

*Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial*



|                      |  |  |  |
|----------------------|--|--|--|
| <i>Alumno:</i>       |  |  |  |
| <i>Grupo teoría:</i> | (                  de                  ) |  |  |
| <i>DNI:</i>          |  |  |  |
| <i>Email:</i>        |  |  |  |

**Ejercicios de Cálculo Diferencial e Integral, 2015/16**

**Instrucciones generales:**

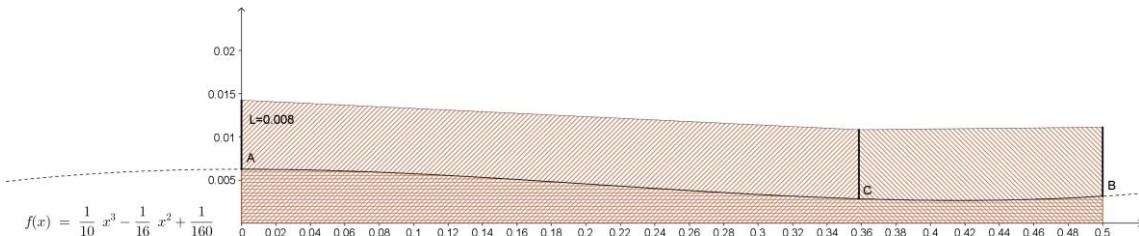
Todos los ejercicios deben estar bien explicados y realizados a mano.

Se deben de entregar como máximo el día 17 de Abril.

|             |     | Nota |  |
|-------------|-----|------|--|
| Ejercicio 1 | 2,5 |      |  |
| Ejercicio 2 | 2   |      |  |
| Ejercicio 3 | 2,5 |      |  |
| Ejercicio 4 | 2   |      |  |
| Ejercicio 5 | 1   |      |  |
| Total       |     |      |  |

1. El poste  $A$  dista del poste  $B$  0,5 km., y se quiere colocar un poste intermedio  $C$  entre ambos. A todos los efectos, en todo este ejercicio, consideraremos que el cable que va de un extremo superior de un poste al extremo superior del otro, lo hace en línea recta y NO mediante una catenaria. El perfil de las elevaciones del terreno viene dado por la función

$$f(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{160} \text{ km.}, \quad \text{como se aprecia en el dibujo:}$$



- a. Determina a qué distancia del poste  $A$  hay que colocar el poste  $C$  para que el área que delimitan el cable, los postes  $A$  y  $B$ , y el perfil del terreno ( $f(x)$ ), sea la mínima posible, sabiendo que la longitud de los postes es de 8 m. ( $L = 0,008$  km.).

$$S_a = (C - A)(f(C) + L) + \frac{(C - A)(f(A) - f(C))}{2} = \frac{(C - A)(f(C) + 2L + f(A))}{2}$$

$$S_b = (B - C)(f(B) + L) + \frac{(B - C)(f(C) - f(B))}{2} = \frac{(B - C)(f(B) + 2L + f(C))}{2}$$

$$A = 0 \quad B = \frac{1}{2} \quad C = x \quad L = \frac{1}{125}$$

$$f(A) = \frac{1}{160} \quad f(B) = \frac{1}{80} - \frac{1}{64} + \frac{1}{160} = \frac{4-5+2}{320} = \frac{1}{320} \quad f(C) = f(x)$$

$$S_f = \int_A^B f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{160} \right) dx$$

$$S_f = \left[ \frac{1}{40}x^4 - \frac{1}{48}x^3 + \frac{1}{160}x \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{640} - \frac{1}{384} + \frac{1}{320} = \frac{3-5+6}{1920} = \frac{1}{480}$$

$$S_a(x) = \frac{x \left( f(x) + \frac{2}{125} + \frac{1}{160} \right)}{2} = \frac{x \left( 4000f(x) + 64 + 25 \right)}{4000} = \frac{4000xf(x) + 89x}{8000}$$

$$= \frac{400x^4 - 250x^3 + 25x + 89x}{8000} = \frac{1600x^4 - 1000x^3 + 456x}{32000}$$

$$S_b(x) = \frac{\left( \frac{1}{2} - x \right) \left( \frac{1}{320} + \frac{2}{125} + f(x) \right)}{2} = \frac{1-2x}{4} \left( \frac{25+128+8000f(x)}{8000} \right)$$

