

# せつラボ ～圏論の基本～

原作・本文

aiya000 (@public\_ai000ya)

イラスト・ヴィジュアルデザイン

碧はっさく (@HassakuTb)

2019/4/14 版 しまや出版 発行

○ ○ ○

おはよう。まだ夜は明けてないけれど。

8年前……夢を見た。

雲の上。辺りには水色いっぱいの空。どこか完成されたような、全く風のない……空気。

それで、君は何がお望みなの？

望みなんて、あまり考えたことがなかった。

僕は……

○ ○ ○

## 目次

第1章 登場人物	4
1.1 $\eta$ (えーた)	4
1.2 $\mu$ (みゆー)	4
第2章 (前書き)	5
2.1 付録・Web正誤表	6
第3章 始まり	7
3.1 圏論とは何か	9
3.2 (本章での参考文献)	10
第4章 集合	11
4.1 集合と写像	11
4.2 まとめ	24
4.3 ノートの切れ端A	26
4.4 (本章での参考文献)	27

## 第1章 登場人物

### 1.1 $\eta$ (えーた)

『そうだなあ、ずっと一緒にいてくれる人が欲しいな』

ちびっこ気だるげ・天才ヘタレガール。

右利き。

$\mu$ を大切に思うが故に $\mu$ に遠慮する癖、

一息ついたとき・困ったときなどに $\mu$ の方を見る癖がある。

家の縁側に庭用の靴を放置しておいたらカマキリが入っていて、

履いたときに足でつぶしてしまったのがトラウマ。



### 1.2 $\mu$ (みゅー)

『えへへ。わたしは $\eta$ が頑張ってるところ、大好きだから♪』

やさしさ・ふわふわ・女の子。

左利き。

$\eta$ のことが大好きで、常に付き従って、世話をやいている。

人当たりがよく温和で皆に好かれる。

しかしその一方で自分の意見を主張するのが苦手。

笑ったときやちょっと困ったときなど、手を丸めて口の前に添える癖がある。

ある不思議な出来事から生まれた女の子。



## 第2章 (前書き)

このたびは本書をお手にとってくださり、ありがとうございます！

### 「最初の指南」

本書含む、数学書の前書きが「まどろっこしい！」と思ったなら、チラ見で済ませるか、飛ばしてもいいと思います。数学へのモチベーションを大事に。前書きは後で！

この本は、**圏論**という**極楽浄土**を広めるために書かれました。「数学たのしそうなんだけど、難しくて……」という人々をターゲットにしています。

圏論に熱中し、ゾーンに入ったときの——あの「**宇宙にいるような感覚**」。本書が、その導きの第一歩となれば、嬉しいことこの上ありません。

**ターゲットは数学の未入門者**です。圏論をより厳密に理解したい方々には、物足りないかもしれません。

ですので本書を読んだ後に、もし圏論に興味を持っていただけたならば……ぜひ別の専門書での「圏論」というものも、見ていただければと思います。

### 圏論勉強会 @ ワークスアプリケーションズ

- <http://nineties.github.io/category-seminar>

そこそこマイルドな入門資料で、深い内容まで解説してくださっています。

本書を読んだ直後に読むなら、丁度いいはずです！

Web上の資料なので、試しに読んでみては、どうでしょうか。（本書を読んだ後にね！）

### 圏論の歩き方 | 日本評論社

- <https://www.nippon.co.jp/shop/book/6936.html>

圏論自体を知りたい人よりは、「圏論って何に使われてるの？ どんな使い方するの？」を、最も手っ取り早く知りたい方におすすめです。

圏論の入門書ではなく、応用事例のまとめが多い気がします。

### 圏論の基礎 - 丸善出版 理工・医学・人文社会科学の専門書出版社

- <https://www.maruzen-publishing.co.jp/item/b294317.html>

**数学入門者向けではない**かもしれません。数学に精通した人なら、入門書として最適だと思います。

密度がかなり高く、学習難易度は高いと思いますが、その分のリターンは期待できそうです。

## 2.1 付録・Web正誤表

本書は、読者の頭のメモリオーバーフローを避けるために、いくつかの証明が省略されています。

それらは以下のURLで見ることができます。

- 付録: <https://github.com/aiya000/setulabo-basic-category-proofs>

その他。

- Web正誤表: <http://aiya000.github.io/posts/2019-03-16-setulabo-errata.html>
- Twitter等のハッシュタグ: #せつラボ



