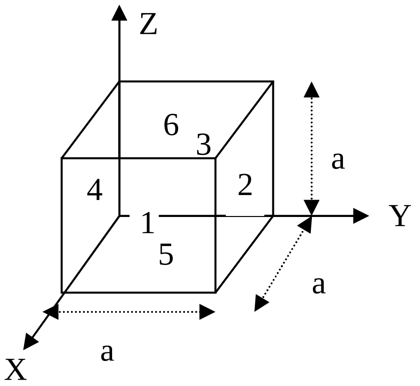
C.1 Considera la superficie cúbica cerrada de lado *a* que muestra la figura (el número de cara se especifica en el centro de cada cara). En esta región existe un campo eléctrico uniforme de valor $\vec{E} = E_0\,\vec{i}$. Calcula el flujo del campo eléctrico a través de cada una de las caras del cubo y la carga total en su interior [1 punto].



RESOLUCIÓN:

Para hallar el flujo del campo a través de una superficie *S* usamos la expresión:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} \ .$$

A través del producto escalar tenemos en cuenta la orientación relativa entre el campo $\vec{E}$ y el vector superficie $d\vec{S}$.

Dado que el campo eléctrico apunta a lo largo de la dirección *X*, $\vec{E} = E_0\,\vec{i}$, el flujo es nulo en todas las caras excepto en la cara 1 y la 3:

$$\boxed{\Phi_{Ecara2} = \Phi_{Ecara4} = \Phi_{Ecara5} = \Phi_{Ecara6} = 0}$$

Para la cara 1 y la cara 3, teniendo en cuenta las expresiones del campo eléctrico y de los vectores superficie respectivos tenemos:

$$\boxed{\Phi_{Ecara1} = \left(E_0\,\vec{i}\right)\cdot\left(a^2\,\vec{i}\right) = E_0 a^2}\ ;\ \boxed{\Phi_{Ecara3} = \left(E_0\,\vec{i}\right)\cdot\left(-a^2\,\vec{i}\right) = -E_0 a^2}$$

Puesto que el flujo total a través del cubo es nulo $\Phi_T = \Phi_{Ecara1} + \Phi_{Ecara3} = 0$, utilizando la Ley Gauss $\Phi_T = q_e / \varepsilon_0$ sabemos que la carga total encerrada dentro del cubo también debe ser nula

---

C.2 Una batería tiene una fem de 15 V. La diferencia de potencial entre sus bornes es de 14.14 V cuando se suministran 10 W de potencia a una resistencia de carga externa R. Calcula: (a) El valor de R [0.5 puntos]. (b) El valor de la resistencia interna de la batería [0.5 puntos].

RESOLUCIÓN:

a) La potencia de 10 W que suministra la batería es la que se disipa en la resistencia:

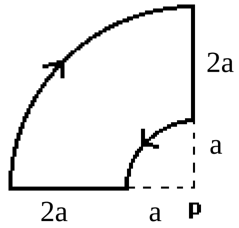
$$P_{disipada} = R\cdot I^2 = R\cdot\left(\frac{V^2}{R^2}\right) \Rightarrow R = \frac{V^2}{P_{disipada}} = \frac{(14.14)^2}{10} = 20\ \Omega$$

b) La potencia suministrada por la batería es: $P_{suministrada} = \varepsilon\cdot I - I^2\cdot r \Rightarrow r = \dfrac{\varepsilon\cdot I - P_{suministrada}}{I^2}$

La intensidad que circula por el circuito se calcula como: $I = \dfrac{V}{R} = \dfrac{14.14}{20} = 0.707\ A$

Sustituyendo este valor en la expresión anterior: $r = \dfrac{15\cdot 0.707 - 10}{(0.707)^2} = 1.21\,\Omega$

C3. Por el circuito de la figura circula una corriente I en sentido horario. Calcula el módulo, dirección y sentido del campo magnético generado en el punto **p** [1 punto].



RESOLUCIÓN:

Los dos tramos rectilíneos de longitud $2a$ producen un campo nulo en **p** ya que para ellos $d\vec{l} \times \vec{u}_r = 0$ (Ley de Biot-Savart).

