Solución practica 4 Algoritmos y Estructuras de Datos

Aitor

27 de abril de 2025

Ejercicio 1. Ya que a y b son reales y i es entero, podemos decir que $\text{def}(a) \equiv \text{def}(b) \equiv \text{def}(i) \equiv \text{True}$. Teniendo esto en cuenta:

a) $\text{def}(a+b) \equiv \text{def}(a) \wedge \text{def}(1) \equiv \text{def}(a) \wedge \text{True} \equiv \text{def}(a) \equiv \text{True}$.

b) $\text{def}(a/b) \equiv \text{def}(a) \wedge \text{def}(b) \wedge (b \neq 0) \equiv \text{True} \wedge \text{True} \wedge (b \neq 0) \equiv (b \neq 0)$.

c) $\text{def}(\sqrt{a/b}) \equiv \text{def}(a) \wedge \text{def}(b) \wedge (b \neq 0) \wedge ((a \geq 0 \wedge b > 0) \vee (a \leq 0 \wedge b < 0)) \equiv \text{True} \wedge \text{True} \wedge (b \neq 0) \wedge ((a \geq 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0))$.

Recuerdo los axiomas vistos en clase:

1. Axioma 1: $wp(x := E, Q) \equiv def(E) \wedge_L Q^x_E$ es decir la wp(S,Q) donde S es equivalente a la conjuncion entre E(lo que se esta asignando) y reemplazar en Q, x por E.
2. Axioma 2: $wp(skip, Q) \equiv Q$
3. Axioma 3: $wp(S1; S2, Q) \equiv wp(S1, wp(S2, Q))$
4. Axioma 4: Si S = if B then S1 else S2 endif entonces $wp(S, Q) \equiv def(B) \wedge_L \ ((B \wedge wp(S1, Q)) \vee (\neg B \wedge wp(S2, Q)))$

Ejercicio 2.

a) $wp(a := a+1; b := a/2, b \geq 0)$
Solución: por axioma 3: $wp(a := a+1; b := a/2, b \geq 0) = wp(a := a+1, wp(b := a/2, b \geq 0))$
por axioma 1: $wp(b := a/2, b \geq 0) \equiv \text{def}(a/2) \wedge_L Q^b_{a/2}$ (con $Q = b \geq 0$)
y def(a/2) $\equiv def(a) \wedge def(2) \equiv \text{true} \wedge \text{true} \equiv \text{true}$
y $Q^b_{a/2} \equiv a/2 \geq 0 \iff a \geq 0$ luego $\text{def}(a/2) \wedge_L Q^b_{a/2} \equiv \text{true} \wedge a \geq 0 \equiv a \geq 0$
luego tenemos que $wp(b := a/2, b \geq 0) \equiv a \geq 0$
ahora sustituyendo en la ecuacion anterior tenemos que $wp(a := a+1, wp(b := a/2, b \geq 0)) \equiv wp(a := a+1, a \geq 0)$
por axioma 1: $wp(a := a+1, a \geq 0) \equiv def(a+1) \wedge_L Q^a_{a+1} \equiv \text{true} \wedge_L a+1 \geq 0 \equiv a+1 \geq 0 \equiv a \geq -1$
Conclusión $wp(a := a+1; b := a/2, b \geq 0) \equiv a \geq -1$

