

# Practica 3 Algoritmos y Estructuras de Datos

Aitor

14 de abril de 2025

**Ejercicio 1.** Especificar en forma completa el TAD NumeroRacional que incluya las operaciones aritméticas básicas (suma, resta, división, multiplicación) y una operación igual que dados dos números racionales devuelva verdadero si son iguales.  
**Solución:**

```
TAD NumeroRacional {
  obs numerador:  $\mathbb{Z}$  obs denominador:  $\mathbb{Z}$ 

  proc nuevoNumeroRacional (in n: $\mathbb{Z}$ , in d: $\mathbb{Z}$ ) : numeroRacional
    requiere  $\{d \neq 0\}$ 
    asegura  $\{res.numerador = n \wedge res.denominador = d\}$ 

  proc suma (inout a: numeroRacional, in b: numeroRacional)
    requiere  $\{a = a0\}$ 
    asegura  $\{a.numerador = a0.numerador * b.denominador + b.numerador * a0.denominador \wedge$ 
       $a.denominador = a0.denominador * b.denominador\}$ 

  proc resta (inout a: numeroRacional, in b: numeroRacional)
    requiere  $\{a = a0\}$ 
    asegura  $\{a.numerador = a0.numerador * b.denominador - b.numerador * a0.denominador \wedge$ 
       $a.denominador = a0.denominador * b.denominador\}$ 

  proc multiplicación (inout a: numeroRacional, in b: numeroRacional)
    requiere  $\{a = a0\}$ 
    asegura  $\{a.numerador = a0.numerador * b.numerador \wedge a.denominador = a0.denominador * b.denominador\}$ 

  proc división (inout a: numeroRacional, in b: numeroRacional)
    requiere  $\{a = a0\}$ 
    requiere  $\{b.numerador \neq 0\}$ 
    asegura  $\{a.numerador = a0.numerador * b.denominador \wedge a.denominador = a0.denominador * b.numerador\}$ 
}
```

**Ejercicio 2.** Especifique mediante TADs los siguientes elementos geométricos:

- a) Punto2D, que representa un punto en el plano. Debe contener las siguientes operaciones:
- a) nuevoPunto: que crea un punto a partir de sus coordenadas x e y.
  - b) mover : que mueve el punto una determinada distancia sobre los ejes x e y.
  - c) distancia: que devuelve la distancia entre dos puntos.
  - d) distanciaAlOrigen: que devuelve la distancia del punto (0, 0).

**Solución:**

```
TAD Punto2D {
  obs x:  $\mathbb{R}$ 
  obs y:  $\mathbb{R}$ 

  proc nuevoPunto (in x: $\mathbb{R}$ , in y: $\mathbb{R}$ ) : punto2D
    requiere  $\{True\}$ 
    asegura  $\{res.x = x \wedge res.y = y\}$ 
}
```

```

proc mover (inout p: punto2D, in dx:R, in dy:R)
    requiere {p = p0}
    asegura {p.x = p0.x + dx ∧ p.y = p0.y + dy}

aux distanciaEntrePuntos (in p1: punto2D, in p2: punto2D) : R =  $\sqrt{(p1.x - p2.x)^2 + (p1.y - p2.y)^2}$ ;

proc distancia (in p1: punto2D, in p2: punto2D) : R
    requiere {p1 = p0}
    asegura {res = distanciaEntrePuntos(p0, p2)}

proc distanciaAlOrigen (in p: punto2D) : R
    requiere {p = p0}
    asegura {res = distanciaEntrePuntos(p0, nuevoPunto(0, 0))}

}

```

b) Rectángulo2D, que representa un rectángulo en el plano. Debe contener las siguientes operaciones:

- a) nuevoRectángulo: que crea un rectángulo (decida usted cuáles deberían ser los parámetros).
- b) mover : que mueve el rectángulo una determinada distancia en los ejes x e y.
- c) escalar : que escala el rectángulo en un determinado factor. Al escalar un rectángulo un punto del mismo debe quedar fijo. En este caso el punto fijo puede ser el centro del rectángulo o uno de sus vértices.
- d) estáContenido: que dados dos rectángulos, indique si uno está contenido en el otro.

