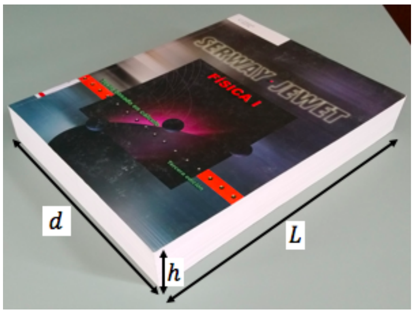
Nociones básicas sobre incertezas en las mediciones

Tarea a entregar

A continuación, te proponemos que realices distintas mediciones en tu hogar, para ver si pudiste quedarte con la idea principal del apunte anterior. Esta tarea obligatoria deberás entregarla con fecha límite: **jueves 4 de noviembre a las 12hs**, en Moodle. Como siempre, tendrás que hacer la entrega mediante un archivo .pdf que incluya las imágenes del desarrollo de tu tarea.

Mediciones directas e indirectas

Con el uso de una regla o cinta métrica:



• Medí el largo (L), ancho (d) y alto (h) de un libro (si no tenés, buscá un CD, una caja de fósforos o cualquier objeto en forma de paralelepípedo). Es importante que todas las dimensiones del objeto las puedas medir de forma *directa*.

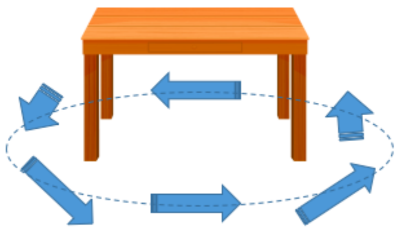
• Determiná de forma *indirecta* el área de la tapa del libro (o de la caja de fósforos, del CD...). Expresá el valor obtenido correctamente.

• Calculá de forma *indirecta* el volumen del libro (la caja de fósforos, del CD...). Expresá el valor obtenido correctamente.

Teoría estadística

Para esta parte te proponemos dos opciones. Vos elegís cual preferís!

Opción 1
Con el uso de un cronómetro (el de tu celular por ejemplo!):



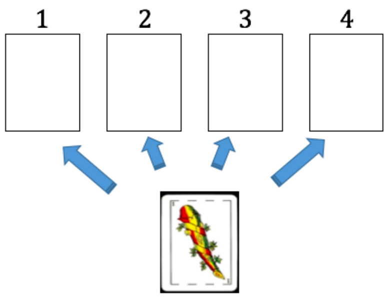
• Elegí un recorrido fijo dentro de tu hogar para realizar en reiteradas oportunidades. Puede ser, por ejemplo como muestra la figura, una vuelta a la mesa. Tendrás que registrar el tiempo que tardás en dar una vuelta completa a la mesa y repetir este recorrido 50 veces, tratando de mantener el mismo ritmo de paso. Puede ser en su lugar, caminar en línea recta y volver, una cantidad fija de pasos.

• Ahora, poné a funcionar el cronómetro y registrá el tiempo que tardás en realizar 10 (diez) vueltas completas seguidas. Luego, calculá el tiempo promedio que tardaste en realizar *una* vuelta (de forma *indirecta*). Expresá cada resultado de forma correcta.

Tené en cuenta que se considera (además del error de propio del instrumento, es decir, la mínima división que registra), el error del tiempo de reacción. Para saber cuál es tu propio tiempo de reacción, activá y desactivá el cronómetro tan rápido como puedas. El tiempo que registre tu cronómetro es etu tiempo de reacción.

Opción 2

Con el uso de un cronómetro:



• Seleccioná 4 lugares de una mesa donde colocar naipes o cartas (como muestra la figura). Tendrás que registrar el tiempo que tardás en repartir el mazo completo de cartas en estas 4 pilas, y repetir este recorrido 50 veces, tratando de mantener el mismo ritmo de reparto.

