**第三章 线性映射**

**1. 证明:因为V是有限维向量空间, 且dimV=1，所以假设u是V的一个基,则对于所有 v∈V，b∈F都有Tv=T(bu)=bTu；又因为T∈L(V),所以存在w∈V,a∈F,使得w=au=Tu.所以Tv=T(bu)=bTu=bau=abu=av,命题得证。**

**2. 举例：**

**注意：该例子说明只满足加性或者只满足齐性的映射不一定就是线性映射，其证明过程超出本书范围。**

**3. 证明：假设(u1,u2,…,um)是U的一个基，则对于任意一个向量u∈U都可以被(u1,u2,…,um)线性表出，即存在a1,a2,…,am∈F,使得u=a1u1+a2u2+...+amum，因为U是V的子空间，所以(u1,u2,…,um)是V的一个线性无关组，可以扩充成V的一个基,不妨假设(u1,u2,…,um)扩充成V的一个基(u1,u2,…,um,v1,v2,...,vn),则u可以被(u1,u2,…,um,v1,v2,...,vn)线性表出。令存在一组b1,b2,...,bn∈F,使得b1v1+b2v2+...+bnvn=0(注：这里的bj可以全为0，也可以不全为0),则u=u+0=a1u1+a2u2+...+amum+b1v1+b2v2+...+bnvn 。定义T∈L(V,W),Tu=T(a1u1+a2u2+...+amum+b1v1+b2v2+...+bnvn)=a1Su1+a2Su2+...+amSum=S(a1u1+a2u2+...+amum)=Su.命题得证。**

**注意：这里不能定义Tv={Sv,if v∈U**

**0 ,if v⫋U}**

**因为T不是线性的。**

**4. 证明：**

**~~(1)~~** ~~由题设得知~~**~~V=nullT+{au:u∈V,a∈F}~~**

**(1) 先证nullT∩{au:u∈V,a∈F} = {0}。假设向量v∈nullT∩{au:u∈V,a∈F},则Tv=T(au)=aTu=0,所以a=0(因为Tu≠0),所以nullT∩{au:u∈V,a∈F} = {0}。**

**(2) 再证V = nullT + {au:u∈V,a∈F}(容易忽略这点)。注意，对于任意v∈V,都有v = (v-Tv/Tuu)+ Tv/Tuu，所以T(v-Tv/Tuu)=Tv-T(Tv/Tuu)=0∈nullT;又因为 Tv/Tuu∈{au:u∈V,a∈F},所以V = nullT + {au:u∈V,a∈F}得证。**

**由命题1.9可知结论成立。**

**5. 证：假设a1,…,an∈F使得a1Tv1+...+anTvn=0，又因为T∈L(V,W)，所以a1Tv1+...+anTvn=T(a1v1+...+anvn)=0。又因为T是单映射， 所以0是唯一被映射成0的向量，即 a1v1+...+anvn=0;又因为(v1,…,vn)线性无关，所以a1=…=an=0,即a1Tv1+...+anTvn=0当且仅当a1=…=an=0,所以(Tv1,…,Tvn)线性无关，命题成立。**

**6. 证：假设S1,…,Sn∈L(V,W), 则由S1是单的线性映射可得(S1S2...Sn)(v) = S1((S2...Sn)(v)) = S1((S2...Sn)(u)) =S1((S2...Sn)(u)) 可得 (S2...Sn)(v)=(S2...Sn)(u)，其中v,u∈V且(S1...Sn)(v), (S2...Sn)(v),…, Sn(v), (S1...Sn)(u), (S2...Sn)(u),…, Sn(u)均有意义；同理可由(S2...Sn)(v)= S2((S3...Sn)(v))= S2((S3...Sn)(u))=(S2...Sn)(u)；如此类推，最后可得Sn(v)=Sn(u), 由Sn是单的线性映射可得v=u, 命题得证。**

**7. 证：假设向量v∈V，因为T是满的线性映射，所以Tv∈W; 又因为(v1,…,vn)张成V， 所以存在一组a1,…,an∈F, 使得v = a1v1+...+anvn， 所以Tv = T( a1v1+...+anvn) = a1Tv1+...+anTvn,即任意一个Tv∈W都是(Tv1,…,Tvn)的一个线性组合， 即(Tv1,…,Tvn)张成W， 命题得证。**