## 第3章 始まり

静寂な朝。白基調のログハウス、高さ5メートル、風がよく通った部屋。

お風呂上がったよ～。



彼女が歩いてくる。

歩きながら揺れる、リボンでくくったふわふわの髪を、目が追う。



……。

肩や首にかかる、なだらかな曲線からする、フローラルな香り……ドキドキするから、少しクールぶって、言葉を返す。



おかえり、μ。

ただいま、η♪



圏論？



うん、試しに一緒に、やってみない？



もちろんいいけど……きゅうに、どうしたの。





ええとー……そう。

圏論はね、素晴らしいんだ。広くひろがる様々なものを、一様に説明する。まるで宇宙のような、深さ。

それを $\mu$ にも、伝えたくてね！

ふうん……？

でも、うん、面白そうだね。 $\eta$ がわたしに、なにか誘ってくれるのって、あんまりないし……やってみたいな。



よかった。

でも圏論って数学だよな。難しそう……。



大丈夫、圏論の基本はシンプルなものだよ。少しの事前知識はあるけど、そこから始めていこう。



今回は、圏論の基本を見通すところ——そこまでを目標にしようかな。どうだろう。

$\eta$ といっしょなら、なんだってたのしいよ♪ よろしくおねがいします……なんて。



目をきらきらさせて。……あどけない笑顔。



……。

ちょっと、照れた。



### 3.1 圏論とは何か



始める前に……まずは、圏論が何なのかについてでも、語らせて貰おうかな。

ふふ、よろしく。



圏論の素晴らしさは——多様な概念を圏という、ただ一つの単位に落とし込むところにある。

ほ～。



数学の各分野には、とっても多くの概念があるんだ。整数とか、集合とか、関数とか、モノイドとか。

どっかで聞いたことがあるような、ないような単語だね。



圏論は、それらの構造を——「圏」という、たった一つの定義に統一して、注視するための分野なんだ。

なんか、まとめる感じなのかな。



そう。

まず、各分野の概念を、圏としてまとめる。次に、圏だけを使って、事柄を述べる。

そうすることで——各分野で全く同じことを、各々述べてしまう事態を回避できる。

おー。圏論は、各分野をまとめてるんだね。



その通り、さすが $\mu$ だね。

圏論に浸っているときは、僕もまるで宇宙に放り出されたかのように、気持ちがよくて。あの感覚を、ぜひ $\mu$ にも……

へ、へえ～。……ふふ。



### 3.2 (本章での参考文献)

- 圏論 - Wikipedia: <https://ja.wikipedia.org/wiki/圏論>

## 第4章 集合



じゃあ数学を——始めていこう。

よろしくね～！



これから圏論に入門するために、まずは前知識を学ぼう。  
——まずは**集合**について。そしてその次に、各用語について。

ドキドキ……。



臆することは、ないと思うよ。できるだけ、やさしく教えるつもり。  
それに……圏論の準備と侮るなかれ。これらもとってもとっても、面白いんだ。

そっか～。ηがそういうなら、きっとそうだね。



難しく考えすぎずに、ぜひリラックスして、楽しんで欲しい。

### 4.1 集合と写像



集合について、次の概念を説明するよ。

- 集合・元<sup>げん</sup>（要素）<sup>のうど</sup>・濃度
- 写像・合成・全射・単射



集合は、多くの数学分野の基礎。だから集合について知ること、は、数学の基礎を知る——ということになる。

ドキドキ……するね！



ふふ。楽しんでもらえれば、幸いだよ。  
……集合は、**ものの集まり**だよ。例えば三角形の集合の名前をTとすると、こんな感じに書いたり

$$T = \{ \triangle, \blacktriangle, \triangleleft \}$$

▲リスト4.1: 外延的記法での表現



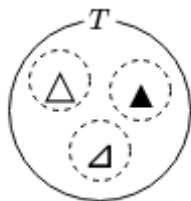
こうやって書いたり

$$T = \{ x \mid x \text{は三角形} \}$$

▲リスト4.2: 内包的記法での表現



あるいは視覚的に書いたりする。