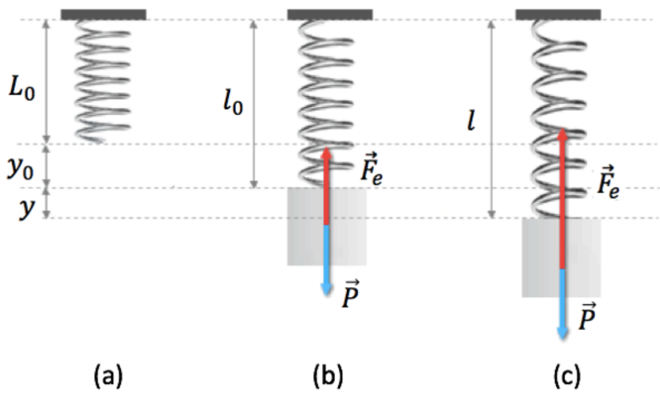
• Ahora, poné a funcionar el cronómetro y registrá el tiempo que tardás en realizar 5 (diez) repartidas completas seguidas. Es decir, repartí el mazo dejando una carta en cada lugar como hiciste antes, una vez que finalizas tomas todas las cartas y lo repartís de nuevo, y así sin parar el cronómetro en ningún momento, repetí el procedimiento 5 veces. Luego, calculá el tiempo promedio que tardaste en repartir *un* mazo (de forma *indirecta*). Expresá cada resultado de forma correcta.

Método de ajuste por cuadrados mínimos

• Para evaluar tu entendimiento sobre el método de ajuste de cuadrados mínimos, te brindaremos a continuación el desarrollo y los datos experimentales adquiridos por compañeros de otros años, al realizar dos experimentos para determinar la constante elástica de un resorte.

Primero, describiremos el experimento para que puedas poner en contexto los resultados experimentales.

En la figura que se muestra a continuación se esquematiza el diagrama de cuerpo aislado para un cuerpo unido a resorte, de constante elástica k, suspendido verticalmente. No se tienen en cuenta los rozamientos entre el cuerpo y el aire, ni entre el cuerpo y la pared, y el movimiento del resorte se supone únicamente vertical (en la dirección y).



En la situación (a) planteada en la figura, el resorte se coloca en posición vertical y se sostiene del extremo superior, en equilibrio. En dicho caso, el resorte tendrá una longitud natural L_0. Si luego, en la situación (b), se engancha un cuerpo de peso $\vec{P}$ en el extremo inferior y el sistema alcanza el equilibrio nuevamente, con una longitud $l_0 = L_0 + y_0$, la sumatoria de fuerzas correspondientes a la segunda ley de Newton resulta:

$$\Sigma F_y) \longrightarrow F_e - P = 0 \tag{1}$$

que reemplazando la fuerza elástica por la constante k por la deformación resulta:

$$ky_0 - P = 0 \tag{2}$$

Ahora bien, si se cambia el peso colocado en el extremo, de la ecuación (2) se obtiene, para cualquier masa m_i agregada, una deformación de equilibrio:

$$y_i = \frac{g}{k} m_i \tag{3}$$

Esta ecuación permite determinar de manera experimental la constante elástica del resorte por un método estático.

Para la situación planteada en (c), el resorte se aparta voluntariamente de su posición de equilibrio y la fuerza elástica hará que la masa total suspendida M comience a oscilar, realizando un movimiento armónico simple (MAS) en torno a la posición de equilibrio dada por (3).

Recordando que para un resorte que realiza un MAS el período de oscilación viene dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} \tag{4}$$

puede determinarse la constante elástica del resorte mediante un método dinámico, conociendo el período de oscilación resultante en función de la masa colocada en el extremo del resorte. Esto es:

$$T_i = 2\pi\sqrt{\frac{M_i}{k}} \tag{5}$$

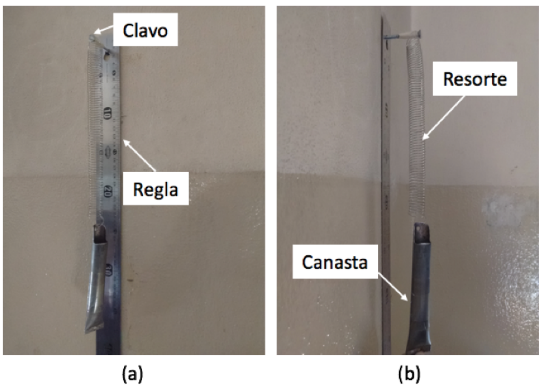
Elevando ambos términos al cuadrado, se obtiene una relación lineal entre el cuadrado del período de oscilación y la masa total suspendida M_i:

$$T_i^2 = \frac{4\pi^2}{k} M_i \tag{6}$$

Observación: Si bien debería considerarse la masa de resorte que contribuye a la oscilación, por no tratarse de un cuerpo puntual, en este trabajo se omitirá dicha contribución.

Procedimiento experimental

En el laboratorio se montó el experimento tal como lo muestra la figura a la derecha. Un resorte se colgó de un clavo en la pared, con una regla metálica detrás y una canasta en su extremo inferior. En la misma se ingresaron esferas metálicas, de una en una, logrando diferentes deformaciones de equilibrio y períodos de oscilación del sistema canasta + esferas. La presencia de la regla facilitaba la medida de la deformación en función de la masa agregada y el período se determinó con un cronómetro, eligiendo arbitrariamente un instante de inicio y finalización del ciclo.



Con el fin de poder realizar un análisis entre dos de las variables del sistema mediante el método de ajuste de cuadrados mínimos, se registraron en primer lugar las magnitudes de diferentes masas (agregando pequeñas esferas en la canasta) y la deformación que las mismas provocaron en el resorte (*método estático*). Por otro lado, para cada valor de masa agregada se registró el tiempo de 10 oscilaciones consecutivas para luego calcular el periodo correspondiente (*método dinámico*). Esto se repitió para todas las esferas incorporadas a la canasta.

A continuación, los datos experimentales a analizar:

Método estático - Mediciones experimentales

- Masa del resorte = (9.56 ± 0.01) $[g]$
- Masa de la canasta = (50.13 ± 0.01) $[g]$

Método dinámico - Mediciones experimentales

- Tiempo de reacción del observador = (0.15 ± 0.01) $[s]$

Masa agregada m_i (X_i) (± 0.01) [g]	**Deformación** (Y_i) (± 0.1) [cm]
5.68	1.2
11.36	3.1
17.05	4.7
22.72	6.3
28.40	7.8
31.40	9.5
39.79	10.9
45.47	12.6
51.06	14.2
56.73	15.9

M_i (X_i) (± 0.01) [g]	$10\,T_i$ (± 0.15) [s]
55.81	7.38
61.49	8.50
67.18	8.68
72.85	9.23
78.53	9.56
84.23	9.83
89.92	10.25
95.60	10.54
101.19	10.74
106.86	11.13

A partir del uso de las relaciones obtenidas en la ecuaciones (3) y (6), se espera que determines de manera alternativa la constante elástica del resorte, mediante un método estático y uno dinámico.

Para que te organices

Además de describir brevemente el procedimiento de cada etapa, y discutir tus resultados, en tu informe no puede faltar la siguiente información:

Resultados

A continuación, te dejamos a modo de ejemplo lo que deberías tener completo antes de realizar la entrega.

Parte 1: Mediciones directas del paralelepípedo.

- **Largo:** $L = (............ \pm ....)[......]$
- **Ancho:** $d = (............ \pm ....)[......]$
- **Alto:** $h = (............ \pm ....)[......]$

Parte 2: Mediciones indirectas del paralelepípedo.

