C.1 Una corteza esférica de radio 6cm posee una densidad superficial uniforme de carga σ=9nC/m^2. (a) ¿Cuál es la carga total sobre la corteza? [0.5 puntos]. (b) Determina el campo eléctrico en r_1=2cm y r_2=10cm [0.5 puntos].

RESOLUCIÓN:

a) La carga total sobre la esfera se calcula como:

$$\sigma = \frac{Q}{S} \Rightarrow Q = \sigma \cdot S = \sigma \cdot 4 \cdot \Pi \cdot r^2 = 9 \cdot 10^{-9} \cdot 4 \cdot \Pi \cdot \left(6 \cdot 10^{-2}\right)^2 = 4.07 \cdot 10^{-10} \quad C$$

b) Para determinar el campo eléctrico a distintos valores de r, utilizamos la ley de Gauss:

$$\oint_S \vec{E} \bullet \vec{dS} = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

La carga encerrada en el primer caso (r_1=2cm) es 0 porque ésta se encuentra distribuida en la superficie de la corteza, luego: $E_i=0$.

En el segundo caso (r_2=10 cm), la carga será la total contenida en la corteza esférica. Desarrollando la expresión anterior, teniendo en cuenta que los vectores $\vec{E}$ y $\vec{dS}$ son paralelos, obtenemos:

$$E_e \cdot 4 \cdot \Pi \cdot r^2 = \frac{Q_{Total}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{r=10} = \frac{Q_{Total}}{4 \cdot \Pi \cdot r^2 \cdot \varepsilon_0} = \frac{4071.5 \cdot 10^{-13}}{4 \cdot \Pi \cdot (0.1)^2 \cdot 8.84 \cdot 10^{-12}} = 366.5 \quad N/C$$

La dirección del campo es radial y sentido hacia fuera.

C.2 Determina: (a) la capacidad [0.5 puntos] y (b) la diferencia de potencial máxima que puede aplicarse a un condensador de placas plano paralelas [0.5 puntos], que contiene en su interior teflón como dieléctrico, con una superficie de placas igual a 1.75 cm^2 y una separación entre las mismas de 0.04 mm.
Datos: Límite de ruptura dieléctrico del teflón E_L=60·10^6 V/m y ε_r=2.1

RESOLUCIÓN:

a) La capacidad del condensador se calcula como:

$$C = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{d} = 2.1 \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot \frac{1.75 \cdot 10^{-4}}{0.04 \cdot 10^{-3}} = 8.12 \cdot 10^{-11} \ F$$

b) La diferencia de potencial máxima es:

$$V_{\max} = E_{\max} \cdot d = 60 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-5} = 2400 \quad V$$

C3. Disponemos de una pila de 10 V y resistencia interna igual a 1 Ω, un condensador de 1 μF y un solenoide de 2000 espiras circulares de 100 mm^2 de sección, resistencia de 9 Ω y 20 cm de longitud. ¿Cómo conectarías dichos dispositivos para almacenar una energía electromagnética máxima? ¿Qué energía máxima se almacenará? ¿Qué potencia se disipa en el circuito por efecto Joule? [1 punto].

RESOLUCIÓN:

Para almacenar una energía máxima el condensador debe estar totalmente cargado y circular la máxima corriente por la bobina, por lo tanto se deben conectar los dos dispositivos en paralelo con la pila.

La energía máxima almacenada será:

$$U_T = \frac{1}{2}CV_C^2 + \frac{1}{2}LI^2 = \frac{10^{-6}\cdot 9^2}{2} + \frac{4\pi 10^{-7}\cdot 2000^2\cdot 10^{-4}\cdot 1^2}{2\cdot 0.2} \approx 1.3\cdot 10^{-3}\, J$$

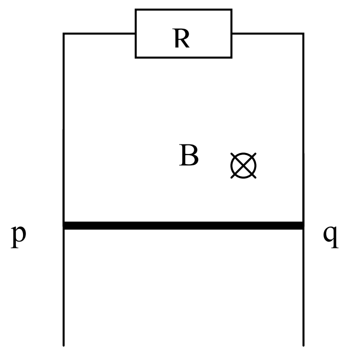
Ya que: $I_{max} = \varepsilon / R_{total} = 10/(1+9) = 1\ A$

