C.1 Un campo eléctrico viene determinado por la expresión $\vec{E} = 2 \cdot x^3 \, \vec{i}$ kN/C. Determina la diferencia de potencial entre los puntos de coordenadas (1,1,1) m y (2,1,3) m [1 punto].

RESOLUCIÓN:

Para resolver esta cuestión utilizamos la relación que existe entre el potencial y el campo eléctrico:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -E\,\vec{i} \cdot (dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}) = -E \cdot dx$$

$$\Rightarrow \int_{x=1}^{x=2} dV = -\int_{x=1}^{x=2} E \cdot dx \quad \Rightarrow \quad V(2) - V(1) = -\int_{x=1}^{x=2} 2 \cdot x^3 \cdot dx = -\left.\frac{2 \cdot x^4}{4}\right|_{x=1}^{x=2} = -\frac{1}{2}\left[2^4 - 1^4\right] = -\frac{15}{2} V$$

Lógicamente el potencial es mayor en el punto de coordenadas (1,1,1), ya que el sentido del campo es el positivo del eje X.

C.2 Una esfera maciza y aislante de radio R tiene una densidad de carga no uniforme, que varía proporcionalmente con respecto a la distancia al centro de la esfera r, de acuerdo con la relación: $\rho = A \cdot r$, donde A es una constante siendo (A<0). Calcula el campo eléctrico para puntos exteriores a la esfera en función del valor de A [1 punto].

RESOLUCIÓN:

Para calcular el campo eléctrico en el exterior de la esfera utilizamos la ley de Gauss:

$$\oint_S \vec{E} \bullet \vec{dS} = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

Tomamos como superficie gaussiana una esfera de radio $r \geq R$. El vector campo eléctrico $\vec{E}$ y el vector superficie $\vec{dS}$ forman un ángulo de 0º. Desarrollando la expresión anterior tenemos:

$$\oint_S E \cdot dS \cdot \cos 0^\circ = E \cdot S = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

donde S es la superficie de la esfera de radio r y Q la carga total encerrada en el interior de dicha esfera, que se calcula como:

$$Q_{encerrada} = \int_v \rho \cdot dV = \int_0^R A \cdot r \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr = 4 \cdot \pi \cdot A \cdot \frac{R^4}{4} = \pi\, A\, R^4$$

El módulo del campo eléctrico, por tanto, es:

$$E = \frac{Q_{encerrada}}{S \cdot \varepsilon_0} = \frac{\pi \cdot A \cdot R^4}{4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \varepsilon_0} = \frac{A \cdot R^4}{4 \cdot r^2 \cdot \varepsilon_0} \quad N/C$$

La dirección del campo eléctrico es radial y su sentido hacia dentro de la esfera ya que A<0.

C3. Un condensador de placas cuadradas, de 6 mm de lado y paralelas entre sí, está dentro de un campo magnético uniforme de 2 mT. La diferencia de potencial entre las placas del condensador es de 100 V y las placas están separadas por 0.1 mm de aire. ¿Qué energía electromagnética hay en el volumen de aire que existe entre las placas de dicho condensador? [1 punto]. Datos: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\, u\, S.I.$ y $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\, u\, S.I.$

RESOLUCIÓN:

En el espacio de aire comprendido entre las placas del condensador habrá energía debido a la presencia de campo magnético y del campo eléctrico existente entre las placas.

La intensidad del campo eléctrico se puede obtener a partir del potencial como:

$$E = \frac{V}{d} = 10^6\ N/C$$

Por lo tanto la energía en el volumen pedido es:

$$U = (u_B + u_E) \cdot Volumen = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) \cdot Volumen$$

$$U = \frac{1}{2}\left(8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{12} + \frac{(2.10^{-3})^2}{4\pi 10^{-7}}\right) \cdot (6 \cdot 10^{-3})^2\ 0.1 \cdot 10^{-3} \approx 0.0216\ \mu J$$

C.4. Disponemos de un conductor cilíndrico de radio despreciable por donde circula una intensidad *I*. El cable está situado coaxialmente en el centro de un solenoide, que se puede considerar infinito, por el que circula una intensidad 2*I*. ¿A qué fuerza magnética está sometido el cable por encontrarse dentro del solenoide?

RESOLUCIÓN:

Si tenemos en cuenta la expresión de la fuerza que ejerce un campo magnético uniforme sobre un conductor rectilíneo por donde circula una corriente *I*:

$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

La fuerza ejercida sobre el cable será nula ya que el vector $\vec{l}$ será paralelo o antiparalelo (depende del sentido de las respectivas corrientes) al vector campo magnético $\vec{B}$ en el interior del solenoide.

C.5 Una onda electromagnética posee un campo eléctrico asociado $\vec{E} = 3\, sen(2\pi \cdot 10^6 y + 6\pi \cdot 10^{14} t)(-\vec{k})\ \ V/m$ (todo expresado en unidades del S.I.). Calcula: (a) La velocidad y el sentido de propagación de la onda [0.25 puntos], (b) expresión del campo magnético asociado [0.5 puntos], (c) vector de Poynting asociado [0.25 puntos].

