C1. Tres esferas conductoras, huecas y concéntricas, de 1, 2 y 8 cm de diámetro, se cargan con 1 nC cada una de ellas. Coincidiendo con el centro de las esferas se encuentra el centro de un cubo 3 cm de lado. Calcula: (a) El flujo neto a través del cubo [0.5 puntos]. (b) La relación entre la densidad superficial de carga de las esferas de menor y mayor radio [0.5 puntos]. Dato: ε_0 =8.85.10^{-12} C^2/Nm^2

RESOLUCIÓN:

a) El flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada se calcula utilizando la ley de Gauss:

$$\Phi_e = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

La carga total de las esferas de radio 1 y 2 cm se encuentra completamente encerrada dentro del cubo, de lado 3 cm, ya que sus centros coinciden. La distancia entre el centro y el punto más alejado del cubo, su vértice ($d = 1{,}5 \cdot \sqrt{3} = 2{,}6\ \mathrm{cm}$), es menor que el radio de la esfera grande (radio 4 cm), por lo tanto la carga de la esfera mayor, situada en su superficie, es toda exterior al cubo, así: $Q_{encerrada} = 2\ \mathrm{nC}$

$$\Rightarrow \quad \Phi_e = \frac{2 \cdot 10^{-9}}{\varepsilon_0} = \frac{2 \cdot 10^{-9}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 226 \quad \frac{N}{C} \cdot m^2$$

b) $\sigma = \dfrac{q}{S} = \dfrac{q}{4\pi r^2}$; ambas esferas tienen la misma carga pero distinto radio, por tanto:

$$\frac{q}{4\pi} = \sigma_P \cdot r_P^2 = \sigma_G \cdot r_G^2 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\sigma_P}{\sigma_G} = \frac{r_G^2}{r_P^2} = \left(\frac{4}{0{,}5}\right)^2 = 64$$

C2. En una cierta región del espacio un campo eléctrico vale $\vec{E} = 2910\ \vec{j}$ V/m. Una partícula de carga 37 μC se mueve dentro del campo desde el punto de coordenadas (17,40) cm hasta el punto (41,28) cm. Calcula: (a) La diferencia de potencial entre ambos puntos [0.75 Puntos]. (b) El cambio en la energía potencial de la partícula [0.25 Puntos]

RESOLUCIÓN:

a) La diferencia de potencial está dada por: $V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}$

El campo eléctrico sólo tiene componente en el eje Y; y el vector desplazamiento en el plano XY:

$$\overrightarrow{E_r} = E_y \cdot \vec{j}$$
$$\overrightarrow{dr} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j}$$

Por tanto:

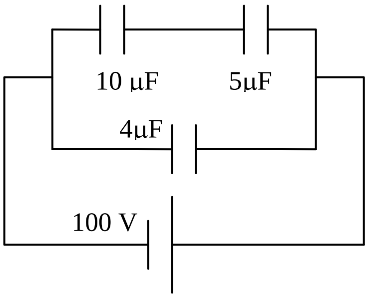
$$V_b - V_a = -\int_a^b \left(E_y \cdot \vec{j}\right) \cdot \left(dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j}\right) = -\int_a^b E_y \cdot dy = E_y \cdot [y]_b^a =$$

$$= 2910 \cdot [y]_{0.28}^{0.40} = 2910 \cdot (0.40 - 0.28) = 349.2 \quad V$$

b) El cambio en la energía potencial es:

$$\Delta U = U_f - U_i = q \cdot \Delta V = 37 \cdot 10^{-6} \cdot 349.2 = 12.92 \cdot 10^{-3} \quad J$$

C3. En el circuito de la figura calcula: (a) La capacidad equivalente de la combinación de condensadores [0.5 puntos]. (b) La energía almacenada en cada uno de ellos [0.5 puntos].



RESOLUCIÓN:

a) Los condensadores de 10 μF y de 5 μF están conectados en serie. El equivalente de estos dos está conectado en paralelo con el de 4 μF:

SERIE: $$C_{12} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{10 \cdot 5 \cdot}{10 \cdot + 5 \cdot} = \frac{50}{15} \quad \mu F$$

PARALELO: $$C_e = C_{12} + C_3 = \frac{50}{15} + 4 = \frac{110}{15} = \frac{22}{3} = 7.33 \quad \mu F$$

b) Como en todos los casos conocemos C, para calcular la energía utilizaremos las expresiones:

$$U = \frac{1}{2} C \cdot V^2 \quad \text{o bien:} \quad U = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} \quad \text{según nos convenga.}$$