▲ 図4.1: 図での表現

ははは、三角形の変な顔～。



えっ？……ふふ、確かに顔に見えるかも。

こ、こほん。

1つ目のを**外延的記法**、2つ目のを**内包的記法**と言うよ。

3番目は？



単に図かな。特別な呼び名は、一般的にはないと思う。

ほうほう。

外延・内包……うんうん。書き方、いくつかあるんだね。



外延的記法は**具体例の列挙**。目にもわかりやすいし、テキストとして書ける。

内包的記法は**性質による記述**。ものが多すぎるときにも、わかりやすく書ける。

そして図は——**目で見て**、とってもわかりやすい。

つかいわけだね。

へえ〜。



そして、集合Tの中の3つの三角形。さっきから「もの」と呼んでいるやつだね。

これを集合の<sup>げん</sup>元・または要素という。∈という記号を使って、こう書くよ。

$\triangle \in T$

$\blacktriangle \in T$

$\triangleleft \in T$

あるいは、まとめて

$\triangle, \blacktriangle, \triangleleft \in T$

#### ▲リスト4.3: 集合Tの元



▲を例に取って、「▲はTに属する」とも。

げん・ようそ。それにも名前があるんだ。



雰囲気のまま「もの」って言ってたら、意味が曖昧になってしまって……言葉を使っている間に、勘違いが起きてしまうかもしれないからね。

用語で意味をしばっておくのは、とっても大切なことなんだ。

おお。それ、なんかかっこいいね。





そう？ ふふ、そうだね。

#### 4.1.1 濃度・有限集合・無限集合



集合Tの元の個数は3だった。じゃあ次の集合をCとすると、元の個数はなんだと思う？

$$C = \{ \bigcirc, \bullet \}$$

▲リスト4.4: 丸の集合C

えーと、2？



その通り。

こうやって集合の元の個数——つまり**集合の大きさ**——を問うことは、よくある。

これを**濃度**という。

のうど、のうど。



でも——集合の元の個数は、必ずしも有限じゃない。例えば「全ての自然数の集まり」は集合になるけど、元が無限にある。<sup>\*1</sup>

『自然数すべての個数は、いくつ？』なんて聞かれたら……答えられないよね。

[\*1] 全ての自然数の集まり（**自然数全体**）とは  $\{0, 1, 2, \dots\}$  という、物を数える数のこと。ときによって、0以上ではなく1以上を指す場合もあるよ。

う、うん。1000とか10000000とか、もっともっと大きい数が……あるね。



そう、つまり自然数には「一番大きい数」がないんだ。元が……無数にある。

そういう、元が無数にある集合を、**無限集合**。

そうでない……元の個数を答えられる集合を、**有限集合**というよ。

集合TやCが有限集合。自然数とかが無限集合……なんだね！



うんうん、そう。

自然数の集合の名前を $\mathbb{N}$ として書くと、こう。<sup>\*2</sup>

$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, \dots \}$

—— ここで「 $\dots$ 」は、意味が明らかな、**可算無限**な省略。

▲リスト4.5: 自然数の集合 $\mathbb{N}$

おお～。……可算？



実はね、無限集合……無限にも、またいくつかの種類があるんだ。

それは——**可算無限**と、**非可算無限**。

……？



[\*2] 自然数の英名 "N"atural number の "N" だよ。





圏論の基本には関わってこないから、小難しい詳細は省かせてもらうけど……

無限には——可算無限という、**自然数と同じ濃度**。そして非可算無限という、**実数と同じ濃度**。——が、あるんだ。

実数ってなんだっけ？



-10000.0とか、0.0とか、1.1とか、3.333333…とか。1/3とか、 $\sqrt{2}$ とか、 $\pi$ とか……自然数よりも、多くの数が含まれる、集合のことだね。

