**向量空间**

1. **向量空间例子：**
2. **Fⁿ是定义在F上的向量空间，F∞是定义在F上的向量空间**
3. **函数p:F->F称为系数在F上的多项式（所以多项式的本质是函数），若存在a0, a1, …, am∈F，满足p(z) = a0 + a1z1 + a2z² + … + amzm, z∈F(注意：这里z是哑变量)。我们定义P(F)为系数在F上的所有多项式构成的集合。**
4. **加法：若p,q∈P(F), 则p+q定义为：(p+q)(z) = p(z) + q(z), z∈F;**
5. **标量乘法：若a∈F, p∈P(F), (ap)(z) = ap(z) , z∈F。**

**所以P(F)是系数定义在F上的向量空间**

1. **向量空间的加法逆是唯一的，可以令-v是v的加法逆.**
2. **向量空间重要命题(证明可能用到)：**
3. **若a∈F, 则a0 = 0;**

**证：a0 = a(0+0) = a0 + a0, 两边加上a0的加法逆, 即:**

**a0 + (-a0) = 0 = a0 + a0 + (-a0) = a0 + 0 = a0，命题成立.**

1. **若v∈V，则0v = 0;**

**证：0v = (0+0)v = 0v + 0v, 两边加上0v的加法逆，即：**

**0v + (-0v) = 0 = 0v + 0v + (-0v) = 0v + 0 = 0v, 命题成立.**

1. **对每个v∈V， 都有-v = (-1)v**

**证：v + (-1)v = (1-1)v = 0, 即(-1)v是v的加法逆， 由加法逆唯一性， (-1)v = -v**

1. **向量空间V的子集U称为V的子空间， 若U（采用与V一样的加法和标量乘法）也是向量空间。**
2. **若U1, U2,…, Um是V的子空间， 则U1+U2+…+Um = {u1+u2+…+um: u1∈U1, u2∈U2, … , um∈Um}称为U1, U2 , … , Um的和。U1+U2+…+Um也是V的子空间。**
3. **若V中每个向量都可以唯一表示成u1+u2+…+um(uj∈Uj)，则V是子空间U1,U2,…,Um的直和，记为V = U1⊕U2⊕…⊕Um**
4. **我们可以通过证明0表示成适当向量的和时表示法不唯一，证明某个和不是直和，即假设U1,U2,…,Um是V的子空间，V = U1⊕U2⊕…⊕Um当且仅当**
5. **V = U1+U2+…+Um**
6. **若u1 + u2 + …+um = 0，uj∈Uj，则u1 = u2 = …=um = 0**
7. **向量空间V的两个子空间U和W， V = U⊕W当且仅当**
8. **V = U + W**
9. **{0} = U∩W**

**注意： 确认两个以上子空间是否可以直和，不能只验证任意两个子空间交为{0}是不够的，反例：U1 = {(x,y,0): x,y∈F}; U2 = {(0,0,z): z∈F}; U = {(0,y,y): y∈F}; U1,U2,U3是F3的和， 但不是之和，因为(0,0,0) = (x,y,0) + (0,0,z) + (0,0,0), 或(0,0,0) = (0,1,0) + (0,0,1) + (0,-1,-1)或(0,0,0) = (0,0,0) + (0,0,0)**

1. **我们声明V是F上的向量空间**
2. **（）表示长度为0的组**
3. **组和集合的区别：**
4. **组有顺序， 集合没有**
5. **组中元素可以重复， 集合不可以**

**有限维向量空间**

1. **张成和向量空间都是一个集合**
2. **V中任意一组向量的张成都是V的子空间**
3. **V的包含所有vj的子空间必包含span(v1,v2,…,vm)**
4. **加法单位元（0）是V的最小子空间；V是V的最大子空间**
5. **声明：空组（）的张成等于{0}**
6. **向量空间包含有限维和无限维，如：F（inf）是F上的无限维向量空间，F（n）是F上的有限维向量空间；P(F) = {a0+a1\*z1+a2\*z2^2+…+am\*z^m：ai 属于 F, z属于F}也是F上无限维向量空间**
7. **若span(v1,v2,…vm) = V, 则称(v1,v2,…vm)张成V；如果向量空间可以由他的一组向量张成， 则称其为有限维向量空间；不是有限维的向量空间成为无限维向量空间**
8. **对于V中一组向量(v1,…,vn), 若a1v1+…+anvn = 0（其中vj∈V,ai∈F）当且仅当a1 = … = an = 0, 则称(v1,…,vn)在V中线性无关。**
9. **（v1,v2,…,vm）线性无关当且仅当span(v1,v2,…,vm)中的每个向量都唯一的表示为（v1,v2,…,vm）的线性组合**