$$= \frac{153 + 8000f(x) - 306x - 16000xf(x)}{32000}$$

$$= \frac{153 + 800x^3 - 500x^2 + 50 - 306x - 1600x^4 + 1000x^3 - 100x}{32000}$$

$$= \frac{-1600x^4 + 1800x^3 - 500x^2 - 406x + 203}{32000}$$

$$S(x) = S_a(x) + S_b(x) - S_f = \frac{800x^3 - 500x^2 + 50x + 203}{32000} - \frac{1}{480}$$

$$= \frac{1}{40}x^3 - \frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{640}x + \frac{609 - 200}{96000} = \frac{1}{40}x^3 - \frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{640}x + \frac{409}{96000}$$

$$S'(x) = \frac{3}{40}x^2 - \frac{1}{32}x + \frac{1}{640} = 0$$

$$x = \frac{\frac{1}{32} \pm \sqrt{\frac{1}{1024} - \frac{3}{6400}}}{\frac{3}{20}} = \frac{\frac{1}{32} \pm \sqrt{\frac{25 - 12}{25600}}}{\frac{3}{20}} = \frac{\frac{1}{32} \pm \frac{\sqrt{13}}{160}}{\frac{3}{20}} = \frac{\frac{1}{8} \pm \frac{\sqrt{13}}{40}}{\frac{3}{5}} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{24}$$

$$x_1 = 0,0581 \quad x_2 = 0,3586 \quad S(x_1) = 0,0043 \quad S(x_2) = 0,00396$$

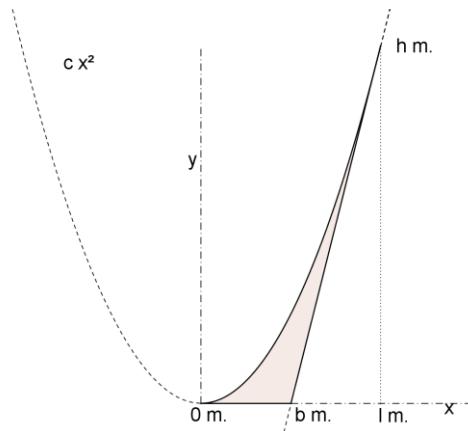
$x_1$  es un máximo y  $x_2$  un mínimo, la solución es poner el poste en  $C = 0,3586$  km. de  $A$ .

b. Calcula cuál es la distancia **en vertical (habría que haberlo especificado)** mínima del cable a suelo entre el poste A y C y entre el C y B y comprueba que no incumple la norma se estorjado al menos 6 metros (0,006 km.).

