4 Se considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) (0'5 puntos) Hallad el polinomio característico

(b) (0'5 puntos) Hallad los valores propios

(c) (1'5 puntos) Hallad una base de cada subespacio propio

(d) (0'5 puntos) Dad dos matrices P y D (diagonal), tales que $P^{-1}AP = D$

Solución:

(a) $q_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 12\lambda + 16$

(b) Las raices (probando por Ruffini) son -2 (doble) y 4 (simple)

(c) • Para $\lambda = -2$ hay que resolver el sistema homogéneo $(A+2I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Se obtiene la solución en forma paramétrica

$$E_A(-2) = \begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Env}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

• Para $\lambda = 4$ hay que resolver el sistema homogéneo $(A-4I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Se obtiene la solución en forma paramétrica

$$E_A(4) = \begin{bmatrix} 1/2\alpha \\ 1/2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Env}\left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \mathrm{Env}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

(d) Las matrices pueden ser

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$