Interpolación

Tema 5 (II)

Interpolación

- Concepto y Teorema de la Aproximación
- Interpolación de Lagrange
- Tablas de interpolación
- Diferencias divididas
- Interpolación Hermite

Interpolación de Hermite

En ciertas circunstancias es posible poder determinar no sólo el valor de *f(x)* en los puntos de interpolación, sino también su derivada primera o segunda.

Ejemplo: casos relacionados con la dinámica (Espacio-Velocidad-Aceleración).

Hermite adapta la interpolación de Lagrange para poder tener en cuenta también los valores de *f'(x)* en el cálculo del polinomio.

Polinomio de Interpolación de Hermite

Se llama polinomio de interpolación de Hermite de grado $2n+1$ a:

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) H_{n,i}(x) + \sum_{i=0}^{n} f'(x_i) \hat{H}_{n,i}(x)$$

donde

$$H_{n,i}(x) = \left[1 - 2(x - x_i) L'_{n,i}(x_i)\right] L_{n,i}^2(x)$$

y

$$\hat{H}_{n,i}(x) = (x - x_i) L_{n,i}^2(x)$$

y $L_{n,i}(x)$ es el correspondiente polinomio de Lagrange de grado n para i

Polinomio de Interpolación de Hermite

Observa:

Los polinomios de interpolación de Hermite son polinomios de grado $2n+1$ (impar) para cualquier cantidad de $x_0 \ldots x_n$ ($n+1$ puntos).

Para $n+1$ puntos se opera $n+1$ valores de $f(x)$ y $n+1$ de $f'(x)$.

Los $f'(x)$ multiplican n términos cortos $\hat{H}_{n,i}$, y los $f(x)$ multiplican a los n largos $H_{n,i}$.

Error de Interpolación de Hermite

El error en la interpolación de Hermite viene dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = H_{2n+1}(x) + \frac{f^{(2n+2)}(\varepsilon)}{(2n+2)!}(x-x_0)^2 \cdots (x-x_n)^2$$

donde *ε* cumple las mismas condiciones que en el error de la interpolación de Lagrange, pertenece al intervalo muestreado:

$$\varepsilon \in [mín(x_i, x), máx(x_i, x)]$$

Hermite por diferencias divididas

Si pretendemos usar la interpolación de Hermite mediante tablas, disponemos de una versión de las diferencias divididas.

Recordatorio de la versión original:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-j}, \ldots, x_i]$	$f[x_0, \ldots, x_n]$
x_0	$f(x_0)$	$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$			
x_1	$f(x_1)$	$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	$\ldots$	$\frac{f[x_1,\ldots,x_n]-f[x_0,\ldots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$
x_2	$f(x_2)$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$				
x_n	$f(x_n)$	$\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$	$\frac{f[x_n,x_{n-1}]-f[x_{n-1},x_{n-2}]}{x_n-x_{n-2}}$		

Hermite por diferencias divididas

Si pretendemos usar la interpolación de Hermite mediante tablas, disponemos de una versión de las diferencias divididas.

Recordatorio de la versión original:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-j},\ldots,x_i]$	$f[x_0,\ldots,x_n]$
x_0	$f(x_0)$	$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$	$\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	$\ldots$	$\frac{f[x_1,\ldots,x_n]-f[x_0,\ldots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$
x_1	$f(x_1)$	$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$\vdots$	$\vdots$	
x_2	$f(x_2)$	$\vdots$	$\frac{f[x_n,x_{n-1}]-f[x_{n-1},x_{n-2}]}{x_n-x_{n-2}}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$			
x_n	$f(x_n)$				

Hermite por diferencias divididas

Si pretendemos usar la interpolación de Hermite mediante tablas, disponemos de una versión de las diferencias divididas.

Recordatorio de la versión original:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-j},\ldots,x_i]$	$f[x_0,\ldots,x_n]$
x_0	$f(x_0)$	$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$			
x_1	$f(x_1)$	$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	$\ldots$	$\frac{f[x_1,\ldots,x_n]-f[x_0,\ldots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$
x_2	$f(x_2)$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$	$\frac{f[x_n,x_{n-1}]-f[x_{n-1},x_{n-2}]}{x_n-x_{n-2}}$		
x_n	$f(x_n)$				

Hermite por diferencias divididas

Si pretendemos usar la interpolación de Hermite mediante tablas, disponemos de una versión de las diferencias divididas.

Recordatorio de la versión original:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-j},\ldots,x_i]$	$f[x_0,\ldots,x_n]$
x_0	$f(x_0)$	$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$			
x_1	$f(x_1)$	$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	$\ldots$	
x_2	$f(x_2)$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\frac{f[x_1,\ldots,x_n]-f[x_0,\ldots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$
$\vdots$	$\vdots$	$\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$	$\frac{f[x_n,x_{n-1}]-f[x_{n-1},x_{n-2}]}{x_n-x_{n-2}}$		
x_n	$f(x_n)$				

Hermite por diferencias divididas

Si pretendemos usar la interpolación de Hermite mediante tablas, disponemos de una versión de las diferencias divididas.

Recordatorio de la versión original:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-j}, \ldots, x_i]$	$f[x_0, \ldots, x_n]$
x_0	$f(x_0)$	$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$	$\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	$\ldots$	$\frac{f[x_1,\ldots,x_n]-f[x_0,\ldots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$
x_1	$f(x_1)$	$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$\vdots$	$\vdots$	
x_2	$f(x_2)$	$\vdots$	$\frac{f[x_n,x_{n-1}]-f[x_{n-1},x_{n-2}]}{x_n-x_{n-2}}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$			
x_n	$f(x_n)$				

Hermite por diferencias divididas

Si pretendemos usar la interpolación de Hermite mediante tablas, disponemos de una versión de las diferencias divididas.

Recordatorio de la versión original:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-j}, \ldots, x_i]$	$f[x_0, \ldots, x_n]$
x_0	$f(x_0)$	$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$			
x_1	$f(x_1)$	$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	$\ldots$	$\frac{f[x_1,\ldots,x_n]-f[x_0,\ldots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$
x_2	$f(x_2)$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$	$\frac{f[x_n,x_{n-1}]-f[x_{n-1},x_{n-2}]}{x_n-x_{n-2}}$		
x_n	$f(x_n)$				

Hermite por diferencias divididas

El polinomio de interpolación de Hermite se obtiene con la siguiente expresión:

$$H_{2n+1}(x) = f[z_0] + \sum_{i=1}^{2n+1} f[z_0, z_1, \ldots, z_i](x - z_0)\ldots(x - z_{i-1})$$

con $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$ y $f[z_{2i}, z_{2i+1}] = f'(x_i)$ para $i = 0,1,\ldots,n$

y el resto de expresiones coinciden con las de las diferencias divididas originales:

$$f[z_{2i}] = f[z_{2i+1}] = f(x_i) \qquad f[z_{2i+1}, z_{2(i+1)}] = \frac{f[z_{2(i+1)}] - f[z_{2i+1}]}{z_{2(i+1)} - z_{2i+1}}$$

$$f[z_i, \ldots, z_{i+k}] = \frac{f[z_{i+1}, \ldots, z_{i+k}] - f[z_i, \ldots, z_{i+k-1}]}{z_{i+k} - z_i}$$

Hermite por diferencias divididas

$$H_{2n+1}(x) = f[z_0] + \sum_{i=1}^{2n+1} f[z_0, z_1, \ldots, z_i](x - z_0)\ldots(x - z_{i-1})$$

con $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$ y $f[z_{2i}, z_{2i+1}] = f'(x_i)$ para $i = 0,1,\ldots,n$

y el resto de expresiones coinciden con las de las diferencias divididas originales:

$$f[z_{2i}] = f[z_{2i+1}] = f(x_i) \qquad i = 0,1,\ldots,n$$

$$f[z_{2i+1}, z_{2(i+1)}] = \frac{f[z_{2(i+1)}] - f[z_{2i+1}]}{z_{2(i+1)} - z_{2i+1}} \qquad i = 0,1,\ldots,n-1$$

$$f[z_i, \ldots, z_{i+k}] = \frac{f[z_{i+1}, \ldots, z_{i+k}] - f[z_i, \ldots, z_{i+k-1}]}{z_{i+k} - z_i} \qquad i = 0,1,\ldots,2n-1 \quad k = 2,3,\ldots,2n+1$$

Hermite por diferencias divididas

Versión para Hermite:

z_i	$f[z_i]$	$f[z_{i-1}, z_i]$	$f[z_{i-2}, z_{i-1}, z_i]$	$f[z_{i-j}, \ldots, z_i]$
x_0	$f(x_0)$			
		$f'(x_0)$		
x_0	$f(x_0)$		$\frac{f[z_1,z_2]-f[z_0,z_1]}{z_2-z_0}$	
		$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$	$\vdots$	
x_1	$f(x_1)$		$\vdots$	$\vdots$
		$f'(x_1)$	$\vdots$	$f[z_0, \ldots, z_n]$
x_1	$f(x_1)$		$\vdots$	$\frac{f[z_1,\ldots,z_{2n}]-f[z_0,\ldots,z_{2n-1}]}{z_{2n}-z_0}$
		$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$\vdots$	$\vdots$
x_2	$f(x_2)$		$\vdots$	
		$f'(x_2)$	$\vdots$	
x_2	$f(x_2)$		$\vdots$	
		$\vdots$	$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
		$\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$		
x_n	$f(x_n)$		$\frac{f[z_{2n},z_{2n-1}]-f[z_{2n-1},z_{2n-2}]}{z_{2n}-z_{2n-2}}$	
		$f'(x_n)$		
x_n	$f(x_n)$			

Hermite por diferencias divididas

Observa:

Las dos primeras columnas (z_i y $f[z_i]$) tienen duplicadas sus celdas (dos x_i y dos $f(x_i)$).

