UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE DI BRESCIA
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Ricerca Operativa

11.02.2022

Docenti: Francesca Maggioni & Daniel Faccini

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

SOLUZIONE ESERCIZIO 1.

Parametri:

- p_i: profitto della lavorazione i.
- t_i: tempo di esecuzione della lavorazione i.

Variabili:

- x_{ij}: variabile binaria uguale a 1 se la lavorazione i è eseguita sulla macchina j, uguale a 0 altrimenti.

Modello:

$$
\begin{array}{lll}
\max & \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{8} x_{ij}p_i & \\
s.t. & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leq 1 & i = 1,\dots,8 \\
 & \sum_{i=1}^{8} x_{ij}t_i \leq 8 & j = 1,\dots,3 \\
 & \sum_{j=1}^{3} x_{3j} - \sum_{j=1}^{3} x_{4j} = 0 & \\
 & x_{ij} \in \{0,1\} & i = 1,\dots,8,\ j = 1,\dots,3.
\end{array}
$$

`File.mod`:

```
set MACCHINE;
set LAVORI;

param profitti{LAVORI} >= 0;
param tempi{LAVORI} >= 0;

var x{LAVORI, MACCHINE} binary;

maximize obiettivo: sum{j in MACCHINE, i in LAVORI} x[i,j]*profitti[i];
s.t. vincolo1{i in LAVORI}: sum{j in MACCHINE} x[i,j] <= 1;
s.t. vincolo2{j in MACCHINE}: sum{i in LAVORI} x[i,j]*tempi[i] <= 8;
s.t. vincolo3: sum{j in MACCHINE} x['c',j] - sum{j in MACCHINE} x['d',j] = 0;
```

File.dat:

```
data;

set MACCHINE := 1, 2, 3;
set LAVORI := a, b, c, d, e, f, g, h;

param: profitti tempi:=
a 1.0 5.0
b 1.2 3.5
c 0.8 1.0
d 1.5 6.5
e 1.1 2.0
f 0.9 3.0
g 1.3 3.0
h 1.7 2.5;
```

Solution:

```
LP_SOLVE 4.0.1.0: optimal, objective 8.6
1900 simplex iterations
645 branch & bound nodes: depth 17
x [*,*]
:   1   2   3    :=
a   0   0   1
b   1   0   0
c   0   1   0
d   0   1   0
e   1   0   0
f   0   0   0
g   0   0   1
h   1   0   0
;
```

Le ore della prima macchina sono una risorsa scarsa (slack uguale a zero) mentre le ore della seconda macchina sono una risorsa abbondante (slack maggiore di zero). Infatti col comando `display vincolo2.slack;` otteniamo:

```
vincolo2.slack [*] :=
1 0
2 0.5
3 0
```

Modello con possibilità di ora extra per macchinario:

$$
\begin{array}{lll}
\max & \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{8} x_{ij}p_i - \sum_{j=1}^{3} 0.1 y_j & \\
s.t. & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leq 1 & i = 1, \dots, 8 \\
& \sum_{i=1}^{8} x_{ij}t_i \leq 8 + y_j & j = 1, \dots, 3 \\
& \sum_{j=1}^{3} x_{3j} - \sum_{j=1}^{3} x_{4j} = 0 & \\
& y_j \in \{0,1\},\ x_{ij} \in \{0,1\} & i = 1, \dots, 8,\ j = 1, \dots, 3.
\end{array}
$$

File.mod:

```
set MACCHINE;
set LAVORI;

param profitti{LAVORI} >= 0;
param tempi{LAVORI} >= 0;

var x{LAVORI, MACCHINE} binary;
var y{MACCHINE} binary;

maximize obiettivo: sum{j in MACCHINE, i in LAVORI} x[i,j]*profitti[i] - sum{j in MACCHINE} 0.1*y[j];
s.t. vincolo1{i in LAVORI}: sum{j in MACCHINE} x[i,j] <= 1;
s.t. vincolo2{j in MACCHINE}: sum{i in LAVORI} x[i,j]*tempi[i] <= 8 + 1*y[j];
s.t. vincolo3: sum{j in MACCHINE} x['c',j] - sum{j in MACCHINE} x['d',j] = 0;
```