El resto del circuito son dos tramos de ¼ de circunferencia de radios a y 3a, siendo el punto **p** el centro de las mismas.

Teniendo en cuenta que el campo magnético creado por una espira circular de radio R en su centro es: $B = \dfrac{\mu_0 I}{2R}$, tenemos:

Campo en **p** creado por el tramo exterior:

$B_e = \dfrac{1}{4}\dfrac{\mu_0 I}{2(3a)}$; perpendicular al plano del papel y dirigido hacia dentro

Campo en **p** creado por el tramo interior::

$B_i = \dfrac{1}{4}\dfrac{\mu_0 I}{2(a)}$; perpendicular al plano del papel y dirigido hacia fuera

Por tanto el campo en p valdrá: $B = \mu_0 \dfrac{I}{a}\left(\dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{24}\right) = \dfrac{\mu_0 I}{12a}$ dirigido hacia fuera.

C.4 Por un solenoide de 2000 espiras circula una intensidad de 2 A. Calcula la energía almacenada en el solenoide sabiendo que a través de cada una de sus espiras se establece un flujo de 10 mWb [1 punto].

RESOLUCIÓN:

Si sabemos el flujo que atraviesa una espira podemos obtener el flujo total que atraviesa el solenoide y por tanto obtener el valor de su autoinducción:

$$\Phi_T = N \cdot \Phi_1 = 2000 \cdot 0.01 = 20Wb \quad \rightarrow \quad L = \frac{\Phi_T}{I} = \frac{20}{2} = 10\ H$$

Luego la energía almacenada en la bobina es: $U_B = \dfrac{1}{2} L I^2 = 20\ J$

C.5 Una onda electromagnética plana que se propaga en un material de índice de refracción n=1.3, en la dirección negativa del eje *X*, tiene un valor máximo del campo eléctrico de $10\,V/m$. Si la onda está polarizada linealmente según el eje *Z*, y su longitud de onda en el material es de *500 nm*, determina: (a) las expresiones de los campos eléctrico y magnético que describen la onda [0.75 puntos], (b) la dirección en la que deberíamos colocar una antena dipolar eléctrica para que la recepción fuera óptima [0.25 puntos].

RESOLUCIÓN:

(a) Las expresiones de los campos eléctrico y magnético que describen una onda plana armónica que se propaga en la dirección del eje X son:

$$E = E_0 sen(k\,x \pm \omega t) \text{ y } B = B_0 sen(k\,x \pm \omega t)$$

donde hemos expresado los módulos de los campos y el signo depende del sentido de propagación.
.

Del enunciado conocemos: $E_0 = 10\,V/m$, $\lambda_{medio} = 0.5 \cdot 10^{-6}\ m$, *n = 1.3*.

De aquí podemos hallar:

$$k = 2\pi/\lambda_{medio} = 1.3 \cdot 10^{7}\ m^{-1}, \qquad v = c/n = 2.3 \cdot 10^{8}\ m/s\,.$$

Con esto obtenemos: $\omega = k\,v = 2.9 \cdot 10^{15}\ rad/s$ y $B_0 = E_0/v = 4.3 \cdot 10^{-8}\ T$.

Por otro lado, si la onda de campo eléctrico está polarizada según el eje *Z*, y se propaga en la dirección negativa del eje *X*, obtenemos:

$$\boxed{\vec{E} = 10 sen(1.3 \cdot 10^{7}\,x + 2.9 \cdot 10^{15}\,t)\,\vec{k}\ \ V/m}$$

El campo magnético vibra a lo largo del eje *Y*, de modo que $\vec{E} \wedge \vec{B}$ tenga el sentido negativo del eje *X* a lo largo del cual se propaga la onda, quedando:

$$\boxed{\vec{B} = 4.3 \cdot 10^{-8}\ sen(1.3 \cdot 10^{7}\,x + 2.9 \cdot 10^{15}\,t)\,\vec{j}\ \ T}$$

(b) Para que las corrientes producidas en la antena dipolar eléctrica sean máximas, ésta deberá estar orientada a lo largo de la dirección de vibración del campo eléctrico, por tanto, a lo largo del eje Z.

