Problemas resueltos de subespacios – en exámenes de MATEMATICAS-1

El primero de los publicados es de enero 2013. Está en otro documento.

2 Consideremos el subconjunto de $\mathbb{R}^4$

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}$$

(a) **(1 punto)** Probar que F es subespacio vectorial.

(b) **(1 punto)** Obtener una base de F.

Solución:

(a) Hay que comprobar 3 condiciones

(1) El vector $(0,0,0,0) \in F$ pues $0+0=0+0$.

(2) Dados dos vectores de F, (x_1, x_2, x_3, x_4) y (y_1, y_2, y_3, y_4), la suma es

$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$$

Éste vector está en F pues

$$(x_1+y_1)+(x_2+y_2) = (x_1+x_2)+(y_1+y_2) = (x_3+x_4)+(y_3+y_4) = (x_3+y_3)+(x_4+y_4).$$

(3) Dado $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in F$ y dado $\alpha \in \mathbb{R}$ el vector $\alpha\boldsymbol{u}$ está en F pues

$$\alpha x_1 + \alpha x_2 = \alpha(x_1 + x_2) = \alpha(y_1 + y_2) = \alpha y_1 + \alpha y_2.$$

(b) Hay que resolver el sistema $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$; Despejando x_1 se tiene $x_1 = -x_2 + x_3 + x_4$ y, llamando $x_2 = \alpha, x_3 = \beta, x_4 = \gamma$, la solución es $(-\alpha + \beta + \gamma, \alpha, \beta, \gamma) = \alpha(-1,1,0,0) + \beta(1,0,1,0) + \gamma(1,0,0,1)$ y una base está formada por los vectores $(-1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1)$.

3 (2 puntos) Obtener una base de Nul A siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Nul A es el conjunto de soluciones del sistema $Ax = \mathbf{0}$. La forma reducida de A es

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -19/10 \\ 0 & 1 & 0 & 17/30 \\ 0 & 0 & 1 & 1/30 \end{bmatrix}$$

La solución es $\alpha \left(\frac{19}{10}, -\frac{17}{30}, -\frac{1}{30}, 1 \right)$ y una base la forma el vector anterior, ó, (multiplicando por 30) el vector $(57, -17, -1, 30)$.

3

(a) (1'25 puntos) Probar que el conjunto $E = \{(a, b, a + b, a - b), a, b \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$

(b) (1'25 puntos) Hallar una base de E.

Solución:

(a) Comprobando las tres condiciones

(1) El vector nulo se obtiene para $a = 0, b = 0$ por lo que $\mathbf{0} \in E$

(2) La suma de dos vectores de E es también vector de E como se comprueba a continuación

$$(a, b, a + b, a - b) + (c, d, c + d, c - d) =$$
$$(a + c, b + d, (a + c) + (b + d), (a + c) - (b + d))$$

(3) El producto de un escalar por un vector de E pertenece a E

$$\lambda \cdot (a, b, a + b, a - b) = (\lambda \cdot a, \lambda \cdot b, \lambda \cdot a + \lambda \cdot b, \lambda \cdot a - \lambda \cdot b)$$

(b) Los vectores de E son

$$(a, b, a + b, a - b) = a(1, 0, 1, 1) + b(0, 1, 1, -1)$$

Los vectores $(1, 0, 1, 1)$ y $(0, 1, 1, -1)$ son generadores e independientes por lo que constituyen una base de E.