File.dat:

```
data;

set MACCHINE := 1, 2, 3;
set LAVORI := a, b, c, d, e, f, g, h;

param: profitti tempi:=
a 1.0 5.0
b 1.2 3.5
c 0.8 1.0
d 1.5 6.5
e 1.1 2.0
f 0.9 3.0
g 1.3 3.0
h 1.7 2.5;
```

Solution:

```
LP_SOLVE 4.0.1.0: optimal, objective 9.2
2830 simplex iterations
849 branch & bound nodes: depth 19
x [*,*]
:   1   2   3    :=
a   0   0   1
b   0   0   1
c   1   0   0
d   0   1   0
e   1   0   0
f   1   0   0
g   1   0   0
h   0   1   0
;

y [*] :=
1  1
2  1
3  1
;
```

SOLUZIONE ESERCIZIO 2.

- Riscriviamo il problema in forma standard:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 15x_1 + x_2 - x_3 \\
t.c. \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 = 430 \\
& 3x_1 + 2x_3 + s_2 = 460 \\
& x_1 + 4x_2 + s_3 = 420 \\
& x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Consideriamo come base di partenza quella associata a s_1, s_2, s_3. Si ha quindi $B = I$ e $B^{-1} = I$. Perciò: $x_B = y_0 = B^{-1}b = [s_1, s_2, s_3]^\top = [430, 460, 420]^\top$.

Step 1

Calcoliamo i costi ridotti delle variabili fuori base: $r_F^\top = c_F^\top - c_B^\top B^{-1} F$. Sapendo che $c_F^\top = [15,\ 1,\ -1]$ e $c_B^\top = [0,\ 0,\ 0]$ si ha:

$$r_F^\top = [15,\ 1,\ -1].$$

Siccome non tutti gli elementi di r_F sono non-negativi, allora x_B non è ottima e procediamo allo Step 2.

Step 2

Tra gli elementi negativi di r_F scegliamo il più negativo, che è r_{F3}. Quindi, x_3 entra in base. Dopo aver calcolato:

$$y_3 = B^{-1} A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

procediamo allo Step 3.

Step 3

Siccome non tutti gli elementi di y_3 sono ≤ 0 non possiamo concludere che il problema sia illimitato e cerchiamo così la variabile che lascia la base, calcolando:

$$\min_{y_{3i} > 0} \frac{y_{0i}}{y_{3i}} = \left\{ \frac{430}{1},\ \frac{460}{2} \right\} = 230.$$

Pertanto, s_2 lascia la base e procediamo allo Step 4.

Step 4

Sostituiamo in B la variabile uscente (s_2) con quella entrante (x_3) e facciamo lo stesso per F:

$$B = [A_3, A_4, A_6] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F = [A_1, A_2, A_5] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcoliamo anche B^{-1}, che è la matrice inversa della nuova base:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dopo aver calcolato la nuova soluzione di base $x_B = B^{-1}b = [x_3, s_1, s_3]^\top = [230, 200, 420]^\top$, torniamo allo Step 1.

Step 1

Calcoliamo i costi ridotti delle variabili fuori base sapendo che $c_F^\top = [15,\ 1,\ 0]$ and $c_B^\top = [-1,\ 0,\ 0]$ si ha:

$$r_F^\top = [15,\ 1,\ 0] - [-1,\ 0,\ 0] \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \left[\frac{33}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}\right].$$

Siccome tutti gli elementi di r_F sono non-negativi, allora ci fermiamo e concludiamo che $x_B = B^{-1}b = [x_3, s_1, s_3]^\top = [230, 200, 420]^\top$ è soluzione ottima con

$$z^* = c_B^\top x_B = [-1,\ 0,\ 0]\,[230, 200, 420]^\top = -230.$$

- Il numero di vincoli è $m = 3$ e il numero di incognite è $n = 6$; pertanto, il limite superiore sul numero di soluzioni di base ammissibili del problema è:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20.$$

- Il duale del problema di partenza è:

$$\begin{array}{ll} \max & 430\lambda_1 + 460\lambda_2 + 420\lambda_3 \\ t.c. & \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 \leq 15 \\ & 2\lambda_1 + 4\lambda_3 \leq 1 \\ & \lambda_1 + 2\lambda_2 \leq -1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 0. \end{array}$$

