Solución practica 4 Algoritmos y Estructuras de Datos

Aitor

23 de abril de 2025

Ejercicio 1. Ya que a y b son reales y i es entero, podemos decir que $\text{def}(a) \equiv \text{def}(b) \equiv \text{def}(i) \equiv \text{True}$. Teniendo esto en cuenta:

a) $\text{def}(a+b) \equiv \text{def}(a) \wedge \text{def}(1) \equiv \text{def}(a) \wedge \text{True} \equiv \text{def}(a) \equiv \text{True}$.

b) $\text{def}(a/b) \equiv \text{def}(a) \wedge \text{def}(b) \wedge (b \neq 0) \equiv \text{True} \wedge \text{True} \wedge (b \neq 0) \equiv (b \neq 0)$.

c) $\text{def}(\sqrt{a/b}) \equiv \text{def}(a) \wedge \text{def}(b) \wedge (b \neq 0) \wedge ((a \geq 0 \wedge b > 0) \vee (a \leq 0 \wedge b < 0)) \equiv \text{True} \wedge \text{True} \wedge (b \neq 0) \wedge ((a \geq 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0))$.

Recuerdo los axiomas vistos en clase:

1. Axioma 1: $wp(x := E, Q) \equiv def(E) \wedge_L Q^x_E$ es decir la wp(S,Q) donde S es equivalente a la conjuncion entre E(lo que se esta asignando) y reemplazar en Q, x por E.
2. Axioma 2: $wp(skip, Q) \equiv Q$
3. Axioma 3: $wp(S1; S2, Q) \equiv wp(S1, wp(S2, Q))$
4. Axioma 4: Si S = if B then S1 else S2 endif entonces $wp(S,Q) \equiv def(B) \wedge_L \ ((B \wedge wp(S1,Q)) \vee (\neg B \wedge wp(S2,Q)))$

Ejercicio 2.

a) $wp(a := a+1; b := a/2, b \geq 0)$
Solución: por axioma 3: $wp(a := a+1; b := a/2, b \geq 0) = wp(a := a+1, wp(b := a/2, b \geq 0))$
por axioma 1: $wp(b := a/2, b \geq 0) \equiv \text{def}(a/2) \wedge_L Q^b_{a/2}$ (con $Q = b \geq 0$)
y def(a/2) $\equiv def(a) \wedge def(2) \equiv \text{true} \wedge \text{true} \equiv \text{true}$
y $Q^b_{a/2} \equiv a/2 \geq 0 \iff a \geq 0$ luego $\text{def}(a/2) \wedge_L Q^b_{a/2} \equiv \text{true} \wedge a \geq 0 \equiv a \geq 0$
luego tenemos que $wp(b := a/2, b \geq 0) \equiv a \geq 0$
ahora sustituyendo en la ecuacion anterior tenemos que $wp(a := a+1, wp(b := a/2, b \geq 0)) \equiv wp(a := a+1, a \geq 0)$
por axioma 1: $wp(a := a+1, a \geq 0) \equiv def(a+1) \wedge_L Q^a_{a+1} \equiv \text{true} \wedge_L a+1 \geq 0 \equiv a+1 \geq 0 \equiv a \geq -1$
Conclusión $wp(a := a+1; b := a/2, b \geq 0) \equiv a \geq -1$

b) $wp(a := A[i]+1; b := a*a, b \neq 2)$.
Solución: por axioma 3: $wp(a := A[i]+1; b := a*a, b \neq 2) \equiv wp(a := A[i]+1, wp(b := a*a, b \neq 2))$
por axioma 1: $wp(b := a*a, b \neq 2) \equiv def(a*a) \wedge_L Q^b_{a*a}$ (con $Q = b \neq 2$)
y def(a*a) $\equiv def(a) \wedge def(a) \equiv \text{true} \wedge \text{true} \equiv \text{true}$
y $Q^b_{a*a} \equiv a*a \neq 2 \equiv a \neq \sqrt{2}$ luego $def(a*a) \wedge_L Q^b_{a*a} \equiv \text{true} \wedge a \neq \sqrt{2} \equiv a \neq \sqrt{2}$
luego tenemos que $wp(b := a*a, b \neq 2) \equiv a \neq \sqrt{2}$
ahora sustituyendo en la ecuacion anterior tenemos que $wp(a := A[i]+1, wp(b := a*a, b \neq 2)) \equiv wp(a := A[i]+1, a \neq \sqrt{2})$
por axioma 1: $wp(a := A[i]+1, a \neq \sqrt{2}) \equiv def(A[i]+1) \wedge_L Q^a_{A[i]+1} \equiv def(A[i]) \wedge_L Q^a_{A[i]+1} \equiv$
$(def(A) \wedge def(i) \wedge_L 0 \leq i < |A|) \wedge_L A[i]+1 \neq \sqrt{2} \equiv (0 \leq i < |A|) \wedge_L A[i] \neq \sqrt{2}-1$
Conclusión $wp(a := A[i]+1; b := a*a, b \neq 2) \equiv (0 \leq i < |A|) \wedge_L A[i] \neq \sqrt{2}-1$