P.1 Un cable coaxial está formado por un hilo conductor central de radio a=1mm y un cilindro exterior, conductor, hueco y delgado, de radio b=7mm. El hilo central se carga con una densidad lineal de carga λ=8.85 x 10^{-11} C/m y el exterior con λ= - 8.85 x 10^{-11} C/m. Entre ellos existe un dieléctrico de permitividad dieléctrica relativa ε_r=2.5. Calcula: (a) El campo eléctrico desde *r*=0 hasta infinito [0.75 puntos]. (b) La diferencia de potencial entre los cilindros [0.75 puntos]. (c) La capacidad del condensador cilíndrico que forman ambos conductores [0.5 puntos].

Resolución:

(a) Al tratarse de conductores en equilibrio, la carga se distribuirá en la superficie. Por tanto, el campo en el interior del hilo central (r < a) es nulo.

Por la Ley de Gauss, el campo en el exterior (r > b) del cable es nulo, ya que la carga neta del cable es nula.

Sólo existe campo en el interior del cable, entre ambos cilindros (a < r < b):

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\vec{u}_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r}\vec{u}_r = \frac{2}{\pi\, r}\vec{u}_r \text{ V/m}$$

donde únicamente contribuye la carga del hilo central.

(b) La diferencia de potencial se obtendrá integrando el campo entre ambos cilindros:

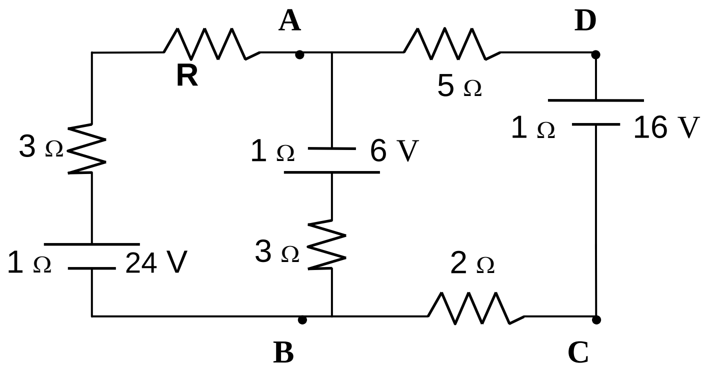
$$V_b - V_a = -\int_1^7 \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{2}{\pi}\int_1^7 \frac{dr}{r} = -\frac{2\cdot\ln 7}{\pi} = -1.24 \text{ V}$$

El conductor interior está a mayor potencial ya que contiene la carga positiva.

(c) Finalmente la capacidad será:

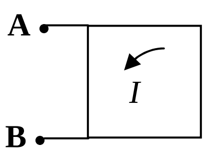
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{8.85\cdot 10^{-11}}{1.24} = 71.4 \text{ pF};\ \text{por cada metro de cable}$$

P.2 En el circuito de la figura la potencia disipada en el generador de 24 V es de 1 W. Calcula: (a) El valor de R, hallando previamente el equivalente de Thévenin del circuito ABCD [1 punto]. (b) Sustituimos el generador de 24 V por un condensador de 50 nF, ¿qué energía almacena el condensador cuando se halla en equilibrio? [0.5 puntos]



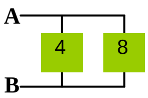
RESOLUCIÓN:

(a) Hallaremos el equivalente Thévenin del circuito a la derecha de los puntos de corte A y B.