La diferencia de potencial que existe entre los bornes del condensador de 4 μF es de 100 V, por tanto la energía almacenada es:

$$U_3 = \frac{1}{2} C \cdot V^2 = \frac{1}{2} 4 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ J} = 20 \text{ mJ}$$

Como los condensadores C_1 y C_2 están en serie, la carga que almacena el condensador equivalente es igual a la que almacenan cada uno de ellos individualmente y su valor es:

$$Q_1 = Q_2 = Q_{12} = C_{12} \cdot V = \frac{50}{15} \cdot 10^{-6} \cdot 100 = \frac{50}{15} \cdot 10^{-4} \quad C$$

Por lo tanto la energía que almacena cada uno de ellos es:

$$U_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left((50/15) \cdot 10^{-4}\right)^2}{10^{-5}} = 5{,}56 \cdot 10^{-3} \text{ J} = 5{,}56 \text{ mJ}$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left((50/15) \cdot 10^{-4}\right)^2}{5 \cdot 10^{-6}} = 11{,}1 \cdot 10^{-3} \text{ J} = 11{,}11 \text{ mJ}$$

:

C4. El módulo del momento dipolar magnético de una bobina es $|\vec{m}| = 0.01$ Am^2. Esta bobina se halla en presencia de un campo magnético externo $\vec{B}$. Cuando el eje de la bobina está orientado tanto a lo largo del eje X como a lo largo del eje Y se genera un momento de fuerzas de valor 0.001 Nm y orientado a lo largo del eje Z. ¿Cuál es el módulo del campo magnético? ¿Con los datos que proporciona el problema puedes saber la dirección y sentido del campo magnético? Razónalo. [1 punto]

RESOLUCIÓN:

En presencia de un campo magnético externo $\vec{B}$ la bobina es sometida a un momento de fuerzas $\vec{\tau}$, que viene dado por $\vec{\tau} = \vec{m} \wedge \vec{B}$, donde $\vec{m}$ es el momento dipolar magnético de la bobina que está en la dirección del eje de la bobina.

La dirección del momento de fuerzas $\vec{\tau}$ es perpendicular tanto a $\vec{m}$ como a $\vec{B}$, por tanto si $\vec{\tau}$ está a lo largo de *Z* entonces $\vec{B}$ está sobre el plano *XY*.

El módulo del momento de fuerzas $|\vec{\tau}|$ viene dada por $|\vec{\tau}| = |\vec{m}||\vec{B}| sen\theta$. Dado que es el mismo tanto cuando la bobina está a lo largo de *X* o de *Y* se tiene que el ángulo de $\vec{B}$ respecto al eje X puede ser 45º, 135º, 225º o 315º (todas estas opciones dan igual valor absoluto del $sen\theta$).

El módulo de $\vec{B}$ viene dado por: $|\vec{B}| = \dfrac{|\vec{\tau}|}{|\vec{m}||sen\theta|} = \dfrac{0.001}{0.01 \cdot sen(45^o)}$, con lo que $\boxed{|\vec{B}| = 0.14T}$.

B tiene dos posibles direcciones (la de las dos diagonales del sistema de referencia XY). Pero para poder saber sin ambigüedad la dirección y sentido del campo magnético externo necesitaríamos conocer en qué sentido apuntan $\vec{m}$ y $\vec{\tau}$ en las medidas realizadas.

C5. Una onda EM plana armónica tiene un campo eléctrico dado por la expresión: $\vec{E} = 3sen(3\pi \times 10^{15} t - \pi \times 10^7 y)(-\vec{k})\ [V/m]$. Calcula: (a) El índice de refracción del medio en el que se propaga, indicando si podemos ver dicha onda con nuestros ojos [0.5 puntos]. (b) El campo magnético asociado [0.5 puntos]. Dato: espectro luz visible $\lambda \in$[380-770] nm.

RESOLUCIÓN:

a) Para saber el índice de refracción del medio necesitamos calcular la velocidad de propagación:

$v = \lambda f = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{3\pi \cdot 10^{15}}{\pi \cdot 10^7} = 3 \times 10^8$ m/s. Se propaga a velocidad c, luego el medio es el vacio y **n=1**

El ojo humano sólo puede detectar ondas electromagnéticas cuya longitud de onda se encuentra entre 380nm y 770nm, aproximadamente.