**Solución:**

```

TAD Rectangulo2D {
    obs x1: R
    obs y1: R
    obs x2: R
    obs y2: R

    proc nuevoRectangulo (in x1:R, in y1:R, in x2:R, in y2:R) : rectangulo2D
        requiere {True}
        asegura {res.x1 = x1 ∧ res.y1 = y1 ∧ res.x2 = x2 ∧ res.y2 = y2}

    proc mover (inout r: rectangulo2D, in dx:R, in dy:R)
        requiere {r = r0}
        asegura {r.x1 = r0.x1 + dx ∧ r.y1 = r0.y1 + dy ∧ r.x2 = r0.x2 + dx ∧ r.y2 = r0.y2 + dy}

    aux distancia (in x: R, in y: R) : R =  $\sqrt{(x - y)^2}$ ;

    proc escalar (inout r: rectangulo2D, in factor:R)
        requiere {r = r0}
        asegura {r.x1 = r0.x1 ∧ r.y1 = r0.y1 ∧
            r.x2 = r0.x1 + distancia(x1, x2) * factor ∧
            r.y2 = r0.y1 + distancia(y1, y2) * factor}

    proc estaContenido (in r1: rectangulo2D, in r2: rectangulo2D) : Bool
        requiere {True}
        asegura {res = (r1.x1 ≤ r2.x1 ∧ r1.y1 ≤ r2.y1 ∧ r1.x2 ≥ r2.x2 ∧ r1.y2 ≥ r2.y2) ∨
            (r2.x1 ≤ r1.x1 ∧ r2.y1 ≤ r1.y1 ∧ r2.x2 ≥ r1.x2 ∧ r2.y2 ≥ r1.y2)}

}

```

### Ejercicio 3.

a) Especifique el TAD Cola(T) con las siguientes operaciones:

- a) nuevaCola: que crea una cola vacía
- b) estáVacía: que devuelve true si la cola no contiene elementos
- c) encolar: que agrega un elemento al final de la cola
- d) desencolar: que elimina el primer elemento de la cola y lo devuelve

**Solución:**

```
TAD Cola(T) {
  obs elementos: seq(T)

  proc nuevaCola () : Cola(T)
    requiere {True}
    asegura {|res.elementos| = 0}

  proc estáVacía (in c: Cola(T)) : Bool
    requiere {True}
    asegura {res = (|c.elementos| = 0)}

  proc encolar (inout c: Cola(T), in e: T)
    requiere {c = c0}
    asegura {|c.elementos| = c0.elementos + 1}
    asegura {(∀i : Z) ((0 ≤ i < |c0.elementos|) →L c.elementos[i] = c0.elementos[i] ∧
c.elementos[|c0.elementos|] = e)}

  proc desencolar (inout c: Cola(T)) : T
    requiere {c = c0}
    requiere {|c0.elementos| > 0}
    asegura {res = c0.elementos[0]}
    asegura {|c.elementos| = |c0.elementos| - 1}
    asegura {(∀i : Z) ((0 ≤ i < |c.elementos|) →L c.elementos[i] = c0.elementos[i + 1])}
}
```

b) Especifique el TAD Pila(T) con las siguientes operaciones:

- a) nuevaPila: que crea una pila vacía
- b) estáVacía: que devuelve true si la pila no contiene elementos
- c) apilar: que agrega un elemento al tope de la pila
- d) desapilar: que elimina el elemento del tope de la pila y lo devuelve

**Solución:**

```
TAD Pila(T) {
  obs elementos: seq(T)

  proc nuevaPila () : Pila(T)
    requiere {True}
    asegura {|res.elementos| = 0}

  proc estáVacía (in p: Pila(T)) : Bool
```

```

    requiere {True}
    asegura {res = (|p.elementos| = 0)}

proc apilar (inout p: Pila⟨T⟩, in e: T)
    requiere {p = p0}
    asegura {|p.elementos| = |p0.elementos| + 1}
    asegura {(∀i : ℤ) ((0 ≤ i < |p.elementos|) →L p.elementos[i] = p0.elementos[i] ∧
    p.elementos[|p0.elementos|] = e)}

proc desapilar (inout p: Pila⟨T⟩) : T
    requiere {p = p0}
    requiere {|p0.elementos| > 0}
    asegura {res = p0.elementos[|p0.elementos| - 1]}
    asegura {|p.elementos| = |p0.elementos| - 1}
    asegura {(∀i : ℤ) ((0 < i < |p.elementos|) →L p.elementos[i] = p0.elementos[i - 1]))}

}