Y la d.d.p entre las placas del condensador será igual a la d.d.p real entre los polos de la pila:

$$V_C = \varepsilon - r_{int}\cdot I_{max} = 10 - 1\cdot 1 = 9\ \text{V}$$

La potencia disipada por efecto Joule es: $P_d = I_{\max}^2 \cdot R_{total} = 1^2\cdot(9+1) = 10\quad W$

C.4 Un conductor de densidad lineal 0.04 Kg/m está conectado por los puntos p y q a dos alambres, sobre los que puede deslizar, como muestra la figura. Si el campo magnético B vale 0.5 T, ¿Qué corriente debe pasar por el conductor, y en qué sentido, para que este no caiga?
NOTA: Considera que el tramo del circuito donde se encuentra la resistencia R está muy alejado del tramo de conductor móvil. Dato: toma la aceleración de la gravedad como 9.8 m/s^2 [1 punto].



RESOLUCIÓN:

Para que no caiga el conductor la fuerza magnética por unidad de longitud debe ser igual y de sentido contrario a la fuerza peso por unidad de longitud. Para que la fuerza magnética esté dirigida hacia arriba la corriente debe de ir de p a q, ya que: $\vec{F}_m = I\,\vec{l}\otimes\vec{B}$

Por otra parte, como la corriente es perpendicular al campo magnético tenemos que:

$$F_g = F_m; \quad \Rightarrow \quad m\,g = I\,l\,B \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{l}\cdot g = IB$$

Por tanto:

$$I = \frac{0.04}{0.5}\cdot 9.8 = 0.784\ A$$

C.5 Una onda electromagnética posee un campo magnético asociado $\vec{B} = 3.3 \cdot 10^{-8} sen(10^7 z - 3 \cdot 10^{15} t)\,\vec{j}\;\; T$ (expresado en unidades del S.I.). Calcular: (a) La longitud de onda, frecuencia y velocidad de propagación [0.25 puntos]. (b) La expresión del campo eléctrico asociado [0.5 puntos]. (c) La dirección en la que deberíamos colocar una antena dipolar magnética para que la recepción fuera óptima [0.25 puntos].

Resolución:

(a) Comparando con la ecuación general del campo eléctrico de una onda plana armónica:

$$B = B_0 sen(k\,z - \omega t) \;\;\Rightarrow\;\; k = 2\pi/\lambda = 10^7\; m^{-1} \text{ y } \omega = 2\pi\, f = 3{\cdot}10^{15}\; rad/s$$

De aquí tenemos:

$$\boxed{\lambda = 2\pi/k = 6.28{\cdot}10^{-7}\; m},\; \boxed{f = \omega/2\pi = 4.77{\cdot}10^{14}\; Hz},\; \boxed{v = \lambda\, f = \omega/k = 3 \cdot 10^{8}\; m/s}$$

La onda se propaga por tanto en el vacío.

(b) A partir del signo (-) que aparece entre paréntesis en la expresión de *B* concluimos que la onda se desplaza en el sentido positivo del eje *Z*. La dirección y sentido de E debe ser $\vec{E} = E\;\vec{i}$, ya que la dirección y sentido de propagación de la onda está determinado por el producto vectorial $\vec{E} \wedge \vec{B}$.

Por otro lado, el campo eléctrico asociado debe tener la misma fase que el campo magnético y una amplitud dada por $E_0 = vB_0 \approx 10\, V/m$:

$$\boxed{\vec{E} = 10 sen(10^7 z - 3 \cdot 10^{15} t)\,\vec{i}\;\; V/m}$$

(c) Para que el campo magnético induzca las máximas corrientes en la antena, ésta deberá estar orientada con su plano perpendicular a la dirección de vibración del campo magnético, por tanto el vector superficie de la antena debe estar situado a lo largo del eje Y.

