TD n° 1

Ex 3 Soient $w_0, w_1 \geq 0$ tq $w_0 + w_1 = 1$.

Considérons le risque de classification pondérée $L_w(g) = \mathbb{E}\left[2w(Y)\, \mathbb{1}\{Y \neq g(X)\}\right]$

où $g : \mathcal{X} \to \{0,1\}$ mesurable.

Déterminons le classifieur de Bayes.

$$L_w(g) = \mathbb{E}\left[2w(Y)\, \mathbb{1}\{Y \neq g(X)\}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[2w(Y)\, \mathbb{1}\{Y=0, g(X)=1\} + 2w(Y)\, \mathbb{1}\{Y=1, g(X)=0\}\right]$$

$$\underset{\mathbb{E} = \mathbb{E}\mathbb{E}(\cdot|X)}{=} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[2w_0\, \mathbb{1}\{Y=0, g(X)=1\} \mid X\right]\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[2w_1\, \mathbb{1}\{Y=1, g(X)=0\} \mid X\right]\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[2w_0\, \underbrace{\mathbb{1}\{g(X)=1\}}_{\sigma(X)\text{-mesurable}}\, \mathbb{E}\left[\mathbb{1}\{Y=0\} \mid X\right]\right] + \mathbb{E}\left[2w_1\, \mathbb{1}\{g(X)=0\}\, \mathbb{E}\left[\mathbb{1}\{Y=1\} \mid X\right]\right]$$

or par définition, $\eta(X) = \mathbb{P}(Y=1 \mid X)$, donc :

$$L_w(g) = \mathbb{E}\left[2w_0(1-\eta(X))\, \mathbb{1}\{g(X)=1\} + 2w_1\eta(X)\, \mathbb{1}\{g(X)=0\}\right]$$

Le classifieur de Bayes est le minimiseur de L_w,

alors sur $\{g(X)=1\}$, on veut $w_0(1-\eta(X)) \leq w_1\eta(X)$ si $\eta(X) \geq \frac{w_0}{w_0+w_1}$

sur $\{g(X)=0\}$ — $\geq$ si $\eta(X) < \frac{w_0}{w_0+w_1}$

donc le classifieur de Bayes est défini par : $g^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \eta(x) \geq w_0/w_0+w_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$L_w(g) \geq \mathbb{E}\left[2\min(w_0(1-\eta(X)), w_1\eta(X))\right] = L_w(g^*)$$

Intuition : Les pondérations w_0, w_1, permettent de rendre le problème de classification asymétrique : choisir $w_0 > w_1$ si l'on souhaite éviter d'attribuer le label 1 à une observation X de "vrai" label 0.

Test statistique associé : $\mathcal{H}_0$: " X générée sous la loi $\mathcal{L}(X \mid Y=0)$ "

vs. $\mathcal{H}_1$: " X " " $\mathcal{L}(X \mid Y=1)$ ".