**8. 证：(1)先构造子空间U。令V=U⊕nullT,**

**(2)证明U是符合条件的V的子空间。~~假设向量v∈V,u∈U,w∈nullT, 由假设可知v=u+w,则Tv=T(u+w)=Tu+Tw=Tu,所以Tv=rangeT={Tu:u∈U}得证；~~**

**证明两个集合A，B相等， 应从两方面证明：A是B的子集并且B是A的子集，即A⊂B并且B⊂A。上面划掉是因为只证明了其中一个方面，rangeT⊆{Tu:u∈U}(等号是出现在单的线性映射的情况),又因为rangeT⊇{Tu:u∈U}是显然的(U是V的子空间)，所以rangeT={Tu:u∈U}.**

**又因为V=U⊕nullT，所以{0} = U∩nullT。**

**9. 证：由题设可知，((5,1,0,0),(0,0,7,1))是nullT的一个基,因为对于(x1,x2,x3,x4)∈nullT,可以重写为(5x2,x2,7x4,x4)=x2(5,1,0,0)+x4(0,0,7,1),其中 x2,x4∈F，即((5,1,0,0),(0,0,7,1))可以张成nullT；令x2(5,1,0,0)+x4(0,0,7,1)=(0,0,0,0),则可改写成**

**{5x2=0**

**{x2=0**

**{7x4=0**

**{x4=0**

**由上式可知，x2=0,x4=0,即((5,1,0,0),(0,0,7,1))是线性无关向量组，所以((5,1,0,0),(0,0,7,1))是nullT的一个基,所以dimnullT=2；由dimV=dimnullT+dimrangeT得dimrangeT=dimF4-dimnullT=2;由Fn到Fm的线性映射的定义，rangeT是定义在F上的向量空间，所以rangeT=F2，所以T是满的。（有点懵，后面要搞清楚，dimrangeT=2就代表rangeT=F2?）。**

**10. 证：假设T∈L(F5,F2), 向量空间{(x1,x2,x3,x4,x5)∈F5:x1=3x2且x3=x4=x5}是T的零空间，(x1,x2,x3,x4,x5)=(3x2,x2,x3,x3,x3)=x2(3,1,0,0,0)+x3(0,0,1,1,1), 因为 x1,x2,x3,x4,x5 是任意的且x1,x2,x3,x4,x5 ∈F，所以((3,1,0,0,0),(0,0,1,1,1))是nullT的一个基，即dimnullT=2;由dimV=dimnullT+dimrangeT可知dimrangeT=dimF5-dimnullT=5-2=3,因为rangeT⊂F2，所以dimrangeT≤2,dimrangeT=3矛盾，所以原命题得证。**

**从9和10总结出一个误区，总觉得Fn的子空间的维数一定是n。例如((1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1))是F5的一个基（标准基），但考虑一种情况就是假设F5的一个子空间{(x1,x2,x3,0,0)∈F5},他的维数是3≤5.**

**11. 证：假设T∈L(V,W), v是V的任意一个向量, 因为T的值域和零空间是有限维的，设(w1,w2,…,wn)张成rangeT,(u1,u2,…,um)张成nullT,则存在一组a1,a2,…,an∈F使得Tv=a1w1+a2w2+…+anwn; 因为wj∈rangeT, 所以存在vj∈V,使得wj=Tvj,所以上式可以变为：Tv=a1w1+a2w2+…+anwn= a1Tv1+a2Tv2+…+anTvn=T(a1v1+a2v2+…+anvn), 相减得：Tv-T(a1v1+a2v2+…+anvn)=T(0)=T(v-a1v1-a2v2-…-anvn), 即 v-a1v1-a2v2-…-anvn∈nullT; 又因为(u1,u2,…,um)张成nullT，所以存在一组b1,b2,…,bm∈F使得 v-a1v1-a2v2-…-anvn=b1u1+b2u2+…+bmum，上式转换为v=a1v1+a2v2+…+anvn+b1u1+b2u2+…+bmum, 即v可以被(v1,v2,…,vn,u1,u2,…,um)线性表示,即v=span(v1,v2,…,vn,u1,u2,…,um)，所以v是有限维的向量空间，命题得证。**

