1. **向量空间的加法逆是唯一的，可以令-v是v的加法逆.**
2. **向量空间重要命题(证明可能用到)：**
3. **若a∈F, 则a0 = 0;**

**证：a0 = a(0+0) = a0 + a0, 两边加上a0的加法逆, 即:**

**a0 + (-a0) = 0 = a0 + a0 + (-a0) = a0 + 0 = a0，命题成立.**

1. **若v∈V，则0v = 0;**

**证：0v = (0+0)v = 0v + 0v, 两边加上0v的加法逆，即：**

**0v + (-0v) = 0 = 0v + 0v + (-0v) = 0v + 0 = 0v, 命题成立.**

1. **对每个v∈V， 都有-v = (-1)v**

**证：v + (-1)v = (1-1)v = 0, 即(-1)v是v的加法逆， 由加法逆唯一性， (-1)v = -v**

1. **向量空间V的子集U称为V的子空间， 若U（采用与V一样的加法和标量乘法）也是向量空间。**
2. **若U1, U2,…, Um是V的子空间， 则U1+U2+…+Um = {u1+u2+…+um: u1∈U1, u2∈U2, … , um∈Um}称为U1, U2 , … , Um的和。U1+U2+…+Um也是V的子空间。**
3. **若V中每个向量都可以唯一表示成u1+u2+…+um(uj∈Uj)，则V是子空间U1,U2,…,Um的直和，记为V = U1⊕U2⊕…⊕Um**
4. **我们可以通过证明0表示成适当向量的和时表示法不唯一，证明某个和不是直和，即假设U1,U2,…,Um是V的子空间，V = U1⊕U2⊕…⊕Um当且仅当**
5. **V = U1+U2+…+Um**
6. **若u1 + u2 + …+um = 0，uj∈Uj，则u1 = u2 = …=um = 0**
7. **向量空间V的两个子空间U和W， V = U⊕W当且仅当**
8. **V = U + W**
9. **{0} = U∩W**

**注意： 确认两个以上子空间是否可以直和，不能只验证任意两个子空间交为{0}是不够的，反例：U1 = {(x,y,0): x,y∈F}; U2 = {(0,0,z): z∈F}; U = {(0,y,y): y∈F}; U1,U2,U3是F3的和， 但不是之和，因为(0,0,0) = (x,y,0) + (0,0,z) + (0,0,0), 或(0,0,0) = (0,1,0) + (0,0,1) + (0,-1,-1)或(0,0,0) = (0,0,0) + (0,0,0)**

1. **我们声明V是F上的向量空间**
2. **（）表示长度为0的组**
3. **组和集合的区别：**
4. **组有顺序， 集合没有**
5. **组中元素可以重复， 集合不可以**
6. **张成和向量空间都是一个集合**
7. **V中任意一组向量的张成都是V的子空间**
8. **V的包含所有vj的子空间必包含span(v1,v2,…,vm)**
9. **加法单位元（0）是V的最小子空间；V是V的最大子空间**
10. **声明：空组（）的张成等于{0}**
11. **向量空间包含有限维和无限维，如：F（inf）是F上的无限维向量空间，F（n）是F上的有限维向量空间；P(F) = {a0+a1\*z1+a2\*z2^2+…+am\*z^m：ai 属于 F, z属于F}也是F上无限维向量空间**
12. **若span(v1,v2,…vm) = V, 则称(v1,v2,…vm)张成V；如果向量空间可以由他的一组向量张成， 则称其为有限维向量空间；不是有限维的向量空间成为无限维向量空间**
13. **对于V中一组向量(v1,…,vn), 若a1v1+…+anvn = 0（其中vj∈V,ai∈F）当且仅当a1 = … = an = 0, 则称(v1,…,vn)在V中线性无关。**
14. **（v1,v2,…,vm）线性无关当且仅当span(v1,v2,…,vm)中的每个向量都唯一的表示为（v1,v2,…,vm）的线性组合**