c) $wp(a := A[i]+1; a := b*b, a \geq 0)$.
Solución: por axioma 3: $wp(a := A[i]+1; a := b*b, a \geq 0) \equiv wp(a := A[i]+1, wp(a := b*b, a \geq 0))$
por axioma 1: $wp(a := b*b, a \geq 0) \equiv def(b*b) \wedge_L Q^a_{b*b}$ (con $Q = a \geq 0$)
y def(b*b) $\equiv def(b) \wedge def(b) \equiv \text{true} \wedge \text{true} \equiv \text{true}$

y $Q^a_{b*b} \equiv b*b \geq 0 \equiv True$ (ya que un numero multiplicado por si mismo siempre es mayor o igual a 0)
luego $def(b*b) \wedge_L Q^a_{b*b} \equiv \text{true} \wedge \text{true} \equiv \text{true}$
luego tenemos que $wp(a := b*b, a \geq 0) \equiv \text{true}$
ahora sustituyendo en la ecuacion anterior tenemos que $wp(a := A[i]+1, wp(a := b*b, a \geq 0)) \equiv wp(a := A[i]+1, \text{true})$
???? como hago con ese true

d) $wp(a := a-b; b := a+b, a \geq 0 \wedge b \geq 0)$.
Solución: por axioma 3: $wp(a := a-b; b := a+b, a \geq 0 \wedge b \geq 0) \equiv wp(a := a-b, wp(b := a+b, a \geq 0 \wedge b \geq 0))$
por axioma 1: $wp(b := a+b, a \geq 0 \wedge b \geq 0) \equiv def(a+b) \wedge_L Q^b_{a+b}$ (con $Q = a \geq 0 \wedge b \geq 0$) ??? como hago si tengo a y b, reemplazo a o reemplazo b?

Ejercicio 4. Para los siguientes pares de programas S y postcondiciones Q

- Escribir la precondición más débil P = wp(S, Q)
- Mostrar formalmente que la P elegida es correcta.

Hay que usar el axioma 4: Si S = if B then S1 else S2 endif entonces $wp(S,Q) \equiv def(B) \wedge_L ((B \wedge wp(S1,Q)) \vee (\neg B \wedge wp(S2,Q)))$
Solución:

a) $B = a < 0$, $S1 = b := a$, $S2 = b := -a$, $Q \equiv (b = -|a|)$
por axioma 4: $wp(S,Q) \equiv def(a<0) \wedge_L ((a < 0 \wedge wp(b := a, b = -|a|)) \vee (\neg(a<0) \wedge wp(b := -a, b = -|a|)))$
$wp(b := a, b = -|a|) \equiv def(a) \wedge_L Q^b_a \equiv \text{true} \wedge_L a = -|a| \equiv a = -|a|$ es decir a es negativo
$wp(b := -a, b = -|a|) \equiv def(-a) \wedge_L Q^b_{-a} \equiv \text{true} \wedge_L -a = -|a| \equiv -a = -|a| \equiv a = |a|$ es decir a es positivo
luego tenemos que $wp(S,Q) \equiv def(a<0) \wedge_L ((a < 0 \wedge a = -|a|) \vee (\neg(a<0) \wedge a = |a|)) \equiv$
$\text{true} \wedge_L ((a < 0 \wedge a = -|a|) \vee (\neg(a<0) \wedge a = |a|)) \equiv ((a < 0 \wedge a = -|a|) \vee (\neg(a<0) \wedge a = |a|))$
analicemos las dos partes de la disyuncion:

1) $a < 0 \wedge a = -|a|$
$a = -|a|$ esta diciendo que a es negativo, es decir $a < 0$ pero el 0 lo cumple luego $a \leq 0$ reformulando tenemos que: $a < 0 \wedge a = -|a| \equiv a < 0 \wedge a \leq 0$ pero basta con decir $a < 0$ ya que si a = 0, a ¡0 es falsa luego con chequear a ¡0 estamos viendo todas las opciones
2) $\neg(a<0) \wedge a = |a|$
igual que en el item anterior $\neg(a<0)$ esta diciendo $a \geq 0$ y $a = |a|$ dice a es positivo o cero, luego tenemos que $\neg(a<0) \wedge a = |a| \equiv a \geq 0 \wedge a \geq 0 \equiv a \geq 0$

entonces $((a < 0 \wedge a = -|a|) \vee (\neg(a<0) \wedge a = |a|)) \equiv a < 0 \vee a \geq 0$ que se cumple siempre entonces es $\equiv$ true
recapitulando tenemos que: $wp(S,Q) \equiv def(a<0) \wedge_L ((a < 0 \wedge wp(b := a, b = -|a|)) \vee (\neg(a<0) \wedge wp(b := -a, b = -|a|))) \equiv$ $\text{true} \wedge_L \text{true} \equiv \text{true}$

b) $B = i > 0$, $S1 = s[i] := 0$, $S2 = s[0] = 0$, $Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z})\ (0 \leq j < |s| \wedge_L s[j] \geq 0)$