**12. 证：(1) 先证充分性。假设T∈L(V,W), 且T是满的，则rangeT⊇W；因为V和W都是有限维向量空间，所以假设向量w是rangeT的一个基，长度为n，则dimrangeT=n，同时他可以张成W，所以他可以化简为W的一个基，假设长度为m，则n≥m,即dimrangeT≥dimW，所以dimV=dimnullT+dimrangeT≥dimnullT+dimW≥dimW, 充分性得证；**

**(2) ~~再证必要性。先构造函数T:V→W.假设(v~~~~1~~~~,v~~~~2~~~~,…,v~~~~n~~~~)是V的一个基，(w~~~~1~~~~,w~~~~2~~~~,…,w~~~~n~~~~)是W中任意指定的一组向量，定义T如下：T(a~~~~1~~~~v~~~~1~~~~+a~~~~2~~~~v~~~~2~~~~+…+a~~~~n~~~~v~~~~n~~~~)= a~~~~1~~~~w~~~~1~~~~+a~~~~2~~~~w~~~~2~~~~+…+a~~~~n~~~~w~~~~n~~~~，其中a~~~~1~~~~,a~~~~2~~~~,…,a~~~~n~~~~∈F，则dimV=n.现在证明T是线性的。假设v，u∈V，则存在一组b~~~~1~~~~,b~~~~2~~~~,…,b~~~~n~~~~和c~~~~1~~~~,c~~~~2~~~~,…,c~~~~n~~~~∈F使得v= b~~~~1~~~~v~~~~1~~~~+b~~~~2~~~~v~~~~2~~~~+…+b~~~~n~~~~v~~~~n~~~~=b~~~~1~~~~w~~~~1~~~~+b~~~~2~~~~w~~~~2~~~~+…+b~~~~n~~~~w~~~~n~~~~,u=c~~~~1~~~~v~~~~1~~~~+c~~~~2~~~~v~~~~2~~~~+…+c~~~~n~~~~v~~~~n~~~~=c~~~~1~~~~w~~~~1~~~~+c~~~~2~~~~w~~~~2~~~~+…+c~~~~n~~~~w~~~~n~~~~,T(u+v)=T(b~~~~1~~~~v~~~~1~~~~+b~~~~2~~~~v~~~~2~~~~+…+b~~~~n~~~~v~~~~n~~~~+c~~~~1~~~~v~~~~1~~~~+c~~~~2~~~~v~~~~2~~~~+…+c~~~~n~~~~v~~~~n~~~~)=T((b~~~~1~~~~+c~~~~1~~~~)v~~~~1~~~~+(b~~~~2~~~~+c~~~~2~~~~)v~~~~2~~~~+…+(b~~~~n~~~~+c~~~~n~~~~)v~~~~n~~~~)=(b~~~~1~~~~+c~~~~1~~~~)w~~~~1~~~~+(b~~~~2~~~~+c~~~~2~~~~)w~~~~2~~~~+…+(b~~~~n~~~~+c~~~~n~~~~)w~~~~n~~~~=b~~~~1~~~~w~~~~1~~~~+b~~~~2~~~~w~~~~2~~~~+…+b~~~~n~~~~w~~~~n~~~~+c~~~~1~~~~w~~~~1~~~~+c~~~~2~~~~w~~~~2~~~~+…+c~~~~n~~~~w~~~~n~~~~=Tu+Tv,加性满足；假设a∈F,则T(av)=T(a(b~~~~1~~~~v~~~~1~~~~+b~~~~2~~~~v~~~~2~~~~+…+b~~~~n~~~~v~~~~n~~~~))=T(ab~~~~1~~~~v~~~~1~~~~+ab~~~~2~~~~v~~~~2~~~~+…+ab~~~~n~~~~v~~~~n~~~~)= ab~~~~1~~~~w~~~~1~~~~+ab~~~~2~~~~w~~~~2~~~~+…+ab~~~~n~~~~w~~~~n~~~~=a(b~~~~1~~~~w~~~~1~~~~+b~~~~2~~~~w~~~~2~~~~+…+b~~~~n~~~~w~~~~n~~~~)=aTv,齐性满足，所以T是V到W的线性映射；下面证明他是满的。根据定义，(w~~~~1~~~~,w~~~~2~~~~,…,w~~~~n~~~~)是任意的，即表示对于W内任意向量w,都能被(w~~~~1~~~~,w~~~~2~~~~,…,w~~~~n~~~~)线性表示，即(w~~~~1~~~~,w~~~~2~~~~,…,w~~~~n~~~~)张成W，所以他能简化成W的一个基，所以n≥dimW，即dimV≥dimW,必要性得证。~~**