b) $wp(a := A[i]+1; b := a*a, b \neq 2)$.
Solución: por axioma 3: $wp(a := A[i]+1; b := a*a, b \neq 2) \equiv wp(a := A[i]+1, wp(b := a*a, b \neq 2))$
por axioma 1: $wp(b := a*a, b \neq 2) \equiv def(a*a) \wedge_L Q^b_{a*a}$ (con $Q = b \neq 2$)
y def(a*a) $\equiv def(a) \wedge def(a) \equiv \text{true} \wedge \text{true} \equiv \text{true}$
y $Q^b_{a*a} \equiv a*a \neq 2 \equiv a \neq \sqrt{2}$ luego $def(a*a) \wedge_L Q^b_{a*a} \equiv \text{true} \wedge a \neq \sqrt{2} \equiv a \neq \sqrt{2}$
luego tenemos que $wp(b := a*a, b \neq 2) \equiv a \neq \sqrt{2}$
ahora sustituyendo en la ecuacion anterior tenemos que $wp(a := A[i]+1, wp(b := a*a, b \neq 2)) \equiv wp(a := A[i]+1, a \neq \sqrt{2})$
por axioma 1: $wp(a := A[i]+1, a \neq \sqrt{2}) \equiv def(A[i]+1) \wedge_L Q^a_{A[i]+1} \equiv def(A[i]) \wedge_L Q^a_{A[i]+1} \equiv$
$(def(A) \wedge def(i) \wedge_L 0 \leq i < |A|) \wedge_L A[i]+1 \neq \sqrt{2} \equiv (0 \leq i < |A|) \wedge_L A[i] \neq \sqrt{2}-1$
Conclusión $wp(a := A[i]+1; b := a*a, b \neq 2) \equiv (0 \leq i < |A|) \wedge_L A[i] \neq \sqrt{2}-1$

c) $wp(a := A[i]+1; a := b*b, a \geq 0)$.
Solución: por axioma 3: $wp(a := A[i]+1; a := b*b, a \geq 0) \equiv wp(a := A[i]+1, wp(a := b*b, a \geq 0))$
por axioma 1: $wp(a := b*b, a \geq 0) \equiv def(b*b) \wedge_L Q^a_{b*b}$ (con $Q = a \geq 0$)
y def(b*b) $\equiv def(b) \wedge def(b) \equiv \text{true} \wedge \text{true} \equiv \text{true}$

y $Q^a_{b*b} \equiv b*b \geq 0 \equiv True$ (ya que un numero multiplicado por si mismo siempre es mayor o igual a 0)
luego $def(b*b) \wedge_L Q^a_{b*b} \equiv$ true $\wedge$ true $\equiv$ true
luego tenemos que $wp(a := b*b, a \geq 0) \equiv$ true
ahora sustituyendo en la ecuacion anterior tenemos que $wp(a := A[i]+1, wp(a := b*b, a \geq 0)) \equiv wp(a := A[i]+1, \text{true})$
???? como hago con ese true

d) $wp(a := a-b; b := a+b, a \geq 0 \wedge b \geq 0)$.
Solución: por axioma 3: $wp(a := a-b; b := a+b, a \geq 0 \wedge b \geq 0) \equiv wp(a := a-b, wp(b := a+b, a \geq 0 \wedge b \geq 0))$
por axioma 1: $wp(b := a+b, a \geq 0 \wedge b \geq 0) \equiv def(a+b) \wedge_L Q^b_{a+b}$ (con $Q = a \geq 0 \wedge b \geq 0$) ??? como hago si tengo a y b, reemplazo a o reemplazo b?

Ejercicio 4. Para los siguientes pares de programas S y postcondiciones Q

- Escribir la precondición más débil P = wp(S, Q)
- Mostrar formalmente que la P elegida es correcta.

Hay que usar el axioma 4: Si S = if B then S1 else S2 endif entonces $wp(S,Q) \equiv def(B) \wedge_L ((B \wedge wp(S1,Q)) \vee (\neg B \wedge wp(S2,Q)))$
Solución:

a) $B = a < 0$, $S1 = b := a$, $S2 = b := -a$, $Q \equiv (b = -|a|)$
por axioma 4: $wp(S,Q) \equiv def(a<0) \wedge_L ((a < 0 \wedge wp(b := a, b = -|a|)) \vee (\neg(a<0) \wedge wp(b := -a, b = -|a|)))$
$wp(b := a, b = -|a|) \equiv def(a) \wedge_L Q^b_a \equiv$ true $\wedge_L a = -|a| \equiv a = -|a|$ es decir a es negativo
$wp(b := -a, b = -|a|) \equiv def(-a) \wedge_L Q^b_{-a} \equiv$ true $\wedge_L -a = -|a| \equiv -a = -|a| \equiv a = |a|$ es decir a es positivo
luego tenemos que $wp(S,Q) \equiv def(a<0) \wedge_L ((a < 0 \wedge a = -|a|) \vee (\neg(a<0) \wedge a = |a|)) \equiv$
true $\wedge_L ((a < 0 \wedge a = -|a|) \vee (\neg(a<0) \wedge a = |a|)) \equiv ((a < 0 \wedge a = -|a|) \vee (\neg(a<0) \wedge a = |a|))$
analicemos las dos partes de la disyuncion:

