# せつラボ ～圏論の基本～

原作・本文
aiya000 (@public_ai000ya)

イラスト・ヴィジュアルデザイン
碧はっさく (@HassakuTb)

2019/4/14 版 しまや出版 発行

○　○　○

おはよう。まだ夜は明けてないけれど。

8年前……夢を見た。
雲の上。辺りには水色いっぱいの空。どこか完成されたような、全く風のない……空気。

それで、君は何がお望みなの？

望みなんて、あまり考えたことがなかった。
僕は……

○　○　○

# 目次

# 第1章　登場人物

## 1.1　η（えーた）

『そうだなぁ、ずっと一緒にいてくれる人が欲しいな』

ちびっこ気だるげ・天才ヘタレガール。
右利き。
μを大切に思うが故にμに遠慮する癖、
一息ついたとき・困ったときなどにμの方を見る癖がある。
家の縁側に庭用の靴を放置しておいたらカマキリが入っていて、
履いたときに足でつぶしてしまったのがトラウマ。

## 1.2　μ（みゅー）

『えへへ。わたしはηが頑張ってるところ、大好きだから♪』

やさしさ・ふわふわ・女の子。
左利き。
ηのことが大好きで、常に付き従って、世話をやいている。
人当たりがよく温和で皆に好かれる。
しかしその一方で自分の意見を主張するのが苦手。
笑ったときやちょっと困ったときなど、手を丸めて口の前に添える癖がある。
ある不思議な出来事から生まれた女の子。

# 第2章　（前書き）

このたびは本書をお手にとってくださり、ありがとうございます！

ここで僕から、最初の指南をさせてください。

本書含む、数学書の前書きが「まどろっこしい！」と思ったなら、チラ見で済ませるか、飛ばしてもいいと思います。数学へのモチベーションを大事に。前書きは後で！

……。

この本は、**圏論**という**極楽浄土**を広めるために書かれました。「数学たのしそうなんだけど、難しくて……」という人々をターゲットにしています。

圏論に熱中し、ゾーンに入ったときの──あの「**宇宙にいるような感覚**」。本書が、その導きの第一歩となれれば、嬉しいことこの上ありません。

**ターゲット**は**数学の未入門者**です。圏論をより厳密に理解したい方々には、物足りないかもしれません。

ですので本書を読んだ後に、もし圏論に興味を持っていただけたならば……ぜひ別の専門書での「圏論」というものも、見ていただければと思います。

### 2.0.1　おすすめ資料・参考書

- 圏論勉強会 @ ワークスアプリケーションズ
    - *http://nineties.github.io/category-seminar*

そこそこマイルドな入門資料で、深い内容まで解説してくださっています。

本書を読んだ直後に読むなら、丁度いいはずです！

- 圏論の歩き方｜日本評論社
    - *https://www.nippyo.co.jp/shop/book/6936.html*

圏論自体を知りたい人よりは、「圏論って何に使われてるの？　どんな使い方するの？」を、最も手っ取り早く知りたい方におすすめです。

圏論の入門書ではなく、応用事例のまとめが多い気がします。

- 圏論の基礎 - 丸善出版 理工・医学・人文社会科学の専門書出版社
    - *https://www.maruzen-publishing.co.jp/item/b294317.html*

数学に精通した人への、入門書です。**数学入門者へのものではなく**。

密度がかなり高く、学習難易度は高いと思いますが、その分のリターンは期待できそうです。

### 2.0.2　付録・Web正誤表

本書は、読者の頭のメモリオーバーフローを避けるために、いくつかの証明が省略されています。

それらは以下のURLで見ることができます。

- 付録: *https://github.com/aiya000/setulabo-basic-category-proofs*

その他。

- Web正誤表: *http://aiya000.github.io/posts/2019-03-16-setulabo-errata.html*
- ハッシュタグ: #せつラボ

