

1 Сферические функции

Нормированные сферические функции определены следующим образом:

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = \begin{cases} (-1)^m \left[\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!} \right]^{1/2} P_{l,m}(\cos(\theta)) \exp(im\phi), & m \geq 0, \\ (-1)^m Y_{l,-m}^*(\theta, \phi), & m < 0, \end{cases} \quad (1)$$

$l \geq 0$, $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$ и $P_{l,m}(x)$ — присоединенные функции Лежандра, определяемые соотношением:

$$P_{l,m}(x) = (1-x^2)^{m/2} P_l^{(m)}, \quad m = 0, \dots, l, \quad (2)$$

где P_l — полиномы Лежандра, определяемые рекуррентно:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x). \quad (3)$$

2 Аппроксимация сферическими функциями

Метод основан на следующих соотношениях [1]:

$$\exp(\beta x) = (\pi/(2\beta))^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) I_{l+1/2}(\beta) P_l(x), \quad (4)$$

где $I_\nu(x)$ — функция Инфельда, и

$$P_l(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = 4\pi(2l+1)^{-1} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\mathbf{x}) Y_{l,m}(\mathbf{y}). \quad (5)$$

В итоге получаем

$$\exp(\beta \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2) = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{\beta}} \sum_{l=0}^{\infty} I_{l+1/2} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\mathbf{m}_1) Y_{l,m}(\mathbf{m}_2). \quad (6)$$

3 Пример использования для замкнутой цепочки

Рассмотрим замкнутую цепочку, задаваемую функцией распределения:

$$f = \frac{1}{Z} \exp \left[\lambda_{1,N}(\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_N) + p_1(\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_0) + \sum_{i=2}^N (\lambda_{i,i-1}(\mathbf{m}_i \mathbf{m}_{i-1}) + p_i(\mathbf{m}_i \mathbf{m}_0)) \right]. \quad (7)$$

Тогда выражение для Z примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{Z}{(4\pi)^N} &= \int_{S^N} \frac{d\mathbf{m}_1 \dots d\mathbf{m}_N}{(4\pi)^N} \exp \left[\lambda_{1,N}(\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_N) + p_1(\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_0) + \sum_{i=2}^N (\lambda_{i,i-1}(\mathbf{m}_i \mathbf{m}_{i-1}) + p_i(\mathbf{m}_i \mathbf{m}_0)) \right] = \\ &= \sum_{l_1, m_1} \sum_{l_2, m_2} \dots \sum_{l_N, m_N} \int_{S^N} d\mathbf{m}_1 \dots d\mathbf{m}_N \kappa_1 I_{l_1+1/2}(\lambda_{1,2}) \exp(p_1 \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_0) Y_{l_1, m_1}^*(\mathbf{m}_1) Y_{l_1, m_1}(\mathbf{m}_2) \times \\ &\quad \times \kappa_2 I_{l_2+1/2}(\lambda_{2,3}) \exp(p_2 \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_0) Y_{l_2, m_2}^*(\mathbf{m}_2) Y_{l_2, m_2}(\mathbf{m}_3) \times \dots \\ &\quad \times \kappa_N I_{l_N+1/2}(\lambda_{1,N}) \exp(p_N \mathbf{m}_N \mathbf{m}_0) Y_{l_N, m_N}^*(\mathbf{m}_N) Y_{l_N, m_N}(\mathbf{m}_1), \quad (8) \end{aligned}$$

где $\kappa_i = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda_{i,i+1}}}$.

Введем матрицы с мультииндексами $\sigma_i = (l_i, m_i)$:

$$M_{\sigma_{i-1}, \sigma_i}^{(i)} = \kappa_i I_{l_i+1/2}(\lambda_{i-1,i}) \int_S d\mathbf{m}_i \exp(p_i \mathbf{m}_i \mathbf{m}_0) Y_{l_{i-1}, m_{i-1}}(\mathbf{m}_i) Y_{l_i, m_i}^*(\mathbf{m}_i). \quad (9)$$

Тогда Z перепишется в виде:

$$\frac{Z}{(4\pi)^N} = \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \dots \sum_{\sigma_N} M_{\sigma_N, \sigma_1}^{(1)} M_{\sigma_1, \sigma_2}^{(2)} \dots M_{\sigma_{N-1}, \sigma_N}^{(N)} = \text{tr}(M^{(1)} M^{(2)} \dots M^{(N)}). \quad (10)$$

4 Применение метода для расчета моментов многочастичных функций распределения

Рассмотрим функции распределения вида:

$$f^{(N)} = \frac{1}{Z^{(N)}} \exp \left[\sum_{i < j}^N \lambda_{i,j}(\mathbf{m}_i \mathbf{m}_j) + \sum_{i=1}^N (\mathbf{m}_i \mathbf{p}_i) \right]. \quad (11)$$

Задача состоит в расчете моментов ФП вида:

$$T_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_L} = \langle (\mathbf{m}_{i_1}^{\alpha_1})^{s_1} (\mathbf{m}_{i_2}^{\alpha_2})^{s_2} \dots (\mathbf{m}_{i_L}^{\alpha_L})^{s_L} \rangle, \quad (12)$$

где среди индексов i_1, \dots, i_L каждый индекс может входить любое число раз.