```

- c) Especifique el TAD DobleCola⟨T⟩, en el que los elementos pueden insertarse al principio o al final y se eliminan por el medio. Debe contener las operaciones nuevaDobleCola, estáVacía, encolarAdelante, encolarAtrás y desencolar.

```

TAD DobleCola⟨T⟩ {
    obs elementos: seq⟨T⟩

proc nuevaDobleCola () : DobleCola⟨T⟩
    requiere {True}
    asegura {|res.elementos| = 0}

proc estáVacía (in dc: DobleCola⟨T⟩) : Bool
    requiere {True}
    asegura {res = (|dc.elementos| = 0)}

proc encolarAdelante (inout dc: DobleCola⟨T⟩, in e: T)
    requiere {dc = dc0}
    asegura {|dc.elementos| = |dc0.elementos| + 1}
    asegura {(∀i : ℤ) ((0 < i < |dc.elementos|) →L dc.elementos[i] = dc0.elementos[i - 1] ∧
    dc.elementos[0] = e)}

proc encolarAtras (inout dc: DobleCola⟨T⟩, in e: T)
    requiere {dc = dc0}
    asegura {|dc.elementos| = |dc0.elementos| + 1}
    asegura {(∀i : ℤ) ((0 < i < |dc.elementos|) →L dc.elementos[i] = dc0.elementos[i] ∧
    dc.elementos[|dc0.elementos|] = e)}

proc desencolar (inout dc: DobleCola⟨T⟩) : T
    requiere {dc = dc0}
    requiere {|dc0.elementos| > 0}
    asegura {res = dc0.elementos[|dc0.elementos|/2]}
    asegura {|dc.elementos| = |dc0.elementos| - 1}
    asegura {(∀i : ℤ) ((0 ≤ i < |dc0.elementos|/2) →L dc.elementos[i] = dc0.elementos[i] ∧
    (|dc0.elementos|/2 < i < |dc0.elementos|) →L dc.elementos[i - 1] = dc0.elementos[i]))}
}

```

}

#### Ejercicio 4.

a) Especifique el TAD  $\text{Diccionario}\langle K, V \rangle$  con las siguientes operaciones:

- a) nuevoDiccionario: que crea un diccionario vacío
- b) definir : que agrega un par clave-valor al diccionario
- c) obtener : que devuelve el valor asociado a una clave
- d) está: que devuelve true si la clave está en el diccionario
- e) borrar : que elimina una clave del diccionario

```

TAD Diccionario $\langle K, V \rangle$  {
  obs clavesValores: seq(struct(key: K, val: V))

  proc nuevoDiccionario () : Diccionario $\langle K, V \rangle$ 
    requiere {True}
    asegura {|res.clavesValores| = 0}

  proc definir (inout d: Diccionario $\langle K, V \rangle$ , in k: K, in v: V)
    requiere {d = d0}
    asegura {|d.clavesValores| = |d0.clavesValores| + 1}
    asegura {(∀i : Z) ((0 < i < |d.clavesValores|) →L d.clavesValores[i] = d0.clavesValores[i] ∧
      (d.clavesValores[d0.clavesValores[i]].key = k ∧ d.clavesValores[d0.clavesValores[i]].val = v))}

  proc obtener (in d: Diccionario $\langle K, V \rangle$ , in k: K) : V
    requiere {|d.clavesValores| > 0}
    requiere {esta(d, k)}
    asegura {(∃i : Z) ((0 ≤ i < |d.clavesValores|) ∧ d.clavesValores[i].key = k ∧ res = d.clavesValores[i].val)}

  proc esta (in d: Diccionario $\langle K, V \rangle$ , in k: K) : Bool
    requiere {True}
    asegura {res = (∃i : Z) ((0 ≤ i < |d.clavesValores|) ∧ d.clavesValores[i].key = k)}

  proc borrar (inout d: Diccionario $\langle K, V \rangle$ , in k: K)
    requiere {d = d0}
    requiere {esta(d0, k)}
    asegura {|d.clavesValores| = |d0.clavesValores| - 1}
    asegura {(∀i : Z) ((0 ≤ i < |d.clavesValores|) →L (d.clavesValores[i].key ≠ k →L d.clavesValores[i] =
      d0.clavesValores[i]))}
}

```

b) Especifique el TAD  $\text{DiccionarioConHistoria}\langle K, V \rangle$ . El mismo permite consultar, para cada clave, todos los valores que se asociaron con la misma a lo largo del tiempo (en orden). Se debe poder hacer dicha consulta aún si la clave fue borrada.