Utilizando: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \pi 10^7$ [m^{-1}] $\Rightarrow \lambda = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2 \cdot 10^{-7}$ m $\rightarrow \lambda = 200$ nm

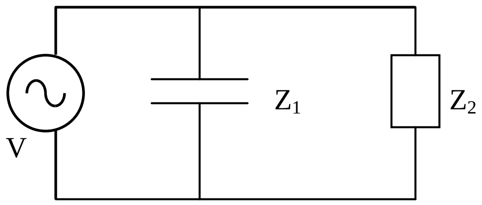
por lo tanto estaría dentro del ultravioleta y no podemos detectar con nuestros ojos dicha onda.

b) El campo magnético asociado debe tener una amplitud dada por : $B_0 = \dfrac{E_0}{c} = 10^{-8}$ T

Por otra parte, la onda se propaga en la dirección de las Y positivas. Entonces $B_y = B_z = 0$

Siendo: $\boxed{\vec{B} = 10^{-8} sen(3\pi \times 10^{15} t - \pi \times 10^7 y)(-\vec{i}) \quad \text{T}}$

C6. Un condensador de 10 Ω de reactancia está conectado en paralelo con una impedancia de valor (8+6j) Ω a un generador de corriente alterna. Calcula: (a) La impedancia total del circuito [0.5 puntos]. (b) El valor que debería tener la reactancia del condensador para que la tensión y la corriente estuvieran en fase [0.5 puntos].



RESOLUCIÓN:

a) $$\overline{Z}_1 = -j10 = 10\,|\underline{-90^o}\ \Omega$$

$$\overline{Z}_2 = 8 + j6 = 10\,|\underline{36{,}87^o}\ \Omega$$

$$\overline{Z}_e = \frac{\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2}{\overline{z}_1 + \overline{z}_2} = \frac{10\,|\underline{-90^o} \cdot 10\,|\underline{36{,}87^o}}{8-4j} = \frac{100\,|\underline{-53{,}13^o}}{\sqrt{80}\,|\underline{-26{,}57^o}} = 11{,}18\,|\underline{-26{,}56^o} = (10 - j5)\ \Omega$$

---

b) Si la tensión e intensidad han de estar en fase ⇒ φ'= 0 siendo:

$$\overline{Z}'_e = Z'\,|\underline{\varphi'}$$

$$\overline{Z}'_e = \frac{\overline{z}'_1 \cdot \overline{z}_2}{\overline{z}'_1 + \overline{z}_2} = \frac{X_C\,|\underline{-90^o} \cdot 10\,|\underline{36{,}87^o}}{8 + (6 - X_C)j} = \frac{X_C \cdot 10\,|\underline{-53{,}13^o}}{8 + (6 - X_C)j}$$

Para que φ' sea cero, la fase del denominador en la expresión anterior debe ser (-53,13º), por lo tanto:

$$tg(-53{,}13^o) = \frac{6 - X_C}{8}; \quad \Rightarrow \quad -1{,}33 = \frac{6 - X_C}{8} \quad \rightarrow \quad X_C = 10{,}67 + 6$$

$$\boxed{X_C = 16{,}67\ \ \Omega}$$

P1. Un conductor largo, en forma de cilindro recto de radio *R*, lleva una intensidad de corriente I_0. Este conductor se ha construido de tal forma que la densidad de corriente *j* dentro de él varía con la distancia *r* al eje del cilindro según la expresión $j(r) = Kr^2$, donde *K* es una constante. Determina: (a) El valor de la constante *K* [0.5 puntos]. (b) El campo magnético en puntos interiores (r < R) [0.5 puntos]. (c) El campo magnético en puntos exteriores (r > R) [0.5 puntos]. (d) Como afecta al campo magnético, tanto en puntos interiores como exteriores, el hecho de reducir el radio del conductor a la mitad (R_{nuevo}=R/2) circulando la misma corriente I_0 [0.5 puntos].

RESOLUCIÓN:

a) La corriente total I_0 se puede obtener integrando la densidad de corriente a lo largo de la sección del conductor:

$$I_0 = \int_0^R j\,dS = \int_0^R Kr^2\,2\pi r dr = 2\pi K\int_0^R r^3 dr = 2\pi K\frac{R^4}{4} = \frac{\pi K R^4}{2} \rightarrow \boxed{K = \frac{2I_0}{\pi R^4}}$$

b) Aplicamos la ley de Ampère $\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{neta}$.