- Expresión para calcular el error en el área:

$$E_A = \left|\frac{\partial A}{\partial L}\right||E_L| + \left|\frac{\partial A}{\partial d}\right||E_d| \quad \longrightarrow \quad E_A = |\qquad||E_L| + |\qquad||E_d|$$

- **Área:** $A = (............ \pm ....)[......]$

- Expresión para calcular el error en el área:

$$E_V = \left|\frac{\partial V}{\partial L}\right||E_L| + \left|\frac{\partial V}{\partial d}\right||E_d| + \left|\frac{\partial V}{\partial h}\right||E_h| \quad \longrightarrow \quad E_V = |\qquad||E_L| + |\qquad||E_d| + |\qquad||E_h|$$

- **Volumen:** $V = (............ \pm ....)[......]$

Parte 3: Teoría estadística - Vueltas a la mesa.

- **Tiempo de reacción:** $T_r = (............ \pm ....)[......]$
- **Tabla con los 50 valores de tiempo.**
- **Rango elegido:** [............][.....]
- **Tiempo promedio:** (sólo el valor y su unidad) [............][.....]
- **Tabla con los intervalos y la frecuencia.**

Intervalos (s)	Frecuencia
[...... − .....)	
[...... − .....)	
[...... − .....)	
[...... − .....)	
[...... − .....)	

- **Desviación estándar σ:** [............][.....]
- **Error estadístico:** (.............)[......]

- **Valores para realizar la curva de Gauss:**

x_i	Valor x_i (s)	$e^{-\left(\frac{(\overline{x}-x)^2}{2\sigma^2}\right)}$	Δn
$\overline{x}$		1	
$\overline{x}-\sigma/2$		$e^{-1/8}$	
$\overline{x}+\sigma/2$		$e^{-1/8}$	
$\overline{x}-\sigma$		$e^{-1/2}$	
$\overline{x}+\sigma$		$e^{-1/2}$	
$\overline{x}-2\sigma$		e^{-2}	
$\overline{x}+2\sigma$		e^{-2}	

- **Histograma y curva de Gauss.**

- **Tiempo en realizar 10 vueltas:** T_{10v} $(............. \pm.............)[......]$

- **Tiempo promedio en realizar 1 vuelta, a partir de T_{10v}:** $T' = (............. \pm.............)[......]$

Si elegiste la opción dos, la forma de proceder es análoga.

Parte 4: Cuadrados mínimos - Constante elástica del resorte.

Método estático

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = \text{................} \ [......] \qquad \sum_{i=1}^{10} Y_i = \text{................} \ [......] \qquad \sum_{i=1}^{10} X_i Y_i = \text{................} \ [......]$$

$$\sum_{i=1}^{10} (X_i)^2 = \text{................} \ [......] \qquad D = 10 \cdot \sum_{i=1}^{10} (X_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{10} X_i \right)^2 = \text{................} \ [......]$$

- $$A = \frac{\sum_{i=1}^{10} (X_i)^2 \sum_{i=1}^{10} Y_i - \sum_{i=1}^{10} X_i \sum_{i=1}^{10} (X_i Y_i)}{D} = \text{.............................} \ [......]$$
- $$B = \frac{10 \sum_{i=1}^{10} (X_i Y_i) - \sum_{i=1}^{10} X_i \sum_{i=1}^{10} Y_i}{D} = \text{.............................} \ [......]$$

Masa m_i (X_i) $(\pm$ ......$)$ [......]	**Deformación** (Y_i) $(\pm$ ......$)$ [......]	$e_i = Y_i - (BX_i + A)$ [......]	e_i^2 [......]

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} e_i^2}{10}} = \text{................}[......]$$

$$\sigma_B \approx \sigma_Y \sqrt{\frac{10}{D}} \quad \longrightarrow \quad \sigma_B \approx \text{................}[......]$$

de forma que:

$$E_B = \frac{\sigma_B}{\sqrt{10}} \quad \longrightarrow \quad E_B = \text{................}[......]$$

$$\text{Pendiente} \Rightarrow B \pm E_B \quad \longrightarrow \quad B = (\text{................} \pm \text{................})[..........]$$