$$\begin{aligned} \text{Cable AC: } \frac{x-A}{C-A} &= \frac{y-(f(A)+L)}{(f(C)+L)-(f(A)+L)} & y &= \frac{f(C)-f(A)}{C-A}x - \frac{f(C)-f(A)}{C-A}A + f(A) + L \\ \text{Cable CB: } \frac{x-B}{C-B} &= \frac{y-(f(B)+L)}{(f(C)+L)-(f(B)+L)} & y &= \frac{f(C)-f(B)}{C-B}x - \frac{f(C)-f(B)}{C-B}B + f(B) + L \\ A = 0 & & f(A) &= \frac{1}{160} = 0,0063 \\ B = \frac{1}{2} & & f(B) &= \frac{1}{320} = 0,0031 & L &= \frac{1}{125} = 0,008 \\ C = \frac{5+\sqrt{13}}{24} = 0,3586 & & f(C) &= \frac{0,3586^3}{10} - \frac{0,3586^2}{16} + \frac{1}{160} = 0,0028 \\ d_a(x) &= \frac{f(C)-f(A)}{C-A}x - \frac{f(C)-f(A)}{C-A}A + f(A) + L - f(x) \\ &= \frac{0,0028 - 0,0063}{0,3586}x + \frac{1}{160} + \frac{1}{125} - \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{160} \\ &= \frac{-1}{10}x^3 + \frac{1}{16}x^2 - 0,0098x + \frac{1}{125} \\ d'_a(x) &= \frac{-3}{10}x^2 + \frac{1}{8}x - 0,0098 = 0 \\ x &= \frac{-\frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} - \frac{12 \cdot 0,0098}{10}}}{-\frac{3}{5}} = \frac{5 \pm 5 \cdot 8 \cdot \sqrt{\frac{1}{64} - 0,0118}}{3 \cdot 8} = \frac{5 \pm 40\sqrt{0,0038}}{24} \\ x_1 &= 0,1052 \quad d_a(x_1) = \frac{-0,1052^3}{10} + \frac{0,1052^2}{16} - 0,0098 \cdot 0,1052 + \frac{1}{125} = 0,0076 \quad \text{mín.} \\ x_2 &= 0,3115 \quad d_a(x_2) = \frac{-0,3115^3}{10} + \frac{0,3115^2}{16} - 0,0098 \cdot 0,3115 + \frac{1}{125} = 0,0081 \quad \text{máx.} \\ d_b(x) &= \frac{f(C)-f(B)}{C-B}x - \frac{f(C)-f(B)}{C-B}B + f(B) + L - f(x) \\ &= \frac{0,0028 - 0,0031}{0,3586 - 0,5}x - \frac{1}{2}(-0,0003) + \frac{1}{320} + \frac{1}{125} - \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{160} \\ &= \frac{-1}{10}x^3 + \frac{1}{16}x^2 + 0,0021x - 0,0011 + 0,0031 + 0,008 - 0,0063 \\ &= \frac{-1}{10}x^3 + \frac{1}{16}x^2 + 0,0021x + 0,0037 \\ d'_b(x) &= \frac{-3}{10}x^2 + \frac{1}{8}x + 0,0021 = 0 \\ x &= \frac{-\frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{12 \cdot 0,0021}{10}}}{-\frac{3}{5}} = \frac{5 \pm 5 \cdot 8 \cdot \sqrt{\frac{1}{64} + 0,0025}}{3 \cdot 8} = \frac{5 \pm 40\sqrt{0,0181}}{24} \\ x_1 &= -0,0160 \quad d_b(x_1) = \frac{-0,016^3}{10} + \frac{0,016^2}{16} + 0,0021 \cdot 0,016 + 0,0037 = 0,0037 \quad \text{mín.} \\ x_1 &\text{ Fuera del intervalo [C,B] los extremos mínimos son en C y B la longitud del poste L= 0,008} \\ x_2 &= 0,4327 \quad d_b(x_2) = \frac{-0,4327^3}{10} + \frac{0,4327^2}{16} + 0,0021 \cdot 0,4327 + 0,0037 = 0,0082 \quad \text{máx.} \\ &\text{En ningún caso el cable está a menos de 6 metros del suelo.} \end{aligned}$$



2. Se pretende modelar una obra artística para adornar como escultura el centro de la próxima rotonda de la ciudad. La escultura consistirá en una plancha de metal con forma de aleta que está formada por un lado curvo y dos rectos. El curvo es un arco de una parábola con la forma  $f(x) = cx^2$ , y los rectos son la base y una tangente a la parábola como se muestra en la imagen:



La base es de  $b$  metros, pero la escultura ocupa  $l$  metros de ancho por  $h$  de alto. El grosor de la plancha deberá ser  $\frac{3}{25(l^3 - 2l^2 + 3l)}$  metros, y su volumen de 10 litros ( $0,01 \text{ m}^3$ ). Determina el coeficiente  $c$  para curva, en función de  $l$  para cumplir con la restricción del volumen, y el ancho  $l$  para que la escultura tenga la altura  $h$  mínima.

La tangente  $y = mx + q$  al a la curva  $f(x) = cx^2$  en el vértice superior de la aleta tiene una pendiente  $m = f'(l) = 2cl$ , y si además pasa por ese mismo vértice, el punto  $(l, f(l))$  entonces  $q$  se puede deducir de:

$$cl^2 = 2cl l + q \quad cl^2 - 2cl^2 = q \quad q = -cl^2$$

Y la recta tangente es  $y = 2clx - cl^2$  que corta en el eje  $x$  en  $b$ :

$$0 = 2clb - cl^2$$

de donde:

$$2clb = cl^2 \quad 2b = l \quad b = \frac{l}{2}$$

La superficie de la plancha se puede calcular restándole a la integral de la curva  $f(x)$  de 0 a  $l$  la superficie triángulo rectángulo:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^l cx^2 dx = \left[ \frac{cx^3}{3} \right]_0^l = \frac{cl^3}{3} \\ T &= \frac{(l-b)h}{2} = \frac{\left(l - \frac{l}{2}\right)cl^2}{2} = \frac{cl^3}{4} \\ S &= I - T = \frac{cl^3}{3} - \frac{cl^3}{4} = \frac{cl^3}{12} \end{aligned}$$