1) $a < 0 \wedge a = -|a|$
$a = -|a|$ esta diciendo que a es negativo, es decir $a < 0$ pero el 0 lo cumple luego $a \leq 0$ reformulando tenemos que: $a < 0 \wedge a = -|a| \equiv a < 0 \wedge a \leq 0$ pero basta con decir $a < 0$ ya que si a = 0, a ¡0 es falsa luego con chequear a ¡0 estamos viendo todas las opciones
2) $\neg(a < 0) \wedge a = |a|$
igual que en el item anterior $\neg(a < 0)$ esta diciendo $a \geq 0$ y $a = |a|$ dice a es positivo o cero, luego tenemos que $\neg(a<0) \wedge a = |a| \equiv a \geq 0 \wedge a \geq 0 \equiv a \geq 0$

entonces $((a < 0 \wedge a = -|a|) \vee (\neg(a<0) \wedge a = |a|)) \equiv a < 0 \vee a \geq 0$ que se cumple siempre entonces es $\equiv$ true
recapitulando tenemos que: $wp(S,Q) \equiv def(a<0) \wedge_L ((a < 0 \wedge wp(b := a, b = -|a|)) \vee (\neg(a<0) \wedge wp(b := -a, b = -|a|))) \equiv$ true $\wedge_L$ true $\equiv$ true

b) $B = a < 0$, $S1 = b := a$, $S2 = b := -a$, $Q \equiv (b = |a|)$
por axioma 4: $wp(S,Q) \equiv def(a<0) \wedge_L ((a < 0 \wedge wp(b := a, b = |a|)) \vee (\neg(a<0) \wedge wp(b := -a, b = |a|)))$
por axioma 1: $wp(b := a, b = |a|) \equiv def(a) \wedge_L Q^b_a \equiv$ true $\wedge_L a = |a| \equiv a = |a| \equiv a \geq 0$
igualmente con s2, por axioma 1: $wp(b := -a, b = |a|) \equiv def(-a) \wedge_L Q^b_{-a} \equiv$ true $\wedge_L -a = |a| \equiv -a = |a| \equiv a \leq 0$
uniendo todo tenemos que: $wp(S,Q) \equiv def(a<0) \wedge_L ((a < 0 \wedge a \geq 0) \vee (\neg(a<0) \wedge a \leq 0))$
y pasa lo contrario que en el item a, ahora tenemos que $(a < 0 \wedge a \geq 0)$ que nunca se cumple y $(\neg(a<0) \wedge a \leq 0)$ que tampoco se cumple.
luego tenemos que $wp(S,Q) \equiv def(a<0) \wedge_L ((a < 0 \wedge a \geq 0) \vee (\neg(a<0) \wedge a \leq 0)) \equiv def(a<0) \wedge_L$ false
$\equiv$ true $\wedge_L$ false $\equiv$ false

c) $B = i > 0$, $S1 = s[i] := 0$, $S2 = s[0] = 0$, $Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z})\ (0 \leq j < |s| \wedge_L s[j] \geq 0)$

Ejercicio 5. Para las siguientes especificaciones:

- Poner nombre al problema que resuelven
- Escribir un programa S sencillo en SmallLang, sin ciclos, que lo resuelva
- Dar la precondición más débil del programa escrito con respecto a la postcondición de su especificación