La tercera columna ($f[z_{i-1},z_i]$) intercala las $f'(x_i)$ con los cálculos de la versión original.

Las $f'(x_i)$ sustituyen a las indeterminaciones

$$\frac{f(x_i)-f(x_i)}{x_i-x_i}$$

que producirían los cálculos originales.

A partir de la cuarta columna, la tabla se calcula como la original de diferencias divididas.

Hermite por diferencias divididas

Versión para Hermite:

z_i	$f[z_i]$	$f[z_{i-1}, z_i]$	$f[z_{i-2}, z_{i-1}, z_i]$	$f[z_{i-j}, \ldots, z_i]$	$f[z_0, \ldots, z_n]$
x_0	$f(x_0)$				
		$f'(x_0)$			
x_0	$f(x_0)$		$\frac{f[z_1,z_2]-f[z_0,z_1]}{z_2-z_0}$		
		$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$	$\vdots$		
x_1	$f(x_1)$		$\vdots$	$\vdots$	
		$f'(x_1)$	$\vdots$		$\frac{f[z_1,\ldots,z_{2n}]-f[z_0,\ldots,z_{2n-1}]}{z_{2n}-z_0}$
x_1	$f(x_1)$		$\vdots$	$\vdots$	
		$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$\vdots$		
x_2	$f(x_2)$		$\vdots$		
		$f'(x_2)$	$\vdots$		
x_2	$f(x_2)$		$\vdots$		
		$\vdots$	$\vdots$		
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		
		$\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$			
x_n	$f(x_n)$		$\frac{f[z_{2n},z_{2n-1}]-f[z_{2n-1},z_{2n-2}]}{z_{2n}-z_{2n-2}}$		
		$f'(x_n)$			
x_n	$f(x_n)$				

Hermite por diferencias divididas

Versión para Hermite:

z_i	$f[z_i]$	$f[z_{i-1}, z_i]$	$f[z_{i-2}, z_{i-1}, z_i]$	$f[z_{i-j}, \ldots, z_i]$
x_0	$f(x_0)$			
		$f'(x_0)$		
x_0	$f(x_0)$		$\frac{f[z_1,z_2]-f[z_0,z_1]}{z_2-z_0}$	
		$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$	$\vdots$	
x_1	$f(x_1)$		$\vdots$	
		$f'(x_1)$	$\vdots$	$\vdots$
x_1	$f(x_1)$		$\vdots$	$f[z_0, \ldots, z_n] = \frac{f[z_1,\ldots,z_{2n}]-f[z_0,\ldots,z_{2n-1}]}{z_{2n}-z_0}$
		$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$\vdots$	$\vdots$
x_2	$f(x_2)$		$\vdots$	
		$f'(x_2)$	$\vdots$	
x_2	$f(x_2)$		$\vdots$	
		$\vdots$	$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$			
		$\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$		
x_n	$f(x_n)$		$\frac{f[z_{2n},z_{2n-1}]-f[z_{2n-1},z_{2n-2}]}{z_{2n}-z_{2n-2}}$	
		$f'(x_n)$		
x_n	$f(x_n)$			

Hermite por diferencias divididas

Versión para Hermite:

z_i	$f[z_i]$	$f[z_{i-1}, z_i]$	$f[z_{i-2}, z_{i-1}, z_i]$
x_0	$f(x_0)$		
		$f'(x_0)$	
x_0	$f(x_0)$		$\frac{f[z_1,z_2]-f[z_0,z_1]}{z_2-z_0}$
		$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$	$\vdots$
x_1	$f(x_1)$		
		$f'(x_1)$	$\vdots$
x_1	$f(x_1)$		
		$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$\vdots$
x_2	$f(x_2)$		
		$f'(x_2)$	$\vdots$
x_2	$f(x_2)$		
		$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$		
		$\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$	
x_n	$f(x_n)$		$\frac{f[z_{2n},z_{2n-1}]-f[z_{2n-1},z_{2n-2}]}{z_{2n}-z_{2n-2}}$
		$f'(x_n)$	
x_n	$f(x_n)$		

$f[z_{i-j}, \ldots, z_i]$

$\vdots$

$f[z_0, \ldots, z_n]$

$\frac{f[z_1,\ldots,z_{2n}]-f[z_0,\ldots,z_{2n-1}]}{z_{2n}-z_0}$

Hermite por diferencias divididas

Versión para Hermite:

z_i	$f[z_i]$	$f[z_{i-1},z_i]$	$f[z_{i-2},z_{i-1},z_i]$	$f[z_{i-j},\dots,z_i]$	$f[z_0,\dots,z_n]$
x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$			
x_0	$f(x_0)$	$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$	$\frac{f[z_1,z_2]-f[z_0,z_1]}{z_2-z_0}$		
x_1	$f(x_1)$	$f'(x_1)$	$\vdots$	$\vdots$	
x_1	$f(x_1)$	$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$\vdots$	$\vdots$	$\frac{f[z_1,\dots,z_{2n}]-f[z_0,\dots,z_{2n-1}]}{z_{2n}-z_0}$
x_2	$f(x_2)$	$f'(x_2)$	$\vdots$		
x_2	$f(x_2)$	$\vdots$	$\vdots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$	$\vdots$		
x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f[z_{2n},z_{2n-1}]-f[z_{2n-1},z_{2n-2}]}{z_{2n}-z_{2n-2}}$		
x_n	$f(x_n)$				

Hermite por diferencias divididas

Versión para Hermite:

z_i	$f[z_i]$	$f[z_{i-1},z_i]$	$f[z_{i-2},z_{i-1},z_i]$
x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$\frac{f[z_1,z_2]-f[z_0,z_1]}{z_2-z_0}$
x_0	$f(x_0)$	$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$	$\vdots$
x_1	$f(x_1)$	$f'(x_1)$	$\vdots$
x_1	$f(x_1)$	$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$\vdots$
x_2	$f(x_2)$	$f'(x_2)$	$\vdots$
x_2	$f(x_2)$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$	$\frac{f[z_{2n},z_{2n-1}]-f[z_{2n-1},z_{2n-2}]}{z_{2n}-z_{2n-2}}$
x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	
x_n	$f(x_n)$		

$f[z_{i-j},\ldots,z_i]$

$$f[z_0,\ldots,z_n] = \frac{f[z_1,\ldots,z_{2n}]-f[z_0,\ldots,z_{2n-1}]}{z_{2n}-z_0}$$

Ejemplo: Interpolación de Hermite

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ y $f'(x)=f(x)((x-2)/x-\ln(x/2))$

z_i	$f[z_i]$	$f[z_{i-1},z_i]$	$f[z_{i-2},z_{i-1},z_i]$	$f[z_{i-3},z_{i-2},z_{i-1},z_i]$	
$x_0=1$	$f(x_0)$				
		$f'(x_0)$			
$x_0=1$	$f(x_0)$		$\frac{f[z_1,z_2]-f[z_0,z_1]}{z_2-z_0}$		
		$\frac{f[z_2]-f[z_1]}{z_2-z_1}$		$\frac{f[z_1,z_2,z_3]-f[z_0,z_1,z_2]}{z_3-z_0}$	
$x_1=4$	$f(x_1)$		$\frac{f[z_2,z_3]-f[z_1,z_2]}{z_3-z_1}$		$\vdots$
		$f'(x_1)$		$\frac{f[z_2,z_3,z_4]-f[z_1,z_2,z_3]}{z_4-z_1}$	
$x_1=4$	$f(x_1)$		$\frac{f[z_3,z_4]-f[z_2,z_3]}{z_4-z_2}$		$\vdots$
		$\frac{f[z_4]-f[z_3]}{z_4-z_3}$		$\frac{f[z_3,z_4,z_5]-f[z_2,z_3,z_4]}{z_5-z_2}$	
$x_2=2$	$f(x_2)$		$\frac{f[z_4,z_5]-f[z_3,z_4]}{z_5-z_3}$		
		$f'(x_2)$			
$x_2=2$	$f(x_2)$				

Ejemplo: Interpolación de Hermite

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ y $f'(x)=f(x)((x-2)/x+\ln(x/2))$

z_i	$f[z_i]$	$f[z_{i-1},z_i]$	$f[z_{i-2},z_{i-1},z_i]$	$f[z_{i-3},z_{i-2},z_{i-1},z_i]$	
1	$f(x_0)=2$				
		$f'(x_0)$			
1	$f(x_0)=2$		$\frac{f[z_1,z_2]-f[z_0,z_1]}{z_2-z_0}$		
		$\frac{f[z_2]-f[z_1]}{z_2-z_1}$		$\frac{f[z_1,z_2,z_3]-f[z_0,z_1,z_2]}{z_3-z_0}$	
4	$f(x_1)=4$		$\frac{f[z_2,z_3]-f[z_1,z_2]}{z_3-z_1}$		$\vdots$
		$f'(x_1)$		$\frac{f[z_2,z_3,z_4]-f[z_1,z_2,z_3]}{z_4-z_1}$	
4	$f(x_1)=4$		$\frac{f[z_3,z_4]-f[z_2,z_3]}{z_4-z_2}$		$\vdots$
		$\frac{f[z_4]-f[z_3]}{z_4-z_3}$		$\frac{f[z_3,z_4,z_5]-f[z_2,z_3,z_4]}{z_5-z_2}$	
2	$f(x_2)=1$		$\frac{f[z_4,z_5]-f[z_3,z_4]}{z_5-z_3}$		
		$f'(x_2)$			
2	$f(x_2)=1$				