**证：**

1. **(充分性)假设vj∈span(v1,v2,…,vm)可以可以表示成vj = a1v1+a2v2+…+amvm和vj = b1v1 + … + bmvm，两者相减得0 = (a1-b1)v1 + … + (am-bm)vm, 又因为(v1,v2,…,vm)线性无关，所以a1-b1 = … = am – bm = 0, 充分条件得证；**
2. **（必要性）假设（v1,v2,…,vm）线性相关，即存在不全为0的aj使得0 = a1v1+a2v2+…+amvm, 但因为0又可以表示成b1v1 + … + bmvm当b1=b2=…=bm=0且0∈span(v1,v2,…,vm)(0是向量空间的单位元)，与假设“每个向量都唯一的表示为（v1,v2,…,vm）的线性组合”矛盾， 所以必要性得证。**
3. **V中的一组向量如果不是线性无关的，则为线性相关**
4. **长度为1的向量组（v）线性无关当且仅当v！=0；长度为2的向量组线性无关当且仅当其中一个向量是两外一个的标量倍；对于长度为3的向量组，即使其中一个都不是任何其他向量的标量倍， 这个向量组也可能是线性相关的**
5. **线性相关性引理（证明经常会用到）： 若(v1,v2,…vm)是V中一线性相关向量组，并且v1 != 0, 则存在j∈{2,3,…,m}，使得**
6. **vj∈span(v1,v2,…v(j-1))**
7. **去掉该向量， 则剩余组的张成不变**
8. **有限维限量空间中，线性无关向量组的长度小于或等于张成向量组的长度。**
9. **有限维向量空间的子空间也是有限维的。**
10. **若从一个线性无关向量组去掉一些向量， 则剩余向量组还是线性无关（如何验证）；为使去掉所有向量后结论仍成立，我们声明：空组()是线性无关。**

**证： 假设线性无关向量组(v1,v2,…,vn)去掉其中一个向量vj(j∈{1,2,…n})后, 剩余向量组线性相关， 即存在不全为0的b1, b2, …,b(j-1),b(j+1),…bn, 使得b1v1 + b2v2 + … + b(j-1)v(j-1) + b(j+1) v(j+1) + … + bnvn = 0 (1), 有因为(v1,v2,…,vn)线性无关， 所以a1v1 + a2v2 + …anvn = 0 当且仅当 a1 = a2 = … = an = 0 (2) 。(2) – (1) 得到: (a1-b1)v1 + (a2-b2)v2 + … + [a(j-1)-b(j-1)]v(j-1) +ajvj+[a(j+1)-b(j+1)]v(j+1)+…+(am-bm)vm = 0. 又因为线性无关，所以a1-b1 = a2-b2 = … = a(j-1)-b(j-1) = aj = a(j+1)-b(j+1) = … = am-bm = 0，所以得出b1=b2=…=b(j-1)=b(j+1)=…=bn=0, 与假设矛盾，原命题成立。**

1. **若V中一组向量线性无关且张成V，则称这组向量为V的一组基(basis)**
2. **(向量组是V的一组基的充分必要条件) V的一组向量(v1,v2,…,vn)是V的一组基当且仅当对于每个u∈V,都能唯一的表示成：**

**v = a1v1 + a2v2 + …anvn**

**其中aj∈F**

1. **每个有限向量空间都有基。**
2. **向量空间中， 每个张成组都可以化简成一个基；即任给一个张成组， 可以去掉其中的一些向量，使剩余的向量可以张成V并线性无关。**
3. **我们声明空组()张成{0}并且线性无关， 所以()是{0}的一组基**
4. **有限维向量空间V的任意一个线性无关组， 都可通过添加一些向量扩充成一个基。具体做法是：**

**假设(v1, v2, …, vm)是V的一个线性无关组， (w1, w2, …, wn)张成V；**

**第一步：若w1含于span(v1, v2, …, vm)中， 则令B = (v1, v2, …, vm)；否则， B = (v1, v2, …, vm, w1);**

**第j步：若wj含于span(B)中， 则B不变；否则， B 添加wj；**

**如此经过n步后，B线性无关并且添加到B中的任意wj都不包含于B中以前的诸向量的张成，因此B是V的一个基。**

1. **假设U是有限维向量空间V的一个子空间，则存在V的一个子空间W，使得V = U⊕W.**

**证：（这是本人想出来的证明方法，教程证明参考P30。这里本人有个疑问， 为什么要证明v = u+w (u∈U,w∈W,v∈V)，因为这是显而易见的，因为u∈U ⊂ V, w∈W⊂ V, 所以u + w是V的其中两个向量相加，根据V对加法封闭，这是显然成立的。这里存一个疑问；还有一点，漏证明了V和U都有基，基于V和U都是有限维的向量空间）**