RESOLUCIÓN:

(a) A partir del signo (+) que aparece entre paréntesis en la expresión de *E* concluimos que la onda *se desplaza en el sentido negativo del eje Y*.

De la expresión general del campo eléctrico podemos hallar el número de ondas y la frecuencia angular, y con ello la velocidad de propagación de la onda:

$$E = E_0 sen(k\,y + \omega t) \;\;\Rightarrow\;\; k = 2\pi \cdot 10^6\ rad/m,\ \omega = 6\pi \cdot 10^{14}\ rad/s \;\Rightarrow$$

$$\boxed{v = \omega / k = 3 \cdot 10^8\ m/s}$$

(b) La dirección y sentido de *B* debe ser $\vec{B} = B\,\vec{i}$, ya que la dirección y sentido de propagación de la onda está determinado por el producto vectorial $\vec{E} \wedge \vec{B}$.

Por otro lado, el campo magnético asociado debe tener la misma fase que el campo eléctrico y una amplitud dada por $B_0 = E_0 / v = 10^{-8}\ T$. Por lo tanto:

$$\boxed{\vec{B} = 10^{-8} sen(2\pi \cdot 10^6 y + 6\pi \cdot 10^{14} t)\,\vec{i}}$$

(c) El vector de Poynting viene dado por: $\vec{S} = \left(\vec{E} \wedge \vec{B}\right) / \mu_0$. Sustituyendo valores:

$\vec{S} = \dfrac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}} (3)\left(10^{-8}\right) sen^2 (2\pi \cdot 10^6\,y + 6\pi \cdot 10^{14} t)(-\vec{j})\ W/m^2$, de donde nos queda:

$$\boxed{\vec{S} = 0.024\ sen^2 (2\pi \cdot 10^6 y + 6\pi \cdot 10^{14} t)(-\vec{j}) \quad W/m^2}$$

P.1 Por un solenoide cilíndrico de 1 cm de radio y 20 cm de longitud, con núcleo de Fe dulce (permeabilidad magnética relativa μ_r = 5000) y 300 espiras circula una corriente de 2 A. Calcula: (a) El coeficiente de autoinducción *L* [1 punto]. (b) La energía almacenada en el solenoide [0.5 puntos]. (c) La *f.e.m.* media inducida en el solenoide si la corriente cambia de 2A a 1 A en 0.1 s [0.5 puntos]. Dato: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\, u\, S.I.$

Resolución:

(a) El flujo del campo magnético a través de las *N* espiras del solenoide será $\phi = NBS = N(\mu_r \mu_0 \dfrac{N}{l} I)(\pi r^2) = I \cdot 9\pi^2 \times 10^{-2}$ Wb

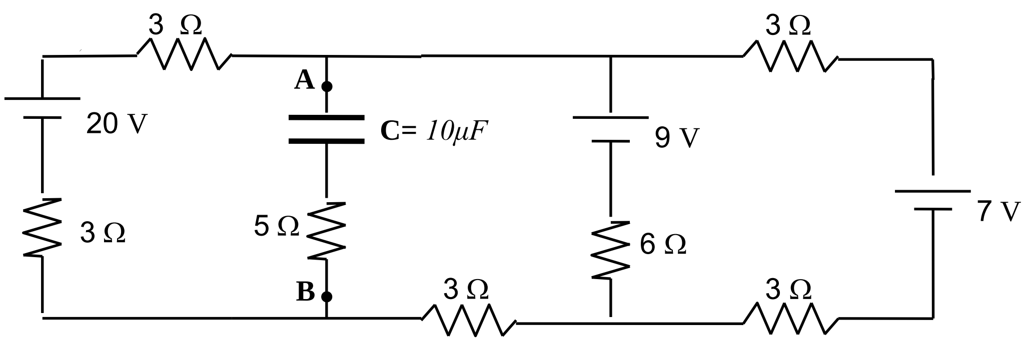
El coeficiente de autoinducción es: $L = \dfrac{\phi}{I} = 9\pi^2 \times 10^{-2} = 0.89\ H$

(b) La energía almacenada en el solenoide es: $U = \dfrac{1}{2} L\,I^2 = 1.78\ J$

(c) La *f.e.m.* media inducida será $\varepsilon = -L\dfrac{dI}{dt} = -0.89 \dfrac{(1-2)A}{0.1 s} = 8.9\ V$

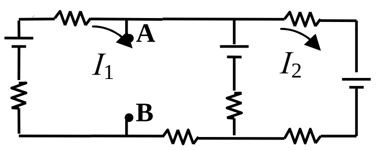
donde se ha aproximado la derivada por un cociente de incrementos.