P.1 Por un hilo rectilíneo muy largo circula una corriente eléctrica alterna $I(t) = 2\,sen(10^2\,\pi\,t)$ A. Coplanario a éste, y con dos de sus lados paralelos al hilo, se encuentra un circuito cuadrado de 20 cm de lado, con el lado más cercano a 10 cm del hilo. Calcula: (a) El coeficiente de inducción mutua [1.5 puntos]. (b) La f.e.m. inducida en la espira cuadrada indicando su valor eficaz [0.5 puntos].

<u>Resolución:</u>

a) El flujo del campo magnético producido por el hilo (circuito 1) a través de la espira cuadrada (circuito 2) será:

$\phi_{1,2} = \int_{S_2} B_1 \cdot dS_2$, siendo: $B_1 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ y $dS_2 = l \cdot dr$ con: l =20 cm

Por lo tanto:

$$\phi = \int_{S_2} B_1 \cdot dS_2 = \int_d^{d+l} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r} l dr = \frac{\mu_0}{2\pi} I\, l\, \ln\left(\frac{d+l}{d}\right)$$

siendo d =10 cm la distancia del circuito al hilo.

Por tanto, el coeficiente de inducción mutua será:

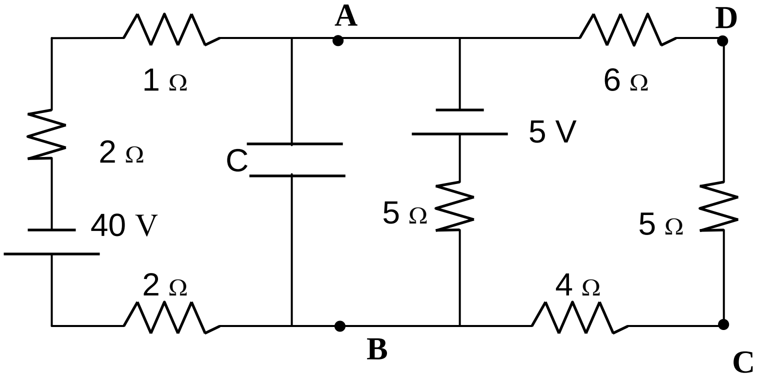
$$M = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} l \ln\left(\frac{d+l}{d}\right) = 4.4 \cdot 10^{-8}\ H$$

b) La f.e.m. inducida en el circuito será

$$\varepsilon_{circuito} = -M\,\frac{dI_{hilo}}{dt} = -M \cdot 2 \cdot 10^2\,\pi \cos(10^2\,\pi\,t) = 2.76 \cdot 10^{-5} \cos(10^2\,\pi\ t)\ \text{V}$$

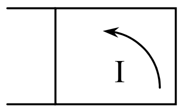
O sea, una tensión alterna de **$1.95 \cdot 10^{-5}$** V de valor eficaz.

P.2 El circuito de la figura se halla en equilibrio. Calcula: (a) El equivalente de Thevenin entre los puntos A y B de la porción de circuito ABCD [1 punto]. (b) La energía almacenada en el condensador, cuya capacidad es de 5 nF [0.5 puntos].



RESOLUCIÓN:

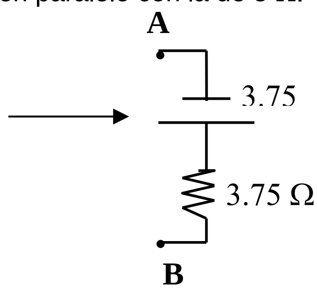
(a) $I = \dfrac{5}{20} = 0.25A \quad \rightarrow \quad V_A - V_B = 0.25 \cdot 5 - 5 = -3.75\,V$



R_{Th}) Las 3 resistencias de 6, 5 y 4 Ω están en serie y el resultado en paralelo con la de 5 Ω.