Ejemplo: Interpolación de Hermite

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ y $f'(x)=f(x)((x-2)/x+\ln(x/2))$

z_i	$f[z_i]$	$f[z_{i-1},z_i]$	$f[z_{i-2},z_{i-1},z_i]$	$f[z_{i-3},z_{i-2},z_{i-1},z_i]$	
1	2				
		$f'(x_0)=-3{,}39$			
1	2		$\frac{f[z_1,z_2]-f[z_0,z_1]}{z_2-z_0}$		
		$\frac{f[z_2]-f[z_1]}{z_2-z_1}$		$\frac{f[z_1,z_2,z_3]-f[z_0,z_1,z_2]}{z_3-z_0}$	
4	4		$\frac{f[z_2,z_3]-f[z_1,z_2]}{z_3-z_1}$		$\vdots$
		$f'(x_1)=4{,}77$		$\frac{f[z_2,z_3,z_4]-f[z_1,z_2,z_3]}{z_4-z_1}$	
4	4		$\frac{f[z_3,z_4]-f[z_2,z_3]}{z_4-z_2}$		$\vdots$
		$\frac{f[z_4]-f[z_3]}{z_4-z_3}$		$\frac{f[z_3,z_4,z_5]-f[z_2,z_3,z_4]}{z_5-z_2}$	
2	1		$\frac{f[z_4,z_5]-f[z_3,z_4]}{z_5-z_3}$		
		$f'(x_2)=0$			
2	1				

Ejemplo: Interpolación de Hermite

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ y $f'(x)=f(x)((x-2)/x+\ln(x/2))$

z_i	$f[z_i]$			$f[z_{i-3},z_{i-2},z_{i-1},z_i]$	$f[z_{i-4},z_{i-3},z_{i-2},z_{i-1},z_i]$	
1	2					
		$-3{,}39$				
1	2		$\frac{f[z_1,z_2]-f[z_0,z_1]}{z_2-z_0}$			
		$2/3$		$\frac{f[z_1,z_2,z_3]-f[z_0,z_1,z_2]}{z_3-z_0}$		
4	4		$\frac{f[z_2,z_3]-f[z_1,z_2]}{z_3-z_1}$		$\frac{f[z_1,z_2,z_3,z_4]-f[z_0,z_1,z_2,z_3]}{z_4-z_0}$	
		$4{,}77$		$\frac{f[z_2,z_3,z_4]-f[z_1,z_2,z_3]}{z_4-z_1}$		$\vdots$
4	4		$\frac{f[z_3,z_4]-f[z_2,z_3]}{z_4-z_2}$		$\frac{f[z_2,z_3,z_4,z_5]-f[z_1,z_2,z_3,z_4]}{z_5-z_1}$	
		$3/2$		$\frac{f[z_3,z_4,z_5]-f[z_2,z_3,z_4]}{z_5-z_2}$		
2	1		$\frac{f[z_4,z_5]-f[z_3,z_4]}{z_5-z_3}$			
		0				
2	1					

Ejemplo: Interpolación de Hermite

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ y $f'(x)=f(x)((x-2)/x+\ln(x/2))$

z_i	$f[z_i]$			$f[z_{i-3},z_{i-2},z_{i-1},z_i]$	$f[z_{i-4},z_{i-3},z_{i-2},z_{i-1},z_i]$	
1	2					
		$-3{,}39$				
1	2		1,35			
		$2/3$		$\frac{f[z_1,z_2,z_3]-f[z_0,z_1,z_2]}{z_3-z_0}$		
4	4		1,37		$\frac{f[z_1,z_2,z_3,z_4]-f[z_0,z_1,z_2,z_3]}{z_4-z_0}$	
		4,77		$\frac{f[z_2,z_3,z_4]-f[z_1,z_2,z_3]}{z_4-z_1}$		$\vdots$
4	4		$18/11$		$\frac{f[z_2,z_3,z_4,z_5]-f[z_1,z_2,z_3,z_4]}{z_5-z_1}$	
		$3/2$		$\frac{f[z_3,z_4,z_5]-f[z_2,z_3,z_4]}{z_5-z_2}$		
2	1		$3/4$			
		0				
2	1					

Ejemplo: Interpolación de Hermite

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ y $f'(x)=f(x)((x-2)/x+\ln(x/2))$

z_i	$f[z_i]$				$f[z_{i-4},z_{i-3},z_{i-2},z_{i-1},z_i]$	
1	2					
		$-3{,}39$				
1	2		1,35			
		$2/3$		0,006		
4	4		1,37		$\frac{f[z_1,z_2,z_3,z_4]-f[z_0,z_1,z_2,z_3]}{z_4-z_0}$	
		4,77		0,268		$\frac{f[z_1,\ldots,z_5]-f[z_0,\ldots,z_4]}{z_5-z_0}$
4	4		$18/11$		$\frac{f[z_2,z_3,z_4,z_5]-f[z_1,z_2,z_3,z_4]}{z_5-z_1}$	
		$3/2$		0,443		
2	1		$3/4$			
		0				
2	1					

Ejemplo: Interpolación de Hermite

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ y $f'(x)=f(x)((x-2)/x+\ln(x/2))$

z_i	$f[z_i]$					$f[z_{i-4},z_{i-3},z_{i-2},z_{i-1},z_i]$
1	2					
		$-3{,}39$				
1	2		$1{,}35$			
		$2/3$		$0{,}006$		
4	4		$1{,}37$		$0{,}262$	
		$4{,}77$		$0{,}268$		$\dfrac{f[z_1,\ldots,z_5]-f[z_0,\ldots,z_4]}{z_5-z_0}$
4	4		$18/11$		$0{,}175$	
		$3/2$		$0{,}443$		
2	1		$3/4$			
		0				
2	1					

Ejemplo: Interpolación de Hermite

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ y $f'(x)=f(x)((x-2)/x+\ln(x/2))$

z_i	$f[z_i]$					
1	2					
		$-3{,}39$				
1	2		1,35			
		$2/3$		0,006		
4	4		1,37		0,262	
		4,77		0,268		$-0{,}086$
4	4		$18/11$		0,175	
		$3/2$		0,443		
2	1		$3/4$			
		0				
2	1					

Ejemplo: Interpolación de Hermite

Para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$ y $f'(x)=f(x)((x-2)/x+\ln(x/2))$

z_i	$f[z_i]$					
1	2	$-3{,}39$	$1{,}35$	$0{,}006$	$0{,}262$	$-0{,}086$
1	2	$2/3$	$1{,}37$	$0{,}268$	$0{,}175$	
4	4	$4{,}77$	$18/11$	$0{,}443$		
4	4	$3/2$	$3/4$			
2	1	0				
2	1					

$$f(3)=3/2=1{,}5$$

$$H_3(3)=0{,}608$$

$$\Delta H_3(3)=0{,}892$$

$$H_3(x)=2-3{,}39(x-1)+1{,}35(x-1)^2+0{,}006(x-1)^2(x-4)$$

Ejemplo: Interpolación de Hermite

Para f(x)=(x/2)^(x-2) y f'(x)=f(x)((x-2)/x+ln(x/2))

z_i	$f[z_i]$					
1	2					
		$-3,39$				
1	2		1,35			
		2/3		0,006		
4	4		1,37		0,262	
		4,77		0,268		$-0,086$
4	4		18/11		0,175	
		3/2		0,443		
2	1		3/4			
		0				
2	1					

