**向量空间**

1. **组的长度是有限的，这个长度一定是非负整数。因此，形如(x1,x2,…)的对象不是组，或称其无限长度；长度为0的组形如()将其视为组，避免例外。**
2. **向量空间例子：**
3. **Fⁿ是定义在F上的向量空间，F∞是定义在F上的向量空间**
4. **函数p:F->F称为系数在F上的多项式（所以多项式的本质是函数），若存在a0, a1, …, am∈F，满足p(z) = a0 + a1z1 + a2z² + … + amzm, z∈F(注意：这里z是哑变量)。我们定义P(F)为系数在F上的所有多项式构成的集合。**
5. **加法：若p,q∈P(F), 则p+q定义为：(p+q)(z) = p(z) + q(z), z∈F;**
6. **标量乘法：若a∈F, p∈P(F), (ap)(z) = ap(z) , z∈F。**

**所以P(F)是系数定义在F上的向量空间**

1. **向量空间的加法逆是唯一的，可以令-v是v的加法逆.**
2. **向量空间重要命题(证明可能用到)：**
3. **若a∈F, 则a0 = 0;**

**证：a0 = a(0+0) = a0 + a0, 两边加上a0的加法逆, 即:**

**a0 + (-a0) = 0 = a0 + a0 + (-a0) = a0 + 0 = a0，命题成立.**

1. **若v∈V，则0v = 0;**

**证：0v = (0+0)v = 0v + 0v, 两边加上0v的加法逆，即：**

**0v + (-0v) = 0 = 0v + 0v + (-0v) = 0v + 0 = 0v, 命题成立.**

1. **对每个v∈V， 都有-v = (-1)v**

**证：v + (-1)v = (1-1)v = 0, 即(-1)v是v的加法逆， 由加法逆唯一性， (-1)v = -v**

1. **向量空间V的子集U称为V的子空间， 若U（采用与V一样的加法和标量乘法）也是向量空间。**
2. **若U1, U2,…, Um是V的子空间， 则U1+U2+…+Um = {u1+u2+…+um: u1∈U1, u2∈U2, … , um∈Um}称为U1, U2 , … , Um的和。U1+U2+…+Um也是V的子空间。**
3. **若V中每个向量都可以唯一表示成u1+u2+…+um(uj∈Uj)，则V是子空间U1,U2,…,Um的直和，记为V = U1⊕U2⊕…⊕Um**
4. **我们可以通过证明0表示成适当向量的和时表示法不唯一，证明某个和不是直和，即假设U1,U2,…,Um是V的子空间，V = U1⊕U2⊕…⊕Um当且仅当**
5. **V = U1+U2+…+Um**
6. **若u1 + u2 + …+um = 0，uj∈Uj，则u1 = u2 = …=um = 0**
7. **向量空间V的两个子空间U和W， V = U⊕W当且仅当**
8. **V = U + W**
9. **{0} = U∩W**

**注意： 确认两个以上子空间是否可以直和，不能只验证任意两个子空间交为{0}是不够的，反例：U1 = {(x,y,0): x,y∈F}; U2 = {(0,0,z): z∈F}; U = {(0,y,y): y∈F}; U1,U2,U3是F3的和， 但不是之和，因为(0,0,0) = (x,y,0) + (0,0,z) + (0,0,0), 或(0,0,0) = (0,1,0) + (0,0,1) + (0,-1,-1)或(0,0,0) = (0,0,0) + (0,0,0)**

1. **我们声明V是F上的向量空间**
2. **（）表示长度为0的组**
3. **组和集合的区别：**
4. **组有顺序， 集合没有**
5. **组中元素可以重复， 集合不可以**