El volumen será la superficie de la plancha por su grosor:

$$V = S \cdot a = \frac{cl^3}{12} \cdot \frac{3}{25(l^3 - 2l^2 + 3l)} = 0,01$$

El coeficiente es:

$$c = \frac{l^3 - 2l^2 + 3l}{l^3} = 1 - \frac{2}{l} + \frac{3}{l^2}$$

La altura en función de  $l$ :

$$h(l) = cl^2 = \left(1 - \frac{2}{l} + \frac{3}{l^2}\right)l^2 = l^2 - 2l + 3$$

Y tiene un mínimo donde su derivada es cero:

$$h'(l) = 2l - 2 = 0$$

El ancho es

$$l = 1,$$

el alto

$$h(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 2,$$

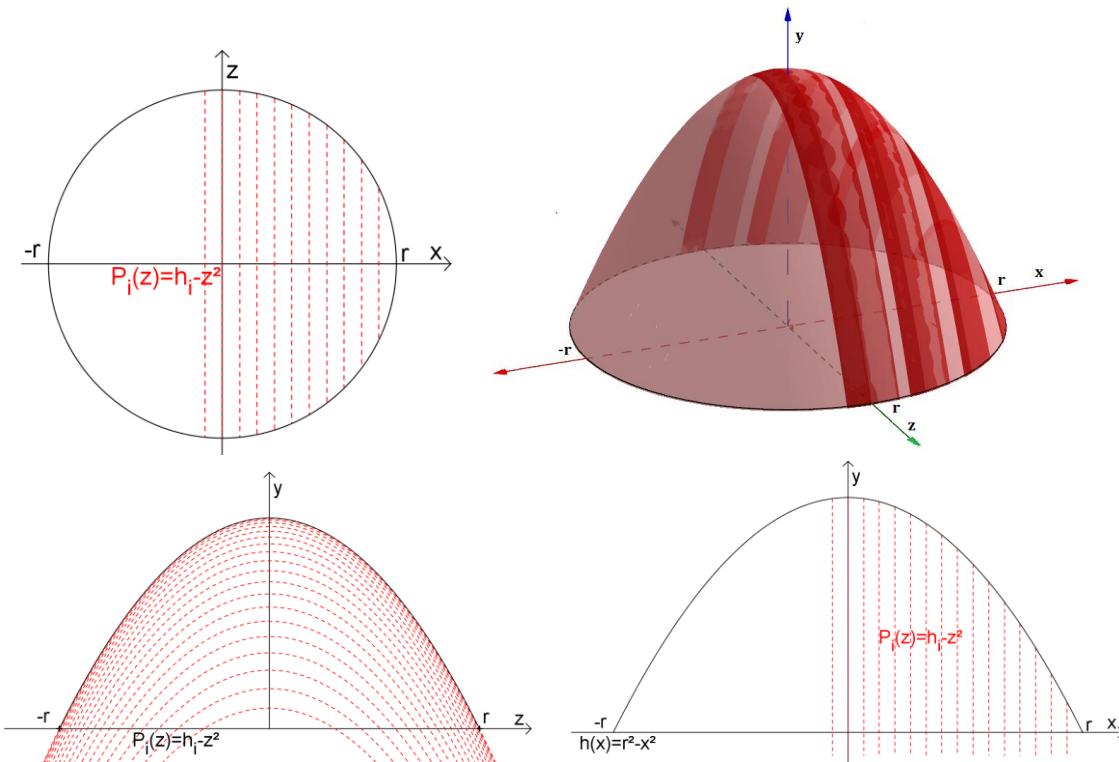
la base

$$b = \frac{1}{2},$$

y el coeficiente

$$c = \frac{1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1}{1^3} = 2$$

3. Las secciones verticales de una cúpula de base circular de radio  $r$ , son parábolas de la forma  $P_i(z) = h_i - z^2$  donde  $h_i$  es la altura de la parábola, que viene determinada por la expresión  $h(x) = r^2 - x^2$ :



a. Sabiendo que la que  $\int \sqrt{r^2 - x^2}^3 = \frac{x}{8}(5r^2 - 2x^2)\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{3r^4}{8} \arcsen\left(\frac{x}{r}\right) + C$  es una integral conocida, calcula el volumen de la cúpula mediante secciones planas, superficies de paráolas  $P_i(z)$  a lo largo del eje x.

