1}^d |x_i - a_i|^2 \leq b \} : a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}_+ \}$

Comme on a $\sum_{i=1}^d |x_i - a_i|^2 - b = \sum_{i=1}^d |x_i|^2 - 2\sum_{i=1}^d a_i x_i + \left(\sum_{i=1}^d a_i^2 - b\right)$

on peut prendre $\mathcal{G}$ l'esp. vec. engendré par

$\phi_1(x) = \sum_{i=1}^d |x_i|^2$, $\phi_2(x) = x_1$, ... , $\phi_{d+1}(x) = x_d$, $\phi_{d+2}(x) = 1$

et $\mathcal{A} \subset \{ \{x : g(x) \leq 0\} : g \in \mathcal{G} \} =: \mathcal{B}$

donc par déf° de $V_{\mathcal{A}}$ on a $V_{\mathcal{A}} \leq V_{\mathcal{B}} \underset{Th}{\leq} d+2$.

Ex 5   Lemme de Sauer : $\forall n \geq 1 \quad s(\mathcal{A}, n) \leq \sum_{k=0}^{V} \binom{n}{k}$

1) $n \geq 1$: $(n+1)^V = \sum_{k=0}^{V} \binom{V}{k} n^k = \sum_{k=0}^{V} \frac{V!}{k!(V-k)!} n^k \geq \sum_{k=0}^{V} \frac{n^k}{k!}$

$$= \sum_{k=0}^{V} \binom{n}{k} \times \underbrace{n^k \times \frac{(n-k)!}{n!}}_{\frac{n^k}{(n-k+1)\times \dots \times n} \geq 1} \geq \sum_{k=0}^{V} \binom{n}{k} \geq s(\mathcal{A}, n)$$

} k termes

2) $n \geq V$ ie $1 \geq \frac{V}{n}$.

On cherche à montrer que $\sum_{k=0}^{V} \binom{n}{k} \leq \left(\frac{ne}{V}\right)^V = \left(\frac{n}{V}\right)^V e^V$

ie $\left(\frac{V}{n}\right)^V \sum_{k=0}^{V} \binom{n}{k} \leq e^V$.

On a $\left(\frac{V}{n}\right)^V \sum_{k=0}^{V} \binom{n}{k} \leq \sum_{k=0}^{V} \binom{n}{k} \left(\frac{V}{n}\right)^k$ car $\frac{V}{n} \leq 1$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{V}{n}\right)^k \quad \text{car } n \geq V.$$

$$= \left(\frac{V}{n} + 1\right)^n \leq \left(e^{V/n}\right)^n = e^V.$$