いろんなしゅるいの数が、はいった集合……なんだね！



そう言って、差し支えないよ。

……つまり濃度とは、次の代表的な3通りがある。「この3通りがある」ことを覚えてもらえれば、十分かな。

- $n$ 個 (0以上の、な個数)
- 可算無限個 (自然数と同じ大きさ)
- 非可算無限個 (実数と同じ大きさ)

集合の大きさは、3通り。おっけー！



……



ここまでで、集合そのもの……の知識について、完了だよ。

最後に有用な知識として、いくつかの集合の具体例を、見てみよう。

[\*3] 整数とは、-1以下・0・1以上——の数の集まりのこと。

- 有限な集合
  - 三角形の集まり
  - 自然数のうち  $0 \sim 10$
- 可算無限な集合
  - 自然数
  - 整数 <sup>\*3</sup>
  - 偶数 <sup>\*4</sup>
  - 奇数 <sup>\*5</sup>
- 非可算無限な集合
  - 実数
  - 実数のうち  $0.0 \sim 10.0$

「実数のうち  $0.0 \sim 10.0$ 」も非可算無限なんだ。



そう。実数の一部分を切り取っても、それは実数の濃度と等しくなるんだ。

つまり全体と一部分の大きさが、等しい。……面白いね。

えっと……??……?



今回そこは考えなくて大丈夫！ 頭があふれてしまいそうなら、無理をする必要はないから。

と一っつも面白い事象なんだよ……って。

えへへ……！



#### 4.1.2 写像

---

[\*4] 偶数とは、整数のうち2で割り切れる数の、集まりのこと。

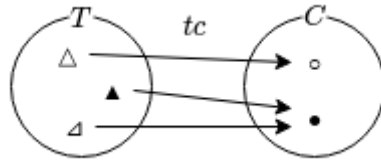
[\*5] 奇数とは、整数のうち2で割り切れない数の、集まりのこと。



集合はそれだけでも便利だし面白いんだけど、さらに広いことを考えるために、**写像**という概念がある。

写像というのは、集合と集合を結びつける概念だよ。

例えばTからCへの写像を $tc$ とすると……こう書ける。



▲ 図4.2: 写像 $tc: T \rightarrow C$

やじるしだ！



そう、矢印。

正確には——「集合の**全ての元**」を「他方の集合の**いずれかの、1つの元**」へ割り当てること。

——これを写像というよ。



また、このように各元を写像で割り当てることを、**写す**という。「Tの各元をCに写す」……という感じに。

うんうん。



言葉では、次のように定義できる。

$tc : T \rightarrow C$   
 $tc(\triangle) = \bigcirc$   
 $tc(\blacktriangle) = \bullet$   
 $tc(\triangleleft) = \bullet$

または

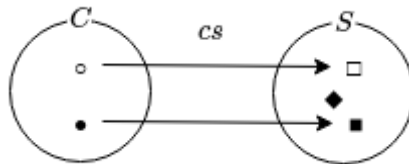
$tc : T \rightarrow C$   
 $tc : \triangle \mid \rightarrow \bigcirc$   
 $tc : \blacktriangle \mid \rightarrow \bullet$   
 $tc : \triangleleft \mid \rightarrow \bullet$

▲リスト4.6: 写像  $tc : T \rightarrow C$

へえ～。写像、他にはどんなのがあるの？



いい質問だね。  
 丸から四角への写像を書いてみよう。



▲図4.3: 写像  $cs : C \rightarrow S$

$cs : C \rightarrow S$   
 $cs(\bigcirc) = \square$   
 $cs(\bullet) = \blacksquare$

