1 Sean matrices A y B tales que AB está definida, y se considera el vector de $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) (1 punto) Probad que la matriz $C = B^T A^T AB$ es simétrica

(b) (1 punto) Probad que la matriz $P = I_2 - \dfrac{1}{2}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$ cumple $P^2 = P$ y la matriz $Q = I_2 - \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$ cumple $Q^{-1} = Q$

Solución:

(a) Hay que probar que $C^T = C$. Hagámoslo

$$C^T = (B^T A^T AB)^T = B^T A^T (A^T)^T (B^T)^T = B^T A^T AB = C$$

(b) Calculando

$$\begin{aligned}
P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}. \\
Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Se calcula P^2 para ver que se obtiene P. Para la ¡gualdad $Q^{-1} = Q$ no hace falta hallar la inversa, es mejor probar la igualdad $QQ = I$.