Las raíces de  $P_i(z)$  vendrán dadas por la expresión

$$P_i(d_i) = h_i - d_i^2 = 0$$

de donde se puede deducir que

$$h_i = d_i^2 \quad y \quad \pm d_i = \sqrt{h_i}$$

La superficie de cada sección es:

$$\begin{aligned} S_i &= \int_{-d_i}^{d_i} P_i(z) dz = 2 \int_0^{d_i} (h_i - z^2) dz = 2 \left[ h_i z - \frac{z^3}{3} \right]_0^{d_i} = 2 \left( h_i d_i - \frac{d_i^3}{3} \right) = 2 \left( d_i^3 - \frac{d_i^3}{3} \right) \\ &= 2 \left( \frac{2}{3} \right) d_i^3 = \frac{4}{3} d_i^3 = \frac{4}{3} \sqrt{h_i}^3 \end{aligned}$$

La superficie de una sección  $S_i$  en función de  $x$ :

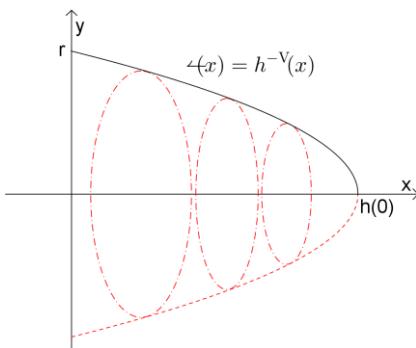
$$S(x) = \frac{4}{3} \sqrt{r^2 - x^2}^3$$

El volumen, entonces será:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r S(x) dx = 2 \int_0^r \frac{4}{3} \sqrt{r^2 - x^2}^3 dx = \frac{8}{3} \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}^3 dx \\ &= \frac{8}{3} \left[ \frac{x}{8} (5r^2 - 2x^2) \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{3r^4}{8} \arcsen\left(\frac{x}{r}\right) \right]_0^r \\ &= \frac{8}{3} \left( \frac{r}{8} (3r^2) \sqrt{0} + \frac{3r^4}{8} \arcsen\left(\frac{r}{r}\right) \right) = \frac{8}{3} \left( 0 + \frac{3r^4}{8} \arcsen(1) \right) = r^4 \arcsen(1) \end{aligned}$$



- b. Abate ahora la cúpula haciendo coincidir el eje  $y$  sobre el  $x$  y calcula su volumen considerándola una figura de revolución:



Comprueba que el volumen resultante es el mismo que en el apartado a.

Invertimos la función  $h(x) = r^2 - x^2$  intercambiando los ejes  $x$  e  $y$ ,  $h(y) = r^2 - y^2 = x$ , y despejando  $y$ :  $y = h^{-1}(x) = f(x) = \sqrt{r^2 - x}$

Ahora calculamos el volumen de revolución que genera  $f(x)$  desde 0 a  $h(0) = r^2$ :

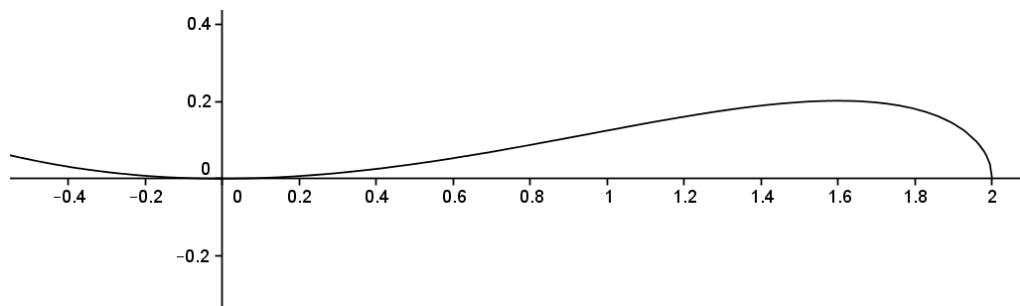
$$V = \pi \int_0^{r^2} f(x)^2 dx = \pi \int_0^{r^2} (r^2 - x)^2 dx = \pi \left[ r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{r^2} = \pi \left( r^4 - \frac{r^6}{3} \right) = \pi \frac{r^4}{3}$$

