# Tema 1. FUNDAMENTOS DE ELECTROSTÁTICA

# (RESUMEN)

## • Carga eléctrica

La carga eléctrica es una propiedad fundamental de la materia. Hay dos tipos de carga: positiva y negativa. Dos cuerpos con el mismo tipo de carga se repelen, mientras que si tienen diferente tipo de carga, se atraen entre sí.

### Cuantización de la carga eléctrica

La carga eléctrica aparece siempre como múltiplo de la carga fundamental o cuanto eléctrico. Este valor es $e$ = 1.602177 x $10^{-19}$ C que es la carga del electrón en módulo.

### Principio de conservación de la carga eléctrica

En todos los procesos de la naturaleza, la carga neta o total de un sistema aislado se mantiene constante.

## • Interacción eléctrica (Ley de Coulomb).

La ley de *Coulomb* muestra la fuerza eléctrica F que ejerce una carga puntual $q$ sobre otra carga $q'$:

$$\vec{F} = K\frac{q.q'}{r^2}.\vec{u}_r$$

siendo $\vec{u}_r$ el vector unitario en la dirección del vector que une la posición de la carga $q$ con la de $q'$ que está separada una distancia $r$ de $q$. Esta fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. La fuerza que se ejerce entre dos cargas iguales y del mismo signo es repulsiva, mientras que si son de signos contrarios es atractiva.

Cuando queremos calcular la fuerza ejercida sobre una carga $q_0$ por un conjunto de $n$ cargas puntuales $q_i$ utilizaremos el principio de superposición: la fuerza resultante sobre un objeto es la suma vectorial de las fuerzas individuales ejercidas sobre la carga a estudiar.

Así: $$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} F_i = Kq_0\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i^2}\cdot\vec{u}_i$$

siendo $\vec{u}_i$ el vector unitario en la dirección del vector que une la posición de la carga $q_i$ con la de $q_0$ que está separada una distancia $r_i$ de $q_i$.

## • Campo eléctrico

Existe un campo eléctrico en cualquier región donde la carga eléctrica en reposo experimenta una fuerza. Esta es originada por la presencia de otras cargas en esta región. El campo eléctrico $\vec{E}$, producido por una carga puntual o por una distribución de cargas, es la fuerza ejercida sobre un punto si en este punto se encuentra situada la carga unidad ($q_0$ = 1 C).

El campo creado por una carga puntual $q$ en un punto $P$ que se encuentra a una distancia $r$ es:

$$\vec{E}_P = K\frac{q}{r^2}.\vec{u}_r$$

Para calcular el campo creado en un punto $P$ por un conjunto de cargas puntuales $q_i$, que se encuentran a distancias $r_i$ de P, se aplica el principio de superposición:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i = K\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i^2}\cdot\vec{u}_i$$

Un campo está descrito en el espacio por lo que denominamos líneas de campo. Estas se definen como el lugar geométrico de los puntos en los cuales la dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ es tangente. Las líneas de campo eléctrico empiezan en las cargas positivas y finalizan en las negativas.

Un campo uniforme tiene la misma intensidad, dirección y sentido en todos los puntos del espacio y se representa por líneas de campo rectilíneas, paralelas y equidistantes.

## • Potencial y diferencia de potencial

La fuerza eléctrica es conservativa. La energía potencial de una partícula de prueba $q_0$ en el campo creado por un conjunto de cargas fijas $q_i$ se expresa como:

$$E_P = -\int\vec{F}\bullet d\vec{l} = K\cdot q_0\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}$$

(tomando el origen de potencial, $E_P$ = 0, en el infinito)

El potencial $V$ producido por una carga puntual o una distribución de cargas es la energía potencial eléctrica en un punto *P* si en este hubiera una carga unidad (1C).

