C.1 El potencial eléctrico en el interior de un conductor tiene la forma $V(x, y, z) = 2y\,[V]$, donde la distancia y está expresada en metros. ¿Se encuentra el conductor en equilibrio electrostático? Calcula el campo eléctrico en el interior del conductor, indicando en qué dirección y sentido se moverán los electrones y cuál será el sentido de la corriente [1 punto]

RESOLUCIÓN:

El potencial no es uniforme porque depende de la posición (coordenada *y*). Un conductor en equilibrio electrostático es equipotencial (mismo potencial en todo su volumen), por lo que es evidente que este conductor no puede estar en equilibrio electrostático.

El campo en el interior del conductor se calculará mediante el gradiente del potencial (cambiado de signo):

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \right) = -2\vec{j}\ [V/m]$$

Es decir, el campo es uniforme (no depende de x, y o z), está dirigido según el eje Y, sentido negativo

Los electrones son cargas negativas, por tanto se moverán en sentido contrario al campo eléctrico, es decir positivo del eje Y.

El sentido de la corriente, que es convencional, se toma como el del movimiento de las cargas positivas. La corriente fluye por tanto en el mismo sentido que el campo: negativo del eje Y

C.2 Un condensador de 0.1 μF de capacidad se conecta a una fuente de alimentación de 10000 V. Cuando el condensador está cargado se desconecta de la fuente y sus armaduras se unen en paralelo con las de otro condensador de capacidad de 0.3 μF, que inicialmente se encuentra descargado. Calcula: (a) La diferencia de potencial común entre las armaduras [0.5 puntos]. (b) La carga y la energía almacenadas en cada condensador después de la unión [0.5 puntos].

RESOLUCIÓN:

a) Inicialmente la carga de cada condensador se calcula como:

$$Q_1 = C_1 \cdot V_1 = 0.1 \cdot 10^{-6} \cdot 10000 = 10^{-3}\ C \qquad y \qquad Q_2 = 0\ C$$

Los dos condensadores están conectados en paralelo, por lo que se pueden sustituir por un único condensador con capacidad:

$C_{eq} = C_1 + C_2 = 4 \cdot 10^{-6}\ F$, con carga total: $Q = Q_{1f} + Q_{2f} = Q_{1i} + Q_{2i} = 10^{-3}\ C$

La diferencia de potencial entre las placas del condensador equivalente es la misma que la que tiene cada uno de los dos condensadores acoplados:

$$V = V_{1f} = V_{2f} = \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{10^{-3}}{0.4 \cdot 10^{-6}} = 2500\,V$$

b) La carga final almacenada en cada condensador después de la unión es:

$$Q_{1f} = C_1 \cdot V = 0.1 \cdot 10^{-6} \cdot 2500 = 25 \cdot 10^{-5}\ C$$
$$Q_{2f} = C_2 \cdot V = 0.3 \cdot 10^{-6} \cdot 2500 = 75 \cdot 10^{-5}\ C$$

Y la energía:

$$U_{1f} = \frac{1}{2} \cdot C_{1f} \cdot V_{1f}^{\ 2} = \frac{1}{2} \cdot 0.1 \cdot 10^{-6} \cdot 2500^2 = 0{,}3125\ J$$
$$U_{2f} = \frac{1}{2} \cdot C_{2f} \cdot V_{2f}^{\ 2} = \frac{1}{2} \cdot 0.3 \cdot 10^{-6} \cdot 2500^2 = 0{,}9375\ J$$

C3. Disponemos de una bobina de 20 cm de largo y 10000 vueltas/m por la que circula una corriente de 0.5 A. Cada espira de las que consta la bobina tiene un perímetro de 10 cm con forma circular. Calcula la energía almacenada en la bobina si introducimos en su interior un material ferromagnético con μ_r=5000. Dato: μ_0=4π.10^{-7} S.I.

RESOLUCIÓN:

La energía almacenada en una bobina por donde circula una corriente I es:

$$U = \frac{1}{2} L \cdot I^2$$

donde: $L = \frac{\phi_B}{I} = \mu \frac{N^2 S}{l} = \mu_r \cdot \mu_0 \frac{N^2 S}{l}$

$$0.1m = 2\pi R \rightarrow R = 0.016\ m \rightarrow S = \pi R^2 = 7.96\ x10^{-4}\ m^2$$

Si la bobina posee 10000 vueltas en cada m y su longitud es de 20 cm el número total de espiras es de 2000.

$$L = 5000 \times 4\pi \times 10^{-7} \frac{2000^2 \times 7.96 \times 10^{-4}}{0.2} = 100\ \ H$$

$$U = \frac{1}{2} 100 \cdot 0.5^2 = 12.5\ J$$

C4. Se desea construir un generador de corriente alterna utilizando como imán el campo magnético terrestre (B = 0.5 G) y una bobina de 1000 espiras. Calcular que área deberían tener las espiras para obtener una tensión eficaz de 220 V funcionando a 50 Hz.