Applichiamo ora le condizioni di complementarietà:

- ◇ $(x_1 + 2x_2 + x_3 - 430)\lambda_1 = 0 \rightarrow (-200)\lambda_1 = 0 \rightarrow$ $\lambda_1 = 0$;
- ◇ $(3x_1 + 2x_3 - 460)\lambda_2 = 0 \rightarrow (0)\lambda_2 = 0 \rightarrow$ nessuna condizione derivata su λ_2;
- ◇ $(x_1 + 4x_2 - 420)\lambda_3 = 0 \rightarrow (-420)\lambda_3 = 0 \rightarrow$ $\lambda_3 = 0$.
- ◇ $(\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + 15)x_1 = 0 \rightarrow (\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 - 15)0 = 0 \rightarrow$ nessuna condizione derivata sul primo vincolo duale;
- ◇ $(2\lambda_1 + 4\lambda_3 - 1)x_2 = 0 \rightarrow (2\lambda_1 + 4\lambda_3 + 1)0 = 0 \rightarrow$ nessuna condizione derivata sul secondo vincolo duale;;
- ◇ $(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 1)x_3 = 0 \rightarrow$ $230\lambda_1 + 460\lambda_2 = -230$;

Risolviamo ora il sistema seguente:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ 230\lambda_1 + 460\lambda_2 = -230 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} \\ \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Controlliamo ora che tutti i vincoli del duale siano soddisfatti:

$$\begin{array}{llll} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 & = 0 - \frac{3}{2} + 0 & = -\frac{3}{2} & \leq 15 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_3 & = 0 + 0 & = 0 & \leq 1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 & = 0 - 1 & = -1 & \leq -1 \\ \lambda_1 & = 0 & \leq 0 & \\ \lambda_2 & = -\frac{1}{2} & \leq 0 & \\ \lambda_3 & = 0 & \leq 0. & \end{array}$$

Tutti i vincoli del duale sono soddisfatti e possiamo così concludere che entrambe le soluzioni (primale e duale) sono ottime per i rispettivi problemi. Infatti i due valori delle funzioni obiettivo coincidono:

$$15x_1 + x_2 - x_3 = \lambda_1 + 460\lambda_2 + 420\lambda_3$$
$$-230 = -230$$

N.B.: La soluzione duale ottima è ulteriormente confermata dal *teorema di dualità forte*: $\lambda^* = c_B^\top B^{-1} = \left[-1,\ -\frac{1}{2},\ 0\right]$.

SOLUZIONE ESERCIZIO 3. Per determinare il Wait & See (WS) risolviamo il problema per i due scenari separatamente.

1. Per lo scenario 1 risolviamo:

$$\begin{array}{ll} \min & 3x_1 + \left[1 \cdot y_1\right] \\ t.c. & y_1 \geq 1 - x_1 \\ & x_1, y_1 \geq 0 \end{array} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{ll} \min & 3x_1 + y_1 \\ t.c. & y_1 \geq 1 - x_1 \\ & x_1, y_1 \geq 0, \end{array}$$

la cui soluzione ottima è: $x_1 = 0$ e $y_1 = 1$ con valore di funzione obiettivo pari a 1.

2. Per lo scenario 2 risolviamo:

$$\begin{array}{ll} \min & 3x_1 + \left[5 \cdot y_1\right] \\ t.c. & y_1 \geq 1 - x_1 \\ & x_1, y_1 \geq 0 \end{array} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{ll} \min & 3x_1 + 5y_1 \\ t.c. & y_1 \geq 1 - x_1 \\ & x_1, y_1 \geq 0, \end{array}$$

la cui soluzione ottima è: $x_1 = 1$ e $y_1 = 0$ con valore di funzione obiettivo pari a 3.