◆　◆　◆

# 第3章　始まり

静寂な朝。白基調のログハウス、高さ5メートル、風がよく通った部屋。

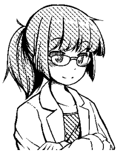
お風呂上がったよ〜。

彼女が歩いてくる。

歩きながら揺れる、リボンでくくったふわふわの髪を、目が追う。

……。

肩や首にかかる、なだらかな曲線からする、フローラルな香り……ドキドキするから、少しクールぶって、言葉を返す。



おかえり、μ。

ただいま、η♪

◆　◆　◆

圏論？

うん、試しに一緒に、やってみない？

もちろんいいけど……きゅうに、どうしたの。

ええとー……そう。

圏論はね、素晴らしいんだ。広くひろがる様々なものを、一様に説明する。まるで宇宙のような、深さ。

それをμにも、伝えたくてね！

ふうん……？

でも、うん、面白そうだね。ηがわたしに、なにか誘ってくれるのって、あんまりないし……やってみたいな。

よかった。

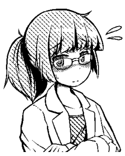
でも圏論って数学だよね。難しそう……。

大丈夫、圏論の基本はシンプルなものだよ。少しの事前知識はいるけど、そこから始めていこう。

今回は、圏論の基本を見通すところ——そこまでを目標にしようかな。どうだろう。

ηといっしょなら、なんだってたのしいよ♪　よろしくおねがいします……なんて。

目をきらきらさせて。……あどけない笑顔。



……。

ちょっと、照れた。

## 3.1　圏論とは何か

◆ ◆ ◆

始める前に……まずは、圏論が何なのかについてでも、語らせて貰おうかな。

ふふ、よろしく。

圏論の素晴らしさは——多様な概念を**圏**という、ただ一つの単位に落とし込むところにある。

ほ〜。

数学の各分野には、とっても多くの概念があるんだ。整数とか、集合とか、関数とか、モナドとか。

どっかで聞いたことがあるような、ないような単語だね。

圏論は、それらの構造を——「圏」という、たった一つの定義に統一・注視するための分野なんだ。

なんか、まとめる感じなのかな。

そう。

まず、各分野の概念を、圏としてまとめる。次に、圏だけを使って、事柄を述べる。

そうすることで——各分野で全く同じことを、各々述べてしまう事態を回避できる。

おー。圏論は、各分野をまとめてるんだね。

その通り、さすがμだね。

圏論に浸っているときは、僕もまるで宇宙に放り出されたかのように、気持ちがよくて。あの感覚を、ぜひμにも……

へ、へぇ〜。……ふふ。

## 3.2 （本章での参考文献）


- 圏論 - Wikipedia: https://ja.wikipedia.org/wiki/圏論

# 第4章　集合

じゃあ数学を――始めていこう。

よろしくね～！

　これから圏論に入門するために、まずは前知識を学ぼう。

　――まずは**集合**について。そしてその次に、各用語について。

ドキドキ……。

　臆することは、ないと思うよ。できるだけ、やさしく教えるつもり。

　それに……圏論の準備と侮るなかれ。これらもとってもとっても、面白いんだ。

　そっか～。ηがそういうなら、きっとそうだね。

難しく考えすぎずに、ぜひリラックスして、楽しんで欲しい。

## 4.1　集合と写像

集合について、次の概念を説明するよ。

- 集合・元（要素）・濃度
- 写像・合成・全射・単射

集合は、多くの数学分野の基礎。だから集合について知ることは、数学の基礎を知る——ということになる。

ドキドキ……するね！

ふふ。楽しんでもらえれば、幸いだよ。

……集合は、**ものの集まり**だよ。例えば三角形の集合Tは、こんな感じに書いたり

```
T = { △, ▲, ∴ }
```

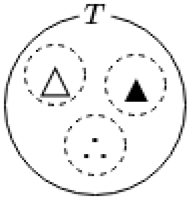
▲リスト4.1: 外延的記法での表現

こうやって書いたり

```
T = { x | xは三角形 }
```

▲リスト4.2: 内包的記法での表現

あるいは視覚的に書いたりする。




▲ 図4.1: 図での表現

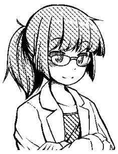
ははは、三角形の変な顔〜。

えっ？……ふふ、確かに顔に見えるかも。

こ、こほん。

1つ目のを**外延的記法**、2つ目のを**内包的記法**と言うよ。

