Solución practica 4 parte 2 Algoritmos y Estructuras de Datos

Aitor

1 de mayo de 2025

Ejercicio 1.

a) Precondición: $P_c \equiv \{res = 0 \wedge i = 0\}$ Postcondición: $Q_c \equiv \{res = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j] \wedge i = |s|\}$

b) Falla porque al terminarse de ejecutar el ciclo, $i = |s|$ y si en el invariante se sustituye $0 \leq i \leq |s|$ por $0 \leq i < |s|$ el invariante no se cumple en la postcondicion y luego no es un invariante valido. Osea falla el punto $I \wedge \neg B \implies Q_c$, ya que tendriamos $0 \leq i < |s|$ (por el invariante) y $i = |s|$ (por B) lo que nunca se puede cumplir.

c) Falla por que al final voy a estar accediendo a un elemento que no esta.

d) Falla $\{I \wedge B\}S\{I\}$ por que al terminar una iteracion res va a ser $res + s[i+1]$ envez de $res + s[i]$.

e) Demostración de corrección parcial:
$P_C \equiv \{res = 0 \wedge i = 0\}$
$Q_c \equiv \{res = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j] \wedge i = |s|\}$
$B \equiv \{i < |s|\}$
$I \equiv \{0 \leq i \leq |s| \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]\}$

1. $P_c \implies I$
   $\iff res = 0 \wedge i = 0 \implies 0 \leq i \leq |s| \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]\ \ i = 0 \implies 0 \leq 0 \leq |s| \checkmark$
2. $\{I \wedge B\}S\{I\}$
   Como es un ciclo, para ver que la tripla de Hoare es valida uso: $P \implies wp(S, Q)$
   $\{I \wedge B\} \implies wp(S, I)$
   - $wp(S, I) \equiv wp(res := res + s[i]; i := i + 1, 0 \leq i \leq |s| \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j])$
     $\equiv_{ax3} wp(res := res + s[i], wp(i := i + 1, 0 \leq i \leq |s| \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]))$
     $\equiv_{ax1} wp(res := res + s[i], def(i + 1) \wedge_L 0 \leq i + 1 \leq |s| \wedge res = \sum_{j=0}^{i} s[j])$
     $\equiv wp(res := res + s[i], 0 \leq i + 1 \leq |s| \wedge res = \sum_{j=0}^{i} s[j])$
     $\equiv_{ax1} def(res + s[i]) \wedge_L 0 \leq i + 1 \leq |s| \wedge res + s[i] = \sum_{j=0}^{i} s[j]$
     $\equiv wp(s[i]) \wedge_L -1 \leq i \leq |s| \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j] + s[i]$
     $\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L -1 \leq i \leq |s| \wedge res = \sum_{j=0}^{i} s[j]$
     $\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i} s[j]$
   - $\{I \wedge B\} \equiv 0 \leq i \leq |s| \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j] \wedge i < |s|$
     $\equiv 0 \leq i < |s| \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]$

   $\{I \wedge B\} \implies wp(S, I)$? sii $\checkmark$
3. $(I \wedge \neg B) \implies Q_c$
   - $\{I \wedge \neg B\} \equiv 0 \leq i \leq |s| \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j] \wedge i \geq |s|$
     $\equiv |s| \leq i \leq |s| \wedge res = \sum_{j=0}^{i} s[j]$
     $\equiv i = |s| \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]$
     $\equiv Q_c \checkmark$

Queda probado que el ciclo es parcialmente correcto.

f) Una posible funcion variante es $F_v = |s| - i$, para probar que el ciclo termina debo probar que:

1. $\{I \wedge B \wedge v_0 = fv\}S\{fv < v_0\}$
2. $I \wedge fv \leq 0 \implies \neg B$

Ejercicio 2.

a) Precondición: $P_c \equiv \{n \geq 0 \wedge i = 0 \wedge res = 0\}$
Postcondición: $Q_c \equiv \{res = \sum_{j=0}^{n-1}(IfThenElse(j\ mod\ 2 = 0,\ j,\ 0))\}$

b) Primero interpretemos que hace el ciclo, que es bacicamente el nombre, suma todos los numeros pares desde 0 hasta n. Esto lo hace empezando i en 0 e incrementando en 2 y sumando i todas las veces antes de incrementar. Uso:

- $P_c \equiv \{n \geq 0 \wedge i = 0 \wedge res = 0\}$
- $Q_c \equiv \{res = \sum_{j=0}^{n-1}(IfThenElse(j\ mod\ 2 = 0,\ j,\ 0))\}$
- $B \equiv \{i < n\}$
- $I \equiv \{0 \leq i \leq n+1 \wedge imod2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1}(IfThenElse(j\ mod\ 2 = 0,\ j,\ 0))\}$

Empecemos la demostración de la corrección parcial:

1. $P_c \implies I$
Si partimos de que $n \geq 0 \wedge i = 0 \wedge res = 0$ luego reemplazando en el invariante:
$0 \leq 0 \leq n+1 \wedge 0mod2 = 0 \wedge 0 = \sum_{j=0}^{0-1}(IfThenElse(j\ mod\ 2 = 0,\ j,\ 0))$
$\equiv 0 \leq 0 \leq n+1 \wedge 0 = 0 \wedge 0 = 0 \equiv$ true ✓
2. $\{I \wedge B\}S\{I\}$
Como es un ciclo, para ver que la tripla de Hoare es valida uso: $P \implies wp(S, Q)$
   - $wp(S, I)$
   $$\equiv wp(res := res + i; i := i + 2, 0 \leq i \leq n+1 \wedge imod2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1}(IfThenElse(j\ mod\ 2 = 0,\ j,\ 0)))$$
   $$\equiv_{ax3} wp(res := res + i, wp(i := i + 2, 0 \leq i \leq n+1 \wedge imod2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1}(IfThenElse(j\ mod\ 2 = 0,\ j,\ 0))))$$
     - $wp(i := i + 2, 0 \leq i \leq n+1 \wedge imod2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1}(IfThenElse(j\ mod\ 2 = 0,\ j,\ 0)))$
     $$\equiv_{ax1} def(i+2) \wedge_L 0 \leq i+2 \leq n+1 \wedge i+2\ mod\ 2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i+1}(IfThenElse(j\ mod\ 2 = 0,\ j,\ 0))$$
     $$\equiv 0 \leq i+2 \leq n+1 \wedge i\ mod\ 2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i+1}(IfThenElse(j\ mod\ 2 = 0,\ j,\ 0))$$
   $$\equiv_{ax1} def(res+i) \wedge_L 0 \leq i+2 \leq n+1 \wedge i\ mod\ 2 = 0 \wedge res + i = \sum_{j=0}^{i+1}(IfThenElse(j\ mod\ 2 = 0,\ j,\ 0))$$
   $$\equiv 0 \leq i+2 \leq n+1 \wedge i\ mod\ 2 = 0 \wedge res + i = \sum_{j=0}^{i+1}(IfThenElse(j\ mod\ 2 = 0,\ j,\ 0))$$
   $$\equiv_{ax1} 0 \leq i+2 \leq n+1 \wedge i\ mod\ 2 = 0 \wedge res + i = \sum_{j=0}^{i+1}(IfThenElse(j\ mod\ 2 = 0,\ j,\ 0))$$
   $$\equiv 0 \leq i+2 \leq n+1 \wedge i\ mod\ 2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i+1}(IfThenElse(j\ mod\ 2 = 0,\ j,\ 0)) - i$$
   $$\equiv_{ax1} 0 \leq i+2 \leq n+1 \wedge i\ mod\ 2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1}(IfThenElse(j\ mod\ 2 = 0,\ j,\ 0))$$
   Acá lo que hago es sacar al i de la suma (pq lo tenia que restar) entonces para hacer eso hago que la sumatoria vaya hasta el anterior a i (i - 1) y no tengo que agregar el i + 1 que saque porque como i es par, i + 1 es impar entonces la sumatoria no lo tenia en cuenta pro el if.
   - $\{I \wedge B\} \equiv 0 \leq i \leq n+1 \wedge imod2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1}(IfThenElse(j\ mod\ 2 = 0,\ j,\ 0)) \wedge i < n$
   $\equiv 0 \leq i < n \wedge imod2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1}(IfThenElse(j\ mod\ 2 = 0,\ j,\ 0))$
   Para dejarlo igual que la wp tenqgo que ver que si $0 \leq i$ entonces $0 \leq i+2$ y si $i < n$ entonces $i+2 < n+2$ y como $n+2 \geq n+1$ entonces $i+2 < n+1$ y por lo tanto $0 \leq i+2 \leq n+1$ ahora si lo tengo igual que la wp entonces vale. $\{I \wedge B\} \implies wp(S, I)$? sii ✓