Perciò abbiamo: $WS = \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{2}$. Per determinare l'$EV$ calcoliamo prima $\bar{\xi} = \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 5 = 2$ e poi risolviamo il problema seguente:

$$\begin{array}{ll} \min & 3x_1 + \left[\bar{\xi} \cdot y_1\right] \\ t.c. & y_1 \geq 1 - x_1 \\ & x_1, y_1 \geq 0 \end{array} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{ll} \min & 3x_1 + 2y_1 \\ t.c. & y_1 \geq 1 - x_1 \\ & x_1, y_1 \geq 0, \end{array}$$

la cui soluzione ottima è: $x_1 = 0, y_1 = 1$ con valore di funzione obiettivo pari a $EV = 2$. Si ha così:

$$EV = 2 \geq WS = \frac{3}{2}.$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 4. La soluzione ottima del problema rilassato NON è ammissibile per il problema intero.

- **Branch & bound**

  Scegliamo la variabile x_1 per il branching e dividiamo la regione ammissibile X in X_1, X_2 impostando rispettivamente:

$$\begin{array}{lll} x_1 & \leq & \left\lfloor \frac{16}{3} \right\rfloor = 5 \\ x_1 & \geq & \left\lfloor \frac{16}{3} \right\rfloor + 1 = 6. \end{array}$$

Il primo sotto-problema è dato da:

$$\begin{array}{rl} \max & 7x_1 - 2x_2 \\ t.c. & 3x_1 + x_2 \leq 16 \\ & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rl} \min & -7x_1 + 2x_2 \\ t.c. & 3x_1 + x_2 + s_1 = 16 \\ & x_1 + x_2 + s_2 = 7 \\ & x_1 + s_3 = 5 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{array}$$

Consideriamo come base di partenza quella associata a s_1, s_2, s_3. Si ha quindi $B = B^{-1} = I$. Perciò: $x_B = y_0 = B^{-1}b = [s_1, s_2, s_3]^\top = [16, 7, 5]^\top$.

Step 1

Calcoliamo i costi ridotti delle variabili fuori base: $r_F^\top = c_F^\top - c_B^\top B^{-1} F$. Sapendo che $c_F^\top = [-7,\ 2]$ e $c_B^\top = [0,\ 0, 0]$ si ha:

$$r_F^\top = [-7,\ 2]\,.$$

Siccome non tutti gli elementi di r_F sono non-negativi, allora x_B non è ottima e procediamo allo Step 2.

Step 2

Tra gli elementi negativi di r_F scegliamo il più negativo, che è r_{F1}. Quindi, x_1 entra in base. Dopo aver calcolato:

$$y_1 = B^{-1}A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

procediamo allo Step 3.

Step 3

Siccome non tutti gli elementi di y_1 sono ≤ 0 non possiamo concludere che il problema sia illimitato e cerchiamo così la variabile che lascia la base, calcolando:

$$\min_{y_{1i} > 0} \frac{y_{0i}}{y_{1i}} = \left\{ \frac{16}{3},\ \frac{7}{1},\ \frac{5}{1} \right\} = 5.$$

Pertanto, s_3 lascia la base e procediamo allo Step 4.

Step 4

Sostituiamo in B la variabile uscente (s_3) con quella entrante (x_1) e facciamo lo stesso per F:

$$B = [A_1, A_3, A_4] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = [A_2, A_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcoliamo anche B^{-1}, che è la matrice inversa della nuova base:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dopo aver calcolato la nuova soluzione di base $x_B = B^{-1}b = [x_1, s_1, s_2]^\top = [5, 1, 2]^\top$, torniamo allo Step 1.

Step 1

Calcoliamo i costi ridotti delle variabili fuori base:

$$r_F^\top = [2,\ 0] - [-7,\ 0,\ 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [2,\ 7].$$

Siccome tutti gli elementi di r_F sono non-negativi, allora ci fermiamo e concludiamo che $x_B = B^{-1}b = [x_1, s_1, s_2]^\top = [5, 1, 2]^\top$ è soluzione ottima con

$$z^* = c_B^\top x_B = [-7,\ 0,\ 0]\,[5,\ 1,\ 2]^\top = -35.$$

La soluzione ottima del problema rilassato è ammissibile per il problema intero.

Il secondo sotto-problema è invece dato da:

$$\begin{array}{ll} \max & 7x_1 - 2x_2 \\ t.c. & 3x_1 + x_2 \leq 16 \\ & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

che è impossibile.

Pertanto, $x_1 = 5$ e $x_2 = 0$ è la soluzione ottima del problema di PLI di partenza.