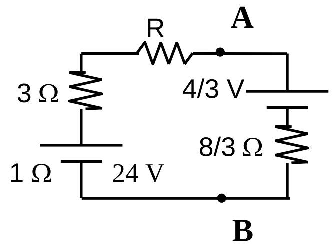
12 I = 22 ; I = 11/6 A

$\Rightarrow$ $V_{Th} = V_A - V_B =$ (11/6) (1+3) – 6 ; $\boxed{V_{Th} = \frac{4}{3} V \quad (V_A > V_B)}$



$\Rightarrow$ $\boxed{R_{Th} = \frac{4 \cdot 8}{4+8} = \frac{8}{3}\,\Omega}$

El circuito quedará ahora como:



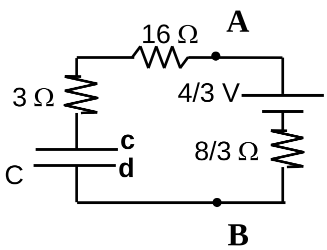
Vemos que la corriente circulará en sentido horario, y su valor lo podemos hallar de la potencia disipada en el generador de 1 Ω:

$$P = R\,I^2 \,; I = \sqrt{P/R} = \sqrt{1/1} = 1\,A$$

Ahora resulta directo calcular el valor de R:

(8/3 + 3 + 1 + R) I = 24 – 4/3 ; (20/3 + R) (1) = 68/3 ; $\boxed{R = 16\,\Omega}$

(b) Al sustituir el generador de 24 V por el condensador podemos hacer uso del equivalente de Thévenin para la resolución del problema.



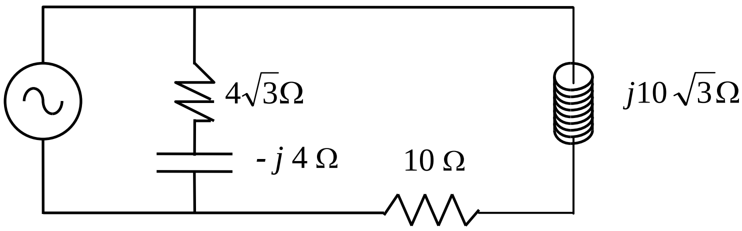
Como el circuito se halla en equilibrio, no circula corriente por la rama del condensador. Para calcular la energía almacenada por el condensador debemos hallar la diferencia de potencial entre sus placas: $V_c - V_d = -(-4/3) = 4/3\,V$

La energía almacenada viene dada por:

:

$$U_C = \frac{1}{2} C\,V^2 = \frac{1}{2}\left(50 \cdot 10^{-9}\right) \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 44.4 \cdot 10^{-9}\ J = 44.4\ nJ$$

P.3 En el circuito de la figura la fuente de alterna suministra una corriente eficaz de 3.23 A. Determina: (a) La impedancia total [0.5 puntos]. (b) La potencia disipada en cada una de las resistencias [1 punto].



Resolución:

(a)

$$\overline{Z}_1 = 4\sqrt{3} - j4 = 8\angle{-30^\circ}\ \Omega \qquad \overline{Z}_2 = 10 + j10\sqrt{3} = 20\angle{60^\circ}\ \Omega$$

$$\overline{Z}_e = \frac{\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2}{\overline{z}_1 + \overline{z}_2} = \frac{8\angle{-30^\circ} \cdot 20\angle{60^\circ}}{10 + 4\sqrt{3} + (10\sqrt{3} - 4)\,j} = \frac{160\angle{30^\circ}}{21{,}54\angle{38{,}2^\circ}} = 7{,}43\angle{-8{,}2^\circ}\ \Omega$$

(b) Para calcular la potencia disipada en cada resistencia hemos de conocer la corriente eficaz que circula por cada rama. Y para ello es necesario conocer antes la tensión eficaz de la fuente:

$$V_{ef} = I_{ef} \cdot Z_e = 3.23 \cdot 7.43 = 24\ \ V$$

Ahora:

$$I_{1ef} = \frac{V_{ef}}{Z_1} = \frac{24}{8} = 3\ \ A \qquad I_{2ef} = \frac{V_{ef}}{Z_2} = \frac{24}{20} = 1.2\ \ A$$

La potencia disipada en cada resistencia será:

$$P_{d1} = I_{1ef}^2 \cdot R_1 = (3)^2 \cdot 4\sqrt{3} = 62.35\ \ W$$

$$P_{d2} = I_{2ef}^2 \cdot R_2 = (1.2)^2 \cdot 10 = 14.4\ \ W$$