Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial

Examen de prácticas de Matemáticas II, convocatoria julio 2013 (28/06/2013)

Alumno:

Grupo prácticas:

□ Grupo 01 - jueves de 09:00 a 11:00 (Prof. Rafael Álvarez)
□ Grupo 02 - miércoles de 13:00 a 15:00 (Prof. Pedro Bellido)
□ Grupo 03 - miércoles de 11:00 a 13:00 (Prof. Antonio Zamora)
□ Grupo 04 - martes de 09:00 a 11:00 (Prof. Antonio Zamora)
□ Grupo 05 - jueves de 11:00 a 13:00 (Prof. Rafael Álvarez)
□ Grupo 06 - martes de 11:00 a 13:00 (Prof. José Francisco Vicent y Antonio Zamora)
□ Grupo 07 - miércoles de 09:00 a 11:00 (Prof. Antonio Zamora)
□ Grupo 08 - viernes de 11:00 a 13:00 (Prof. José Francisco Vicent)
□ Grupo 09 - miércoles de 11:00 a 13:00 (Prof. Francisco Escolano)
□ Grupo 10 - viernes de 15:30 a 17:30 (Prof. Francisco Ferrández)
□ Grupo 11 - martes de 17:30 a 19:30 (Prof. Francisco Ferrández)
□ Grupo 12 - viernes de 17:30 a 19:30 (Prof. Francisco Ferrández)
□ Grupo 13 - lunes de 17:30 a 19:30 (Prof. Francisco Ferrández)

DNI:

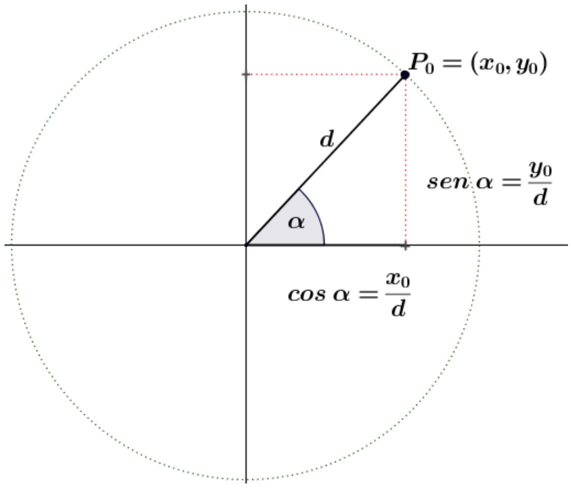
Email:

Instrucciones generales:
Debes crear en el escritorio una carpeta a la que nombrarás con el grupo de prácticas al que perteneces, tus apellidos, tu nombre y tu DNI (ejemplo GRUPO 03 RUIZ SANCHEZ ALBERTO DNI 32455861D) y guardar en ella todos los archivos que se indiquen en los distintos apartados, con los nombres que se asignen. Cuando finalice el examen, deberás copiar tu carpeta en la carpeta del ordenador del profesor, correspondiente al grupo de prácticas al que perteneces, e ir a su mesa para que el profesor compruebe que todos los archivos se han copiado correctamente.

Práctica	Máx	Nota
1	2,0	
2	2,0	
3	2,0	
4	2,0	
5	2,0	
	Total:	

1) Espiral *(2 puntos)* Guarda el archivo con el nombre: **PRA01.ggb**

En este ejercicio vamos a crear una espiral. Las magnitudes angulares que se van a usar estarán definidas en radianes, no en grados, por tanto no utilices el símbolo de grados (º).
Recuerda que 360º equivale a 2π radianes.
Observa la figura de la derecha y recuerda, asimismo, la definición de las razones trigonométricas seno y coseno. De dichas definiciones se puede deducir la expresión de las coordenadas de un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ que está a una distancia d del origen y tal que el segmento que lo une con el origen forma un ángulo α con el eje de abscisas. Abusando del lenguaje diremos que "el punto P_0 forma un ángulo α con el eje de abscisas".



Las coordenadas vienen dadas por $\begin{cases} x_0 = d \cos\alpha \\ y_0 = d \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$

a) *(0,1 puntos)* Crea en primer lugar un deslizador, v, que utilizaremos para indicar el número de vueltas, tomando valores comprendidos entre 1 y 3 con un incremento 1.
Crea otro deslizador, α, que indicará el ángulo recorrido en radianes y tomará valores entre 0 y v 2π con un incremento de 0'01.

b) *(0,2 puntos)* Para crear la espiral, la distancia de los puntos que la definen debe aumentar a la vez que aumenta el ángulo. Utilizaremos, en consecuencia, una variable $d_\alpha = \dfrac{\alpha}{2\pi}$ que tomará valores comprendidos entre 0 y el número de vueltas, v.
Defínela y comprueba que toma valores desde 0 hasta el número de vueltas, v, al recorrer el deslizador α desde 0 hasta su máximo valor. Ten en cuenta que el truncamiento que hace la máquina del número irracional π puede hacer que d_α no sea un valor natural exacto.

c) *(0,5 puntos)* Crea un punto P_0 de color rojo a una distancia d_α del origen de coordenadas y que forme un ángulo de α radianes con el eje de abscisas.