RESOLUCIÓN:

El flujo del campo magnético a través de las espiras vendrá dado por:

$$\phi = N \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = NBS \cos(wt + \varphi)$$

siendo *N* el número de espiras, *B* el campo magnético terrestre, *S* la superficie de las espiras, ω su velocidad angular de rotación (ω = 2π*f* siendo *f* la frecuencia de rotación) y φ el ángulo que forman inicialmente (en t=0) el vector superficie de las espiras (eje axial de la bobina) con el campo B.

Por la Ley de Faraday – Lenz , la fuerza electromotriz inducida será:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = NBSw\, sen(wt+\varphi) = \varepsilon_0\; sen(wt+\varphi) \quad [V]$$

La tensión eficaz de salida será:

$$\varepsilon_{ef} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}} = \frac{NBSw}{\sqrt{2}} = 220\,[V]$$

de donde despejamos:

$$S = \sqrt{2}\cdot\frac{\varepsilon_{ef}}{NBw} = \sqrt{2}\cdot\frac{220}{1000\cdot 0{,}5\cdot 10^{-4}\cdot 2\cdot\pi\cdot 50} = 19{,}8 \quad m^2$$

C.5 Una onda electromagnética plana que se propaga en un material de índice de refracción n=1.5, en la dirección positiva del eje *X*, tiene un valor máximo del campo eléctrico de $10\,V/m$. Si la onda está polarizada linealmente según el eje *Y*, y su longitud de onda en el material es de *500 nm*, determina: (a) Las expresiones de los campos eléctrico y magnético que describen la onda [0.75 puntos]. (b) La dirección en la que deberíamos colocar una antena dipolar magnética para que la recepción fuera óptima [0.25 puntos].

Resolución:

a) Las expresiones de los módulos de los campos eléctrico y magnético que describen una onda plana armónica son:

$$E = E_0 sen(k\,r - \omega t)\,,\quad B = B_0 sen(k\,r - \omega t)$$

Del enunciado conocemos: $E_0 = 10\,V/m$, $\lambda = 0.5\cdot 10^{-6}\ m$, $n = 1.5$

De aquí podemos hallar: $k = 2\pi/\lambda = 1.3\cdot 10^7\ rad/s$, $v = c/n = 2\cdot 10^8\ m/s$

Con esto obtenemos: $\omega = k\,v = 2.6\cdot 10^{15}\ rad/s$, $B_0 = E_0/v = 5\cdot 10^{-8}\ T$

Por otro lado, si la onda de campo eléctrico está polarizada según el eje *y*, y se propaga en la dirección positiva del eje *x*, obtenemos:

$$\boxed{\vec{E} = 10 sen(1.3\cdot 10^7 x - 2.6\cdot 10^{15} t)\,\vec{j}\ \ V/m}$$

El campo magnético vibra a lo largo del eje *Z*, de modo que $\vec{E}\wedge\vec{B}$ tenga el sentido del eje *X* a lo largo del cual se propaga la onda, quedando:

$$\boxed{\vec{B} = 5\cdot 10^{-8}\ sen(1.3\cdot 10^7 x - 2.6\cdot 10^{15} t)\,\vec{k}\ \ T}$$

b) Para que las corrientes inducidas en la antena dipolar magnética sean máximas, ésta deberá estar orientada con su plano perpendicular a la dirección de vibración del campo magnético, por tanto, perpendicular al eje Z.

P.1 Un cable coaxial muy largo está formado por un hilo conductor central de radio a = 0.5 cm y una armadura externa conductora, cilíndrica, de radios b = 1cm y c = 1.2 cm. El hilo central se conecta a un potencial positivo V_a adquiriendo una carga de 8.85 x 10^{-9} C por cada metro de longitud de cable. Por otra parte la armadura está conectada a tierra por su cara externa. Calcula: (a) El campo eléctrico en todo el espacio [1 punto]. (b) El potencial V_a [0.5 puntos]. (c) Las densidades superficiales de carga en las caras interna y externa de la armadura [0.5 puntos].