3番目は？



単に**図**かな。特別な呼び名は、一般的にはないと思う。

ほうほう。

外延・内包……うんうん。書き方、いくつかあるんだね。

外延的記法は目にもわかりやすいし、テキストとして書ける。内包的記法はものが多すぎるときにも、わかりやすく書ける。そして図は目に——とってもわかりやすい。

つかいわけだね。

へえ〜。

そして、集合Tの中の3つの三角形。さっきから「もの」と呼んでいるやつだね。

これを集合の**元**（げん）・または**要素**という。∈という記号を使って、こう書くよ。

△ ∈ T
▲ ∈ T
∴ ∈ T

あるいは、まとめて

△，▲，∴ ∈ T

▲リスト4.3: 集合Tの元

▲を例に取って、「**▲**はTに**属する**」とも。

げん・ようそ。それにも名前があるんだ。

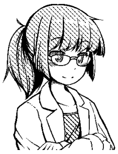
雰囲気のまま「もの」って言ってたら、意味が曖昧になってしまって……言葉を使っている間に、勘違いが起きてしまうかもしれないからね。

用語で意味をしばっておくのは、とっても大切なことなんだ。

おお。それ、なんかかっこいいね。

そう？　ふふ、そうだね。

### 4.1.1　濃度・有限集合・無限集合



集合Tの元の個数は3だった。じゃあ次の集合Cの、元の個数はなんだと思う？

```
C = { ○, ● }
```

▲リスト4.4: 丸の集合C

えーと、2？

その通り。

こうやって集合の元の個数――つまり**集合の大きさ**――を問うことは、よくある。

これを**濃度**という。

のうど、のうど。

でも――集合の元の個数は、必ずしも有限じゃない。例えば「全ての自然数の集まり」は集合になるけど、元が無限にある。[*1][*2]

『自然数すべての個数は、いくつ？』なんて聞かれたら……答えられないよね。

う、うん。1000とか10000000とか、もっともっと大きい数が……あるね。

[*1] 自然数とは、0以上の数の、集まりのこと。[*2]

[*2] 自然数は場合によって「0以上」もしくは「1以上」だったりするよ。今回は、自然数は0以上。

そう、つまり自然数には「一番大きい数」がないんだ。元が……無数にある。

そういう、元が無数にある集合を、**無限集合**。

そうでない……元の個数を答えられる集合を、**有限集合**というよ。

集合TやCが有限集合。自然数とかが無限集合……なんだね！

うんうん、そう。

自然数の集合の名前をℕとして書くと、こう。 *3

```
ℕ = { 0, 1, 2, ... }
── ここで「...」は、意味が明らかな、可算無限な省略。
```

▲リスト4.5: 自然数の集合ℕ（エヌ）

おお〜。……可算？

実はね、無限集合……無限にも、またいくつかの種類があるんだ。

それは──**可算無限**と、**非可算無限**。

……？

[*3] 自然数の英名 "N"atural number の "N" だよ。

圏論の基本には関わってこないから、小難しい詳細は省かせてもらうけど……

無限には——可算無限という、**自然数と同じ**濃度。そして非可算無限という、**実数と同じ**濃度。——が、あるんだ。

実数ってなんだっけ？

`-10000.0`とか、`0.0`とか、`1.1`とか、`3.333333…`とか。`1/3`とか、√2とか、πとか……自然数よりも、多くの数が含まれる、集合のことだね。

いろんなしゅるいの数が、はいった集合……なんだね！

そう言って、差し支えないよ。

……つまり濃度とは、次の代表的な3通りがある。「この3通りがある」ことを覚えてもらえれば、十分かな。

- n個 （0以上の、有限な個数）
- 可算無限個（自然数と同じ大きさ）
- 非可算無限個（実数と同じ大きさ）

集合の大きさは、3通り。おっけー！

……

ここまでで、集合そのもの……の知識について、完了だよ。

最後に有用な知識として、いくつかの集合の具体例を、見てみよう。

- 有限な集合
    - 三角形の集まり

    - 自然数のうち 0 〜 10
- 可算無限な集合
    - 自然数
    - 整数[*4]
    - 偶数[*5]
    - 奇数[*6]
- 非可算無限な集合
    - 実数
    - 実数のうち 0.0 〜 10.0