**有限维向量空间**

1. **张成和向量空间都是一个集合**
2. **V中任意一组向量的张成都是V的子空间**
3. **V的包含所有vj的子空间必包含span(v1,v2,…,vm)**
4. **加法单位元（0）是V的最小子空间；V是V的最大子空间**
5. **声明：空组（）的张成等于{0}**
6. **向量空间包含有限维和无限维，如：F（inf）是F上的无限维向量空间，F（n）是F上的有限维向量空间；P(F) = {a0+a1\*z1+a2\*z2^2+…+am\*z^m：ai 属于 F, z属于F}也是F上无限维向量空间**
7. **若span(v1,v2,…vm) = V, 则称(v1,v2,…vm)张成V；如果向量空间可以由他的一组向量张成， 则称其为有限维向量空间；不是有限维的向量空间成为无限维向量空间**
8. **对于V中一组向量(v1,…,vn), 若a1v1+…+anvn = 0（其中vj∈V,ai∈F）当且仅当a1 = … = an = 0, 则称(v1,…,vn)在V中线性无关。**
9. **（v1,v2,…,vm）线性无关当且仅当span(v1,v2,…,vm)中的每个向量都唯一的表示为（v1,v2,…,vm）的线性组合**

**证：**

1. **(充分性)假设vj∈span(v1,v2,…,vm)可以可以表示成vj = a1v1+a2v2+…+amvm和vj = b1v1 + … + bmvm，两者相减得0 = (a1-b1)v1 + … + (am-bm)vm, 又因为(v1,v2,…,vm)线性无关，所以a1-b1 = … = am – bm = 0, 充分条件得证；**
2. **（必要性）假设（v1,v2,…,vm）线性相关，即存在不全为0的aj使得0 = a1v1+a2v2+…+amvm, 但因为0又可以表示成b1v1 + … + bmvm当b1=b2=…=bm=0且0∈span(v1,v2,…,vm)(0是向量空间的单位元)，与假设“每个向量都唯一的表示为（v1,v2,…,vm）的线性组合”矛盾， 所以必要性得证。**
3. **V中的一组向量如果不是线性无关的，则为线性相关**
4. **长度为1的向量组（v）线性无关当且仅当v！=0；长度为2的向量组线性无关当且仅当其中一个向量是两外一个的标量倍；对于长度为3的向量组，即使其中一个都不是任何其他向量的标量倍， 这个向量组也可能是线性相关的**
5. **线性相关性引理（证明经常会用到）： 若(v1,v2,…vm)是V中一线性相关向量组，并且v1 != 0, 则存在j∈{2,3,…,m}，使得**
6. **vj∈span(v1,v2,…v(j-1))**
7. **去掉该向量， 则剩余组的张成不变**
8. **有限维限量空间中，线性无关向量组的长度小于或等于张成向量组的长度。**
9. **有限维向量空间的子空间也是有限维的。**
10. **若从一个线性无关向量组去掉一些向量， 则剩余向量组还是线性无关（如何验证）；为使去掉所有向量后结论仍成立，我们声明：空组()是线性无关。**

**证： 假设线性无关向量组(v1,v2,…,vn)去掉其中一个向量vj(j∈{1,2,…n})后, 剩余向量组线性相关， 即存在不全为0的b1, b2, …,b(j-1),b(j+1),…bn, 使得b1v1 + b2v2 + … + b(j-1)v(j-1) + b(j+1) v(j+1) + … + bnvn = 0 (1), 有因为(v1,v2,…,vn)线性无关， 所以a1v1 + a2v2 + …anvn = 0 当且仅当 a1 = a2 = … = an = 0 (2) 。(2) – (1) 得到: (a1-b1)v1 + (a2-b2)v2 + … + [a(j-1)-b(j-1)]v(j-1) +ajvj+[a(j+1)-b(j+1)]v(j+1)+…+(am-bm)vm = 0. 又因为线性无关，所以a1-b1 = a2-b2 = … = a(j-1)-b(j-1) = aj = a(j+1)-b(j+1) = … = am-bm = 0，所以得出b1=b2=…=b(j-1)=b(j+1)=…=bn=0, 与假设矛盾，原命题成立。**

1. **若V中一组向量线性无关且张成V，则称这组向量为V的一组基(basis)**
2. **(向量组是V的一组基的充分必要条件) V的一组向量(v1,v2,…,vn)是V的一组基当且仅当对于每个u∈V,都能唯一的表示成：**