$$f(3) = 3/2 = 1,5$$

$$H_3(3) = 0,608$$

$$\Delta H_3(3) = 0,892$$

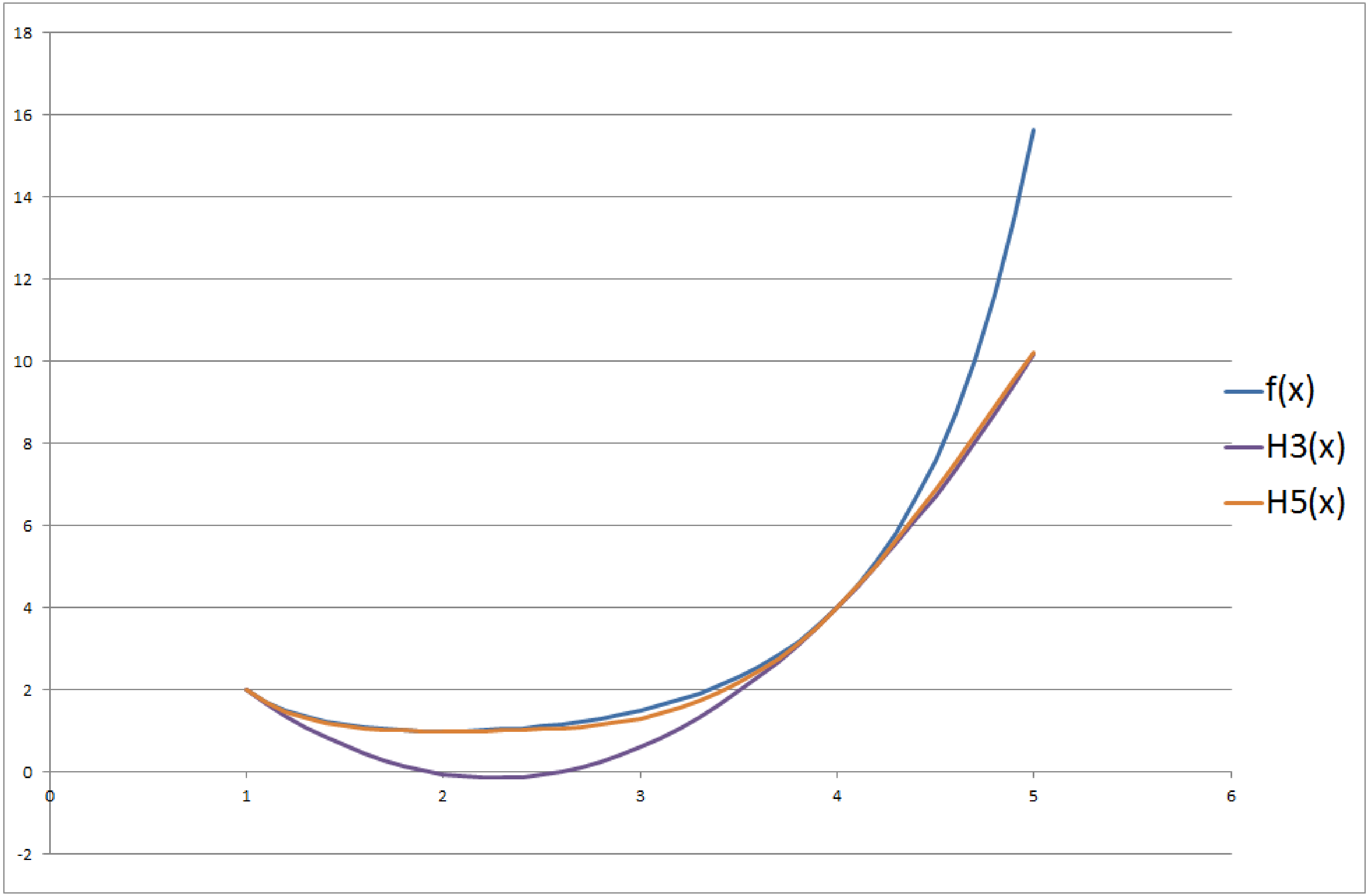
$$H_5(3) = 1,31$$

$$\Delta H_5(3) = 0,19$$

$$H_3(x) = 2 - 3,39(x-1) + 1,35(x-1)^2 + 0,006(x-1)^2(x-4)$$

$$H_5(x) = H_3(x) + 0,262(x-1)^2(x-4)^2 - 0,086(x-1)^2(x-4)^2(x-2)$$

Ejemplo: Interpolación de Hermite



Ejemplo: Interpolación de Hermite

De la tabla de diferencias se pueden sacar polinomios de grado par que no coinciden exactamente con los definidos por Hermite pero también interpolan.

z_i	$f[z_i]$					
1	2					
		$-3{,}39$				
1	2		$1{,}35$			
		$2/3$		$0{,}006$		
4	4		$1{,}37$		$0{,}262$	
		$4{,}77$		$0{,}268$		$-0{,}086$
4	4		$18/11$		$0{,}175$	
		$3/2$		$0{,}443$		
2	1		$3/4$			
		0				
2	1					

$$f(3) = 3/2 = 1{,}5$$

$$H_4(3) = 1{,}655$$

$$H_4(x) = H_3(x) + 0{,}262(x-1)^2(x-4)^2$$

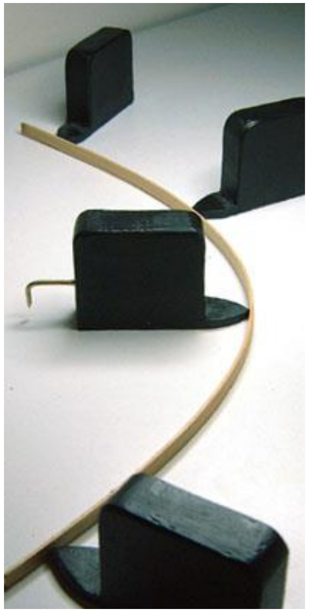
$$\Delta H_4(3) = 0{,}155$$

Interpolación

- Concepto y Teorema de la Aproximación
- Interpolación de Lagrange
- Tablas de interpolación
- Diferencias divididas
- Interpolación Hermite
- Splines

Splines

También conocida como interpolación por partes, esta técnica consiste en interpolar por intervalos, evitando así las espurias oscilaciones en los extremos de la curva interpolada al aumentar el grado.

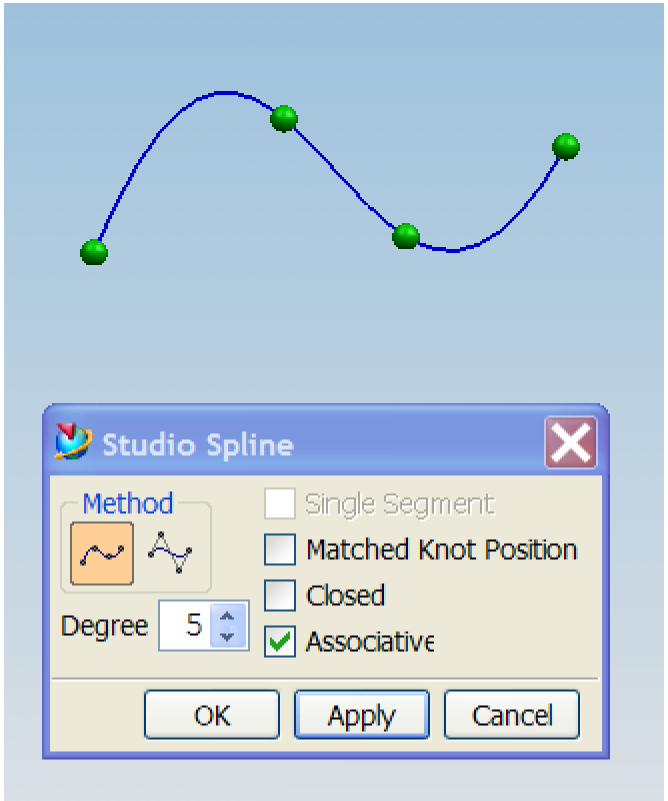


La técnica coge su nombre de otra usada, sobre todo, en construcción naval, que emplea un listón o tabla flexible para modelar y establecer curvas mediante topes que harían de puntos de interpolación.

Splines

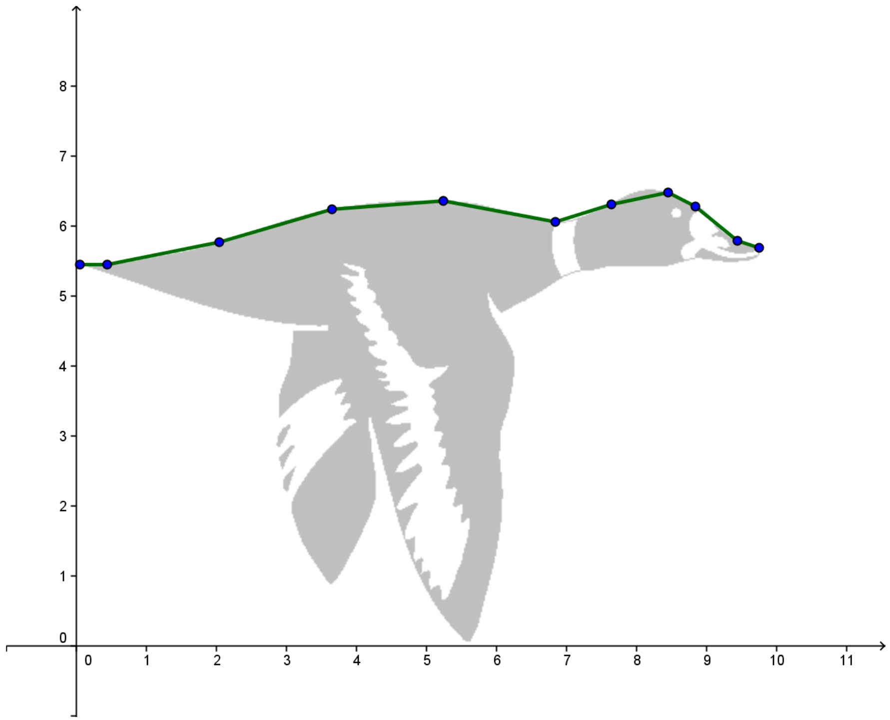
A su vez ha dado nombre a aquellas curvas que, sobre todo en programas de diseño, se modelan mediante puntos de control.

Son, pues, un conjunto de curvas polinómicas enlazadas en intervalos consecutivos definidos por una serie de puntos de interpolación.



Splines

La interpolación mediante splines más sencilla sería la del spline lineal que aproximaría la curva entre cada dos puntos mediante una recta.