Resolución:

a) Composición de lugar:
Al conectar el hilo central a V_a este adquiere una carga +q y en consecuencia en la cara interna de la armadura aparece una carga –q. Esto debe ser así para que las líneas de campo generadas por +q se anulen, ya que el campo dentro de la armadura (entre los radios b y c) debe ser nulo por ser un conductor en equilibrio electrostático. La carga +q volvería a aparecer en la cara externa de la armadura, pero al estar ésta conectada a tierra la carga se drena a través de la conexión. O dicho de otra forma, la armadura obtiene a través de su conexión a tierra una carga –q que se sitúa en su cara interna para anular las líneas de campo generadas por la carga +q del hilo interior.

Para $r < a$ el campo será nulo porque se trata de un conductor en equilibrio electrostático y toda la carga se situará en su superficie.

El campo en la zona $b < r < c$ también es nulo puesto que también se trata de un conductor en equilibrio.

El campo en $r > c$ es nulo porque la carga neta del cable coaxial en su conjunto será, por lo explicado anteriormente, q - q = 0

Finalmente, sólo existirá campo en $a < r < b$. Y como se trata de puntos exteriores a la carga, r > a, el campo creado es el mismo que el que crea un hilo con una densidad lineal de carga λ=8.85 x 10^{-9} C/m situado en el eje del cable.

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{500}{\pi r} \; [V/m],$$ siendo r la distancia radial al eje del cable.

b) La *d.d.p.* entre las capas a y b se calcula como:

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_a^b \frac{500}{\pi r} dr = -\frac{500}{\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = -110{,}3 \; [V]$$

Como la armadura externa está conectada a tierra, su potencial es cero. Por tanto V_b = 0 y el potencial en a es V_a = 110,3 [V]

c) La carga en la cara externa de la armadura es nula, por tanto σ_e=0.

En la cara interna hay una carga de -8.85 x 10^{-9} C por cada metro de cable, que está distribuida uniformemente en superficie. Superficie que, por cada metro de cable, se trata de un rectángulo de lados 1 m y 2πb. Por lo tanto:

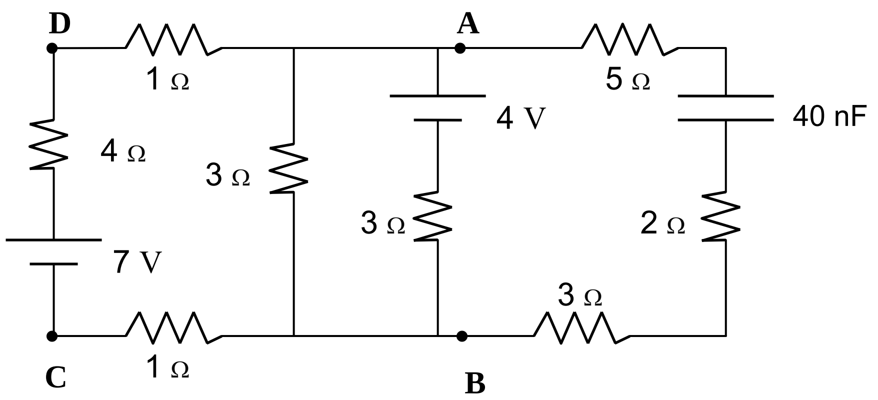
$$\sigma_i = \frac{-q}{2\pi b} = \frac{-8{,}85 \cdot 10^{-9}}{2\pi \cdot 10^{-2}} = -1{,}4 \cdot 10^{-7} \; [C/m^2]$$

P.2 En el circuito de la figura determinar:

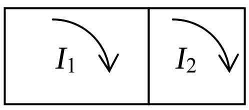
(a) El equivalente de Thevenin entre A y B de la porción de circuito ABCD [0.75 puntos].

(b) La carga almacenada en el condensador cuando se alcanza el equilibrio [0.25 puntos].

(c) La potencia que se disipa en la resistencia de 4 Ω cuando el condensador está cargado [0.5 puntos].