▲リスト4.7: 写像  $cs : C \rightarrow S$



そしてここが大事なんだけど――

$tc$ のように、割り当て先の集合の、**全ての元に矢印が当たっ**  
**ているような写像を全射。**

csのように、割り当て先の集合の、各元に矢印が1つだけ当たっているか、当たっていないか……つまり2つ以上の割り当てたりがない写像を単射

——と呼ぶ。

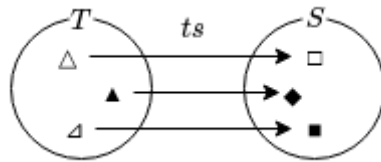
写像は、単射と全射にわけられるのかな。



おいしい。

実は**全単射**という、全射でも単射でもある写像。そして全射でも単射でもない写像も考えられる。

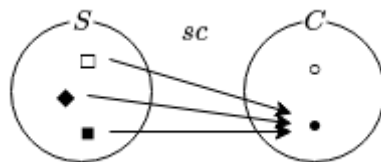
次のtsは全単射。



▲ 図4.4: 写像  $ts : T \rightarrow S$



次のscは全射でも単射でもない、ただの写像だよ。



▲ 図4.5: 写像  $sc : S \rightarrow C$

ぜんぶで4パターン、あるんだね！



- 全単射
- 全射（単射でない）

- 単射（全射でない）
- 全射でも単射でもない



その通り。

### 4.1.3 合成



最後に、**写像の合成**と呼ばれるものを見てみよう。

写像の合成とは——2つの写像を合わせて、もう1つの写像を定義するものだよ。

写像の合成は、次のように定義される。

ある写像  $f, g$  に対して

$$f : X \rightarrow Y$$

$$g : Y \rightarrow Z$$

次のように定義される。

$$g \circ f : X \rightarrow Z$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

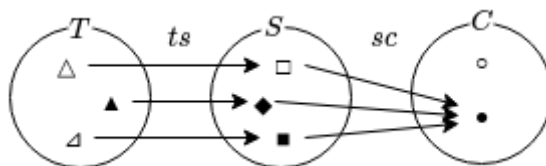
▲リスト4.8: 写像の合成○

……つまり……？

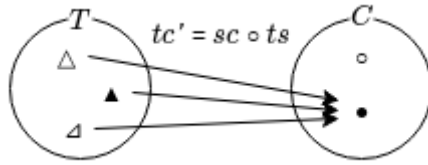


さっき使った写像  $ts$  と  $sc$  を合成して、写像  $tc'$ ——ティーシープライム——を定義してみよう。

それはこのように書けるよ。



▲ 図4.6: 写像  $ts$  と  $sc$  の合成イメージ



▲ 図4.7: 写像  $tc': T \rightarrow C$

$tc' : T \rightarrow C$   
 $tc' = sc \circ ts$

つまり

$tc'(\Delta) = (sc \circ ts)(\Delta)$  —  $tc' = sc \circ ts$  を展開  
 $= sc(ts(\Delta))$  —  $(sc \circ ts)(x) = sc(ts(x))$  を展開  
 $= sc(\square)$  —  $ts(\Delta) = \square$  を展開  
 $= \bullet$

$tc'(\blacktriangle) = (\text{同じく展開}) = \bullet$

$tc'(\sphericalangle) = (\text{同じく展開}) = \bullet$

▲ リスト4.9: 写像  $tc': T \rightarrow C$

おー！  $\Delta$ を $\square$ に写したあとに、 $\bullet$ に写すのか〜。



そうそう。写した元をまた写す……っていうを各元にするのが、合成された写像だね。

そういえば、 $tc$ も $T$ から $C$ への写像だったよね。 $tc$ と $tc'$ はちがうもののなの？



うん。 $tc$ が $\Delta$ を $\circ$ に写すのに対して、 $tc'$ は $\Delta$ を $\bullet$ に写すよ。  
 $T$ から $C$ への写像は、何パターンか別のものを、考えられるんだ。

たしかに、ほんとだ！



## 4.2 まとめ



これで集合の内容は終わり。お疲れ様！

おつかれさま、ありがと！



いいえ。

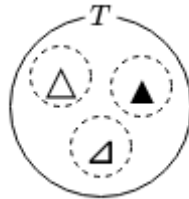
……理解したことを、まとめてみよう。

**集合は元**と呼ばれるものの、集まりのこと。それは外延的記法・内包的記法・あるいは図で書かれる。

$$C = \{ \bigcirc, \bullet \}$$

$$S = \{ x \mid x \text{は四角形} \}$$

▲リスト4.10: 外延的記法・内包的記法、での表現



▲図4.8: 図での表現

うんうん。



それらには**濃度**と呼ばれる、集合の大きさが定義される。



濃度には種別がある。**有限**——例えば $3 \cdot 4 \cdot 10000$ 。そして**可算無限・非可算無限**。

具体的な集合として、次のものがある。

- 有限な集合
  - 三角形の集まり
  - 自然数のうち  $0 \sim 10$
- 可算無限な集合
  - 自然数
  - 整数
  - 偶数
  - 奇数
- 非可算無限な集合
  - 実数
  - 実数のうち  $0.0 \sim 10.0$

