

Solución practica 4 Algoritmos y Estructuras de Datos

Aitor

24 de abril de 2025

Ejercicio 1. Ya que a y b son reales y i es entero, podemos decir que $\text{def}(a) \equiv \text{def}(b) \equiv \text{def}(i) \equiv \text{True}$. Teniendo esto en cuenta:

- a) $\text{def}(a + b) \equiv \text{def}(a) \wedge \text{def}(1) \equiv \text{def}(a) \wedge \text{True} \equiv \text{def}(a) \equiv \text{True}$.
- b) $\text{def}(a/b) \equiv \text{def}(a) \wedge \text{def}(b) \wedge (b \neq 0) \equiv \text{True} \wedge \text{True} \wedge (b \neq 0) \equiv (b \neq 0)$.
- c) $\text{def}(\sqrt{a/b}) \equiv \text{def}(a) \wedge \text{def}(b) \wedge (b \neq 0) \wedge ((a \geq 0 \wedge b > 0) \vee (a \leq 0 \wedge b < 0)) \equiv \text{True} \wedge \text{True} \wedge (b \neq 0) \wedge ((a \geq 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0))$.

Recuerdo los axiomas vistos en clase:

- 1. Axioma 1: $\text{wp}(x := E, Q) \equiv \text{def}(E) \wedge_L Q_E^x$ es decir la $\text{wp}(S, Q)$ donde S es equivalente a la conjuncion entre E (lo que se esta asignando) y reemplazar en Q , x por E .
- 2. Axioma 2: $\text{wp}(\text{skip}, Q) \equiv Q$
- 3. Axioma 3: $\text{wp}(S1; S2, Q) \equiv \text{wp}(S1, \text{wp}(S2, Q))$
- 4. Axioma 4: Si $S = \text{if } B \text{ then } S1 \text{ else } S2 \text{ endif}$ entonces $\text{wp}(S, Q) \equiv \text{def}(B) \wedge_L ((B \wedge \text{wp}(S1, Q)) \vee (\neg B \wedge \text{wp}(S2, Q)))$

Ejercicio 2.

- a) $\text{wp}(a := a + 1; b := a/2, b \geq 0)$

Solución: por axioma 3: $\text{wp}(a := a + 1; b := a/2, b \geq 0) = \text{wp}(a := a + 1, \text{wp}(b := a/2, b \geq 0))$

por axioma 1: $\text{wp}(b := a/2, b \geq 0) \equiv \text{def}(a/2) \wedge_L Q_{a/2}^b$ (con $Q = b \geq 0$)

y $\text{def}(a/2) \equiv \text{def}(a) \wedge \text{def}(2) \equiv \text{true} \wedge \text{true} \equiv \text{true}$

y $Q_{a/2}^b \equiv a/2 \geq 0 \iff a \geq 0$ luego $\text{def}(a/2) \wedge_L Q_{a/2}^b \equiv \text{true} \wedge a \geq 0 \equiv a \geq 0$

luego tenemos que $\text{wp}(b := a/2, b \geq 0) \equiv a \geq 0$

ahora sustituyendo en la ecuacion anterior tenemos que $\text{wp}(a := a + 1, \text{wp}(b := a/2, b \geq 0)) \equiv \text{wp}(a := a + 1, a \geq 0)$

por axioma 1: $\text{wp}(a := a + 1, a \geq 0) \equiv \text{def}(a + 1) \wedge_L Q_{a+1}^a \equiv \text{true} \wedge_L a + 1 \geq 0 \equiv a + 1 \geq 0 \equiv a \geq -1$

Conclusión $\text{wp}(a := a + 1; b := a/2, b \geq 0) \equiv a \geq -1$

- b) $\text{wp}(a := A[i] + 1; b := a * a, b \neq 2)$.

Solución: por axioma 3: $\text{wp}(a := A[i] + 1; b := a * a, b \neq 2) \equiv \text{wp}(a := A[i] + 1, \text{wp}(b := a * a, b \neq 2))$

por axioma 1: $\text{wp}(b := a * a, b \neq 2) \equiv \text{def}(a * a) \wedge_L Q_{a*a}^b$ (con $Q = b \neq 2$)

y $\text{def}(a * a) \equiv \text{def}(a) \wedge \text{def}(a) \equiv \text{true} \wedge \text{true} \equiv \text{true}$

y $Q_{a*a}^b \equiv a * a \neq 2 \equiv a \neq \sqrt{2}$ luego $\text{def}(a * a) \wedge_L Q_{a*a}^b \equiv \text{true} \wedge a \neq \sqrt{2} \equiv a \neq \sqrt{2}$

luego tenemos que $\text{wp}(b := a * a, b \neq 2) \equiv a \neq \sqrt{2}$

ahora sustituyendo en la ecuacion anterior tenemos que $\text{wp}(a := A[i] + 1, \text{wp}(b := a * a, b \neq 2)) \equiv \text{wp}(a := A[i] + 1, a \neq \sqrt{2})$

por axioma 1: $\text{wp}(a := A[i] + 1, a \neq \sqrt{2}) \equiv \text{def}(A[i] + 1) \wedge_L Q_{A[i]+1}^a \equiv \text{def}(A[i]) \wedge_L Q_{A[i]+1}^a \equiv$

