Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial

Apellidos:			
Nombre:			
DNI:		*Email:*	

Grupo de teoría:

- ☐ **Grupo 01** - Lunes de 09:00 a 11: 00 (Prof. Martínez, Francisco)
- ☐ **Grupo 02** - ARA - Miércoles de 11:00 a 13:00 (Prof. Escolano, Francisco)
- ☐ **Grupo 03** - Valenciano - Viernes de 9:00 a 11:00 (Prof. Vicente, José F.)
- ☐ **Grupo 04** - Martes de 15:00 a 17:00 (Prof. Salinas, José María)
- ☐ **Grupo 05** - Martes de 9:00 a 11:00 (Prof. Martínez, Francisco

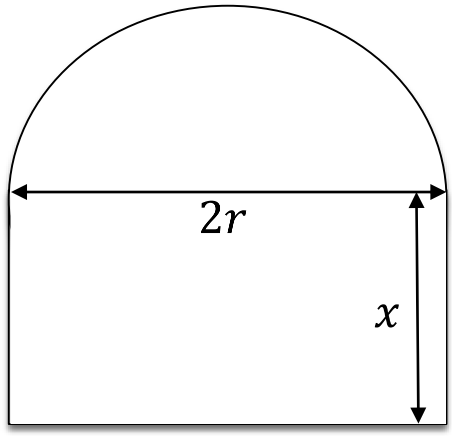
Examen Final de Ejemplo de Matemáticas II.

Instrucciones generales:

- ✓ Debes rellenar los datos personales (apellidos y nombre, DNI, etc.) seleccionando tu grupo de teoría.
- ✓ Debes usar únicamente las hojas grapadas que se te facilitan, no pudiendo haber sobre la mesa ningún otro papel durante el examen. Dispones de un par de páginas en blanco al final por si las necesitas.
- ✓ Está terminantemente prohibido el uso de teléfonos móviles.
- ✓ Procura poner los resultados y datos importantes para la corrección y evaluación en la página donde aparece el enunciado (página par) y las operaciones relacionadas en la siguiente página (página impar).
- ✓ Todas las preguntas deben estar bien explicadas, indicando operaciones, haciendo referencias, aclaraciones, etc.

	Nota	
Ejercicio 1	1,75	
Ejercicio 2	1,75	
Ejercicio 3	1,75	
Ejercicio 4	1,25	
Ejercicio 5	1,75	
Ejercicio 6	1,75	
Total		

1. **(1,75 puntos)** Un ranchero usa 600 metros de valla para construir un corral como el de la figura. Encontrad las dimensiones que maximizan el área del corral.



Perímetro: $2x + 2r + \pi r = 600$ $\qquad x = \frac{600-(2+\pi)r}{2}$

Área: $A = \frac{\pi r^2}{2} + 2rx$ $\qquad A(r) = \frac{\pi}{2}r^2 - (2+\pi)r^2 + 600r$

$$A'(r) = \pi r - (4+2\pi)r + 600 = 600 - (4+\pi)r = 0$$

$$\boldsymbol{r = \frac{600}{4+\pi} = 84,015}$$

$$\boldsymbol{x} = 300 - (2+\pi)\frac{300}{4+\pi} = 300\left(1 - \frac{2+\pi}{4+\pi}\right) = 300\left(\frac{2}{4+\pi}\right) = \boldsymbol{\frac{600}{4+\pi} = 84,015}$$

$$x = r \quad A = \frac{\pi r^2}{2} + 2rx = \frac{\pi r^2 + 4r^2}{2} = r^2\,\frac{4+\pi}{2} = \left(\boldsymbol{\frac{600}{4+\pi}}\right)^{\boldsymbol{2}} \frac{4+\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{600}{4+\pi}\,\frac{600}{2} = r\,300}$$

$$\boldsymbol{A = 84,015 \cdot 300 = 25204,5}$$

2. **(1,75 puntos)** El porcentaje de concentración de cloro en el agua disminuye según la siguiente expresión $20e^{-t}$ siendo t el tiempo en horas. En este instante ($t_0 = 0$) la concentración es del 20% ($20e^{-0} = 20$).

a. **(1.1 puntos)** Utiliza el método de Newton para calcular el tiempo t_n que se necesita para que la concentración se reduzca al 6% ($20e^{-t} = 6$), es decir, aplica el método a la función $f(t) = 20e^{-t} - 6$. Itera hasta asegurarte que el error es menor de una centésima. Redondea todas las operaciones a cuatro decimales y utiliza $t_0 = 0$ como valor inicial.

$f(t) = 20e^{-t} - 6$ $\qquad$ $\boldsymbol{f'(t) = -20e^{-t}}$

n	$\boldsymbol{t_i}$	$\boldsymbol{f(t_i)}$	$\boldsymbol{f'(t_i)}$	$\boldsymbol{h = f(t_i)/f'(t_i)}$
0	0	14	-20	-0,7
1	0,7	3,9317	-9,9317	-0,3959
2	1,0959	0,6848	-6,6848	-0,1024
3	1,1983	0,0347	-6,0347	-0,0058
4	**1,2041**			|-0,0058|<0,01
5				

$|h|$ es cota del error absoluto y $t_4 = 1{,}2041$ horas $=$ **1 hora 12' 15"**

b. **(0.65 puntos)** Calcula cuántos dígitos exactos tiene la aproximación por el método de Newton que has calculado.

$$|h| = 0{,}0058 \leq 0{,}05 = \left(\frac{1}{2}\right) 10^{m-n+1} \quad -1 = m - n + 1$$

$$t_4 = \mathbf{1{,}2}042 \rightarrow m = 0 \qquad -1 = 0 - n + 1 \qquad \boldsymbol{n = 2}$$

3. **(1,75 puntos)** Dados los puntos de control P_0=(1, 1); P_1=(2, 3);P_2=(4, 3) y P_3=(1, 1), encontrar la curva de Bezier (utiliza el método que prefieras).

De Casteljau:

Abscisas

1
(1-t)+2t=1+t
2 (1+t)(1-t)+(2+2t)t=1+2t+t^2
2(1-t)+4t=2+2t (1+2t+t^2)(1-t)+(2+4t-5t^2)t=1+3t+3t^2-6t^3
4 2(1+t)(1-t)+(4-3t)t=2+4t-5t^2
4(1-t)+t=4-3t
1

Ordenadas

1
(1-t)+3t=1+2t
3 (1+2t)(1-t)+3t=1+4t-2t^2
3(1-t)+3t=3 (1+4t-2t^2)(1-t)+(3-2t^2)t=1+6t-6t^2
3 3(1-t)+(3-2t)t=3-2t^2
3(1-t)+t=3-2t
1

Curva: (1+3t+3t^2-6t^3, 1+6t-6t^2)

Polinomios de Bernstein:

Grado 3: $B(t)=B_0^3P_0+B_1^3P_1+B_2^3P_2+B_3^3P_3$

$B_0^3=\binom{3}{0}t^0(1-t)^{3-0}=(1-t)^3 \qquad B_1^3=\binom{3}{1}t^1(1-t)^{3-1}=3t(1-t)^2$

$B_2^3=\binom{3}{2}t^2(1-t)^{3-2}=3t^2(1-t) \qquad B_3^3=\binom{3}{3}t^3(1-t)^{3-3}=t^3$

$B(t)=(1-t)^3(1{,}1)+3t(1-t)^2(2{,}3)+3t^2(1-t)(4{,}3)+t^3(1{,}1)$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x(t)} &= (1-t)^3+6t(1-t)^2+12t^2(1-t)+t^3\\ &= (1-3t+3t^2-t^3)+6t(1-2t+t^2)+12t^2-12t^3+t^3\\ &= \mathbf{1+3t+3t^2-6t^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y(t)} &= (1-t)^3+9t(1-t)^2+9t^2(1-t)+t^3\\ &= (1-3t+3t^2-t^3)+9t(1-2t+t^2)+9t^2-9t^3+t^3=\mathbf{1+6t-6t^2}\end{aligned}$$

4. **(1,25 puntos)** Se tienen tres valores aproximados con sus correspondientes cotas de error absoluto:

$$A = 8 \pm 0{,}08 \quad B = 3 \pm 0{,}06 \quad C = 0{,}25 \pm 0{,}01$$

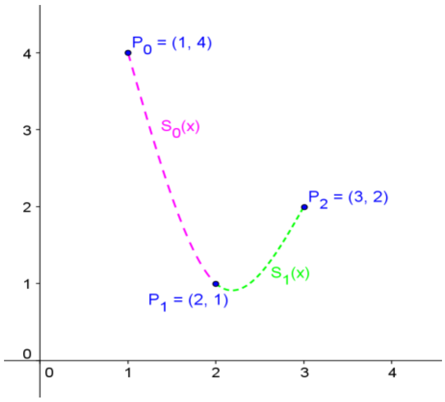
Calcula el valor aproximado de $\sqrt{B - AC}$ y su cota de error relativo.

$$\sqrt{B - (8 \pm 1\%)(0{,}25 \pm 4\%)} = \sqrt{B - (2 \pm 5\%)} = \sqrt{(3 \pm 0{,}06) - (2 \pm 0'1)} = \sqrt{1 \pm 0{,}16}$$

$$f(x \pm \Delta) = f(x) \pm \Delta \cdot f'(x) \quad \left\| \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x} \\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array} \right\| \; f(1 \pm 0{,}16) = \sqrt{1} \pm 0{,}16 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1}} = 1 \pm 0{,}08 =$$

$$= 1 \pm 8\%$$

5. (1,75 puntos) Encuentra el spline cúbico natural $S(x)$ que empieza en el punto $P_0 = (1\,,4)$, pasa por el punto $P_1 = (2\,,1)$ y termina en el punto $P_2 = (3\,,2)$.



No es necesario que agrupes las potencias en x de los polinomios $S_0(x)$ y $S_1(x)$, puedes dejarlos con potencias de $(x - x_i)$, como en la expresión

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3; \quad \text{con } i = 0{,}1.$$

Observa que el número de trozos del spline es $n = 2$ y recuerda que las indeterminadas se pueden obtener de las expresiones

$$\begin{aligned}
&h_i = x_{i+1} - x_i, \quad \text{para } i = 0{,}1;\\
&a_i = f(x_i), \quad \text{para } i = 0{,}1{,}2;\\
&v_i = \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1}), \quad \text{para } i = 1;\\
&c_0 = c_2 = 0, \quad [c_1] = [2(h_0 + h_1)]^{-1}[v_1];\\
&b_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}), \quad \text{para } i = 0{,}1;\\
&d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \quad \text{para } i = 0{,}1.
\end{aligned}$$

Completa la siguiente tabla y escribe S(x) en el espacio reservado para ello.

i	x_i	h_i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	1	1	4	-4	0	1
1	2	1	1	-1	3	-1
2	3		2		0	

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 4 - 4(x-1) + (x-1)^3 & \text{si } x \in [1,2] \\ S_1(x) = 1 - (x-2) + 3(x-2)^2 - (x-2)^3 & \text{si } x \in [2,3] \end{cases}$$

$$v_1 = \frac{3(a_2 - a_1)}{h_1} - \frac{3(a_1 - a_0)}{h_0} = \frac{3(2-1)}{1} - \frac{3(1-4)}{1} = 3 + 9 = 12$$

$$[c_1] = [2(h_0 + h_1)]^{-1} \text{ x } [v_1] = [2(1+1)]^{-1} \text{ x } [12] = [4]^{-1} \text{ x } [12] \qquad c_1 = \frac{1}{4} 12 = 3$$

$$b_0 = \frac{(a_1 - a_0)}{h_0} - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1) = \frac{(1-4)}{1} - \frac{1}{3} 3 = -4$$
$$b_1 = \frac{(a_2 - a_1)}{h_1} - \frac{h_1}{3}(2c_1 + c_2) = \frac{(2-1)}{1} - \frac{1}{3} 6 = -1$$

$$d_0 = \frac{(c_1 - c_0)}{3h_0} = \frac{(3-0)}{3} = 1$$
$$d_1 = \frac{(c_2 - c_1)}{3h_1} = \frac{(0-3)}{3} = -1$$

6. **(1,75 puntos)** Se considera la función $F(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ con n entero.

Construir una tabla de diferencias divididas para los puntos n=1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 comprobando que $f[x_i, x_{i+1}]$ es un cuadrado perfecto; que $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ es un número impar dividido entre dos y que $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$ es siempre una constante.

Demostrar que $F(n)$ es un polinomio de tercer grado y calcularlo.

n	f(n)	$(n+1)^2$	(2n+3)/2	1/3			
1	1						
		4					
2	5		5/2				
		9		1/3			
3	14		7/2		0		
		16		1/3		0	
4	30		9/2		0		0
		25		1/3		0	
5	55		11/2		0		
		36		1/3			
6	91		13/2				
		49					
7	140						

$$\boldsymbol{f[x_i, x_{i+1}] = (n+1)^2} \qquad \boldsymbol{f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = (2n+3)/2}$$
$$\boldsymbol{f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] = 1/3}$$

$F(n)$ coincide con in polinomio de tercer grado aunque se interpolen más de 4 puntos:

$$F(n) = 1 + 4(n-1) + \frac{5}{2}(n-1)(n-2) + \frac{1}{3}(n-1)(n-2)(n-3) =$$

$$= 1 + 4n - 4 + \frac{5}{2}(n^2 - 3n + 2) + \frac{1}{3}(n^3 - 6n^2 + 11n - 6) =$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n}$$