**v = a1v1 + a2v2 + …anvn**

**其中aj∈F**

1. **每个有限向量空间都有基。**
2. **向量空间中， 每个张成组都可以化简成一个基；即任给一个张成组， 可以去掉其中的一些向量，使剩余的向量可以张成V并线性无关。**
3. **我们声明空组()张成{0}并且线性无关， 所以()是{0}的一组基**
4. **有限维向量空间V的任意一个线性无关组， 都可通过添加一些向量扩充成一个基。具体做法是：**

**假设(v1, v2, …, vm)是V的一个线性无关组， (w1, w2, …, wn)张成V；**

**第一步：若w1含于span(v1, v2, …, vm)中， 则令B = (v1, v2, …, vm)；否则， B = (v1, v2, …, vm, w1);**

**第j步：若wj含于span(B)中， 则B不变；否则， B 添加wj；**

**如此经过n步后，B线性无关并且添加到B中的任意wj都不包含于B中以前的诸向量的张成，因此B是V的一个基。**

1. **假设U是有限维向量空间V的一个子空间，则存在V的一个子空间W，使得V = U⊕W.**

**证：（这是本人想出来的证明方法，教程证明参考P30。这里本人有个疑问， 为什么要证明v = u+w (u∈U,w∈W,v∈V)，因为这是显而易见的，因为u∈U ⊂ V, w∈W⊂ V, 所以u + w是V的其中两个向量相加，根据V对加法封闭，这是显然成立的。这里存一个疑问；还有一点，漏证明了V和U都有基，基于V和U都是有限维的向量空间）**

1. **先构造W。假设(v1,v2,…,vn)是V的一个基, (u1,u2,…,um)是U的一个基，因为(u1,u2,…,um)线性无关，所以可以扩充为V的一个基。又假设(w1,w2,…,wl)是V的一个张成组，现在开始扩充(u1,u2,…,um)为V的基。第一步：若w1含于span(u1,u2,…,um)，即U，则令B = (v1,v2,…,vn)；否则，B = (v1,v2,…,vn,w1);**

**第j步：若w1含于span(B)，则B不变；否则，用wj来扩充B;**

**经过n-m+1步后，B是V的一个基。设B = (u1,u2,…,um,w(k1),w(k2),…,w[k(n-m+1)]), 令W = span(B), 现在证明V = U⊕W。**

1. **因为U,W是V的子空间, 所以V = U + W成立，下面证明{0} = U∩W。假设vj ∈ U∩W，则vj可以唯一的表示成a1u1+a2u2+…amum (a)，同样道理，vj 可唯一表示成b1w(k1)+…+b(n-m+1) w[k(n-m+1)] (b)，(a)-(b)得 a1u1+a2u2+…amum - b1w(k1) - … - b(n-m+1) w[k(n-m+1)] = 0；又因为(u1,u2,…,um,w(k1),w(k2),…,w[k(n-m+1)])线性无关，所以a1 = a2 = …= am = -b1 = -b2 = … = - b(n-m+1) = 0。即vj = 0，所以{0} = U∩W，命题得证。**
2. **有限维向量空间任意两个基的长度相等。**

**证：设B1和B2是V的两个基， 则B1在V中线性无关，B2张成V，所以B1长度小于等于B2；同理， B2长度小于等于B1，所以B1长度等于B2。证毕。**

1. **有限维向量空间任意一个基的长度成为该向量空间的维数，记为dimV.**
2. **若向量空间V是有限维的， 则每个长度为dimV的线性无关向量组都是他的一个基。**
3. **若U和W是有限维向量空间的子空间，则dim(U+W) = dimU + dimW – dim(U∩W)。（回去写一下证明过程）**
4. **(该命题很好地表示了维数和直和的关系，后边几章将会用到该结果)假设V是有限维向量空间，U1,U2,…,Um是他的子空间，满足**
5. **V = U1 + U2 + … + Um**
6. **dimV = dimU1 + dimU2 + … + dimUm**