El potencial *V* que crea una carga puntual *q* en un punto *P* que se encuentra a una distancia *r:*

$$V = K \cdot \frac{q}{r} \qquad \text{(tomando: } V = 0 \text{ en r=}\infty\text{)}$$

Para un conjunto de cargas $q_i$ situadas a una distancia $r_i$ del punto *P*.

$$V = K \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i} \qquad \text{(tomando: V = 0 en r=}\infty\text{)}$$

La diferencia de potencial $\Delta V$ entre dos puntos 1 y 2 está relacionada con el trabajo *W* realizado por el campo eléctrico al desplazar una carga de prueba $q_0$ del punto 1 al 2:

$$W = \int_1^2 \vec{F} \bullet d\vec{r} = q_0 \int_1^2 \vec{E} \bullet d\vec{r} = q_0 (V_2 - V_1)$$

- **Relación entre el potencial y el campo eléctrico**

Se cumple que $dV = -\vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l}$. Si se conoce la expresión de $\vec{E}$, puede obtenerse el potencial *V* en un punto *P* por la vía de la integral de línea:

$$V = -\int \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

Si se conoce *V,* el campo *E* se puede determinar mediante el gradiente de *V*:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Si el campo eléctrico es constante en dirección (por ejemplo, en X):

$$\vec{E}_X = -\frac{dV}{dx} \cdot \vec{i}$$

Si el potencial sólo depende del módulo de $\vec{r}$ :

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \cdot \vec{u}_r$$

- **Dipolo eléctrico**

Un dipolo eléctrico está formato por dos cargas iguales y de signo contrario *+q* y *–q* separadas por una distancia *d*. El momento dipolar eléctrico se define como: $\vec{p} = qd \cdot \vec{u}_p$, donde $\vec{u}_p$ es el vector unitario en la dirección que une a las dos cargas y su sentido va de la carga negativa a la positiva.

Cuando situamos el dipolo en una región donde existe un campo eléctrico uniforme, el dipolo experimenta un giro que alinea el vector momento dipolar con el vector campo eléctrico. La expresión que indica este giro es:

$$\vec{\tau} = -\vec{p} \times \vec{E}$$

La energía potencial de un dipolo en un campo eléctrico uniforme viene dado por la siguiente expresión:

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

- **Movimiento de cargas en campos eléctricos**

Si la fuerza eléctrica es la única fuerza que afecta a una partícula de masa *m* y carga *q,* ésta adquiere una aceleración constante que se calcula como:

$$\vec{a} = q\vec{E} / m$$

Cuando una partícula se mueve en un campo eléctrico uniforme, su movimiento es descrito por la cinemática del movimiento con aceleración constante.

La energía total de una partícula de masa *m* y carga *q* que se mueve en un campo eléctrico es:

$$E = E_C + E_P = \frac{1}{2} m v^2 + qV$$

**Distribuciones continuas de carga**

**Densidad de carga.** Cuando se quiere calcular el campo eléctrico en un punto P, producido por distribuciones de carga continuas, se toman elementos de carga diferencial *dq* como cargas puntuales, de forma que cada *dq* creará un campo:

$$d\vec{E} = K \frac{dq}{r^2} \vec{u}_r$$

donde *r* es el vector posición con origen *dq* y final en P.

Utilizando el principio de superposición, el campo total será la suma vectorial de los creados por cada

$dq$, es decir:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = K\int \frac{dq}{r^2}\vec{u}_r$$

Para resolver esta integral se ha de expresar *dq* en función de las características de las distribuciones de carga. Por esto se introducen las densidades de carga.

**Densidad lineal de carga λ**: Carga por unidad de longitud $\lambda = \frac{dq}{dl} \Rightarrow dq = \lambda dl$

**Densidad superficial de carga ⍰:** Carga por unidad de superficie $\sigma = \frac{dq}{dS} \Rightarrow dq = \sigma dS$

**Densidad de carga de volumen ρ**: Carga por unidad de volumen $\rho = \frac{dq}{dV} \Rightarrow dq = \rho dV$

En este caso, dq es un elemento infinitesimal de carga y dl, dS y dV son elementos infinitesimales de longitud, superficie y volumen.

Si las distribuciones de carga son uniformes en toda la longitud, superficie o volumen, entonces:

$$\lambda = \frac{Q}{L}, \quad \sigma = \frac{Q}{S}, \quad \rho = \frac{Q}{V}$$

Siento *Q* la carga total de la distribución y *L*, *S* o *V* la longitud, superficie o volumen totales, respectivamente.

- **Ley de Gauss**

La magnitud matemática que está relacionada con el número de líneas de campo eléctrico que atraviesa una superficie se llama flujo de campo eléctrico.

El flujo, a través de una superficie abierta de forma arbitraria sobre la cual el campo E puede variar, se calcula como la suma de los flujos $\Delta\phi_i$ que atraviesan cada una de las superficies $\Delta S_i$ en que hemos dividido dicha superficie y en las que se puede considerar que el campo no varía:

$$\phi_E = \sum_i \Delta\phi_i = \sum_i \vec{E}\cdot\Delta\vec{S}_i$$

En el límite, cuando el número de elementos superficiales se aproxima a infinito y el área de cada elemento superficial tiende a cero, esta suma se convierte en una integral:

$$\phi_E = \lim_{\Delta S_i \to 0}\sum_i \vec{E}\cdot\Delta\vec{S}_i = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

La expresión para calcular el flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada es:

$$\phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

donde $\oint_S$ es el símbolo de la integral extendida a una superficie cerrada

Las líneas de campo pueden ser utilizadas para visualizar el flujo a través de la superficie cerrada. El flujo total puede ser positivo, negativo o cero. Por convenio, el sentido del vector superficie de una superficie cerrada se toma hacia fuera de esta, por lo cual, cuando $\vec{E}\bullet d\vec{S}$ es positivo el flujo sale, y cuando es negativo, entra.

La Ley de Gauss para el campo eléctrico establece que el flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la carga eléctrica neta encerrada en el interior de la superficie dividida por $\varepsilon_0$:

$$\phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\overleftarrow{S} = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

La ley de Gauss puede ser utilizada para encontrar el campo eléctrico producido por distribuciones de carga que poseen simetría. Para ello, tenemos que elegir la superficie cerrada que encierre a la carga, a la que denominamos superficie gaussiana, que nos permita un cálculo más sencillo.

**Carga esférica**. Cuando la distribución de carga tiene simetría esférica, podemos aplicar la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico tanto en puntos interiores como en exteriores de dicha distribución. En todos los casos, se toma una superficie gaussiana esférica que incluye el punto en el que se quiere calcular el campo.

La primera parte de la ley de Gauss nos conduce a:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot 4\cdot\pi\cdot r^2$$

donde r es el radio de la superficie gaussiana

La segunda parte de la expresión se limita a calcular la carga encerrada dentro de la superficie gaussiana elegida.

Ejemplos:

Carga *Q,* uniforme en superficie esférica de radio *R*:

$$r < R, \quad q_e = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{E}_{in} = 0$$

$$r > R, \quad q_e = Q \quad \rightarrow \quad \vec{E}_{in} = k\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$$

Carga *Q*, uniforme en todo el volumen de la esfera de radio *R*:

$$r \leq R, q_e = \frac{Q \cdot r^3}{R^3} \rightarrow \vec{E}_{in} = \mathrm{k}\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}^3} r \cdot \vec{u}_r$$

$$r \geq R, q_e = Q \rightarrow \vec{E}_{in} = k\frac{Q}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

**Carga lineal.** Si disponemos de una distribución lineal de carga infinita y densidad λ uniforme, podemos utilizar la ley de Gauss para calcular el campo creado en un punto *P* que se encuentra a una distancia *r* de la distribución. Elegimos la superficie gaussiana cilíndrica que contenga el punto en su superficie lateral. El radio de la base del cilindro debe ser, por lo tanto, *r*, y su altura *h*, arbitraria. Así:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 2\pi r h; \quad Q_{encerrada} = \lambda \cdot h$$

El módulo del campo eléctrico es:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

**Plano.** Si disponemos de un plano infinito con densidad superficial de carga ? uniforme, podemos utilizar la Ley de Gauss para calcular el campo creado en un punto *P* próximo a la distribución. Elegimos una superficie gaussiana cilíndrica que corte el plano de forma que las bases del cilindro queden paralelas al plano y que contenga el punto en una de sus bases. Así:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot S_C; \quad Q_{encerrada} = \sigma \cdot S_C$$

Dónde $S_C$ es la superficie de la base del cilindro. Por lo tanto, el módulo del campo eléctrico es:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

- **Propiedades electrostáticas de los conductores**

Un material conductor que se encuentra en equilibrio electrostático presenta las siguientes propiedades:

El campo eléctrico a su interior es cero.

La carga eléctrica neta del conductor se encuentra distribuida sobre la superficie.

El campo eléctrico en puntos próximos a la superficie del conductor es perpendicular a ésta y su módulo vale:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Todos los puntos del conductor se encuentran al mismo potencial. Por lo tanto, un conductor en equilibrio electrostático constituye una superficie equipotencial.