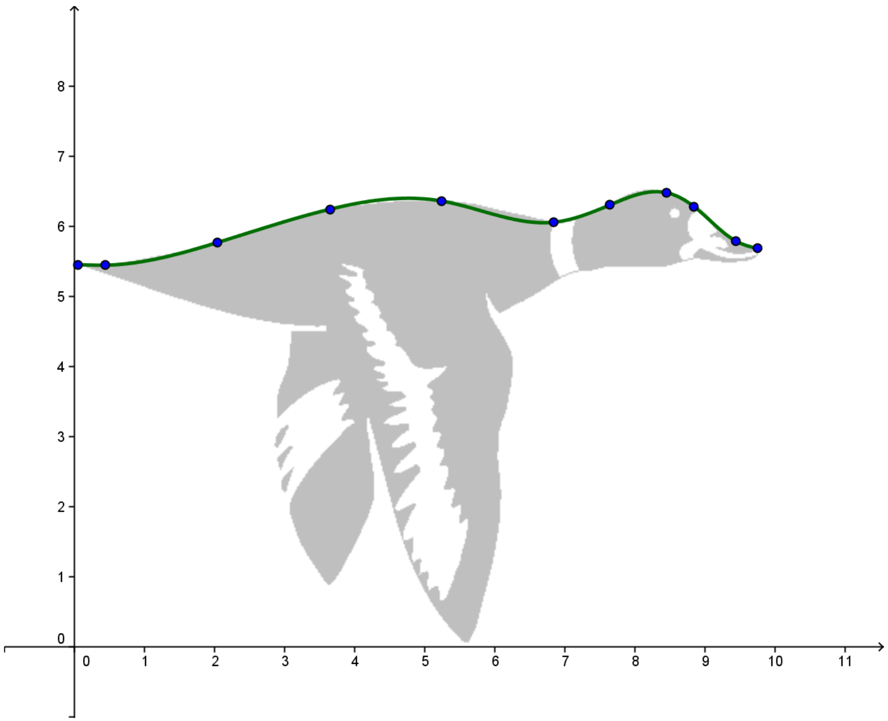


Splines

La interpolación cuadrática de splines eliminaría la sensación de recta quebrada, al exigir continuidad a la primera derivada, es decir, se exige que la curva de un intervalo termina con la misma pendiente (derivada) que con la que comienza la del siguiente intervalo.

Splines

La curva resulta más suave al exigir además la misma condición para la segunda derivada. Se trata entonces del spline cúbico, conocido también como del pato.



Spline cúbico

Dados una $x_0<x_1<\ldots<x_n$, se dice que $S(x)$ es un spline cúbico interpolador de $f(x)$ si cumple:

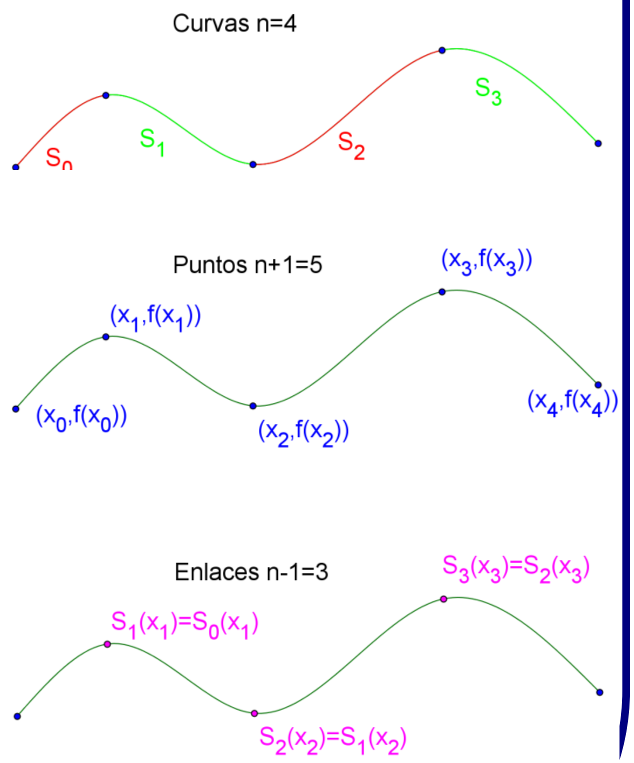
a) $$S(x)=\begin{cases} \text{si} \quad x\in[x_0,x_1) & S_0(x) \\ \text{si} \quad x\in[x_1,x_2) & S_1(x) \\ \vdots & \\ \text{si} \quad x\in[x_{n-1},x_n) & S_{n-1}(x) \end{cases}$$

b) $$S(x_i)=f(x_i) \quad i=0,1,\ldots,n$$

c) $$S_{i+1}(x_{i+1})=S_i(x_{i+1}) \quad i=0,1,\ldots,n-2$$

d) $$S'_{i+1}(x_{i+1})=S'_i(x_{i+1}) \quad i=0,1,\ldots,n-2$$

e) $$S''_{i+1}(x_{i+1})=S''_i(x_{i+1}) \quad i=0,1,\ldots,n-2$$



Spline cúbico

Planteamos la forma de los $S_i(x)$:

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3$$
$$S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3$$
$$\vdots$$
$$S_{n-1}(x) = a_{n-1} + b_{n-1}(x - x_{n-1}) + c_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + d_{n-1}(x - x_{n-1})^3$$

Observa que las a_i, b_i, c_i y d_i son incógnitas a resolver (*4n*), pero como:

$$S_i(x_i) = f(x_i) = a_i \quad i = 0,1,\ldots,n-1$$

las $a_i=f(x_i)$ son incógnitas ya resueltas.

Quedan *3n* incógnitas por resolver.

Spline cúbico

Para que se cumpla $S_{i+1}(x_{i+1})=S_i(x_{i+1})$:

$$a_{i+1} = S_{i+1}(x_{i+1}) =$$
$$= S_i(x_{i+1}) = a_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 + d_i(x_{i+1} - x_i)^3$$
$$i = 0,1,\cdots,n-1$$

Haremos $h_i = x_{i+1} - x_i \quad i = 0,1,\ldots,n-1$

para simplificar:

$$a_{i+1} = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 \quad i = 0,1,\ldots,n-1$$

Son n ecuaciones ya que conocemos $a_n=f(x_n)$

Spline cúbico

Observemos la primera derivada:

$$S'_i(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2$$

$$S'_i(x_i) = b_i$$

$$i = 0,1,\cdots,n-1$$

Con $S'_{i+1}(x_{i+1})=S'_i(x_{i+1})$:

$$S'_{i+1}(x_{i+1}) = b_{i+1} \qquad S'_i(x_{i+1}) = b_i + 2c_i(x_{i+1} - x_i) + 3d_i(x_{i+1} - x_i)^2$$

$$b_{i+1} = b_i + 2c_ih_i + 3d_ih_i^2 \qquad i = 0,1,\ldots,n-2$$

Y obtenemos *n-1* ecuaciones más.

Spline cúbico

Observemos la segunda derivada:

$$S''_i(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_i)$$
$$S''_i(x_i) = 2c_i$$
$$i = 0,1,\cdots,n-1$$

Con $S''_{i+1}(x_{i+1}) = S''_i(x_{i+1})$:

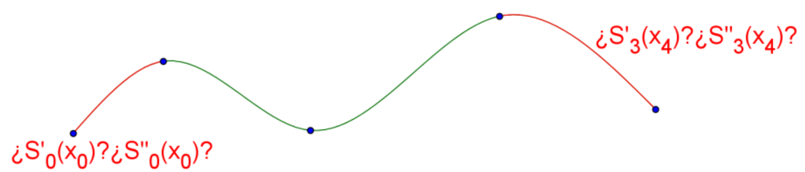
$$S''_{i+1}(x_{i+1}) = 2c_{i+1} \quad S''_i(x_{i+1}) = 2c_i + 6d_i(x_{i+1} - x_i)$$

$$c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i \quad i = 0,1,\ldots,n-2$$

Y volvemos a obtener *n-1* ecuaciones más.

Spline cúbico

Nos faltan dos ecuaciones, ya que teníamos *3n* incógnitas. Estas ecuaciones se añaden de forma arbitraria y dan lugar a matizar distintos tipos de splines cúbicos según la forma que tomen las curvas de sus extremos.



Ejemplos:

I. Spline cúbico de extremo natural:

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0$$

II. Spline cúbico de extremo cortado:

$$S'(x_0) = f'(x_0) \quad S'(x_n) = f'(x_n)$$

Spline cúbico

Consideramos spline con extremo natural:

Si $S''(x_0)=0$: $S''(x_0)=2c_0=0 \quad c_0=0$

Si $S''(x_n)=0$: $S''(x_n)=2c_n=0 \quad c_n=c_{n-1}+3d_{n-1}h_{n-1}=0$

Sustituimos hasta aislar las c_i (con $i=1,\ldots,n-1$) y nos quedan las siguientes expresiones:

$$h_{i-1}c_{i-1}+2(h_{i-1}+h_i)c_i+h_ic_{i+1}=\frac{3}{h_i}(a_{i+1}-a_i)-\frac{3}{h_{i-1}}(a_i-a_{i-1})$$