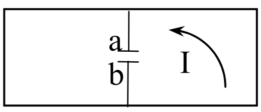
$$R_{Th} = \frac{5 \cdot (5+6+4)}{5+(6+5+4)} = 3.75\Omega$$

El circuito equivalente es:



Polo negativo de la pila en A porque: $V_A - V_B < 0$

(b) Para calcular la energía almacenada en el condensador necesitamos conocer la diferencia de potencial entre sus placas (puntos *a* y *b*). Dado que está en equilibrio, la rama del condensador está abierta y el circuito es de una sola malla (hacemos uso del equivalente Thévenin calculado previamente para la porción ABCD):



$$I \cdot (1+2+2+3.75) - (40-3.75) = 0\,; \quad I = \frac{36.25}{8.75} = 4.2A$$

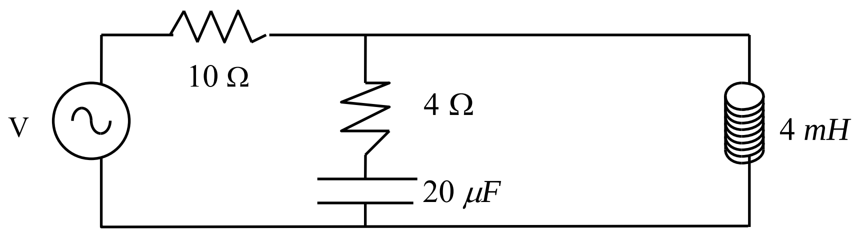
La diferencia de tensión entre las placas del condensador es:

$$V_a - V_b = 4.2 \cdot (1+2+2) - 40 = -19\,V$$

Por lo tanto, la energía almacenada en el condensador es:

$$U_C = \frac{1}{2} C\,V^2 = \frac{1}{2}\left(5 \cdot 10^{-9}\right) \cdot (19)^2 = 903 \cdot 10^{-9}\ W = 0.903\ \mu J$$

P.3 Sabiendo que la tensión del generador en el circuito de la figura es: $V = 100\sqrt{2}\ sen\left(2500\, t + 30^0\right)$ determina: (a) La impedancia total [0.75 puntos]. (b) La potencia disipada en cada una de las resistencias del circuito [0.75 puntos].



Resolución:

a) $Z_1 = 10\Omega;\quad Z_2 = (4 - jX_C)\Omega \quad y \quad Z_3 = jX_L\ \Omega$

siendo: $X_C = \dfrac{1}{Cw} = \dfrac{1}{20\cdot 10^{-6}\cdot 2500} = 20\ \Omega;\quad y \quad X_L = Lw = 4\cdot 10^{-3}\cdot 2500 = 10\Omega$

$$\Rightarrow \quad Z_1 = 10 = 10\left|\underline{0º}\right\rangle;\quad Z_2 = 4 - j20 = 20{,}4\left|\underline{-78{,}7º}\right\rangle \quad y \quad Z_3 = j10 = 10\left|\underline{90º}\right\rangle$$

Z_2 y Z_3 están en paralelo:

$$\overline{Z}_{2,3} = \frac{\overline{Z}_2\cdot\overline{Z}_3}{\overline{Z}_2 + \overline{Z}_3} = \frac{20.4\left|\underline{-78.7º}\right\rangle\cdot 10\left|\underline{90º}\right\rangle}{4 - j20 + j10} = \frac{204\left|\underline{11.3º}\right\rangle}{4 - j10} = \frac{204\left|\underline{11.3º}\right\rangle}{10.77\left|\underline{-68.2º}\right\rangle} = 18.94\left|\underline{79.5º}\right\rangle = 3.45 + j18.62$$

Ahora Z_1 está en serie con Z_{23}:

$$\Rightarrow \qquad Z_e = Z_1 + Z_{2,3} = 13.45 + j18.62 = 22.7\left|\underline{54.16º}\right\rangle \quad \Omega$$

a) La intensidad eficaz que pasa por R=10 Ω es:

$$I_e = \frac{V_{ef}}{Z_e} = \frac{100}{22.7} = 4.4\ A; \quad \Rightarrow \qquad P_{d,R10} = I_e^2 R = 4.4^2\cdot 10 = 193.6\, W$$

La potencia activa del generador es:

$$P_{AC} = V_e I_e\cdot\cos\varphi = 100\cdot 4.4\cdot\cos 54.16 = 257.6\, W$$

Luego la potencia disipada en R=4 Ω es:

$$P_{d,R4} = P_{AC} - P_{d,R10} = 257.6 - 193.6 = 64\, W$$