TP2 : Interpolation polynomiale et Base de Lagrange

XIA Qiaoqiao et AIT HAMID Adam

1 Introduction

Dans ce travail pratique, nous explorons une troisième méthode variante de la méthode directe d'interpolation d'une fonction par un polynôme. Nous cherchons à trouver un polynôme P de degré au maximum n tel que $P(x_i) = y_i$ pour i allant de 0 à n, en travaillant dans la base Lagrange $(L_0, L_1, ..., L_n)$.

2 Méthode

2.1 Construction du polynôme d'interpolation de Lagrange

Donc, nous avons construit le polynôme d'interpolation de Lagrange en 2 étapes :

Calculons les bases de Lagrange : Pour chaque point d'interpolation (x_k, y_k), nous calculons le polynôme de Lagrange correspondant $L_k(x)$. Le polynôme de Lagrange $L_k(x)$ est calculé à l'aide cette formule :

$$\text{La base de Lagrange en position } k : \ L_k(x) = \frac{\Pi(x-x_i)}{\Pi(x_k-x_i)}$$

Chaque $L_k(x)$ est un polynôme de degré n qui vaut 1 lorsque $x = x_k$ et 0 lorsque $x \neq x_k$.

Combinons les bases de Lagrange : Une fois que nous avons calculé tous les polynômes de Lagrange $L_k(x)$ correspondant à vos points d'interpolation, nous combinons ces polynômes pour former le polynôme d'interpolation final P(x). Cela se fait en additionnant simplement ces polynômes pondérés par les valeurs y_k associées à chaque point d'interpolation :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot L_k(x)$$

Ici, P(x) est votre polynôme d'interpolation final.

2.2 Coefficients du polynôme d'interpolation de Lagrange

Lorsque l'interpolation polynomiale est réalisée avec la méthode de Lagrange, le polynôme d'interpolation P(x) est conçu pour passer exactement par chaque point d'interpolation (x_i, y_i) où i varie de 0 à n. En conséquence, lorsque nous évaluons $P(x_i)$, tous les autres termes dans la formule d'interpolation de Lagrange deviennent nuls, sauf le terme correspondant à k, qui est égal à 1. Ainsi, a_k (le coefficient de la base Lagrange au point k) est égal à y_k car les autres termes deviennent nuls lors de l'évaluation. Cela garantit que le polynôme d'interpolation passe parfaitement par tous les points d'interpolation. Voici les formules:

Lorsque $i \neq k$, $L_i(x_i) = 0$, car $(x_i - x_i)/(x_k - x_i) = 0$ (tous les termes de cette somme sont nuls).

Lorsque $i = k$, $L_k(x_i) = 1$, car $(x_i - x_i)/(x_k - x_i) = 1$.

3 Résultats et Observations

Nous avons utilisé la fonction sinus et la fonction $f(x) = 1/(1 + 10 \cdot x^2)$. Pour une subdivision de l'intervalle $[-4, 4]$, en utilisant la fonction $f(x) = \sin(x)$: L'image de résultat en n= 5 points, avec l'écart maximum 0.442 :

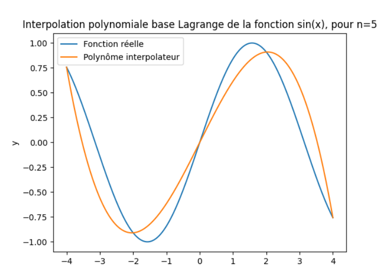

Figure 1: Interpolation de Lagrange de la fonction $f(x) = \sin(x)$, pour n=5

L'image de résultat en n= 8 points, avec l'écart maximum 0.012:

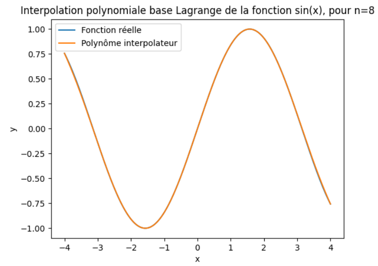

Figure 2: Interpolation de Lagrange de la fonction $f(x) = \sin(x)$, pour n=8

Nous avons remarqué que plus n est grands, plus on approche de la fonction réelle.
Pour une subdivision de l'intervalle $[-4, 4]$, en utilisant la fonction $f(x) = 1/(1 + 10 \cdot x^2)$:
L'image de résultat en n= 5 points, avec l'écart maximum 0.685:

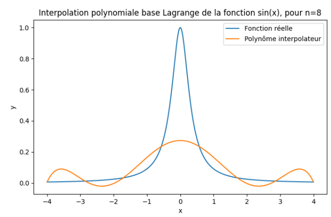

Figure 3: Interpolation de Lagrange de la fonction $f(x) = 1/(1 + 10 \cdot x^2)$, pour n=5

L'image de résultat en n= 8 points avec l'écart maximum 0.73:

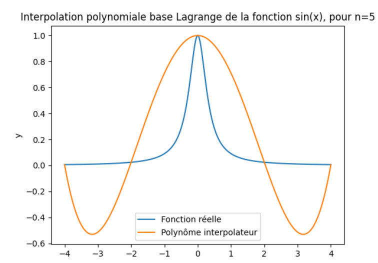

Figure 4: Interpolation de Lagrange de la fonction $f(x) = 1/(1 + 10 \cdot x^2)$, pour n=8

Ici, nous remarquons même si n est grands, il n'y a pas l'amélioration sur le polynôme interpolation. Ici, il s'agit du phénomène de runge

4 Conclusion

Ce TP nous a permis de comprendre et d'implémenter le processus d'interpolation polynomiale dans la base Lagrange. Nous avons appris à construire les algorithme qui permet de réaliser cette interpolation, évaluer le polynôme et mesurer l'erreur d'interpolation. Cette méthode est utile pour approximer des fonctions par des polynômes, ce qui trouve des applications dans de nombreux domaines, tels que l'analyse numérique et le traitement du signal. Pour tester notre code - Code