Resolución: (a)

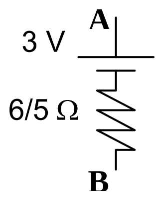


$$\begin{array}{rl} 9\,I_1 - 3\,I_2 = 7 & 9\,I_1 - 3\,I_2 = 7 \\ -3\,I_1 + 6\,I_2 = -4 & -9\,I_1 + 18\,I_2 = -12 \\ \hline & 15\,I_2 = -5 \rightarrow I_2 = -1/3\text{ A}, \end{array}$$

$9.\ I_1 - 3\,(-1/3) = 7 \rightarrow I_1 = 2/3$ A,

El voltaje equivalente de Thevenin es:

$$V_{AB} = (-1/3)\cdot 3 - (-4) = 3\,V$$



La resistencia equivalente entre A y B es (6Ω, 3Ω y 3Ω en paralelo):

$$\frac{1}{R_{Th}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \qquad R_{Th} = \frac{6}{5}\,\Omega$$

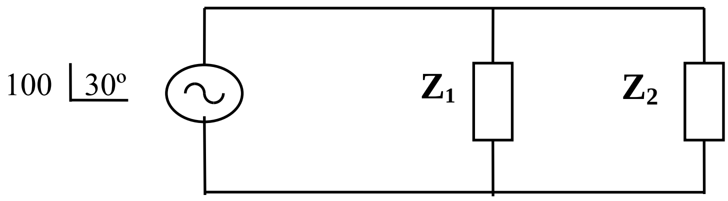
(b) Cuando se alcanza el equilibrio por la rama del condensador no circula corriente y por tanto la d.d.p. entre sus bornes será el valor V_{Th} que hemos calculado.

$$\Rightarrow \qquad q = C \cdot V = 40.10^{-9} \cdot 3 = 120\ nC$$

(c) Si el condensador está cargado, las corrientes que hemos calculado en el apartado (a) son reales. La intensidad que circula por R de 4 Ω es $I_1 = 2/3$ A

Y la potencia que disipa: $$P_{d(R4)} = I_1^2 \cdot r = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 4 = 1{,}78\ \boldsymbol{W}$$

P.3 En el circuito de la figura calcula: (a) El valor de Z_2 para que la corriente eficaz suministrada por el generador de alterna sea de 2 A y se encuentre en fase con la tensión [1 punto]. (b) La potencia disipada en las impedancias Z_1 y Z_2 [0.5 puntos].
Dato: $Z_1 = 50\sqrt{2}\ \angle -45^{\circ}\ \Omega$



Resolución:

a) El problema nos aporta como dato la fase de la impedancia equivalente (0º) y podemos calcular su módulo como:

$$Z_e = \frac{V_{ef}}{I_{Tef}} = \frac{100}{2} = 50\,\Omega; \quad \Rightarrow \quad \overline{Z}_e = 50\angle 0^{\circ}\ \Omega = 50\ \ \Omega$$

Como conocemos la impedancia de la otra rama: $\overline{Z}_1 = 50\sqrt{2}\angle -45^{\circ} = 50 - j50$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\overline{Z}_e} = \frac{1}{\overline{Z}_1} + \frac{1}{\overline{Z}_2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\overline{Z}_2} = \frac{1}{\overline{Z}_e} - \frac{1}{\overline{Z}_1} \quad \rightarrow \quad \overline{Z}_2 = \frac{\overline{Z}_1 \cdot \overline{Z}_e}{\overline{Z}_1 - \overline{Z}_e}$$

$$\overline{Z}_2 = \frac{50\sqrt{2}\angle -45^{\circ} \cdot 50\angle 0^{\circ}}{-j50} = \frac{2500\sqrt{2}\angle -45^{\circ}}{50\angle -90^{\circ}} = 50\sqrt{2}\ \angle 45^{\circ}\ \Omega$$

---

b) El módulo de Z_1 y Z_2 son iguales y por tanto también lo será la corriente eficaz que circula por ellas:

$$I_{1ef} = I_{2ef} = \frac{V_{ef}}{Z_1} = \frac{V_{ef}}{Z_2} = \frac{100}{50\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ A;$$

También es igual la parte real de ambas impedancias, es decir su resistencia:

$$R_1 = R_2 = 50\sqrt{2}.\cos(\pm 45^{\circ}) = 50\ \ \Omega$$

Por lo tanto en ambas impedancias se disipa la misma potencia:

$$\boxed{P_{dZ1} = P_{dZ2} = I_{1ef}^2 \cdot R_1 = 2 \cdot 50 = 100 \quad W}$$

Puede comprobarse que la suma de la potencia disipada en Z_1 y Z_2 (200 W) es igual a la potencia activa del generador:

$$P_{AC} = V_{ef} \cdot I_{Tef} \cdot \cos(0^{\circ}) = 100 \cdot 2 = 200\ W$$