有限と可算無限・非可算無限だね。



それら集合の間には、**写像**というものが定義できる。写像とは、ある集合の全ての元から、集合の元への割り当てのことだった。

写像は、4種類に分けられる。

- **全単射**
- **全射** (単射でない)
- **単射** (全射でない)
- 全射でも単射でもない

うんうん！



$f : X \rightarrow Y$  と  $g : Y \rightarrow Z$  のような、 $Y$  で繋がる写像は、**合成**という概念が定義できる。つまり、合成  $\circ$  が、 $g \circ f : X \rightarrow Z$  を定義できる。

……以上。

ありがとう♪



これで $\mu$ は、数学という宇宙に、足を踏み入れたということになる。

——どうかこの宇宙を、楽しんでいって欲しい。

う、宇宙。ふふ、たのしそう……なのかな。



.....

## 4.3 ノートの切れ端A

$\mu$ へ。もし興味があれば、調べてみてね。 $\eta$ より。

### 4.3.1 元の重複

集合の元は、重複しない。

例えば、以下の左右の集合は、等しい。

また、これらの濃度はどちらも2になる。

$$\{ 1, 2, 1 \} = \{ 1, 2 \}$$

▲リスト4.11: 元「1」は一つだけ

元1が二度以上あらわれても、一度あらわれるのと同じ、ってことだね。

ちなみに、元のあらわれる順番も、集合では問われないよ。

$$\{ x, y \} = \{ y, x \}$$

▲リスト4.12: 集合の元に、順番はない

### 4.3.2 写像

写像は、写すもととさきが同じものも定義できる。例えば $tt: T \rightarrow T$ のような。

1)  $T \rightarrow T$ の具体的な定義を、いくつか考えてみて。

### 4.3.3 同じ濃度

可算無限は、自然数と同じ濃度。非可算無限は、実数と同じ濃度。——であると言った。

ある集合XとYの**同じ濃度**であるというのは、実は「XとYの間に、**全単射が存在する**」と定義される。

例えばさっき見たように、自然数と整数は同じ濃度なんだ。その間に、一例として、以下のような全単射が考えられるから。

```
f : 自然数 -> 整数
f 0 = 0
f 1 = -1
f 2 = 1
f 3 = -2
f 4 = 2
...
```

▲リスト4.13: 自然数から整数への全単射

偶数と整数の大きさも、実は同じ。偶数は整数の一部なのにね……不思議。素敵だね。  
だから、次の問題も、よかったら考えてみて。

- 1) 偶数から整数への全単射gの、リスト4.14の「?」を埋めてみて。
- 2) 同じように、奇数から整数への全単射を、考えてみて。

```
g : 偶数 -> 整数
g 0 = 0
g 2 = 1
g ? = 2
g ? = 3
g ? = 4
```

▲リスト4.14: 偶数から整数への全単射



お疲れ様:)

## 4.4 (本章での参考文献)

- 集合 - Wikipedia: <https://ja.wikipedia.org/wiki/集合>
- 濃度 (数学) - Wikipedia: [https://ja.wikipedia.org/wiki/濃度\\_\(数学\)](https://ja.wikipedia.org/wiki/濃度_(数学))
- デデキント切断 - Wikipedia: <https://ja.wikipedia.org/wiki/デデキント切断>
- 連続体濃度 - Wikipedia: <https://ja.wikipedia.org/wiki/連続体濃度>

## せつラボ ～圏論の基本～

---

2019-04-14 初版 技術書典6  
原作 aiya000 (@public\_ai000ya)  
ヴィジュアル 碧はっさく (@HassakuTb)  
発行所 しまや出版

---

(C) 2019 aiya000 aiya000.develop@gmail.com