1. **先构造W。假设(v1,v2,…,vn)是V的一个基, (u1,u2,…,um)是U的一个基，因为(u1,u2,…,um)线性无关，所以可以扩充为V的一个基。又假设(w1,w2,…,wl)是V的一个张成组，现在开始扩充(u1,u2,…,um)为V的基。第一步：若w1含于span(u1,u2,…,um)，即U，则令B = (v1,v2,…,vn)；否则，B = (v1,v2,…,vn,w1);**

**第j步：若w1含于span(B)，则B不变；否则，用wj来扩充B;**

**经过n-m+1步后，B是V的一个基。设B = (u1,u2,…,um,w(k1),w(k2),…,w[k(n-m+1)]), 令W = span(B), 现在证明V = U⊕W。**

1. **因为U,W是V的子空间, 所以V = U + W成立，下面证明{0} = U∩W。假设vj ∈ U∩W，则vj可以唯一的表示成a1u1+a2u2+…amum (a)，同样道理，vj 可唯一表示成b1w(k1)+…+b(n-m+1) w[k(n-m+1)] (b)，(a)-(b)得 a1u1+a2u2+…amum - b1w(k1) - … - b(n-m+1) w[k(n-m+1)] = 0；又因为(u1,u2,…,um,w(k1),w(k2),…,w[k(n-m+1)])线性无关，所以a1 = a2 = …= am = -b1 = -b2 = … = - b(n-m+1) = 0。即vj = 0，所以{0} = U∩W，命题得证。**
2. **有限维向量空间任意两个基的长度相等。**

**证：设B1和B2是V的两个基， 则B1在V中线性无关，B2张成V，所以B1长度小于等于B2；同理， B2长度小于等于B1，所以B1长度等于B2。证毕。**

1. **有限维向量空间任意一个基的长度成为该向量空间的维数，记为dimV.**
2. **若向量空间V是有限维的， 则每个长度为dimV的线性无关向量组都是他的一个基。**
3. **若U和W是有限维向量空间的子空间，则dim(U+W) = dimU + dimW – dim(U∩W)。（回去写一下证明过程）**
4. **(该命题很好地表示了维数和直和的关系，后边几章将会用到该结果)假设V是有限维向量空间，U1,U2,…,Um是他的子空间，满足**
5. **V = U1 + U2 + … + Um**
6. **dimV = dimU1 + dimU2 + … + dimUm**

**则V = U1 ⊕ U2 ⊕ … ⊕ Um**

**（回去写一下证明过程）**

**线性映射**

1. **从V到W的线性映射是一个函数，记为T:V->W，它满足加性: T(v+u) = Tv+Tu和齐性: T(av) = aTv.**
2. **L(V,W)是从V到W的线性映射的集合。**
3. **从V到W的线性映射的例子：**
4. **零映射：0(v) = 0，0∈L(V,W),他把V的每个向量都映射成W的加法单位元。**

**证：0(v+u) = 0 = 0+0 = 0(u) + 0(v), 所以加性得证；0(av) = 0 = a0 = a0(v), 齐性得证。所以零映射是V到W的线性映射。**

1. **恒等映射：Iv = v, I∈L(V,V), 把V中每个向量映射成自身。**
2. **微分映射：T(p) = p′, T∈L(P(R), P(R))**
3. **积分映射：Tp = ∫01p(x)dx, T∈L(P(R), R)**
4. **x2乘：(Tp)(x) = x2 p(x), T∈L(P(R), P(R))**
5. **定义T(a1v1+a2v2+…+anvn) = a1w1+a2w2+…+anwn, (v1,v2,…,vn)是V的一个基, w1,w2,…,wn∈W,a1,a2…,an∈F,证明T是V到W的线性映射并且Tvj = wj, j∈{1,2,…,n}。**

**证明：**

1. **先证明T是V到W的线性映射。设v,u∈V, 则v和u可表示成：v = a1v1+a2v2+…+anvn, u = b1v1+b2v2+…+bnvn；T(u+v) = T(a1v1+a2v2+…+anvn+ b1v1+b2v2+…+bnvn) = T((a1+b1)v1+(a2+b2)v2+…+(an+bn)vn) =(a1+b1)w1 + (a2+b2)w2 + … + (an+bn)wn = a1w1 + a2w2 + … + anwn + b1v1 + … + bnvn = T(u) + T(v)， 所以加性成立；T(bv) = T(ba1v1+ba2v2+…+banvn) = ba1w1+ba2w2+…+banwn = bT(u), 所以齐性成立；所以T是V到W的线性映射；**
2. **再证明Tvj = wj。设v∈V，则v可表示成v = a1v1+a2v2+…+anvn，所以Tv = T(a1v1+a2v2+…+anvn) = a1Tv1 + a2Tv2 + … + anTvn(加性和齐性) = a1w1+a2w2+…+anwn，所以Tv1 = w1, Tv2 = w2, … , Tvn = wn,命题得证。**
3. **L(V,W)是向量空间，加法单位元是零映射。加法定义为：(S+T)v = Sv+Tv。标量乘法定义：(aT)v = a(Tv)。线性映射ST定义为：假设T∈L(U,V),S∈L(V,W),则(ST)v = S(Tv).注意：这里只有当T映射到S的定义域内，ST才有意义。因为只有这样，S(Tv)才有意义。**
4. **线性映射的乘法不是交换的，即ST = TS未必成立，即便ST和TS有意义.反例：设T∈L(P(R), P(R))是微分映射，S∈L(P(R), P(R))是x2乘映射，则**