**Ejercicio 5.** Especifique los TADs indicados a continuación pero utilizando los observadores propuestos:

- a)  $\text{Diccionario}\langle K, V \rangle$  observado con conjunto (de tuplas)
- b)  $\text{Pila}\langle T \rangle$  observado con diccionarios
- c) Punto observado con coordenadas polares

**Ejercicio 6.** Especificar TADs para las siguientes estructuras:

- a) Multiconjunto(T) También conocido como multiset o bag. Es igual a un conjunto pero con duplicados: cada elemento puede agregarse múltiples veces. Tiene las mismas operaciones que el TAD Conjunto, más una operación que indica la multiplicidad de un elemento (la cantidad de veces que ese elemento se encuentra en la estructura). Nótese que si un elemento es eliminado del multiconjunto, se reduce en 1 la multiplicidad. Ejemplo:
- b) Multidict(K, V) Misma idea pero para diccionarios: Cada clave puede estar asociada con múltiples valores. Los valores se definen de a uno (indicando una clave y un valor), pero la operación obtener debe devolver todos los valores asociados a una determinada clave. *Nota:* En este ejercicio deberá tomar algunas decisiones. ¿Se pueden asociar múltiples veces un mismo valor con una clave? ¿Qué pasa en ese caso? ¿Qué parámetros tiene y cómo se comporta la operación borrar? Imagine un caso de uso para esta estructura y utilice su sentido común para tomar estas decisiones.

**Ejercicio 7.** Especifique el TAD Contadores que, dada una lista de eventos, permite contar la cantidad de veces que se produjo cada uno de ellos. La lista de eventos es fija. El TAD debe tener una operación para incrementar el contador asociado a un evento y una operación para conocer el valor actual del contador para un evento.

- Modifique el TAD para que sea posible preguntar el valor del contador en un determinado momento del pasado. Si necesita conocer la fecha y hora actual, puede pasarla como parámetro a los procedimientos. Asuma que las fechas son números enteros (por ejemplo, la cantidad de segundos desde el 1 de enero de 1970).

**Ejercicio 8.** Un caché es una capa de almacenamiento de datos de alta velocidad que almacena un subconjunto de datos, normalmente transitorios, de modo que las solicitudes futuras de dichos datos se atienden con mayor rapidez que si se debe acceder a los datos desde la ubicación de almacenamiento principal. El almacenamiento en caché permite reutilizar de forma eficaz los datos recuperados o procesados anteriormente. Esta estructura comunmente tiene una interface de diccionario: guarda valores asociados a claves, con la diferencia de que los datos almacenados en un cache pueden desaparecer en cualquier momento, en función de diferentes criterios. Especificar caches genéricos (con claves de tipo K y valores de tipo V) que respeten las operaciones indicadas y las siguientes políticas de borrado automático. Si necesita conocer la fecha y hora actual, puede pasarla como parámetro a los procedimientos o bien puede asumir que existe una función externa horaActual() : Z que retorna la fecha y hora actual. Asuma que las fechas son números enteros (por ejemplo, la cantidad de segundos desde el 1 de enero de 1970).

TAD Cache(K, V)

```

proc esta(in c: Cache(K, V), in k: K) : Bool
proc obtener(in c: Cache(K, V), in k: K) : V
proc definir(inout c: Cache(K, V), in k: K)

```

- a) FIFO o first-in-first-out: El cache tiene una capacidad máxima (máximo número de claves). Si se alcanza esa capacidad máxima se borra automáticamente la clave que fue definida por primera vez hace más tiempo.
- b) LRU o last-recently-used: El cache tiene una capacidad máxima (máximo número de claves). Si se alcanza esa capacidad máxima se borra automáticamente la clave que fue accedida por última vez hace más tiempo. Si no fue accedida nunca, se considera el momento en que fue agregada.
- c) TTL o time-to-live: El cache tiene asociado un máximo tiempo de vida para sus elementos. Los elementos se borran automáticamente cuando se alcanza el tiempo de vida (contando desde que fueron agregados por última vez).