**则V = U1 ⊕ U2 ⊕ … ⊕ Um**

**（回去写一下证明过程）**

**线性映射**

1. **从V到W的线性映射是一个函数，记为T:V->W，它满足加性: T(v+u) = Tv+Tu和齐性: T(av) = aTv.**
2. **L(V,W)是从V到W的线性映射的集合。**
3. **从V到W的线性映射的例子：**
4. **零映射：0(v) = 0，0∈L(V,W),他把V的每个向量都映射成W的加法单位元。**

**证：0(v+u) = 0 = 0+0 = 0(u) + 0(v), 所以加性得证；0(av) = 0 = a0 = a0(v), 齐性得证。所以零映射是V到W的线性映射。**

1. **恒等映射：Iv = v, I∈L(V,V), 把V中每个向量映射成自身。**
2. **微分映射：T(p) = p′, T∈L(P(R), P(R))**
3. **积分映射：Tp = ∫01p(x)dx, T∈L(P(R), R)**
4. **x2乘：(Tp)(x) = x2 p(x), T∈L(P(R), P(R))**
5. **T：Fn→Fm：设n和m是正整数，aj,k∈F, j∈{1,2,…,m}, k∈{1,2,…,n},定义T：Fn→Fm如下：**

**T(x1,x2,…,xn) = (a1,1x1 + a1,2x2 + … + a1,nxn , a2,1x1 + a2,2x2 + … + a2,nxn, … , am,1x1 + am,2x2 + … + am,nxn)**

1. **定义T(a1v1+a2v2+…+anvn) = a1w1+a2w2+…+anwn, (v1,v2,…,vn)是V的一个基, w1,w2,…,wn∈W,a1,a2…,an∈F,证明T是V到W的线性映射并且Tvj = wj, j∈{1,2,…,n}。**

**证明：**

1. **先证明T是V到W的线性映射。设v,u∈V, 则v和u可表示成：v = a1v1+a2v2+…+anvn, u = b1v1+b2v2+…+bnvn；T(u+v) = T(a1v1+a2v2+…+anvn+ b1v1+b2v2+…+bnvn) = T((a1+b1)v1+(a2+b2)v2+…+(an+bn)vn) =(a1+b1)w1 + (a2+b2)w2 + … + (an+bn)wn = a1w1 + a2w2 + … + anwn + b1v1 + … + bnvn = T(u) + T(v)， 所以加性成立；T(bv) = T(ba1v1+ba2v2+…+banvn) = ba1w1+ba2w2+…+banwn = bT(u), 所以齐性成立；所以T是V到W的线性映射；**
2. **再证明Tvj = wj。设v∈V，则v可表示成v = a1v1+a2v2+…+anvn，所以Tv = T(a1v1+a2v2+…+anvn) = a1Tv1 + a2Tv2 + … + anTvn(加性和齐性) = a1w1+a2w2+…+anwn，所以Tv1 = w1, Tv2 = w2, … , Tvn = wn,命题得证。**
3. **L(V,W)是向量空间，加法单位元是零映射。加法定义为：(S+T)v = Sv+Tv。标量乘法定义：(aT)v = a(Tv)。线性映射ST定义为：假设T∈L(U,V),S∈L(V,W),则(ST)v = S(Tv).注意：这里只有当T映射到S的定义域内，ST才有意义。因为只有这样，S(Tv)才有意义。**
4. **线性映射的乘法不是交换的，即ST = TS未必成立，即便ST和TS有意义.反例：设T∈L(P(R), P(R))是微分映射，S∈L(P(R), P(R))是x2乘映射，则**

**((ST)p)(x) = S((Tp)(x)) = S(p′(x)) = x2 p′(x),**

**((TS)p)(x) = T((Sp)(x)) = T(x2 p(x)) = (x2 p(x))′ = x2 p′(x) + 2x p(x)**

**两者明显不相等。**

1. **零空间：对于T∈L(V,W), 向量空间V中被T映射成0的向量所组成的子集称为T的零空间。即nullT = {v∈V : Tv = 0, T∈L(V,W)}**
2. **若T∈L(V,W)，则nullT是V的子空间。**

