Tema 0. Conocimientos previos:

Álgebra Vectorial; Movimiento uniformemente acelerado; Tiro parabólico; Conservación de la energía; Trabajo y Gradiente

1. Dados los vectores **a**=3**i**-2**j** y **b**=-4**i**+**j**, calcular:
a) El vector suma y su módulo
b) El vector diferencia y el ángulo que forma con el eje OX
c) El vector **c**=2**a**-3**b** y el vector unitario que define la dirección y sentido de **c**

Solución: $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{i}-\vec{j};\ \left|\vec{a}+\vec{b}\right|=+\sqrt{2};\ \vec{a}-\vec{b}=7\vec{i}-3\vec{j};\ \alpha=-23.2^{\circ};\ \vec{c}=18\vec{i}-7\vec{j};$

$$\vec{u}_c=\frac{18}{19.3}\vec{i}-\frac{7}{19.3}\vec{j}$$

2. Un vector tiene por origen respecto de cierto sistema de referencia el punto O (-1, 2, 0) y de extremo P (3, -1, 2). Calcular: (a) Componentes del vector **OP** (b) Módulo y cosenos directores (c) Un vector unitario en la dirección de él pero de sentido contrario

Solución: $\overrightarrow{OP}=(4,-3,2);\ \left|\overrightarrow{OP}\right|=+\sqrt{29};\ \cos\alpha=\frac{4}{+\sqrt{29}};\ \cos\beta=\frac{(-3)}{+\sqrt{29}};\cos\gamma=\frac{2}{+\sqrt{29}};$

$$-\vec{u}_{\overrightarrow{OP}}=\left(-\frac{4}{+\sqrt{29}},\frac{3}{+\sqrt{29}},-\frac{2}{+\sqrt{29}}\right)$$

3. Dados los vectores **a** (1, -1, 2) y **b** (-1, 3, 4), calcular: (a) El producto escalar de ambos vectores. (b) El ángulo que forman

Solución: $\vec{a}\bullet\vec{b}=4;\ \alpha=71.3^{\circ}$

4. Dados los vectores **a**=5**i**-2**j**+**k** y **b**=**i**-**j**+2**k**, calcular: (a) El producto vectorial de ambos vectores. (b) El ángulo que forman

Solución: $\vec{a}\times\vec{b}=(-3,-9,-3);\ \alpha=47.9^{\circ}$

5. El origen de un vector es el punto A (3, -1, 2) y su extremo B (1, 2, 1). Calcular su momento respecto al punto C (1, 1, 2)

Solución: $\overrightarrow{M}_{PTO\,C}=(2,2,2)$

6. Un móvil parte de un punto con una velocidad de 110 cm/s y recorre una trayectoria rectilínea con aceleración de -10 cm/s^2. Calcular el tiempo que tardará en pasar por un punto que dista 105 cm del punto de partida. (Interpretar físicamente las dos soluciones que se obtienen)

Solución: $t_1=21\,s;\ t_2=1\,s$

7. Hallar las fórmulas de un movimiento uniformemente acelerado sabiendo que la aceleración es de 8 cm/s^2, que la velocidad se anula para t=3 s, y que pasa por el origen (x=0) en t=11 s.

Solución: $v=-24+8t;\ x=-220-24t+4t^2$

8. La velocidad de un punto que se mueve en trayectoria recta queda expresada en el S.I. por la ecuación: v=40-8t. Para t=2 s el punto dista del origen 80 m. Determinar: (a) La expresión general de la distancia al origen. (b) El espacio inicial. (c) La aceleración. (d) ¿En qué instante tiene el móvil velocidad nula? (e) ¿Cuánto dista del origen en tal instante?

Solución: $x = x_0 + 40t - 4t^2;\ x_0 = 16\ m;\ a = -8\,m/s^2;\ t = 5\ s;\ x_5 = 116\ m$

9. En un terreno horizontal se lanza un proyectil verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s. El viento le produce una aceleración horizontal constante e igual a g/5, siendo g=10 m/s^2. Calcular: (a) Las ecuaciones vectoriales horarias. (b) La ecuación analítica de la trayectoria. (c) La distancia entre el punto de lanzamiento y el del impacto con la horizontal. (d) La altura máxima que alcanza el proyectil. (e) El ángulo que forma con la horizontal el vector velocidad en el punto del impacto

Solución:

$$\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + (20t - 5t^2)\vec{j};\ \vec{v}(t) = 2t\vec{i} + (20 - 10t)\vec{j};\ \vec{a}(t) = 2\vec{i} - 10\vec{j};\ 5x + y - 20\sqrt{x} = 0;$$
$$d = 16\ m;\ h = 20\ m;\ \alpha = -68.2^{\circ}$$

10. Desde una torre de 30 m de altura se lanza un objeto de masa 0.10 kg con una velocidad de 16 m/s en una dirección que forma un ángulo de 45º con la horizontal: (a) ¿Cuál es la energía total después del lanzamiento? (b) ¿Cuál es su velocidad cuando se encuentra a 10 m sobre el suelo? Nota: No tomar en consideración la resistencia del aire

Solución: $E = 42.2\ J;\ v = 25.5\ m/s$

11. Una partícula está sometida a una fuerza que, expresada en el S.I., tiene por ecuación **F**=xy**i**, en la que x e y son las coordenadas del punto del plano en las que se encuentra la partícula en cada instante. Calcular el trabajo realizado por tal fuerza al desplazar la partícula del punto A(0,3) al B(3,0), estando expresadas estas coordenadas en metros, a lo largo de los siguientes caminos:

a) A lo largo de la recta que los une
b) A lo largo de un arco de circunferencia de centro el origen de coordenadas y de extremos A y B

Solución: $W_A^B = 4.5\ J;\ W_A^B = 9\ J$

12. Dada la magnitud escalar $A = x^2y + 3xyz - 3z^2 + 1$, calcular el gradiente de A $(\overrightarrow{grad}\,A)$ en el punto B(1,0,2)

Solución: $\overrightarrow{grad}\,A = (2xy + 3yz)\vec{i} + (x^2 + 3xz)\vec{j} + (3xy - 6z)\vec{k}$