「実数のうち 0.0 〜 10.0」も非可算無限なんだ。

そう。実数の一部分を切り取っても、それは実数の濃度と等しくなるんだ。

つまり全体と一部分の大きさが、等しい。……面白いね。

えっと……？？……？

今回そこは考えなくて大丈夫！　頭があふれてしまいそうなら、無理をする必要はないから。

と一っても面白い事象なんだよ……って。

えへへ……！

### 4.1.2　写像

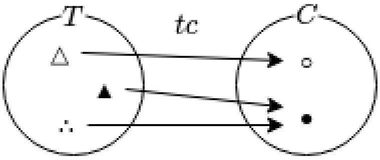
[*4] 整数とは、-1以下・0・1以上──の数の集まりのこと。

[*5] 偶数とは、整数のうち2で割り切れる数の、集まりのこと。

[*6] 奇数とは、整数のうち2で割り切れない数の、集まりのこと。

集合はそれだけでも便利だし面白いんだけど、さらに広いことを考えるために、**写像**という概念がある。

写像というのは、集合と集合を結びつける概念だよ。書いてみよう。




▲ 図4.2: 写像tc : T -> C

やじるしだ！

そう、矢印。

正確には――「集合の**全ての元**」を「他方の集合のいずれかの、1つの元」へ割り当てること。

――これを写像というよ。

また、このように各元を写像で割り当てることを、**写す**という。「Tの各元をCに写す」……という感じに。

うんうん。

厳密な定義は、このように書ける。

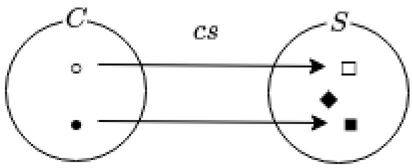
```
tc : T -> C
tc(△) = ○
tc(▲) = ●
tc(∴) = ●

または

tc : T -> C
tc : △ |-> ○
tc : ▲ |-> ●
tc : ∴ |-> ●
```

▲リスト4.6: 写像tc : T -> C

へえ～。写像、他にはどんなのがあるの？

いい質問だね。

丸から四角への写像を書いてみよう。




▲ 図4.3: 写像cs : C -> S

```
cs : C -> S
cs(○) = □
cs(●) = ■
```

▲リスト4.7: 写像cs : C -> S

そしてここが大事なんだけど――

tcのように、割り当て先の集合の、**全ての元に矢印**が当たっているような写像を**全射**。

csのように、割り当て先の集合の、**各元に矢印が1つだけ当たっているか、当たっていない**か……つまり2つ以上の割り当たりがない写像を**単射**

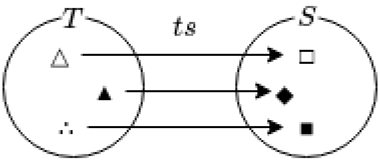
――と呼ぶ。

写像は、単射と全射にわけられるのかな。

おしい。

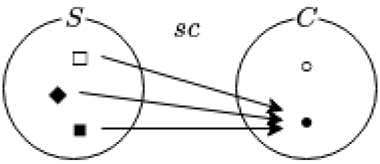
実は**全単射**という、全射でも単射でもある写像。そして全射でも単射でもない写像も考えられる。

次のtsは全単射。




▲ 図4.4: 写像ts : T -> S

次のscは全射でも単射でもない、ただの写像だよ。




▲ 図4.5: 写像sc : S -> C

ぜんぶで4パターン、あるんだね！

その通り。

### 4.1.3　合成

最後に、**写像の合成**と呼ばれるものを見てみよう。

写像の合成とは——2つの写像を合わせて、もう1つの写像を定義するものだよ。

写像の合成は、次のように定義される。

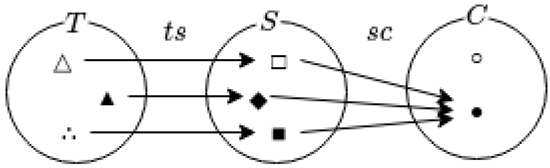
```
ある写像f，gに対して
    f : X -> Y
    g : Y -> Z
次のように定義される。

g ○ f : X -> Z
(g ○ f)(x) = g(f(x))
```

▲リスト4.8: 写像の合成○

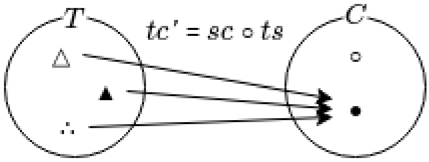
……つまり……？

さっき使った写像tsとscを合成して、写像tc'——ティーシープライム——を定義してみよう。

それはこのように書けるよ。




▲ 図4.6: 写像tsとscの合成イメージ




▲ 図4.7: 写像tc' : T -> C

```
tc' : T -> C
tc' = sc ○ ts

つまり

tc'(△)  =  (sc ○ ts)(△)  ―― tc' = sc ○ ts を展開
        =  sc(ts(△))     ―― (sc ○ ts)(x) = sc(ts(x)) を展開
        =  sc(□)         ―― ts(△) = □ を展開
        =  ●

tc'(▲) = (同じく展開) = ●
tc'(∴) = (同じく展開) = ●
```