Sabiendo que la pendiente B obtenida es igual a $\frac{g}{k}$:

$$B = \frac{g}{k} \qquad \longrightarrow \qquad k = \frac{g}{B}$$

Como k se obtiene de una medición indirecta, para conocer su error asociado tenemos que utilizar la fórmula de cálculo de propagación de errores:

$$E_k = \left| \frac{\partial k}{\partial B} \right| |E_B| \qquad \longrightarrow \qquad E_k = \left| \frac{\quad}{\quad} \right| |E_B|$$

que en función de los valores ya obtenidos resulta:

$$E_k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[\ldots\ldots\ldots\ldots]$$

La constante elástica obtenida por el método estático, expresada correctamente es:

$$\mathbf{k_{est}} = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \pm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)[\ldots\ldots\ldots\ldots]$$

Método dinámico

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ [\ldots\ldots] \qquad \sum_{i=1}^{10} Y_i = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ [\ldots\ldots] \qquad \sum_{i=1}^{10} X_iY_i = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ [\ldots\ldots]$$

$$\sum_{i=1}^{10} (X_i)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ [\ldots\ldots] \qquad D = 10 \cdot \sum_{i=1}^{10} (X_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ [\ldots\ldots]$$

- $$A = \frac{\sum_{i=1}^{10}(X_i)^2 \sum_{i=1}^{10} Y_i - \sum_{i=1}^{10} X_i \sum_{i=1}^{10}(X_iY_i)}{D} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ [\ldots\ldots]$$
- $$B = \frac{10\sum_{i=1}^{10}(X_iY_i) - \sum_{i=1}^{10} X_i \sum_{i=1}^{10} Y_i}{D} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ [\ldots\ldots]$$

M_i (X_i) $(\pm\ldots\ldots)$ [......]	T_i^2 (Y_i) [......]	$e_i = Y_i - (BX_i + A)$ [......]	e_i^2 [......]

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} e_i^2}{10}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[\ldots\ldots]$$

$$\sigma_B \approx \sigma_Y \sqrt{\frac{10}{D}} \quad \longrightarrow \quad \sigma_B \approx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[\ldots\ldots]$$

de forma que:

$$E_B = \frac{\sigma_B}{\sqrt{10}} \quad \longrightarrow \quad E_B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[\ldots\ldots]$$

$$\text{Pendiente} \Rightarrow B \pm E_B \quad \longrightarrow \quad B = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \pm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)[\ldots\ldots\ldots\ldots]$$

Sabiendo que la pendiente B obtenida es igual a $\frac{4\pi^2}{k}$:

$$B = \frac{4\pi^2}{k} \quad \longrightarrow \quad k = \frac{4\pi^2}{B}$$

Como k se obtiene de una medición indirecta, para conocer su error asociado tenemos que utilizar la fórmula de cálculo de propagación de errores:

$$E_k = \left|\frac{\partial k}{\partial B}\right| |E_B| \qquad \longrightarrow \qquad E_k = \left|\text{———}\right| |E_B|$$

que en función de los valores ya obtenidos resulta:

$$E_k = ...[..........]$$

La constante elástica obtenida por el método dinámico, expresada correctamente es:

$$\mathbf{k_{din}} = (................ \pm ....)[..........]$$

- **Gráficos de ambos métodos**

Compare los resultados obtenidos para el valor de k por los dos métodos propuestos. Para esto, calcule el error relativo en k respecto del valor determinado en el método estático. Esto es:

$$e_{\%} = \frac{|k_{est} - k_{din}|}{k_{est}} \cdot 100$$

$$e_{\%} =$$

Al finalizar cada parte, o a continuación de los Resultados, debés incluir:

Análisis de resultados y conclusiones

Enfatizá qué metodos resultan más exactos y de mejor calidad, en función de los resultados obtenidos para tus mediciones directas e indirectas.

Hacé un análisis de sus resultados del experimento estadístico. ¿Se obtiene una distribución normal? ¿Se cumplen los postulados de Gauss? ¿Qué otras conclusiones podés sacar de repetir un experimento varias veces?

¿Qué método sugerirías para el cálculo experimental de k y por qué?

A modo de cierre, realizá una pequeña conclusión de lo experimentado/aprendido. Muchas gracias!