**((ST)p)(x) = S((Tp)(x)) = S(p′(x)) = x2 p′(x),**

**((TS)p)(x) = T((Sp)(x)) = T(x2 p(x)) = (x2 p(x))′ = x2 p′(x) + 2x p(x)**

**两者明显不相等。**

1. **零空间：对于T∈L(V,W), 向量空间V中被T映射成0的向量所组成的子集称为T的零空间。即nullT = {v∈V : Tv = 0, T∈L(V,W)}**
2. **若T∈L(V,W)，则nullT是V的子空间。**

**证：由定义可知nullT是V的子集。**

1. **~~先证明0∈nullT，即T(0) = 0。假设(v1,v2,…,vn)是V的一个基，0可以唯一标识成：0 = a1v1+a2v2+…+anvn.所以T(0) = T(a1v1+a2v2+…+anvn) = a1Tv1+a2Tv2+…+anTvn.又因为v1,v2,…vn线性无关，所以a1=a2=…=an=0，即T(a1v1+a2v2+…+anvn)=0.所以0∈nullT.~~**

**先证明0∈nullT.T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0)；两边加上T(0)的逆得T(0)=0,所以0∈nullT。**

1. **证明加法封闭，即当u∈nullT, v∈nullT时 ，u+v∈nullT。由条件得知Tu=0，Tv=0，则T(u+v) = Tu + Tv = 0，所以u+v∈nullT，加法封闭成立。**
2. **证明标量乘法封闭，即当u∈nullT，a∈F时，au∈nullT。由条件得知Tu=0，则T(au) = aTu = 0, 所以au∈nullT，标量乘法成立。**

**所以nullT是V的子空间。**

1. **线性映射T:V->W，当u∈V,v∈V,Tu = Tv时，有u=v，则称T为单映射(one-to-one)。**
2. **假设T∈L(V,W)，则T是单映射当且仅当nullT={0}。为了验证线性映射是单映射，只需验证0是唯一映射为0的向量。**

**证：**

1. **~~先证充分性，即T是单的得nullT={0}。由条件得Tu = Tv =>u = v。Tu-Tv=0=T(u-v)=T(0)，即0是唯一映射成0的向量，充分性得证；~~**

**先证充分性。假设v∈nullT，则Tv = 0 = T(0),因为T是单映射，所以v=0，充分性得证。**

1. **再证必要性，即nullT={0}得T是单的。因为Tu = Tv，所以Tu – Tv = 0 = T(u-v)，又因为0是唯一一个映射成0的向量，所以T(u-v) = T(0) = 0，于是u-v含于nullT={0}中，所以u=v，必要性得证。**

**微分，x2乘和后向移位，只有x2乘是单映射。**

1. **假设T∈L(V,W)，由向量Tv∈W组成的子集称为T的值域，即rangeT = {Tv :v∈V }**
2. **若T∈L(V,W),则rangeT是W的子空间。**

**证：由定义可知rangeT是W的子集**

1. **先证明加法单位元0∈rangeT.** **因为nullT是V的子空间，所以所有v∈nullT的向量都能映射成W的加法单位元，所以0∈rangeT得证；**
2. **下面证明加法封闭，即当w1,w2∈rangeT时，有w1+w2∈rangeT.因为  
   T是V到W的映射，所以存在u,v∈V,使得Tu = w1, Tv = w2,因为V对加法封闭，所以u+v∈V，所以T(u+v) = Tu + Tv = w1＋w2∈rangeT，所以rangeT对加法封闭。**
3. **最后证对标量乘法封闭，即当w∈rangeT, a∈F,有aw∈rangeT.因为T是V到W的映射，所以存在v∈V使得Tv =w.有因为V对标量乘法封闭，所以av∈V，所以有T(av) = aTv = aw ∈rangeT,所以rangeT对标量乘法封闭。**

**所以rangeT是W的子空间。**