**Ejercicio 9.** Especifique tipos para un robot que realiza un camino a través de un plano de coordenadas cartesianas (enteras), es decir, tiene operaciones para ubicarse en un coordenada, avanzar hacia arriba, hacia abajo, hacia la derecha y hacia la izquierda, preguntar por la posición actual, saber cuántas veces pasó por una coordenada dada y saber cuál es la coordenada más a la derecha por dónde pasó. Indique observadores y precondition/postcondición para cada operación: Coord es struct x :Z, y :Z

TAD Robot {

```

proc ubicarse(inout r: Robot, in c: Coord)
proc arriba(inout r: Robot)
proc abajo(inout r: Robot)
proc izquierda(inout r: Robot)
proc derecha(inout r: Robot)
proc coordActual(in r: Robot) : in c: Coord
proc másDerecha(in r: Robot) : Z
proc cuantasVecesPaso(in r: Robot, in c: Coord) : Z
}

```

## Solución:

```

TAD Robot {
  obs posicionActual: Coord obs coordenadasVisitadas: seq<Coord>

  proc nuevoRobotEn (in c: coords) : Robot
    requiere {True}
    asegura {res.posicionActual = c ∧ |res.coordenadasVisitadas| = 0}

  proc ubicarse (inout r: Robot, in c: Coord)
    requiere {r = r0}
    asegura {r.posicionActual = c ∧
      coordenadaAnteriorGuardada(r, r0)}

  proc arriba (inout r: Robot)
    requiere {r = r0}
    asegura {r.posicionActual.x = r0.posicionActual.x ∧ r.posicionActual.y = r0.posicionActual.y + 1 ∧
      coordenadaAnteriorGuardada(r, r0)}

  proc abajo (inout r: Robot)
    requiere {r = r0}
    asegura {r.posicionActual.x = r0.posicionActual.x ∧ r.posicionActual.y = r0.posicionActual.y - 1 ∧
      coordenadaAnteriorGuardada(r, r0)}

  proc izquierda (inout r: Robot)
    requiere {r = r0}
    asegura {r.posicionActual.x = r0.posicionActual.x - 1 ∧ r.posicionActual.y = r0.posicionActual.y ∧
      coordenadaAnteriorGuardada(r, r0)}

  proc derecha (inout r: Robot)
    requiere {r = r0}
    asegura {r.posicionActual.x = r0.posicionActual.x + 1 ∧ r.posicionActual.y = r0.posicionActual.y ∧
      coordenadaAnteriorGuardada(r, r0)}

  proc coordActual (in r: Robot) : Coord
    requiere {True}
    asegura {res = r.posicionActual}

  proc masDerecha (in r: Robot) : Coord
    requiere {True}
    asegura {(∃i : Z) ((0 ≤ i < |r.coordenadasVisitadas|) ∧
      (∀j : Z) ((0 ≤ j < |r.coordenadasVisitadas|) ∧
      (r.coordenadasVisitadas[i].x ≥ r.coordenadasVisitadas[j].x)) ∧
      (r.coordenadasVisitadas[i].x ≥ r.posicionActual.x) →L
      (res = r.coordenadasVisitadas[i]))}

  proc cuantasVecesPaso (in r: Robot, in c: Coord) : Z
    requiere {True}
    asegura {res = ∑i=0|r.coordenadasVisitadas| if r.coordenadasVisitadas[i] = c then 1 else 0 fi}

  pred coordenadaAnteriorGuardada (r, r0) {
    (∀i : Z) ((0 ≤ i < |r0.coordenadasVisitadas|) →L
    (r.coordenadasVisitadas[i] = r0.coordenadasVisitadas[i] ∧
    r.coordenadasVisitadas[|r0.coordenadasVisitadas|] = r0.posicionActual))
  }
}