Solución:

a)

```
func agregarI–esismo(s <int>, i int, a int) int {
    a := a + s[i];
    return a
}
```

b)

```
func positivosHastaI(s <int>, i int) bool {
    return s[i] >= 0
}
```

Ejercicio 6. Dada la poscondición $Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z})\ (0 \leq j < |s| \wedge_L s[j] mod 2 = 0)$ y el siguiente código:

```
if (i mod 3 = 0)
    s[i] := s[i] + 6;
else
    s[i] := i;
endif
```

a) Demostrar que las siguientes WPs son incorrectas dando un contraejemplo:

Ejercicio 7. Dado el siguiente condicional determinar la precondición más débil que permite hacer valer la poscondición (Q) propuesta. Se pide:

- Describir en palabras la WP esperada
- Derivarla formalmente a partir de los axiomas de precondición más débil. Para obtener el puntaje máximo deberá simplificarla lo más posible.

a)$Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z})\ (0 \leq j < |s| \wedge_L s[j] > 0)$

```
if s[i] < 0 then
    s[i] :=-s[i]
else
    s[i] := 0;
end
```

Axioma 1: $wp(x := E, Q) \equiv def(E) \wedge_L Q^x_E$ es decir la wp(S,Q) donde S es equivalente a la conjuncion entre E(lo que se esta asignando) y reemplazar en Q, x por E.
Solución: Traduciendo un poco Q dice que todos los elementos del arreglo son mayores a 0, es decir $s[j] > 0$ para todo j. Luego la wp seria:

- i esta en rango asi S no se indefine
- el i-ésimo valor deveria ser negativo, asi queda un numero mayor a 0 ya que si el numero es 0 o positivo, queda un 0 que no cumle Q

Ahora formalmente:
Hay que usar el axioma 4: Si S = if B then S1 else S2 endif entonces $wp(S, Q) \equiv def(B) \wedge_L ((B \wedge wp(S1, Q)) \vee (\neg B \wedge wp(S2, Q)))$

- $B = s[i] < 0$
- $S1 = s[i] := -s[i]$
- $s2 = s[i] := 0$
- $Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z})\ (0 \leq j < |s| \wedge_L s[j] > 0)$
- $wp(S1, Q) \equiv wp(s[i] := -s[i], Q) \equiv wp(s := setAt(s, i, -s[i]), Q)$
- $wp(S2, Q) \equiv wp(s[i] := 0, Q) \equiv wp(s := setAt(s, i, 0), Q)$

Ahora tenemos que por axioma 4:

$wp(S,Q) \equiv def(B) \wedge_L ((B \wedge wp(S1,Q)) \vee (\neg B \wedge wp(S2,Q)))$

$\equiv def(s[i] < 0) \wedge_L ((s[i] < 0 \wedge wp(s := setAt(s,i,-s[i]),Q)) \vee (\neg(s[i] < 0) \wedge wp(s := setAt(s,i,0),Q)))$

$\equiv def(s) \wedge def(i) \wedge 0 \leq i < |s| \wedge_L$
$((s[i] < 0 \wedge wp(s := setAt(s,i,-s[i]),Q)) \vee (\neg(s[i] < 0) \wedge wp(s := setAt(s,i,0),Q)))$

$\equiv_{ax1} (def(s) \wedge def(i)) \wedge 0 \leq i < |s| \wedge_L$
$((s[i] < 0 \wedge def(setAt(s,i,-s[i])) \wedge_L Q^s_{setAt(s,i,-s[i])}) \vee$
$(\neg(s[i] < 0) \wedge def(setAt(s,i,0)) \wedge_L Q^s_{setAt(s,i,0)}))$

$\equiv (True \wedge True) 0 \leq i < |s| \wedge_L$
$((s[i] < 0 \wedge_L def(s) \wedge def(i) \wedge 0 \leq i < |s| \wedge_L Q^s_{setAt(s,i,-s[i])}) \vee$
$(\neg(s[i] < 0) \wedge def(s) \wedge def(i) \wedge 0 \leq i < |s| \wedge_L Q^s_{setAt(s,i,0)}))$

$\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L$
$((s[i] < 0 \wedge_L Q^s_{setAt(s,i,-s[i])}) \vee$
$(\neg(s[i] < 0) \wedge_L Q^s_{setAt(s,i,0)}))$