Coincide con el anterior volumen  $V = r^4 \arcsen(1)$ , ya que  $\arcsen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Es decir, el volumen de una cúpula como la descrita es  $V = \frac{\pi}{3} r^4$



4. Un tanque en el ala de un avión de motor a reacción tiene la forma de un sólido de revolución generado al girar la región acotada por la gráfica  $y = \frac{1}{8}x^2\sqrt{2-x}$  y la recta  $x = 0$  alrededor del eje  $x$ , donde  $x$  e  $y$  se miden en metros. Calcula el volumen del tanque.



Los extremos del intervalo de integración para el cálculo del volumen serán los puntos de corte con el eje  $x$ , es decir, donde  $y$  se hace 0, en  $x = 0$  y  $x = 2$ . El cálculo del volumen pues será:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi y^2 dx = \pi \int_0^2 \frac{x^4}{8^2} (2-x) dx = \pi \int_0^2 \left( \frac{x^4}{32} - \frac{x^5}{64} \right) dx = \\ &= \pi \left[ \frac{x^5}{32 \cdot 5} - \frac{x^6}{64 \cdot 6} \right]_0^2 = \pi \left[ \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right] = \pi \left( \frac{6-5}{30} \right) = \frac{\pi}{30} m^3 = 0,1047 m^3 \end{aligned}$$



5. El cálculo un valor aproximado  $x$  se resuelve mediante la ecuación de segundo grado:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

cuyos coeficientes se han determinado con una precisión de una décima:

$$A = 1 \pm 0,1$$

$$B = -7 \pm 0,1$$

$$C = 12 \pm 0,1$$

Calcula las posibles soluciones para ese valor aproximado  $x$  indicando sus correspondientes cotas de error absoluto en cada caso.

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \begin{cases} x_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \\ x_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \end{cases}$$

$$A = 1 \pm 0,1 \frac{100\%}{|1|} = 1 \pm 10\%$$

$$B = -7 \pm 0,1 \frac{100\%}{|-7|} = -7 \pm \frac{10}{7}\%$$

$$C = 12 \pm 0,1 \frac{100\%}{|12|} = 12 \pm \frac{5}{6}\%$$

$$AC = (1 \cdot 12) \pm \left(10 + \frac{5}{6}\right)\% = 12 \pm \frac{65}{6}\%$$

$$4AC = (4 \cdot 12) \pm \left(0 + \frac{65}{6}\right)\% = 48 \pm \frac{65}{6}\% = 48 \pm \frac{65}{6} \cdot \frac{|48|}{100} = 48 \pm \frac{52}{10}$$

$$B^2 = (-7)^2 \pm \left(2 \cdot \frac{10}{7}\right)\% = 49 \pm \frac{20}{7}\% = 49 \pm \frac{20}{7} \cdot \frac{|49|}{100} = 49 \pm \frac{14}{10}$$

$$B^2 - 4AC = (49 - 48) \pm \left(\frac{14}{10} + \frac{52}{10}\right) = 1 \pm 6,6$$

$$\sqrt{B^2 - 4AC} = \sqrt{1} \pm \left(6,6 \frac{1}{2\sqrt{1}}\right) = 1 \pm 3,3$$

$$-B + \sqrt{B^2 - 4AC} = (7 + 1) \pm (0,1 + 3,3) = 8 \pm 3,4 = 8 \pm 3,4 \frac{100\%}{|8|} = 8 \pm 42,5\%$$

$$-B - \sqrt{B^2 - 4AC} = (7 - 1) \pm (0,1 + 3,3) = 6 \pm 3,4 = 6 \pm 3,4 \frac{100\%}{|6|} = 6 \pm 56,6\%$$

$$2A = (2 \cdot 1) \pm (0 + 10)\% = 2 \pm 10\%$$

$$x_1 = \left(\frac{8}{2}\right) \pm (42,5 + 10)\% = 4 \pm 52,5\% = 4 \pm 52,5 \frac{|4|}{100} = 4 \pm 2,1$$

$$x_2 = \left(\frac{6}{2}\right) \pm (56,6 + 10)\% = 3 \pm 66,6\% = 3 \pm 66,6 \frac{|3|}{100} = 3 \pm 2$$