3. $(I \wedge \neg B) \implies Q_c$

   - $\{I \wedge \neg B\} \equiv 0 \leq i \leq n+1 \wedge imod2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1}(IfThenElse(j\ mod\ 2 = 0,\ j,\ 0)) \wedge i \geq n$
     $\equiv n \leq i \leq n+1 \wedge imod2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1}(IfThenElse(j\ mod\ 2 = 0,\ j,\ 0))$
     $\equiv i = n+1 \wedge imod2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1}(IfThenElse(j\ mod\ 2 = 0,\ j,\ 0))$
     $\equiv Q_c$ ✓

c) La funcion variante tiene que decrecer y ser 0 cuadno se deje de ejecutar el ciclo (se cumple $\neg B$). La variable que cambia de valor es i (que aumenta de 2 en 2) y la variable que no cambia de valor es n. Luego podemos usar $f_v = n - i$ peeero, cuando se deje de cumplir B, f_v no va a ser 0 para que esto pase hacemos $f_v = n + 2 - i$ y ahora si ya la tenemos.
Para mostrar que el ciclo termina tengo que probar que:

1. $\{I \wedge B \wedge v_0 = fv\}S\{fv < v_0\}$ Tengo que probar que $I \wedge B \wedge v_0 = f \implies wp(S, f_v < v_0)$

   - $wp(S, f_v < v_0)$
     $\equiv wp(res := res + i; i := i + 2, n + 2 - i < v_0)$
     $\equiv_{ax3}\ wp(res := res + i, wp(i := i + 2, n + 2 - i < v_0))$
     $\equiv_{ax1}\ wp(res := res + i, n + 2 - (i + 2) < v_0)$
     $\equiv wp(res := res + i, n - i < v_0)$
     $\equiv_{ax1}\ def(res + i) \wedge_L n - i < v_0$
     $\equiv n - i < v_0$
   - $I \wedge B \wedge v_0 = fv$
     $\equiv \{0 \leq i \leq n+1 \wedge imod2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1}(IfThenElse(j\ mod\ 2 = 0,\ j,\ 0))\} \wedge i < n \wedge n + 2 - i = v_0$
     Quiero probar la implicacion entonces res no me importa:
     $0 \leq i \leq n+1 \wedge imod2 = 0 \wedge i < n \wedge n + 2 - i = v_0$
     $\equiv 0 \leq i < n \wedge imod2 = 0 \wedge n + 2 - i = v_0$

   Ahora quiero ver que: $0 \leq i < n \wedge imod2 = 0 \wedge n + 2 - i = v_0 \implies n - i < v_0$
   Que en realidad lo que quiero ver es: $n + 2 - i = v_0 \implies n - i < n + 2 - i$
   $\equiv n - i < n + 2 - i$ Que es trivialmente cierto ✓

2. $I \wedge fv \leq 0 \implies \neg B$

   - $I \wedge fv \leq 0$
     $\equiv 0 \leq i \leq n+1 \wedge imod2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1}(IfThenElse(j\ mod\ 2 = 0,\ j,\ 0)) \wedge n + 1 - i \leq 0$
     Queiro ver que esto implica $\neg B \equiv i \geq n$
     Se que $0 \leq i \leq n+1 \wedge n + 1 - i \leq 0$
     $\equiv n + 1 \leq i \leq n + 1 \equiv n + 1 = i$
     Y como $n + 1 \geq n$ Se cumple ✓