```

**Ejercicio 10.** Queremos modelar el funcionamiento de un vivero. El vivero arranca su actividad sin ninguna planta y con un monto inicial de dinero. Las plantas las compramos en un mayorista que nos vende la cantidad que deseemos pero solamente de a una especie por vez. Como vivimos en un país con inflación, cada vez que vamos a comprar tenemos un precio diferente para la misma planta. Para poder comprar plantas tenemos que tener suficiente dinero disponible, ya que el mayorista no acepta fiarnos. A cada planta le ponemos un precio de venta por unidad. Ese precio tenemos que poder cambiarlo todas las veces que necesitemos. Para simplificar el problema, asumimos que las plantas las vendemos de a un ejemplar (cada venta involucra un solo

ejemplar de una única especie). Por supuesto que para poder hacer una venta tenemos que tener stock de esa planta y tenemos que haberle fijado un precio previamente. Además, se quiere saber en todo momento cuál es el balance de caja, es decir, el dinero que tiene disponible el vivero.

- a) Indique las operaciones (procs) del TAD con todos sus parámetros.
- b) Describa el TAD en forma completa, indicando sus observadores, los requiere y asegura de las operaciones. Puede agregar los predicados y funciones auxiliares que necesite, con su correspondiente definición
- c) ¿qué cambiaría si supiéramos a priori que cada vez que compramos en el mayorista pagamos exactamente el 10 que la vez anterior? Describa los cambios en palabras.

**Ejercicio 11.** Se desea modelar mediante un TAD un videojuego de guerra desde el punto de vista de un único jugador. En el videojuego es posible ir a las tabernas y contratar mercenarios. Al contratarlo se nos informa el indicador de poder que tiene y el costo que tienen sus servicios. El poder de un mercenario siempre es positivo, sino nadie querría contratarlo. Los mercenarios no aceptan una promesa de pago, por lo que el jugador deberá tener el dinero suficiente para pagarlo. El jugador puede juntar la cantidad de mercenarios que desee para poder formar batallones. El poder de los batallones es igual a la suma del poder de cada uno de los mercenarios que lo componen. Cada mercenario puede pertenecer a un solo batallón. El jugador comienza con un monto de dinero inicial determinado por el juego. A su vez, comienza con un sólo territorio bajo su dominio. El objetivo del juego es conquistar la mayor cantidad de territorios posible para dominar el continente. Para ello, el jugador puede tomar uno de sus batallones y atacar un territorio enemigo. Al momento de atacar se conoce la fuerza del batallón enemigo. El jugador resulta vencedor si tiene más poder que el enemigo, en ese caso se anexa el territorio y se ganan 1000 monedas. Caso contrario, se debe pagar por la derrota una suma de 500 monedas. El jugador no puede ir a pelear si no tiene dinero para financiar su derrota. Además, se desea saber en todo momento la cantidad de territorios anexados y el dinero disponible. Se pide:

- a) Indique las operaciones (procs) del TAD con todos sus parámetros.
- b) Describa el TAD en forma completa, indicando sus observadores, los requiere y asegura de las operaciones. Puede agregar los predicados y funciones auxiliares que necesite, con su correspondiente definición

**Ejercicio 12.** Se quiere organizar un viaje de estudios entre un grupo de estudiantes. Al definir el viaje se sabe qué personas viajan y los costos de los pasajes, así como el costo del combustible para un auto. Como el costo de pasajes es más alto que el del combustible, se quiere que todos viajen en auto, pero inicialmente no se sabe de cuántos se dispondrá. A medida que se van confirmando autos disponibles se podrá asignar pasajeros a cada uno. Por razones de seguridad no se pueden asignar más de cuatro pasajeros a cada auto. Naturalmente el dueño de cada auto debe quedar asignado al suyo y nadie puede estar asignado a más de un auto. Una persona puede haber sido asignada a un auto pero luego confirmar el propio. Si pasa eso, el auto en el que iba a viajar esa persona antes de conseguir el suyo queda sin pasajeros para poder repartir todas esas personas. Se quiere poder saber el costo total del viaje, es decir, el costo en pasajes sumado al costo en combustible para todos los autos.

- a) Indique las operaciones (procs) del TAD con todos sus parámetros.
- b) Describa el TAD en forma completa, indicando sus observadores, los requiere y asegura de las operaciones. Puede agregar los predicados y funciones auxiliares que necesite, con su correspondiente definición.