**证：**

1. **(充分性)假设vj∈span(v1,v2,…,vm)可以可以表示成vj = a1v1+a2v2+…+amvm和vj = b1v1 + … + bmvm，两者相减得0 = (a1-b1)v1 + … + (am-bm)vm, 又因为(v1,v2,…,vm)线性无关，所以a1-b1 = … = am – bm = 0, 充分条件得证；**
2. **（必要性）假设（v1,v2,…,vm）线性相关，即存在不全为0的aj使得0 = a1v1+a2v2+…+amvm, 但因为0又可以表示成b1v1 + … + bmvm当b1=b2=…=bm=0且0∈span(v1,v2,…,vm)(0是向量空间的单位元)，与假设“每个向量都唯一的表示为（v1,v2,…,vm）的线性组合”矛盾， 所以必要性得证。**
3. **V中的一组向量如果不是线性无关的，则为线性相关**
4. **长度为1的向量组（v）线性无关当且仅当v！=0；长度为2的向量组线性无关当且仅当其中一个向量是两外一个的标量倍；对于长度为3的向量组，即使其中一个都不是任何其他向量的标量倍， 这个向量组也可能是线性相关的**
5. **线性相关性引理（证明经常会用到）： 若(v1,v2,…vm)是V中一线性相关向量组，并且v1 != 0, 则存在j∈{2,3,…,m}，使得**
6. **vj∈span(v1,v2,…v(j-1))**
7. **去掉该向量， 则剩余组的张成不变**
8. **若从一个线性无关向量组去掉一些向量， 则剩余向量组还是线性无关（如何验证）；为使去掉所有向量后结论仍成立，我们声明：空组()是线性无关。**

**证： 假设线性无关向量组(v1,v2,…,vn)去掉其中一个向量vj(j∈{1,2,…n})后, 剩余向量组线性相关， 即存在不全为0的b1, b2, …,b(j-1),b(j+1),…bn, 使得b1v1 + b2v2 + … + b(j-1)v(j-1) + b(j+1) v(j+1) + … + bnvn = 0 (1), 有因为(v1,v2,…,vn)线性无关， 所以a1v1 + a2v2 + …anvn = 0 当且仅当 a1 = a2 = … = an = 0 (2) 。(2) – (1) 得到: (a1-b1)v1 + (a2-b2)v2 + … + [a(j-1)-b(j-1)]v(j-1) +ajvj+[a(j+1)-b(j+1)]v(j+1)+…+(am-bm)vm = 0. 又因为线性无关，所以a1-b1 = a2-b2 = … = a(j-1)-b(j-1) = aj = a(j+1)-b(j+1) = … = am-bm = 0，所以得出b1=b2=…=b(j-1)=b(j+1)=…=bn=0, 与假设矛盾，原命题成立。**

1. **若V中一组向量线性无关且张成V，则称这组向量为V的一组基(basis)**
2. **(向量组是V的一组基的充分必要条件) V的一组向量(v1,v2,…,vn)是V的一组基当且仅当对于每个u∈V,都能唯一的表示成：**

**v = a1v1 + a2v2 + …anvn**

**其中aj∈F**

1. **向量空间中， 每个张成组都可以化简成一个基；即任给一个张成组， 可以去掉其中的一些向量，使剩余的向量可以张成V并线性无关。**
2. **我们声明空组()张成{0}并且线性无关， 所以()是{0}的一组基**
3. **有限维向量空间V的任意一个线性无关组， 都可通过添加一些向量扩充成一个基。具体做法是：**

**假设(v1, v2, …, vm)是V的一个线性无关组， (w1, w2, …, wn)张成V；**

**第一步：若w1含于span(v1, v2, …, vm)中， 则令B = (v1, v2, …, vm)；否则， B = (v1, v2, …, vm, w1);**

**第j步：若wj含于span(B)中， 则B不变；否则， B 添加wj；**

**如此经过n步后，B线性无关并且添加到B中的任意wj都不包含于B中以前的诸向量的张成，因此B是V的一个基。**

1. **假设U是有限维向量空间V的一个子空间，则存在V的一个子空间W，使得V = U⊕W.**
2. **有限维向量空间任意两个基的长度相等。**

**证：设B1和B2是V的两个基， 则B1在V中线性无关，B2张成V，所以B1长度小于等于B2；同理， B2长度小于等于B1，所以B1长度等于B2。证毕。**

1. **有限维向量空间任意一个基的长度成为该向量空间的维数，记为dimV.**