Spline cúbico

Ejemplo para *n*=3:

$$a_0 = f(x_0)$$
$$a_1 = f(x_1)$$
$$a_2 = f(x_2)$$
$$a_3 = f(x_3)$$

$$a_1 = a_0 + b_0 h_0 + c_0 h_0^2 + d_0 h_0^3$$
$$a_2 = a_1 + b_1 h_1 + c_1 h_1^2 + d_1 h_1^3$$
$$a_3 = a_2 + b_2 h_2 + c_2 h_2^2 + d_2 h_2^3$$

$$a_{i+1} = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3$$

Spline cúbico

Ejemplo para *n*=3:

$$a_0 = f(x_0)$$
$$a_1 = f(x_1)$$
$$a_2 = f(x_2)$$
$$a_3 = f(x_3)$$

$$a_1 = a_0 + b_0 h_0 + c_0 h_0^2 + d_0 h_0^3$$
$$a_2 = a_1 + b_1 h_1 + c_1 h_1^2 + d_1 h_1^3$$
$$a_3 = a_2 + b_2 h_2 + c_2 h_2^2 + d_2 h_2^3$$

$$a_{i+1} = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3$$

$$b_1 = b_0 + 2c_0 h_0 + 3d_0 h_0^2$$
$$b_2 = b_1 + 2c_1 h_1 + 3d_1 h_1^2$$

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2$$

Spline cúbico

Ejemplo para *n*=*3*:

$$a_0 = f(x_0)$$
$$a_1 = f(x_1)$$
$$a_2 = f(x_2)$$
$$a_3 = f(x_3)$$

$$a_1 = a_0 + b_0 h_0 + c_0 h_0^2 + d_0 h_0^3$$
$$a_2 = a_1 + b_1 h_1 + c_1 h_1^2 + d_1 h_1^3$$
$$a_3 = a_2 + b_2 h_2 + c_2 h_2^2 + d_2 h_2^3$$

$$a_{i+1} = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3$$

$$b_1 = b_0 + 2c_0 h_0 + 3d_0 h_0^2$$
$$b_2 = b_1 + 2c_1 h_1 + 3d_1 h_1^2$$

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2$$

$$S''(x_0) = 2c_0 = 0$$
$$S''(x_3) = 2c_3 = 0$$
$$c_3 = c_2 + 3d_2 h_2 = 0$$

$$c_1 = c_0 + 3d_0 h_0$$
$$c_2 = c_1 + 3d_1 h_1$$

$$c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i$$

Si despejamos las d_i en las últimas tres expresiones y las sustituimos en las demás…

Spline cúbico

Ejemplo para *n=3*:

$$a_0 = f(x_0)$$
$$a_1 = f(x_1)$$
$$a_2 = f(x_2)$$
$$a_3 = f(x_3)$$

$$a_1 = a_0 + b_0 h_0 + c_0 h_0^2 + d_0 h_0^3$$
$$a_2 = a_1 + b_1 h_1 + c_1 h_1^2 + d_1 h_1^3$$
$$a_3 = a_2 + b_2 h_2 + c_2 h_2^2 + d_2 h_2^3$$

$$b_1 = b_0 + 2c_0 h_0 + 3d_0 h_0^2$$
$$b_2 = b_1 + 2c_1 h_1 + 3d_1 h_1^2$$

$$c_0 = 0$$
$$c_3 = 0$$

$$d_0 = \frac{c_1 - c_0}{3h_0}$$
$$d_1 = \frac{c_2 - c_1}{3h_1}$$
$$d_2 = \frac{c_3 - c_2}{3h_2}$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}$$

Si despejamos las d_i en las últimas tres expresiones y las sustituimos en las demás…

Spline cúbico

Ejemplo para *n=3*:

$$a_0 = f(x_0) \qquad a_1 = a_0 + b_0 h_0 + c_0 h_0^2 + \frac{c_1 - c_0}{3} h_0^2$$

$$a_1 = f(x_1)$$

$$a_2 = f(x_2) \qquad a_2 = a_1 + b_1 h_1 + c_1 h_1^2 + \frac{c_2 - c_1}{3} h_1^2$$

$$a_3 = f(x_3) \qquad a_3 = a_2 + b_2 h_2 + c_2 h_2^2 + \frac{c_3 - c_2}{3} h_2^2$$

$$b_1 = b_0 + 2c_0 h_0 + (c_1 - c_0) h_0$$

$$b_2 = b_1 + 2c_1 h_1 + (c_2 - c_1) h_1$$

$$c_0 = 0 \qquad d_0 = \frac{c_1 - c_0}{3h_0}$$

$$c_3 = 0 \qquad d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}$$

$$d_2 = \frac{c_3 - c_2}{3h_2} \qquad d_1 = \frac{c_2 - c_1}{3h_1}$$

Si despejamos las b_i de las tres primeras expresiones y las sustituimos en las dos del medio…

Spline cúbico

Ejemplo para *n=3*:

$$a_0 = f(x_0) \qquad a_1 = a_0 + b_0 h_0 + c_0 h_0^2 + \frac{c_1 - c_0}{3} h_0^2$$

$$a_1 = f(x_1)$$

$$a_2 = f(x_2) \qquad a_2 = a_1 + b_1 h_1 + c_1 h_1^2 + \frac{c_2 - c_1}{3} h_1^2$$

$$a_3 = f(x_3) \qquad a_3 = a_2 + b_2 h_2 + c_2 h_2^2 + \frac{c_3 - c_2}{3} h_2^2$$

$$b_0 = \frac{(a_1 - a_0)}{h_0} - \frac{(2c_0 - c_1)}{3} h_0 \qquad b_1 = b_0 + 2c_0 h_0 + (c_1 - c_0) h_0$$

$$b_1 = \frac{(a_2 - a_1)}{h_1} - \frac{(2c_1 - c_2)}{3} h_1 \qquad b_2 = b_1 + 2c_1 h_1 + (c_2 - c_1) h_1$$

$$b_2 = \frac{(a_3 - a_2)}{h_2} - \frac{(2c_2 - c_3)}{3} h_2 \qquad b_i = \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{(2c_i - c_{i+1})}{3} h_i$$

Si despejamos las b_i de las tres primeras expresiones y las sustituimos en las dos del medio…

Spline cúbico

Ejemplo para *n=3*:

$$b_0 = \frac{(a_1 - a_0)}{h_0} - \frac{(2c_0 - c_1)}{3} h_0$$

$$b_1 = \frac{(a_2 - a_1)}{h_1} - \frac{(2c_1 - c_2)}{3} h_1$$

$$b_2 = \frac{(a_3 - a_2)}{h_2} - \frac{(2c_2 - c_3)}{3} h_2$$

$$b_1 = b_0 + 2c_0 h_0 + (c_1 - c_0) h_0$$

$$b_2 = b_1 + 2c_1 h_1 + (c_2 - c_1) h_1$$

$$\frac{(a_2 - a_1)}{h_1} - \frac{(2c_1 - c_2)}{3} h_1 = \frac{(a_1 - a_0)}{h_0} - \frac{(2c_0 - c_1)}{3} h_0 + 2c_0 h_0 + (c_1 - c_0) h_0$$

$$\frac{(a_3 - a_2)}{h_2} - \frac{(2c_2 - c_3)}{3} h_2 = \frac{(a_2 - a_1)}{h_1} - \frac{(2c_1 - c_2)}{3} h_1 + 2c_1 h_1 + (c_2 - c_1) h_1$$

Si despejamos las b_i de las tres primeras expresiones y las sustituimos en las dos del medio…

Spline cúbico

Ejemplo para *n=3*:

$$h_0c_0 + 2(h_0 + h_1)c_1 + h_1c_2 = \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0)$$

$$h_1c_1 + 2(h_1 + h_2)c_2 + h_2c_3 = \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1)$$

$$\frac{(a_2 - a_1)}{h_1} - \frac{(2c_1 - c_2)}{3}h_1 = \frac{(a_1 - a_0)}{h_0} - \frac{(2c_0 - c_1)}{3}h_0 + 2c_0h_0 + (c_1 - c_0)h_0$$

$$\frac{(a_3 - a_2)}{h_2} - \frac{(2c_2 - c_3)}{3}h_2 = \frac{(a_2 - a_1)}{h_1} - \frac{(2c_1 - c_2)}{3}h_1 + 2c_1h_1 + (c_2 - c_1)h_1$$

Spline cúbico

Ejemplo para *n=3*:

$$h_0 c_0 + 2(h_0 + h_1)c_1 + h_1 c_2 = \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0)$$

$$h_1 c_1 + 2(h_1 + h_2)c_2 + h_2 c_3 = \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1)$$

Se corresponde con las expresiones para *i=1,…,n-1 de*:

$$h_{i-1} c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1})$$

donde además sabemos que c_0 y c_3 son *0*.

Spline cúbico

Ejemplo para *n=3*:

$$2(h_0 + h_1)c_1 + h_1 c_2 = \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0)$$

$$h_1 c_1 + 2(h_1 + h_2)c_2 = \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1)$$

Así quedan en sólo las variables c_1 y c_2 por resolver de este sistema de dos ecuaciones.