Далее необходимо задать направления стрелок в тензорной сети (произвольным образом), указывающие какой сомножитель (какая частица) имеет комплексное сопряжение, а именно: если стрелка идет из вершины, то соответствующий сомножитель не сопрягается комплексно и наоборот. Тогда тензорная сеть будет состоять из тензоров вида:

$$\begin{aligned} M_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k; \alpha_1, \dots, \alpha_p}^{(q)} &= \int_S d\mathbf{m}_q \exp(\mathbf{p}_q \cdot \mathbf{m}_q) \prod_{i=1}^p (m_q^{\alpha_i})^{s_i} \times \\ &\quad \times \prod_{i \in \sigma_{in}} Y_{l_i, m_i}^*(\mathbf{m}_q) \prod_{i \in \sigma_{out}} Y_{l_i, m_i}(\mathbf{m}_q) I_{l_i+1/2}(\lambda_{q, \tau_i^q}) \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{\lambda_{q, \tau_i^q}}}, \quad (13) \end{aligned}$$

где σ_i — мультииндекс, соответствующий индексам сферической функции, σ_{in} — множество номеров индексов, входящих в вершину q , а σ_{out} — выходящих из нее, при этом $\sigma_{in} \cup \sigma_{out} = \{1, 2, \dots, k\}$ и $\sigma_{in} \cap \sigma_{out} = \emptyset$, τ_i^q — номер тензора (частицы), который имеет связь с тензором (частицей) с номером q .

Тензорная сеть представляет собой свертку тензоров вида (13) по всем индексам l_i , оставляя индексы α_i .

5 Оценка погрешности трехчастичной ункции распределе- ния

Рассмотрим погрешность вычисления тензора:

$$T_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} = \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3=0}^{\infty} M_{\sigma_3 \sigma_1 \alpha_1}^{(1)} M_{\sigma_1 \sigma_2 \alpha_2}^{(2)} M_{\sigma_2 \sigma_3 \alpha_3}^{(3)}. \quad (14)$$

На практике вычисляется:

$$\tilde{T}_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} = \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3=0}^{n-1} \tilde{M}_{\sigma_3 \sigma_1 \alpha_1}^{(1)} \tilde{M}_{\sigma_1 \sigma_2 \alpha_2}^{(2)} \tilde{M}_{\sigma_2 \sigma_3 \alpha_3}^{(3)}, \quad (15)$$

где $\tilde{M}^{(i)}$ вычисляется численным интегрированием.

Тогда погрешность может быть оценена как:

$$\Delta = \left| T_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} - \tilde{T}_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \right| \leq \underbrace{\left| \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3=n}^{\infty} \tilde{M}_{\sigma_3 \sigma_1 \alpha_1}^{(1)} \tilde{M}_{\sigma_1 \sigma_2 \alpha_2}^{(2)} \tilde{M}_{\sigma_2 \sigma_3 \alpha_3}^{(3)} \right|}_{\Delta_1} + \underbrace{\left| \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3=0}^{\infty} \tilde{M}_{\sigma_3 \sigma_1 \alpha_1}^{(1)} \tilde{M}_{\sigma_1 \sigma_2 \alpha_2}^{(2)} \tilde{M}_{\sigma_2 \sigma_3 \alpha_3}^{(3)} - \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3=0}^{\infty} M_{\sigma_3 \sigma_1 \alpha_1}^{(1)} M_{\sigma_1 \sigma_2 \alpha_2}^{(2)} M_{\sigma_2 \sigma_3 \alpha_3}^{(3)} \right|}_{\Delta_2}, \quad (16)$$

что было получено прибавлением и вычитанием выражения (15) с пределами суммирования от n до ∞ . Если вычислять тензоры численно с высокой точностью (одномерные интегралы по сфере), то основной вклад в погрешность определяется Δ_1 .

Рассмотрим первый вклад:

$$\Delta_1 \leq \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3=n}^{\infty} \left| \tilde{M}_{\sigma_3 \sigma_1 \alpha_1}^{(1)} \right| \left| \tilde{M}_{\sigma_1 \sigma_2 \alpha_2}^{(2)} \right| \left| \tilde{M}_{\sigma_2 \sigma_3 \alpha_3}^{(3)} \right|. \quad (17)$$

6 Расчет элементов тензоров через коэффициенты Клебша-Гордона

Список литературы

- [1] GS Joyce. Classical heisenberg model. *Physical Review*, 155(2):478, 1967.