**证：由定义可知nullT是V的子集。**

1. **~~先证明0∈nullT，即T(0) = 0。假设(v1,v2,…,vn)是V的一个基，0可以唯一标识成：0 = a1v1+a2v2+…+anvn.所以T(0) = T(a1v1+a2v2+…+anvn) = a1Tv1+a2Tv2+…+anTvn.又因为v1,v2,…vn线性无关，所以a1=a2=…=an=0，即T(a1v1+a2v2+…+anvn)=0.所以0∈nullT.~~**

**先证明0∈nullT.T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0)；两边加上T(0)的逆得T(0)=0,所以0∈nullT。**

1. **证明加法封闭，即当u∈nullT, v∈nullT时 ，u+v∈nullT。由条件得知Tu=0，Tv=0，则T(u+v) = Tu + Tv = 0，所以u+v∈nullT，加法封闭成立。**
2. **证明标量乘法封闭，即当u∈nullT，a∈F时，au∈nullT。由条件得知Tu=0，则T(au) = aTu = 0, 所以au∈nullT，标量乘法成立。**

**所以nullT是V的子空间。**

1. **线性映射T:V->W，当u∈V,v∈V,Tu = Tv时，有u=v，则称T为单映射(one-to-one)。**
2. **假设T∈L(V,W)，则T是单映射当且仅当nullT={0}。为了验证线性映射是单映射，只需验证0是唯一映射为0的向量。**

**证：**

1. **~~先证充分性，即T是单的得nullT={0}。由条件得Tu = Tv =>u = v。Tu-Tv=0=T(u-v)=T(0)，即0是唯一映射成0的向量，充分性得证；~~**

**先证充分性。假设v∈nullT，则Tv = 0 = T(0),因为T是单映射，所以v=0，充分性得证。**

1. **再证必要性，即nullT={0}得T是单的。因为Tu = Tv，所以Tu – Tv = 0 = T(u-v)，又因为0是唯一一个映射成0的向量，所以T(u-v) = T(0) = 0，于是u-v含于nullT={0}中，所以u=v，必要性得证。**

**微分，x2乘和后向移位，只有x2乘是单映射。**

1. **假设T∈L(V,W)，由向量Tv∈W组成的子集称为T的值域，即rangeT = {Tv :v∈V }**
2. **若T∈L(V,W),则rangeT是W的子空间。**

**证：由定义可知rangeT是W的子集**

1. **先证明加法单位元0∈rangeT.** **因为nullT是V的子空间，所以所有v∈nullT的向量都能映射成W的加法单位元，所以0∈rangeT得证；**
2. **下面证明加法封闭，即当w1,w2∈rangeT时，有w1+w2∈rangeT.因为  
   T是V到W的映射，所以存在u,v∈V,使得Tu = w1, Tv = w2,因为V对加法封闭，所以u+v∈V，所以T(u+v) = Tu + Tv = w1＋w2∈rangeT，所以rangeT对加法封闭。**
3. **最后证对标量乘法封闭，即当w∈rangeT, a∈F,有aw∈rangeT.因为T是V到W的映射，所以存在v∈V使得Tv =w.有因为V对标量乘法封闭，所以av∈V，所以有T(av) = aTv = aw ∈rangeT,所以rangeT对标量乘法封闭。**

**所以rangeT是W的子空间。**

1. **若线性映射T:V->W的值域等于W，则称T是满映射。**

**如：x2乘映射不是满映射，因为他的值域rangT={ a0z² + … + a**m-2 **zm:aj∈R,z∈F}是P(R)的子空间；微分映射是满映射， 因为他的值域是P(R)；向后移位是满映射， 因为他的值域是P(R)。**

1. **T:V->W是否满与目标空间有关。例如微分映射T∈L(Pm(R),Pm(R))不是满的，因为T的值域不是Pm(R)；但是微分映射T∈L(Pm(R),Pm-1(R))是满的，因为T的值域等于目标空间Pm-1(R)。**
2. **有限维向量空间上的线性映射的零映射的维数加上值域的维数等于定义域的维数。即**