Y por último sustituiríamos los c_i en la siguientes expresiones para obtener los b_i y d_i:

$$b_i = \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{(2c_i + c_{i+1})}{3} h_i \qquad d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}$$

Spline cúbico

Ejemplo para *n=4*:

$$2(h_0 + h_1)c_1 + h_1 c_2 = \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0)$$

$$h_1 c_1 + 2(h_1 + h_2)c_2 + h_2 c_3 = \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1)$$

$$h_2 c_2 + 2(h_2 + h_3)c_3 = \frac{3}{h_3}(a_4 - a_3) - \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2)$$

Spline cúbico

Ejemplo para *n*=5:

$$2(h_0+h_1)c_1+h_1c_2=\frac{3}{h_1}(a_2-a_1)-\frac{3}{h_0}(a_1-a_0)$$

$$h_1c_1+2(h_1+h_2)c_2+h_2c_3=\frac{3}{h_2}(a_3-a_2)-\frac{3}{h_1}(a_2-a_1)$$

$$h_2c_2+2(h_2+h_3)c_3+h_3c_4=\frac{3}{h_3}(a_4-a_3)-\frac{3}{h_2}(a_3-a_2)$$

$$h_3c_3+2(h_3+h_4)c_4=\frac{3}{h_4}(a_5-a_4)-\frac{3}{h_3}(a_4-a_3)$$

Spline cúbico

Ejemplo genérico:

$$2(h_0+h_1)c_1+h_1c_2=\frac{3}{h_1}(a_2-a_1)-\frac{3}{h_0}(a_1-a_0)$$

$$h_1c_1+2(h_1+h_2)c_2+h_2c_3=\frac{3}{h_2}(a_3-a_2)-\frac{3}{h_1}(a_2-a_1)$$

$$\vdots$$

$$h_{i-1}c_{i-1}+2(h_{i-1}+h_i)c_i+h_ic_{i+1}=\frac{3}{h_i}(a_{i+1}-a_i)-\frac{3}{h_{i-1}}(a_i-a_{i-1})$$

$$\vdots$$

$$h_{n-2}c_{n-2}+2(h_{n-2}+h_{n-1})c_{n-1}=\frac{3}{h_{n-1}}(a_n-a_{n-1})-\frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1}-a_{n-2})$$

Spline cúbico

Esas expresiones conforman un sistema de ecuaciones con una matriz tridiagonal:

$$\begin{bmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & h_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (3/h_1)(a_2-a_1)-(3/h_0)(a_1-a_0) \\ \vdots \\ (3/h_{n-1})(a_n-a_{n-1})-(3/h_{n-2})(a_{n-1}-a_{n-2}) \end{bmatrix}$$

Spline cúbico

Habría que resolver la ecuación matricial:
M×C=V

$$\begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & m_{3,2} & m_{3,3} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & m_{n-2,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & m_{n-1,n-2} & m_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$m_{i,i} = 2(h_{i-1} + h_i) \qquad i = 1,\ldots,n-1$$

$$m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = h_i \qquad i = 1,\ldots,n-2$$

$$v_i = (3/h_i)(a_{i+1} - a_i) - (3/h_{i-1})(a_i - a_{i-1}) \qquad i = 1,\ldots,n-1$$

Spline cúbico

Calculamos las incógnitas $c_1, \ldots, c_{n-1}$:

$$C = M^{-1} \times V$$

Conocidos todos los valores de $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n$ podemos deshacer las sustituciones para los $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}$ y $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$:

$$d_i = \frac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i} \qquad b_i = \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

Tabla para spline cúbico natural

$$h_i = (x_{i+1} - x_i)$$

$$a_i = f(x_i)$$

$$d_i = \frac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i}$$

$$b_i = \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

$$c_0 = 0$$

x_i	h_i	a_i	b_i	c_i	d_i
x_0	h_0	a_0	b_0	c_0	d_0
x_1	h_1	a_1	b_1	c_1	d_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n-1}	h_{n-1}	a_{n-1}	b_{n-1}	c_{n-1}	d_{n-1}
x_n		a_n		c_n	

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 \\ m_{2,1} & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & m_{n-1,n-1} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$m_{i,i} = 2(h_{i-1} + h_i)$$

$$m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = h_i$$

$$c_n = 0$$

$$v_i = (3/h_i)(a_{i+1} - a_i) - (3/h_{i-1})(a_i - a_{i-1})$$

Ejemplo de spline para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$

$$h_i = (x_{i+1} - x_i)$$

$$a_i = f(x_i)$$

$$d_i = \frac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i}$$

$$b_i = \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

x_i	h_i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	h_0	a_0	b_0	c_0	d_0
2	h_1	a_1	b_1	c_1	d_1
4		a_2		c_2	

$$c_0 = 0$$

$$[c_1] = [m_{1,1}]^{-1} \times [v_1]$$

$$c_2 = 0$$

$$m_{i,i} = 2(h_{i-1} + h_i)$$

$$m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = h_i$$

$$v_i = (3/h_i)(a_{i+1} - a_i) - (3/h_{i-1})(a_i - a_{i-1})$$

Ejemplo de spline para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$

$$h_i = (x_{i+1} - x_i)$$

$$a_i = f(x_i)$$

$$d_i = \frac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i}$$

$$b_i = \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

x_i	h_i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	1	2	b_0	c_0	d_0
2	2	1	b_1	c_1	d_1
4		4		c_2	

$$c_0 = 0$$

$$[c_1] = [m_{1,1}]^{-1} \times [v_1]$$

$$c_2 = 0$$

$$m_{i,i} = 2(h_{i-1} + h_i)$$

$$m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = h_i$$

$$v_i = (3/h_i)(a_{i+1} - a_i) - (3/h_{i-1})(a_i - a_{i-1})$$

Ejemplo de spline para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$

$$h_i = (x_{i+1} - x_i)$$

$$a_i = f(x_i)$$

$$d_i = \frac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i}$$

$$b_i = \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

x_i	h_i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	1	2	b_0	c_0	d_0
2	2	1	b_1	c_1	d_1
4		4		c_2	

$$c_0 = 0$$

$$[c_1] = [6]^{-1} \times [15/2]$$

$$c_2 = 0$$

$$m_{i,i} = 2(h_{i-1} + h_i)$$

$$m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = h_i$$

$$v_i = (3/h_i)(a_{i+1} - a_i) - (3/h_{i-1})(a_i - a_{i-1})$$

Ejemplo de spline para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$

$$h_i = (x_{i+1} - x_i)$$

$$a_i = f(x_i)$$

$$d_i = \frac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i}$$

$$b_i = \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

x_i	h_i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	1	2	b_0	0	d_0
2	2	1	b_1	$5/4$	d_1
4		4		0	

$$c_0 = 0$$

$$[5/4] = [6]^{-1} \times [15/2]$$

$$c_2 = 0$$

$$m_{i,i} = 2(h_{i-1} + h_i)$$

$$m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = h_i$$

$$v_i = (3/h_i)(a_{i+1} - a_i) - (3/h_{i-1})(a_i - a_{i-1})$$

Ejemplo de spline para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$

$$h_i = (x_{i+1} - x_i)$$

$$a_i = f(x_i)$$

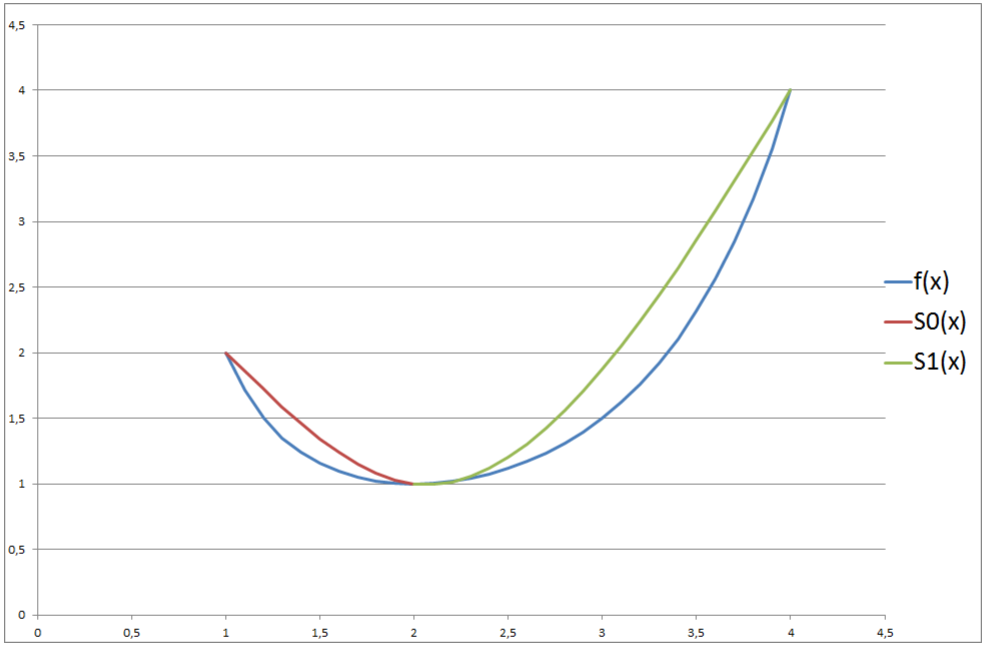
$$d_i = \frac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i}$$

$$b_i = \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

x_i	h_i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	1	2	$-\frac{17}{12}$	0	$\frac{5}{12}$
2	2	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{12}$
4		4		0	

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

Ejemplo de spline para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$



x_i	h_i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	1	2	$-\frac{17}{12}$	0	$\frac{5}{12}$
2	2	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{12}$
4		4		0	

$$S_i(x)=a_i+b_i(x-x_i)+c_i(x-x_i)^2+d_i(x-x_i)^3$$

$$S(x)=\begin{cases} \text{si} \quad x\in[1,2) & S_0(x)=2-\frac{17}{12}(x-1)+\frac{5}{12}(x-1)^3 \\ \text{si} \quad x\in[2,4] & S_1(x)=1-\frac{1}{6}(x-2)+\frac{5}{4}(x-2)^2-\frac{5}{12}(x-2)^3 \end{cases}$$