P.2 Sabiendo que el circuito de la figura se encuentra en equilibrio (I_i=*cte*), determina:
(a) El equivalente de Thévenin entre los puntos *A* y *B* del circuito [1 punto].
(b) La energía almacenada en el condensador [0.5 puntos]



<u>RESOLUCIÓN</u>

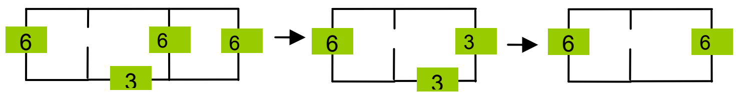
(a) Tenemos que calcular el equivalente de Thévenin del siguiente circuito:



Para hallar V_{Th} primero hay que resolver el circuito:

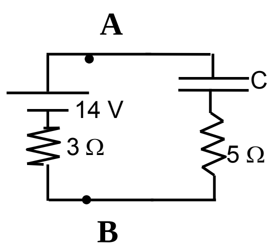
$15\ I_1 - 6\ I_2 = 11$	$30\ I_1 - 12\ I_2 = 22$	$24\ I_1 = 24 \rightarrow I_1 = 1$ A
$-6\ I_1 + 12\ I_2 = 2$	$-6\ I_1 + 12\ I_2 = 2$	$\rightarrow I_2 = 2/3$ A

$\Rightarrow V_{Th} = V_A - V_B = (-I_1)(3+3) - (-20) = (-1)\,6 + 20 \rightarrow \boxed{V_{Th} = 14\ V \quad (V_A > V_B)}$



$$\boxed{R_{Th} = \frac{6 \cdot 6}{6+6} = 3\,\Omega}$$

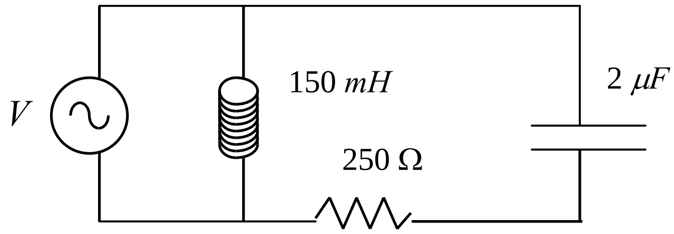
(b) Aprovechando el equivalente Thevenin nos queda el siguiente circuito:



Por estar el circuito en equilibrio el condensador se halla cargado y su rama en circuito abierto. Así la d.d.p. entre sus placas es igual a la tensión de la pila Thevenin. Y la energía vendrá dada por:

$$\boxed{U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} 10 \cdot 10^{-6} (14)^2 = 0.98\ mJ}$$

P.3 En el circuito de la figura, calcula: (a) Las corrientes que circulan por la bobina y el condensador [1 punto]. b) La potencia disipada en la resistencia [0.5 puntos].
Dato: $V = 300\sqrt{2}\,sen\left(2000\ t + 60^0\right)$



RESOLUCIÓN

(a)

$$\overline{V} = 300\lfloor 60^o \rangle; \qquad Lw = 150 \cdot 10^{-3} \cdot 2000 = 300\ \Omega; \qquad \frac{1}{Cw} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-6} \cdot 2000} = 250\ \Omega$$

$$\overline{Z}_1 = jLw = j300 = 300\lfloor 90^o \rangle; \qquad \overline{Z}_2 = R = 250 = 250\lfloor 0^o \rangle; \qquad Z_3 = \frac{-j}{Cw} = -j250 = 250\lfloor -90^o \rangle;$$

Z_2 y Z_3 están en serie: $\Rightarrow \quad \overline{Z}_{23} = 250 - j250 = 250\sqrt{2}\lfloor -45^o \rangle$

Las corrientes que circulan por *L* y *C* son:

$$\overline{I}_L = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}_1} = \frac{300\lfloor 60^o \rangle}{300\lfloor 90^o \rangle} = 1\lfloor -30^o \rangle; \qquad \rightarrow \qquad \boxed{I_L = \sqrt{2}\,sen(2000t - 30^o)\quad A}$$

$$\overline{I}_C = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}_{23}} = \frac{300\lfloor 60^o \rangle}{250\sqrt{2}\lfloor -45^o \rangle} = \frac{1.2}{\sqrt{2}}\lfloor 105^o \rangle; \qquad \rightarrow \qquad \boxed{I_C = 1.2\,sen(2000t + 105^o)\quad A}$$

(b) Como la corriente que pasa por el condensador es la misma que pasa por la resistencia:

$$\overline{I}_C = \overline{I}_R = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}_{23}} = \frac{1{,}2}{\sqrt{2}}\lfloor 105^o \rangle;$$

La potencia disipada en *R* será:

$$\Rightarrow \qquad \boxed{P_{dR} = I^2_{\mathrm{Re}f} \cdot R = \left(\frac{1{,}2}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 250 = 180 \quad W}$$