**定理：若V是有限维向量空间，并且T∈L(V,W)，则rangeT是W的有限维子空间，并且dimV = dimnullT + dimrangeT。**

**证：**

**(1) 先证rangeT是W的有限维子空间。有上述例子可知rangeT是W的子空间，下面证它是有限维的。假设(v1 ,v2,…,vn)是V的一个基,则存在一个向量组(w1 ,w2,…,wn)∈rangeT,使得wj = Tvj,其中j∈{1,2,…,n}。则V中任意向量v可以表示为v = a1v1+a2v2+...+anvn,所以存在向量w∈rangeT，使得w = Tv = T(a1v1+a2v2+...+anvn) = a1Tv1+a2Tv2+...+anTvn = a1w1+a2w2+...+anwn，即rangeT中任意向量都可以由(w1 ,w2,…,wn)线性表示，即(w1 ,w2,…,wn)张成rangeT，所以rangeT是有限维。**

**(2) 再证dimV = dimnullT + dimrangeT。 假设(v1 ,v2,…,vn)张成V，(w1 ,w2,…,wm)是nullT的一个基，则(w1 ,w2,…,wm)线性无关，我们可以添加(v1 ,v2,…,vn)里一些的元素，使得(w1 ,w2,…,wm)可以扩展成V的一个基.**

**第一步， 若v1 ∈span(w1 ,w2,…,wm),则令B = (w1 ,w2,…,wm)，否则，B = (w1 ,w2,…,wm,v1 );**

**第j步， 若 vj ∈ span(B), 则B不变， 否则用vj 来扩展B。设扩展后的向量组为(w1 ,w2,…,wm , v1’，v2’ ，… , vr’)，则它为V的一个基.**

**因为(w1 ,w2,…,wm , v1’，v2’ ，… , vr’)是V的基，所以V的任意一个向量v都可以被w1 ,w2,…,wm , v1’，v2’ ，… , vr’ 线性表示.令v = a1w1+a2w2+...+b1v1’+b2v2’ +...+brvr’ ,则Tv = a1Tw1+a2Tw2+...+b1Tv1’+b2Tv2’ +...+brTvr’ = b1Tv1’+b2Tv2’ +...+brTvr’ (因为vj∈nullT), 即任意w∈rangeT都可以被Tv1’，Tv2’ ，...，Tvr’线性表示, 所以(Tv1’，Tv2’ ，...，Tvr’)张成rangeT。下面证(Tv1’，Tv2’ ，...，Tvr’)线性无关。假设c1,c2,…,cr∈F, 使得0 = c1Tv1’+c2Tv2’ +...+crTvr’ (1)，则0 = c1Tv1’+c2Tv2’ +...+crTvr’ = T(c1v1’+c2v2’+...+crvr’), 所以c1v1’+c2v2’+...+crvr’ ∈nullT。又因为(w1 ,w2,…,wm)是nullT的一个基，所以c1v1’+c2v2’+...+crvr’ 可以由 w1 ,w2,…,wm线性表示,即存在d1,d2,…,dm∈F,使得c1v1’+c2v2’+...+crvr’ = d1w1+d2w2+...+dmwm .有因为(w1 ,w2,…,wm , v1’，v2’ ，… , vr’)线性无关，所以c1=c2=...=cr=d1=d2=...=dm=0 (2) . 有(1)和(2)得Tv1’，Tv2’ ，...，Tvr’线性无关，所以(Tv1’，Tv2’ ，...，Tvr’)是rangeT的一个基。原名题成立， 即dimV = dimnullT + dimrangeT.**

1. **从一个有限维向量空间到更小的空间的线性映射不可能是单映射，这里更小用维数衡量。即：若V和W都是有限维向量空间，且dimV>dimW, 则V到W的映射一定不是单映射。**

**证：因为T是V到W的映射， 所以有dimV = dimnullT + dimrangeT，又因为dimV > dimW且rangeT是W的子空间，所以dimV >= dimrangeT,即dimnullT > 0,即nullT的基长度>0, 即V中至少有dimnullT个向量映射成0，所以与Tv = Tw有v = w矛盾， 所以V到W的映射一定不是单映射。**

1. **从一个有限维向量空间到更大的空间的映射不可能是满映射，这里更大用维数衡量 。即：若V和W都是有限维向量空间，且dimV<dimW, 则V到W的映射一定不是满映射。**