Ejemplo de spline para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$

$$h_i = (x_{i+1} - x_i)$$

$$a_i = f(x_i)$$

$$d_i = \frac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i}$$

$$b_i = \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

$$c_0 = 0$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ 0 & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$c_4 = 0$$

x_i	h_i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	h_0	a_0	b_0	c_0	d_0
2	h_1	a_1	b_1	c_1	d_1
3	h_2	a_2	b_2	c_2	d_2
4	h_3	a_3	b_3	c_3	d_3
5		a_4		c_4	

$$m_{i,i} = 2(h_{i-1} + h_i)$$

$$m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = h_i$$

$$v_i = (3/h_i)(a_{i+1} - a_i) - (3/h_{i-1})(a_i - a_{i-1})$$

Ejemplo de spline para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$

$$h_i = (x_{i+1} - x_i)$$

$$a_i = f(x_i)$$

$$d_i = \frac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i}$$

$$b_i = \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

$$c_0 = 0$$

x_i	h_i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	1	2	b_0	c_0	d_0
2	1	1	b_1	c_1	d_1
3	1	$3/2$	b_2	c_2	d_2
4	1	4	b_3	c_3	d_3
5		$\frac{125}{8}$		c_4	

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ 0 & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$c_4 = 0$$

$$m_{i,i} = 2(h_{i-1} + h_i)$$

$$m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = h_i$$

$$v_i = (3/h_i)(a_{i+1} - a_i) - (3/h_{i-1})(a_i - a_{i-1})$$

Ejemplo de spline para f(x)=(x/2)^(x-2)

$$h_i = (x_{i+1} - x_i)$$

$$a_i = f(x_i)$$

$$d_i = \frac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i}$$

$$b_i = \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

$$c_0 = 0$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 9/2 \\ 6 \\ \frac{219}{8} \end{bmatrix}$$

$$c_4 = 0$$

x_i	h_i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	1	2	b_0	c_0	d_0
2	1	1	b_1	c_1	d_1
3	1	$3/2$	b_2	c_2	d_2
4	1	4	b_3	c_3	d_3
5		$\frac{125}{8}$		c_4	

$$m_{i,i} = 2(h_{i-1} + h_i)$$

$$m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = h_i$$

$$v_i = (3/h_i)(a_{i+1} - a_i) - (3/h_{i-1})(a_i - a_{i-1})$$

Ejemplo de spline para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$

$$h_i = (x_{i+1} - x_i)$$

$$d_i = \frac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i} \qquad a_i = f(x_i)$$

$$b_i = \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

$$c_0 = 0$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{56} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{56} \\ -\frac{1}{14} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{14} \\ \frac{1}{56} & -\frac{1}{14} & \frac{15}{56} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ 6 \\ \frac{219}{8} \end{bmatrix}$$

$$c_4 = 0$$

x_i	h_i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	1	2	b_0	c_0	d_0
2	1	1	b_1	c_1	d_1
3	1	$3/2$	b_2	c_2	d_2
4	1	4	b_3	c_3	d_3
5		$\frac{125}{8}$		c_4	

$$m_{i,i} = 2(h_{i-1} + h_i)$$

$$m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = h_i$$

$$v_i = (3/h_i)(a_{i+1} - a_i) - (3/h_{i-1})(a_i - a_{i-1})$$

Ejemplo de spline para f(x)=(x/2)^(x-2)

$$h_i = (x_{i+1} - x_i)$$

$$d_i = \frac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i} \qquad a_i = f(x_i)$$

$$b_i = \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{81}{64} \\ -\frac{9}{16} \\ \frac{447}{64} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{56} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{56} \\ -\frac{1}{14} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{14} \\ \frac{1}{56} & -\frac{1}{14} & \frac{15}{56} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ 6 \\ \frac{219}{8} \end{bmatrix}$$

x_i	h_i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	1	2	b_0	0	d_0
2	1	1	b_1	$\frac{81}{64}$	d_1
3	1	$\frac{3}{2}$	b_2	$\frac{-9}{16}$	d_2
4	1	4	b_3	$\frac{447}{64}$	d_3
5		$\frac{125}{8}$		0	

$$m_{i,i} = 2(h_{i-1} + h_i)$$

$$m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = h_i$$

$$v_i = (3/h_i)(a_{i+1} - a_i) - (3/h_{i-1})(a_i - a_{i-1})$$

Ejemplo de spline para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$

x_i	h_i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	1	2	$-91/64$	0	$27/64$
2	1	1	$-5/32$	$81/64$	$-39/64$
3	1	$3/2$	$35/64$	$-9/16$	$161/64$
4	1	4	$223/32$	$447/64$	$-149/64$
5		$125/8$		0	

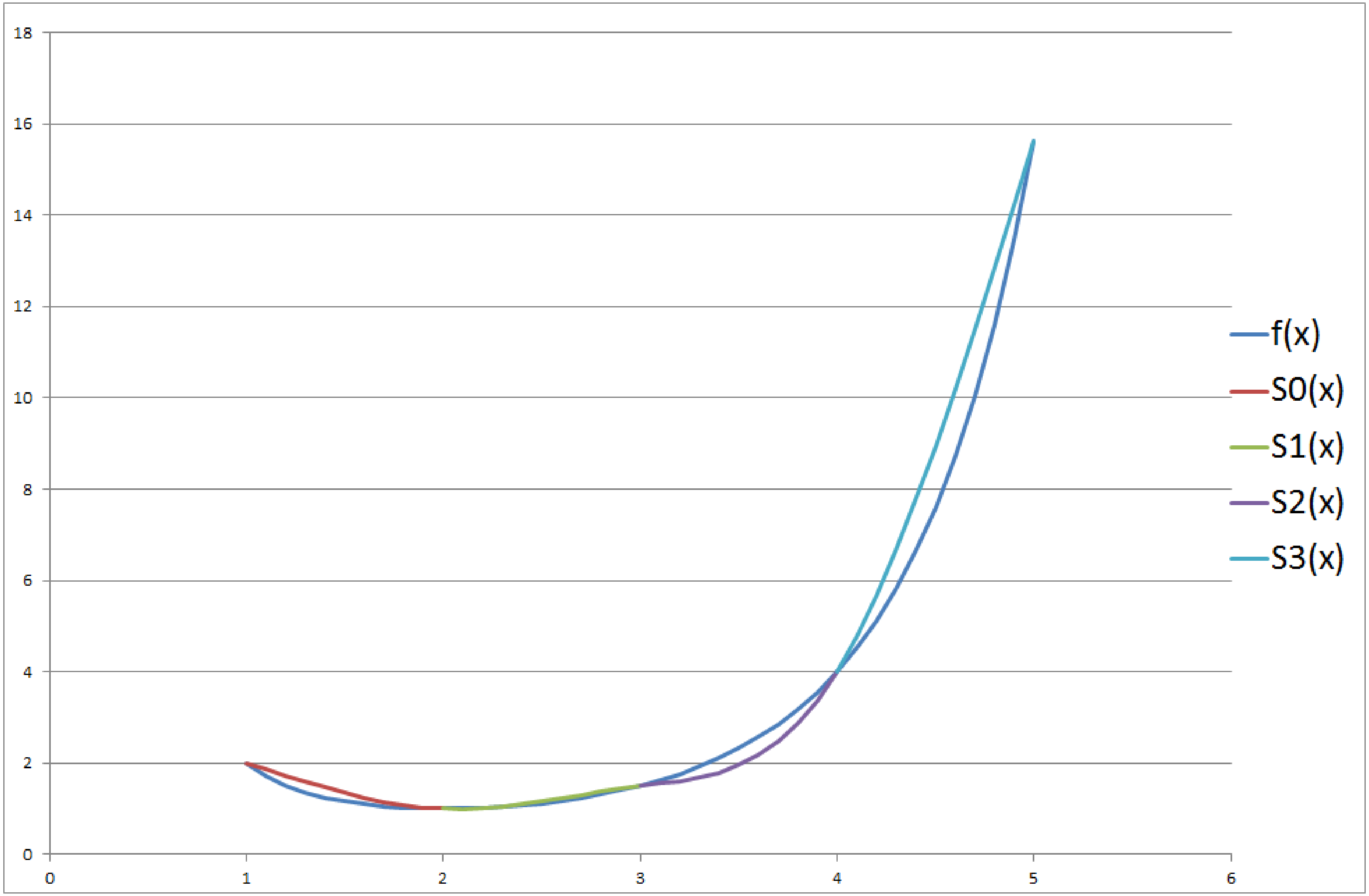
$$S_i(x)=a_i+b_i(x-x_i)+c_i(x-x_i)^2+d_i(x-x_i)^3$$

Ejemplo de spline para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$

$$S(x) =$$

$$\begin{cases} \text{si} \quad x \in [1,2) \quad S_0(x) = 2 - \dfrac{91}{64}(x-1) + \dfrac{27}{64}(x-1)^3 \\ \text{si} \quad x \in [2,3) \quad S_1(x) = 1 - \dfrac{5}{32}(x-2) + \dfrac{81}{64}(x-2)^2 - \dfrac{39}{64}(x-2)^3 \\ \text{si} \quad x \in [3,4) \quad S_2(x) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{35}{64}(x-3) - \dfrac{9}{16}(x-3)^2 + \dfrac{161}{64}(x-3)^3 \\ \text{si} \quad x \in [4,5] \quad S_3(x) = 4 - \dfrac{223}{32}(x-2) + \dfrac{445}{64}(x-2)^2 - \dfrac{149}{64}(x-2)^3 \end{cases}$$

Ejemplo de spline para $f(x)=(x/2)^{(x-2)}$



Spline vs Lagrange