Para el cálculo de I_{neta} se seguirían los mismos pasos que en el apartado a) pero ahora no se integra sobre toda la sección sino sólo hasta un radio *r* con lo que cambia el límite de integración superior:

$$I_{neta} = \frac{\pi K r^4}{2}$$

Llevando este resultado a la ley de Ampère:

$$\boxed{B\cdot 2\pi r = \mu_0\frac{\pi K r^4}{2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 K r^3}{4} = \frac{\mu_0 I_0 r^3}{2\pi R^4}} \quad \text{para } r < R$$

c) Para puntos exteriores al conductor, *r>R*, se enlaza toda la corriente con lo que: $I_{neta} = I_0$. Por tanto, $\boxed{B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}}$

Puede comprobarse cómo para *r=R*, ambas expresiones del campo magnético, conducen al mismo resultado: $B(r = R) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R}$

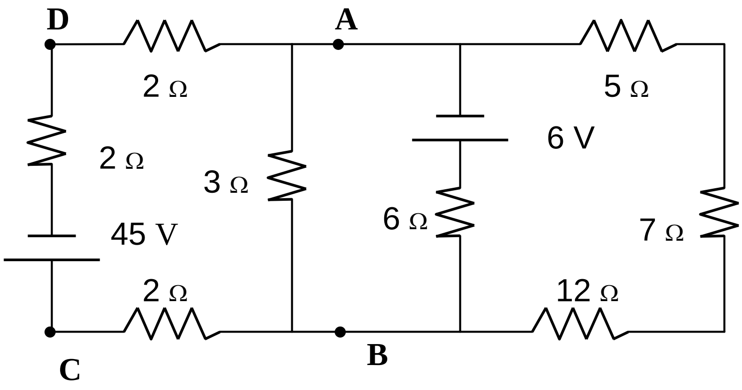
d) Si reducimos el radio a la mitad, el campo en puntos exteriores *r>R/2* tendrá la misma expresión que en el apartado c), ya que la corriente neta encerrada sigue siendo $I_{neta} = I_0$

En puntos interiores cambia el valor de la constante K: $\boxed{K = \frac{2I_0}{\pi R_{nuevo}^4} = \frac{32 I_0}{\pi R^4}}$

Y el valor de B: $\boxed{B = \frac{\mu_0 K r^3}{4} = \frac{8\mu_0 I_0 r^3}{\pi R^4}}$

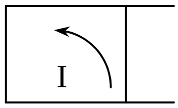
También puede comprobarse que para (*r* = R_{nuevo} = *R/2)*, ambas expresiones del campo magnético, conducen al mismo resultado: $B(r = R_{nuevo} = R/2) = \frac{\mu_0 I_0}{\pi R}$

P2. En el circuito de la figura calcula: (a) El equivalente de Thevenin entre los puntos A y B de la porción de circuito ABCD [1 punto]. (b) La potencia que se disipa en la resistencia de 6 Ω [1 punto].



RESOLUCIÓN:

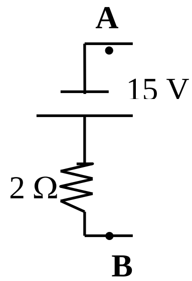
a) $I = \dfrac{45}{9} = 5A \quad \rightarrow \quad V_A - V_B = -5 \cdot 3 = -15 \quad V$



R_{Th}) Las 3 resistencias de 2 Ω están en serie y el resultado en paralelo con 3 Ω.

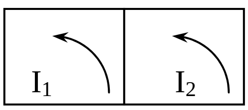
$$R_{Th} = \frac{3 \cdot (2+2+2)}{3+(2+2+2)} = 2 \quad \Omega$$

El circuito equivalente es: ⟶



Polo negativo de la pila en A porque: $V_A - V_B < 0$

b) Para calcular la potencia que disipa la resistencia de 6 Ω necesitamos conocer la intensidad que circula por ella. Sustituyendo el circuito equivalente tenemos 2 mallas:



$$\begin{array}{c|c} 8I_1 - 6I_2 = 9 & 40I_1 - 30I_2 = 45 \\ -6I_1 + 30I_2 = 6 & -6I_1 + 30I_2 = 6 \end{array}$$

$$34I_1 = 51 \quad \rightarrow \quad I_1 = \frac{3}{2}\,A$$

Calculamos I_2:

$$8\frac{3}{2} - 6I_2 = 9 \quad \rightarrow \quad 6I_2 = 12 - 9 \quad \rightarrow \quad I_2 = \frac{1}{2}\,A$$

La corriente que pasa por la resistencia de 6 Ω es: $i_{12} = I_1 - I_2 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2} = 1\,A$

Por lo tanto la resistencia de 6 Ω disipa:

$$\underline{P_d = i_{12}^2 \cdot R = 6\,W}$$