▲リスト4.9: 写像tc' : T -> C

おー！　△を□に写したあとに、●に写すのか～。

そうそう。**写した元をまた写す**……っていうを各元にするのが、合成された写像だね。

そういえば、tcもTからCへの写像だったよね。tcとtc'はちがうものなの？

うん。tcが△を○に写すのに対して、tc'は△を●に写すよ。

TからCへの写像は、何パターンか別のものを、考えられるんだ。

たしかに、ほんとだ！

## 4.2　まとめ

これで集合の内容は終わり。お疲れ様！

おつかれさま、ありがと！

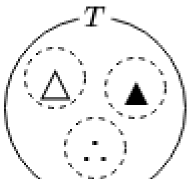
いいえ。

……理解したことを、まとめてみよう。

**集合**は**元**と呼ばれるものの、集まりのこと。それは外延的記法・内包的記法・あるいは図で書かれる。

```
C = { ○, ● }
S = { x | xは四角形 }
```

▲リスト4.10: 外延的記法・内包的記法、での表現




▲ 図4.8: 図での表現

うんうん。

それらには**濃度**と呼ばれる、集合の大きさが定義される。

濃度には種別がある。**有限**——例えば3・4・10000。そして**可算無限・非可算無限**。

具体的な集合として、次のものがある。

- 有限な集合
    - 三角形の集まり
    - 自然数のうち 0 〜 10
- 可算無限な集合
    - 自然数
    - 整数
    - 偶数
    - 奇数
- 非可算無限な集合
    - 実数
    - 実数のうち 0.0 〜 10.0

有限と可算無限・非可算無限だね。

それら集合の間には、**写像**というものが定義できる。写像とは、ある集合の全ての元から、集合の元への割り当てのことだった。

写像は、4種類に分けられる。

- **全単射**
- **全射**（単射でない）
- **単射**（全射でない）
- 全射でも単射でもない

うんうん！

`f : X -> Y`と`g : Y -> Z`のような、Yで繋がる写像は、**合成**という概念が定義できる。つまり、合成○が、`g ○ f : X -> Z`を定義できる。

……以上。

ありがとう♪

これでμは、数学という宇宙に、足を踏み入れたということになる。

――どうかこの宇宙を、楽しんでいって欲しい。

う、宇宙。ふふ、たのしそう……なのかな。

……

## 4.3　ノートの切れ端A

μへ。もし興味があれば、調べてみてね。ηより。

実は写像は、写すもととさきが同じものも定義できる。例えばtt : T -> Tのような。

1) T -> Tの具体的な定義を、いくつか考えてみて。

さっき見たようaに、実は自然数と整数の大きさは同じなんだ。その間に、以下のような全単射が考えられるから。

```
f : 自然数 -> 整数
f 0 =  0
f 1 = -1
f 2 =  1
f 3 = -2
f 4 =  2
...
```

▲リスト4.11: 自然数から整数への全単射

偶数と整数の大きさも、実は同じ。偶数は整数の一部なのにね……不思議で、素敵。

1) 偶数から整数への全単射gの、*リスト4.12*の「?」を埋めてみて。
2) 同じように、奇数から整数への全単射を、考えてみて。

```
g : 偶数 -> 整数
g 0 = 0
g 2 = 1
g ? = 2
g ? = 3
g ? = 4
```

▲リスト4.12: 偶数から整数への全単射

お疲れ様 :)

## 4.4 （本章での参考文献）


- 集合 - Wikipedia: *https://ja.wikipedia.org/wiki/集合*
- 濃度 (数学) - Wikipedia: *https://ja.wikipedia.org/wiki/濃度_(数学)*
- デデキント切断 - Wikipedia: *https://ja.wikipedia.org/wiki/デデキント切断*

# せつラボ 〜圏論の基本〜

2019-04-14 初版 技術書典6
原作 aiya000 (@public_ai000ya)
ヴィジュアル 碧はっさく (@HassakuTb)
発行所 しまや出版