$(\text{def}(A) \wedge \text{def}(i) \wedge_L 0 \leq i < |A|) \wedge_L A[i] + 1 \neq \sqrt{2} \equiv (0 \leq i < |A|) \wedge_L A[i] \neq \sqrt{2} - 1$

Conclusión $\text{wp}(a := A[i] + 1; b := a * a, b \neq 2) \equiv (0 \leq i < |A|) \wedge_L A[i] \neq \sqrt{2} - 1$

- c) $\text{wp}(a := A[i] + 1; a := b * b, a \geq 0)$.

Solución: por axioma 3: $\text{wp}(a := A[i] + 1; a := b * b, a \geq 0) \equiv \text{wp}(a := A[i] + 1, \text{wp}(a := b * b, a \geq 0))$

por axioma 1: $\text{wp}(a := b * b, a \geq 0) \equiv \text{def}(b * b) \wedge_L Q_{b*b}^a$ (con $Q = a \geq 0$)

y $\text{def}(b * b) \equiv \text{def}(b) \wedge \text{def}(b) \equiv \text{true} \wedge \text{true} \equiv \text{true}$

y $Q_{b*b}^a \equiv b * b \geq 0 \equiv \text{True}$ (ya que un numero multiplicado por si mismo siempre es mayor o igual a 0)
luego $\text{def}(b * b) \wedge_L Q_{b*b}^a \equiv \text{true} \wedge \text{true} \equiv \text{true}$
luego tenemos que $\text{wp}(a := b * b, a \geq 0) \equiv \text{true}$
ahora substituyendo en la ecuacion anterior tenemos que $\text{wp}(a := A[i] + 1, \text{wp}(a := b * b, a \geq 0)) \equiv \text{wp}(a := A[i] + 1, \text{true})$
???? como hago con ese true

d) $\text{wp}(a := a - b; b := a + b, a \geq 0 \wedge b \geq 0)$.

Solución: por axioma 3: $\text{wp}(a := a - b; b := a + b, a \geq 0 \wedge b \geq 0) \equiv \text{wp}(a := a - b, \text{wp}(b := a + b, a \geq 0 \wedge b \geq 0))$
por axioma 1: $\text{wp}(b := a + b, a \geq 0 \wedge b \geq 0) \equiv \text{def}(a + b) \wedge_L Q_{a+b}^b$ (con $Q = a \geq 0 \wedge b \geq 0$) ??? como hago si tengo a y b, reemplazo a o reemplazo b?

Ejercicio 4. Para los siguientes pares de programas S y postcondiciones Q

- Escribir la precondition más débil $P = \text{wp}(S, Q)$
- Mostrar formalmente que la P elegida es correcta.

Hay que usar el axioma 4: Si $S = \text{if } B \text{ then } S1 \text{ else } S2 \text{ endif}$ entonces $\text{wp}(S, Q) \equiv \text{def}(B) \wedge_L ((B \wedge \text{wp}(S1, Q)) \vee (\neg B \wedge \text{wp}(S2, Q)))$

Solución:

a) $B = a < 0, S1 = b := a, S2 = b := -a, Q \equiv (b = -|a|)$

por axioma 4: $\text{wp}(S, Q) \equiv \text{def}(a < 0) \wedge_L ((a < 0 \wedge \text{wp}(b := a, b = -|a|)) \vee (\neg(a < 0) \wedge \text{wp}(b := -a, b = -|a|)))$
 $\text{wp}(b := a, b = -|a|) \equiv \text{def}(a) \wedge_L Q_a^b \equiv \text{true} \wedge_L a = -|a| \equiv a = -|a|$ es decir a es negativo
 $\text{wp}(b := -a, b = -|a|) \equiv \text{def}(-a) \wedge_L Q_{-a}^b \equiv \text{true} \wedge_L -a = -|a| \equiv -a = -|a| \equiv a = |a|$ es decir a es positivo
luego tenemos que $\text{wp}(S, Q) \equiv \text{def}(a < 0) \wedge_L ((a < 0 \wedge a = -|a|) \vee (\neg(a < 0) \wedge a = |a|)) \equiv$
 $\text{true} \wedge_L ((a < 0 \wedge a = -|a|) \vee (\neg(a < 0) \wedge a = |a|)) \equiv ((a < 0 \wedge a = -|a|) \vee (\neg(a < 0) \wedge a = |a|))$
analicemos las dos partes de la disyuncion:

1) $a < 0 \wedge a = -|a|$

$a = -|a|$ esta diciendo que a es negativo, es decir $a < 0$ pero el 0 lo cumple luego $a \leq 0$ reformulando tenemos que:
 $a < 0 \wedge a = -|a| \equiv a < 0 \wedge a \leq 0$ pero basta con decir $a < 0$ ya que si $a = 0$, a ¡0 es falsa luego con chequear a ¡0 estamos viendo todas las opciones

2) $\neg(a < 0) \wedge a = |a|$

igual que en el item anterior $\neg(a < 0)$ esta diciendo $a \geq 0$ y $a = |a|$ dice a es positivo o cero, luego tenemos que
 $\neg(a < 0) \wedge a = |a| \equiv a \geq 0 \wedge a \geq 0 \equiv a \geq 0$

entonces $((a < 0 \wedge a = -|a|) \vee (\neg(a < 0) \wedge a = |a|)) \equiv a < 0 \vee a \geq 0$ que se cumple siempre entonces es $\equiv \text{true}$

recapitulando tenemos que: $\text{wp}(S, Q) \equiv \text{def}(a < 0) \wedge_L ((a < 0 \wedge \text{wp}(b := a, b = -|a|)) \vee (\neg(a < 0) \wedge \text{wp}(b := -a, b = -|a|))) \equiv$
 $\text{true} \wedge_L \text{true} \equiv \text{true}$

b) $B = a < 0, S1 = b := a, S2 = b := -a, Q \equiv (b = |a|)$

por axioma 4: $\text{wp}(S, Q) \equiv \text{def}(a < 0) \wedge_L ((a < 0 \wedge \text{wp}(b := a, b = |a|)) \vee (\neg(a < 0) \wedge \text{wp}(b := -a, b = |a|)))$

por axioma 1: $\text{wp}(b := a, b = |a|) \equiv \text{def}(a) \wedge_L Q_a^b \equiv \text{true} \wedge_L a = |a| \equiv a = |a| \equiv a \geq 0$

igualmente con s2, por axioma 1: $\text{wp}(b := -a, b = |a|) \equiv \text{def}(-a) \wedge_L Q_{-a}^b \equiv \text{true} \wedge_L -a = |a| \equiv -a = |a| \equiv a \leq 0$

uniendo todo tenemos que: $\text{wp}(S, Q) \equiv \text{def}(a < 0) \wedge_L ((a < 0 \wedge a \geq 0) \vee (\neg(a < 0) \wedge a \leq 0))$

y pasa lo contrario que en el item a, ahora tenemos que $(a < 0 \wedge a \geq 0)$ que nunca se cumple y $(\neg(a < 0) \wedge a \leq 0)$ que tampoco se cumple.

luego tenemos que $\text{wp}(S, Q) \equiv \text{def}(a < 0) \wedge_L ((a < 0 \wedge a \geq 0) \vee (\neg(a < 0) \wedge a \leq 0)) \equiv \text{def}(a < 0) \wedge_L \text{false}$
 $\equiv \text{true} \wedge_L \text{false} \equiv \text{false}$

c) $B = i > 0, S1 = s[i] := 0, S2 = s[0] = 0, Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z}) (0 \leq j < |s| \wedge s[j] \geq 0)$

Ejercicio 5. Para las siguientes especificaciones:

- Poner nombre al problema que resuelven
- Escribir un programa S sencillo en SmallLang, sin ciclos, que lo resuelva
- Dar la precondition más débil del programa escrito con respecto a la postcondición de su especificación

Solución:

a)

```
1 |      func agregarI-esismo(s <int>, i int, a int) int {  
2 |          a := a + s[i];  
3 |          return a  
4 |      }
```

b)

```
1 |      func positivosHastaI(s <int>, i int) bool {  
2 |          return s[i] >= 0  
3 |      }
```

Ejercicio 6. Dada la poscondición $Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z}) (0 \leq j < |s| \wedge_L s[j] \bmod 2 = 0)$ y el siguiente código:

```
1 |      if (i mod 3 = 0)  
2 |          s[i] := s[i] + 6;  
3 |      else  
4 |          s[i] := i;  
5 |      endif
```

a) Demostrar que las siguientes WPs son incorrectas dando un contraejemplo: