C.1 Sabiendo que el límite de ruptura dieléctrico del aire seco es de 3 x 10^6 [N/C] calcular la mínima *d.d.p* necesaria para hacer saltar una chispa entre los dos electrodos de una bujía separados 1 mm. Considera los electrodos como planos cargados [1 punto].

RESOLUCIÓN:

Considerando los electrodos como planos y dada su proximidad, podemos suponer que el campo entre ellos es uniforme. En estas circunstancias, la d.d.p., el campo y la distancia están relacionados por la sencilla expresión:

$$V = E \cdot d = 3 \times 10^6 \left[\frac{V}{m}\right] \times 10^{-3}[m] = 3 \times 10^3 [V]$$

Por tanto se necesitaría una diferencia de potencial mínima de 3 kV.

C.2 La cantidad de carga (en C) que pasa por una sección de un cable de cobre de 0,8 cm de diámetro vale q(t) = πt + 6, con t en s. Calcula: (a) La corriente que circula por el cable (indicando si se trata o no de CC) [0.5 puntos]. (b) La densidad de corriente [0.25 puntos]. (c) El campo eléctrico en el interior del cable [0.25 puntos].
Dato: resistividad del cobre = 1,7 x 10^{-8} Ωm

RESOLUCIÓN:

a) por la definición de corriente

$$I = \frac{dq}{dt} = \pi \text{ [A]}$$

Puesto que la corriente no depende de t, se trata de corriente continua.

b) La densidad de corriente vale

$$J = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi r^2} = \frac{\pi}{\pi (0.4 \times 10^{-2})^2} = 6{,}25 \times 10^4 \text{ [A/m}^2\text{]}$$

c) El campo en el interior del conductor está relacionado con la densidad de corriente mediante la Ley de Ohm $J = \sigma E$, donde σ es la conductividad, que podemos calcular como la inversa de la resistividad. Entonces:

$$E = \rho J = 1{,}7 \times 10^{-8} \times 6{,}25 \times 10^4 = 1{,}06 \times 10^{-3} \text{ [V/m]} \approx 1 \text{ mV/m}$$

C.3 Un bobina metálica de sección transversal $S = 2'5 \text{ cm}^2$, tiene un núcleo ferromagnético de permeabilidad relativa μ_r = 1500, consta de N = 2000 vueltas de cable y tiene una longitud de 20 cm. Si a través del cable pasa una corriente I = 1.6 mA, calcula: (a) La excitación magnética H y el campo magnético B [0.5 puntos]. (b) La magnetización M del núcleo. [0.5 puntos].
Dato: $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ u.S.I.

RESOLUCIÓN:

a)

$$H = nI = \frac{NI}{l} = \frac{2000 \times 0.0016}{0.2} = 16 \frac{A}{m}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_r \mu_0 \vec{H} \qquad \rightarrow \qquad B = 30.2 \times 10^{-3} T$$

b) Para calcular la magnetización sabemos que:

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M} \right) = \mu_r \mu_0 \vec{H} \qquad \rightarrow \qquad M = (\mu_r - 1) H = 23.98 \times 10^3 \frac{A}{m}$$

C.4 Se desea generar corriente alterna utilizando una bobina de 1000 espiras que gira con una frecuencia de 50 Hz en el interior de un campo magnético uniforme de valor B=500G. Calcula el área que deben tener las espiras para que la tensión eficaz sea de 220 V [1 punto].

RESOLUCIÓN:

El flujo del campo magnético a través de las espiras vendrá dado por:

$$\phi = N \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = NBS \cos(wt + \varphi)$$

siendo *N* el número de espiras, *B* el campo magnético, *S* la superficie de las espiras, ω su velocidad angular de rotación ($\omega = 2\pi f$ siendo *f* la frecuencia de rotación) y φ el ángulo que forman inicialmente (en t=0) el vector superficie de las espiras (eje axial de la bobina) con el campo B.

Por la Ley de Faraday – Lenz , la fuerza electromotriz inducida será:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = NBSw\, sen(wt + \varphi) = \varepsilon_0\, sen(wt + \varphi) \quad [V]$$

La tensión eficaz de salida será:

$$\varepsilon_{ef} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}} = \frac{NBSw}{\sqrt{2}} = 220\,[V]$$

de donde despejamos:

$$S = \sqrt{2} \cdot \frac{\varepsilon_{ef}}{NBw} = \sqrt{2} \cdot \frac{220}{1000 \cdot 500 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50} = 0{,}0198 \text{ m}^2 \cong 2 \text{ dm}^2$$

C.5 Una onda electromagnética posee un campo $\vec{B} = 10^{-8} sen(2\pi \cdot 10^6 y + 6\pi \cdot 10^{14} t)\vec{i}$ (todo expresado en unidades del S.I.). Calcula: (a) La velocidad y sentido de propagación de la onda [0.5 puntos]. (b) La expresión del campo eléctrico asociado [0.5 puntos].

RESOLUCIÓN:

a) A partir del signo (+) que aparece entre paréntesis en la expresión de *B* concluimos que la onda *se desplaza en el sentido negativo del eje Y*.

De la expresión general del campo magnético podemos hallar el número de ondas y la frecuencia angular, y con ello la velocidad de propagación de la onda:

$$B = B_0 sen(k\,y + \omega t) \quad \Rightarrow \quad k = 2\pi \cdot 10^6 \ rad/m\,,\ \omega = 6\pi \cdot 10^{14} \ rad/s \ \Rightarrow$$

$$\boxed{v = \omega/k = 3 \cdot 10^8 \ m/s}$$

b) La dirección y sentido de *E* debe ser $\vec{E} = E\,(-\vec{k})$, ya que la dirección y sentido de propagación de la onda está determinado por el producto vectorial $\vec{E} \wedge \vec{B}$.

Por otro lado, el campo eléctrico asociado debe tener la misma fase que el campo magnético y una amplitud dada por $E_0 = v\,B_0 = 3 \ V/m$.

Por lo tanto: $$\boxed{\vec{E} = 3\,sen(2\pi \cdot 10^6 y + 6\pi \cdot 10^{14} t)(-\vec{k}) \ V/m}$$

P.1. Un plano indefinido, que coincide con la posición del plano ZY, posee una densidad superficial de carga σ = 8.85 x 10^{-12} C/m^2. Paralelo a este plano, en la posición x=10 m, hay un hilo indefinido con una densidad lineal de carga λ = 8.85 x 10^{-12} C/m. Calcula: (a) El campo eléctrico en los puntos del eje X comprendidos entre el plano y el hilo [1 punto]. (b) La *d.d.p.* entre los puntos de coordenadas: *a* ≡ (1, 0, 0) m y *b* ≡ (9, 0, 0) m [1 punto].

<u>RESOLUCIÓN:</u>

a) El campo total entre ambas distribuciones será la suma vectorial de los campos producidos por el plano y por el hilo.

El campo creado por el plano en el tramo del eje X pedido es: $\vec{E}_P = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\vec{i}$

Y el creado por el hilo en dicho tramo: $\vec{E}_H = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\,r}(-\vec{i})$

siendo *r* la distancia al hilo en metros.

Por tanto: $$\vec{E} = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)\vec{i} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi\,r}\right)\vec{i}\,[V/m]$$

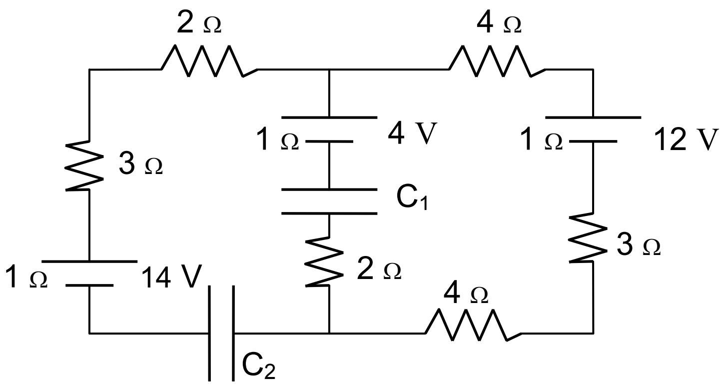
b) La *d.d.p.* se calcula como:

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \bullet d\vec{r}$$

Siendo en este caso $d\vec{r} = d\vec{x} = dr\,\vec{i}$

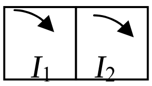
$$\Rightarrow \qquad V_b - V_a = -\frac{1}{2}\int_a^b dr + \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = -\frac{1}{2}(b-a) + \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) = -3.65[V]$$

P.2 En el instante inicial (*t=0*) los condensadores $C_1 = 20$ nF y $C_2 = 50$ nF están descargados. Calcula: (a) La diferencia de potencial entre los extremos de la *f.e.m.* de 4V en *t=0* [1 punto]. (b) La energía almacenada en cada condensador cuando se encuentran totalmente cargados [0,5 puntos]



Resolución:

(a) En el instante inicial C_1 y C_2 están descargados y actúan como dos cortocircuitos. Las corrientes de malla I_1 e I_2 son:



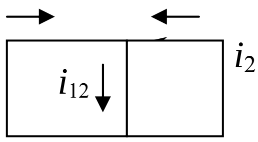
$$\begin{aligned} 9 I_1 - 3 I_2 &= 10 \\ -3 I_1 + 15 I_2 &= -8 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 45 I_1 - 15 I_2 &= 50 \\ -3 I_1 + 15 I_2 &= -8 \end{aligned}$$

$$42 I_1 = 42 \quad \rightarrow \quad I_1 = 1 \text{ A}$$

$9\,(1) - 3I_2 = 10 \quad \rightarrow \quad I_2 = -\,1/3$ A,

$i_{12} = I_1 - I_2 = 1 - (-1/3) = 4/3$ A, en el sentido de I_1

Sentido real de las corrientes $\rightarrow$



La f.e.m. de 4 V está actuando como receptor, por lo tanto la d.d.p. entre sus bornes será:

$$V_4 = \varepsilon + i_{12} \cdot r = 4 + (4/3).1 = 16/3 = 5{,}33 \text{ V}$$

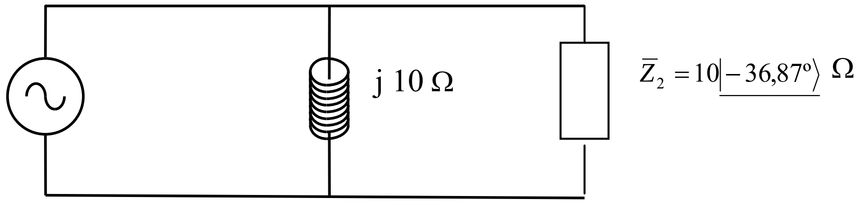
(b) Cuando el circuito se encuentra en equilibrio, los condensadores están completamente cargados y actúan como un circuito abierto. Por las mallas del circuito ahora no circula corriente, y la d.d.p. entre las placas del condensador depende sólo de las *fem*.

Para calcular la diferencia de potencial en C_1, utilizamos la malla derecha, y para C_2 utilizamos la malla externa del circuito.

$$\left.\begin{aligned} V_{C1} &= -(4-12) = 8V \\ V_{C2} &= -(14-12) = -2V \end{aligned}\right\} \qquad U_{C1} = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 = 0{,}64\,\mu J; \qquad U_{C2} = \frac{1}{2} C_2 V_2^2 = 0{,}1\,\mu J$$

P.3 Dos impedancias, de valores $\overline{Z}_1 = j10\,\Omega$ y $\overline{Z}_2 = 10\angle -36{,}87^\circ\ \Omega$ están conectadas en paralelo a un generador de corriente alterna cuya tensión eficaz es de 200 V. Calcula: (a) La impedancia total [1 punto]. (b) La potencia disipada en cada impedancia [0,5 puntos].

Resolución:



a)

$$\overline{Z}_1 = j10 = 10\angle 90^\circ; \qquad \overline{Z}_2 = 10\angle -36{,}87^\circ = 8 - j6$$

Z_1 y Z_2 están en paralelo, luego:

$$\overline{Z}_T = \frac{\overline{Z}_1 \cdot \overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2} = \frac{10\angle 90^\circ \cdot 10\angle -36{,}87^\circ}{8 + j4} = \frac{100\angle 53{,}13^\circ}{8{,}944\angle 26{,}565^\circ} = 11{,}18\angle 26{,}565^\circ = 10 + j5\ \ \Omega$$

---

b) La impedancia Z_1 no disipa potencia, puesto que no tiene parte real y por tanto resistencia.
Z1 es una bobina (por tener parte imaginaria positiva), sólo almacena y devuelve energía.

La potencia disipada en Z_2 puede calcularse de diferentes formas. Basta hacerlo por cualquiera de ellas:

b-1) $P_{dZ2} = I_{e2}^2 \cdot R_2; \qquad siendo: I_{2e} = \dfrac{V_e}{Z_2} = \dfrac{200}{10} = 20\ A \qquad y \quad R_2 = Z_2 \cos(-36{,}87^\circ) = 8\ \Omega$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{P_{dZ2} = 20^2 \cdot 8 = 3200\quad W}$$

b-2) $\boxed{P_{dZ2} = P_{AC(Rama2)} = V_e \cdot I_{2e} \cdot \cos\varphi_2 = 200 \cdot 20 \cdot \cos(-36{,}87^\circ) = 3200\quad W}$

b-3) Por último, dado que en el circuito sólo hay resistencia en Z_2:

$$P_{dZ2} = P_{AC} = V_e \cdot I_e \cdot \cos\varphi; \qquad siendo: I_e = \frac{V_e}{Z_T}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{P_{dZ2} = V_e \cdot I_e \cdot \cos\varphi = \frac{V_e^2}{Z_T} \cdot \cos\varphi = \frac{200^2}{11{,}18} \cdot \cos 26{,}565^\circ = 3200\quad W}$$