$\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L$
$((s[i] < 0 \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z})\ (0 \leq j < |s| \longrightarrow_L setAt(s,i,-s[i])[j] > 0)) \vee$
$(\neg(s[i] < 0) \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z})\ (0 \leq j < |s| \longrightarrow_L setAt(s,i,0)[j] > 0)))$

$\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L$
$((s[i] < 0 \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z})\ (0 \leq j < |s| \wedge j \neq i \longrightarrow_L s[j] > 0)) \wedge setAt(s,i,-s[i])[i] > 0 \vee$
$(\neg(s[i] < 0) \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z})\ (0 \leq j < |s| \wedge j \neq i \longrightarrow_L s[j] > 0))) \wedge setAt(s,i,0)[i] > 0$

$\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L$
$((s[i] < 0 \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z})\ (0 \leq j < |s| \wedge j \neq i \longrightarrow_L s[j] > 0)) \wedge -s[i] > 0 \vee$
$(\neg(s[i] < 0) \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z})\ (0 \leq j < |s| \wedge j \neq i \longrightarrow_L s[j] > 0))) \wedge 0 > 0$

$\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L$
$((s[i] < 0 \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z})\ (0 \leq j < |s| \wedge j \neq i \longrightarrow_L s[j] > 0)) \wedge True \vee$
$(\neg(s[i] < 0) \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z})\ (0 \leq j < |s| \wedge j \neq i \longrightarrow_L s[j] > 0))) \wedge False$

$\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L$
$((s[i] < 0 \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z})\ (0 \leq j < |s| \wedge j \neq i \longrightarrow_L s[j] > 0)))$
$\square$

b) por axioma 4: $wp(S,Q) \equiv def(B) \wedge_L ((B \wedge wp(S1,Q)) \vee (\neg B \wedge wp(S2,Q)))$

- $Q \equiv (\exists j : \mathbb{Z})\ (j \geq 0 \wedge j^2 = a)$ es decir existe un j tal que j es mayor o igual a 0 y j al cuadrado es igual a a
- $B \equiv amod2 = 0$ es decir a es par
- $S1 \equiv a := a * a$ es decir se reemplaza a por a^2
- $S2 \equiv a := -|a|$ es decir si a es negativo queda igual y si a es positivo se reemplaza por $-a$

$wp(S1,Q) \equiv wp(a := a * a, Q) \equiv_{ax(1)} def(a * a) \wedge_L Q^a_{a*a}$
$\equiv def(a) \wedge_L (\exists j : \mathbb{Z})\ (j \geq 0 \wedge j^2 = a * a)$
$\equiv$ true $\wedge_L (\exists j : \mathbb{Z})\ (j \geq 0 \wedge j^2 = a * a)$
$\equiv (\exists j : \mathbb{Z})\ (j \geq 0 \wedge j^2 = a * a)$
esto es True por que si $j = a$ entonces $j^2 = a^2$

$wp(S2,Q) \equiv wp(a := -|a|, Q) \equiv_{ax(1)} def(-|a|) \wedge_L Q^a_{-|a|}$
$\equiv def(a) \wedge_L (\exists j : \mathbb{Z})\ (j \geq 0 \wedge j^2 = -|a|)$
$\equiv$ true $\wedge_L (\exists j : \mathbb{Z})\ (j \geq 0 \wedge j^2 = -|a|)$
esto es False por que no existe un j tal que $j^2 = -|a|$ ya que el cuadrado de un numero es positivo y -—a— es negativo

juntando todo tenemos que: $wp(S,Q) \equiv def(a) \wedge_L ((amod2 = 0 \wedge wp(a := a * a, Q)) \vee (\neg(amod2 = 0) \wedge wp(a := -|a|, Q)))$
$\equiv True \wedge_L ((amod2 = 0 \wedge True) \vee (\neg(amod2 = 0) \wedge False))$ (sigue)

$\equiv ((amod2 = 0 \wedge True) \vee False)$
$\equiv amod2 = 0 \wedge True$
$\equiv amod2 = 0$