TP Interpolation Polynomiale et Base Canonique

XIA Qiaoqiao et AIT HAMID Adam

1 Introduction

Dans ce travail pratique, nous explorons une méthode directe d'interpolation d'une fonction par un polynôme. Nous cherchons à trouver un polynôme P de degré au maximum n tel que $P(x_i) = y_i$ pour i allant de 0 à n, en travaillant dans la base canonique $(1, x, ..., x^n)$.

2 Méthode

2.1 Construction du système linéaire

Nous avons récupéré d'abord n points de la fonction : $(x_0, ..., x_n)$. Nous avons construit la matrice de Vandermonde V associée à $(x_0, ..., x_n)$, la matrice colonne A associée aux coefficients inconnus $a_0, ..., a_n$, et la matrice colonne Y associée aux y_i. Nous avons formulé le système linéaire $VA = Y$ basé sur l'égalité $y_i = f(x_i)$ pour i allant de 0 à n.

2.2 Résolution du système

Nous avons résolu le système $VA = Y$ en utilisant la fonction `np.linalg.solve` de la bibliothèque NumPy, obtenant ainsi les coefficients du polynôme P.

2.3 Évaluation du polynôme et calcul de l'erreur

Nous avons créé une fonction `pol_interp` pour évaluer le polynôme P en un point x donné. En utilisant le polynôme obtenu et la fonction f, nous avons évalué P sur une grille X et calculé l'erreur maximale entre f et P sur cette grille.

2.4 Affichage graphique

Nous avons tracé sur un même graphique la fonction f ainsi que le polynôme interpolateur P. Nous avons également affiché l'erreur maximale entre f et P.

3 Résultats et Observations

Pour une subdivision de l'intervalle $[-4, 4]$ en n= 7 points, en utilisant la fonction $f(x) = \sin(x)$, nous avons obtenu une erreur maximale d'environ 0.0829 entre la fonction f et le polynôme interpolateur P.

L'image de résultat:

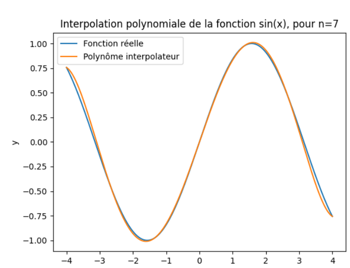

Figure 1: Interpolation polynomiale de la fonction sin(x), pour n=7

Pour n= 70 sur la même fonction, nous avons obtenu l'erreur maximale d'environ 2.7*10-8. On remarque que plus on prend le n grand, plus le polynôme approche de la fonction réelle.

L'image de résultat:

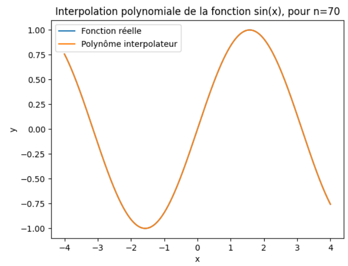

Figure 2: Interpolation polynomiale de la fonction sin(x), pour n=70

Cependant, il y a aussi le cas exception. Pour la fonction $f(x) = 1/(1 + 10 * x * *2)$, pour n = 29, l'erreur maximale est 60126 sur la même intervalle:

L'image de résultat:

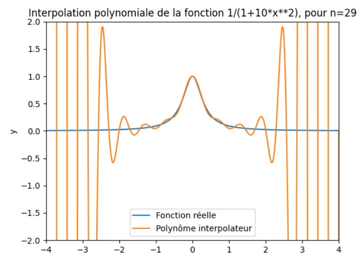

Figure 3: Interpolation polynomiale de la fonction 1/(1+10*x**2), pour n=29

Mais sur n = 70, l'erreur maximale est 451706. L'image de résultat:

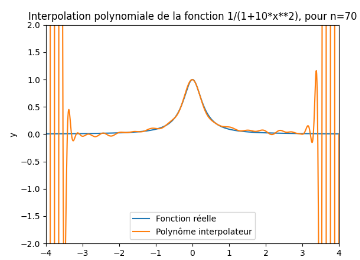

Figure 4: Interpolation polynomiale de la fonction 1/(1+10*x**2), pour n=70

Nous avons remarqué que pour ce type de fonction, même si n est grand, l'erreur est quand même grande. Ici, il s'agit le Phénomène de runge.

4 Conclusion

Ce TP nous a permis de comprendre et d'implémenter le processus d'interpolation polynomiale dans la base canonique. Nous avons appris à construire le système linéaire, résoudre le système pour obtenir les coefficients du polynôme interpolateur, évaluer le polynôme et mesurer l'erreur d'interpolation. Cette méthode est utile pour approximer des fonctions par des polynômes, ce qui trouve des applications dans de nombreux domaines, tels que l'analyse numérique et le traitement du signal. Pour tester notre code - Code