**再证必要性(网上答案.疑问：为啥不用证明T是线性的？那是否说明V到W一定能找到线性映射？) 。假设(v1,v2,…,vn)是V的一个基,(w1,w2,…,wm)是W的一个基，对于一组a1,a2,…,an∈F,我们定义函数T:T(a1v1+a2v2+...+anvn)=a1w1+a2w2+...+amwm,因为n≥m,所以上式的am明显有意义，即rangeT=W，所以T是满的。**

**13. 证：(1) 先证充分性。因为V，W是有限维向量空间，且T∈L(V,W)，所以dimU=dimnullT=dimV-dimrangeT≥dimV-dimW,充分性得证。**

**(2) 再证必要性。假设(u1,u2,…,um)是U的一个基，(w1,w2,…,wp)是W的一个基，因为U是V的子空间，所以(u1,u2,…,um)可以扩充成V的一个基，设(u1,u2,…,um,v1,v2,…,vn)是V的一个基，则定义T:T(a1u1+a2u2+…+amum+b1v1+b2v2+…+bnvn)=b1w1+b2w2+…+bnwn,因为dimU≥dimV-dimW，即m≥m+n-p,所以p≥m, 即wn在W的范围内有意义，关于T的定义可转化为T(a1u1+a2u2+…+amum+b1v1+b2v2+…+bnvn)=b1Tv1+b2Tv2+…+bnTvn，其中没出现诸如Tuj的项是因为Tuj=0,即uj∈nullT,所以命题得证。**

**14. 证：(1) ~~先证充分性。因为T∈L(V,W),所以假设向量v∈V,w∈W满足w=Tv，定义S:v=Sw则Tv=T(Sw)可得Sw=S(Tv)=(ST)v=v(T是单的),所以ST是V上的恒等映射。~~**

**先证充分性。因为T是单的，所以可以定义从rangeT到V的映射S`如下：S`(Tv)=v(这里有一个本人对函数的理解，函数f包含了一个自变量和因变量的一对一的关系，y=f(x)表达了输入是一个x的话，通过f只能有一个唯一的因变量y与之一一对应，但这只是对于一般的函数有意义，这让本人联想到一种特殊的函数→随机变量(随机变量严格意义上是一个函数，而不是变量)，它表示了对于一个输入(事件e)，有可能得到不同的结果y，例如：X(e)={1 if e means rains, 0 otherwise}，所以这里之所以可以定义S`就是因为T是单的)。下面证明S`是线性的。假设向量u,v∈V,则S`(Tv+Tu)=S`(T(v+u))=v+u=S`(Tv)+S`(Tu),加性得证；假设v∈V,a∈F,则S`(aTv)= S`(T(av))=av=aS`(Tv),齐性得证。所以S`是rangeT到V的线性映射。根据习题3，存在W到V的线性映射S使得S(v)=S`(v)(rangeT是W的子空间)，所以(ST)v=S(Tv)=S`(Tv)=v,所以 ST是V上的恒等映射，充分性得证。**

**(2) 再证必要性。假设v，v`∈V，根据条件Tv=Tv`推出v=v`。S(Tv)=(ST)v=v=S(Tv`)=(ST)v`=v`(ST是V上恒等映射)，所以T是单的，命题得证。**

**15. 证：(1) 先证充分性。因为T是满的，所以Tv是W中任意满足T的向量，其中v是V中任意向量，定义S如下:S(Tv)=v。由定义可知S是线性的，则(TS)(Tv)=T(S(Tv))=Tv, 所以TS是W上的恒等映射。**

**(2) 再证必要性。所以假设w∈W,因为TS是满的，所以(TS)w=w=T(Sw),即w含于T的值域，所以W=rangeT。必要性得证。**