Anota la instrucción utilizada	P_0 = (d_{α} cos(α), d_{α} sen(α))

d) *(1 punto)* Atendiendo a la forma de construir el punto P_0 del apartado anterior, utiliza la instrucción Secuencia[] para construir una lista de puntos, P_i, con i variando desde 0 hasta α e incremento 0'01, que estén a una distancia $\dfrac{i}{2\pi}$ del origen y el ángulo que forme cada punto, P_i, con el eje de abscisas sea i. Llama a la lista L.

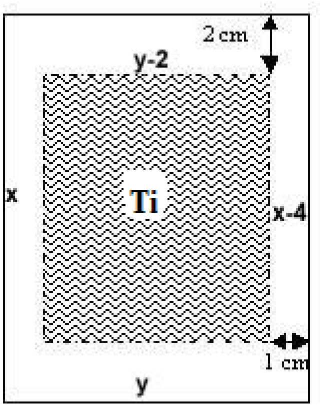
Anota la instrucción utilizada	L = Secuencia[(i / (2π) cos(i), i / (2π) sen(i)), i, 0, α, 0.01]

e) *(0,2 puntos)* Utiliza la instrucción Polígono[] para obtener el área del polígono obtenido al unir todos los puntos de L.

Anota la instrucción utilizada	Área = Polígono[L]

2) Optimización *(2 puntos)* Guarda el archivo con el nombre: **PRA02.ggb**

Una imprenta tiene que imprimir publicidad en hojas de papel de tres tamaños diferentes de manera que el texto impreso ocupe 18, 36 ó 54 cm^2. Los márgenes superior e inferior en los tres tipos de hoja deben tener siempre 2 cm. cada uno y los laterales deben ser de 1 cm cada uno. Debes hallar las dimensiones de cada uno de los tres tamaños de hoja para que su superficie sea mínima.



Vamos a denotar por x a la altura de la hoja, por y a la anchura de la misma y por T_i a la superficie impresa (observa la figura de la derecha).

Con esta notación tenemos que $T_i = (x-4)(y-2)$ y, en consecuencia,

$$y = \frac{T_i}{x-4} + 2 = \frac{2x + T_i - 8}{x-4}.$$

Define un deslizador T_i que tome valores comprendidos entre 18 y 54 con incremento 18 y comprueba que toma los valores 18, 36 y 54. A continuación, define la función $Y(x) = \frac{2x + T_i - 8}{x-4}$, que nos determinará la anchura y de la hoja en función de su altura x, y ocúltala.

a) *(0,6 puntos)* Obtén la función *S(x)* que mide la superficie total de la hoja.

Anota la función matemática. No la instrucción Geogebra.

$$S(x) = x\,y = xY(x) = x\frac{2x + T_i - 8}{x-4} = \frac{2x^2 + (T_i - 8)x}{x-4}$$

b) *(0,2 puntos)* Visualiza la gráfica de S(x) en el intervalo [4, 100].

Anota la instrucción utilizada

S(x) = Función[x Y(x), 4, 100]

Configura la vista gráfica de forma que se visualicen solo los semiejes positivos con una escala EjeX:EjeY de 1:2.

c) *(0,6 puntos)* Utilizando la instrucción o instrucciones que consideres necesarias, obtén el mínimo de la función $S(x)$ en el intervalo [4, 100].

Anota la o las instrucciones utilizadas

M=Mínimo[S, 4, 100]

d) *(0,6 puntos)* Sitúa el deslizador T_i en las tres posiciones posibles y completa las siguientes frases

- Las dimensiones de la hoja con menor superficie y texto impreso **18 cm²** son 10 cm de alto por 5 cm de ancho, con una superficie total de la hoja de 50 cm^2.
- Las dimensiones de la hoja con menor superficie y texto impreso **36 cm²** son 12,49 cm de alto por 6,24 cm de ancho, con una superficie total de la hoja de 77,94 cm^2.
- Las dimensiones de la hoja con menor superficie y texto impreso **54 cm²** son 14,39 cm de alto por 7,2 cm de ancho, con una superficie total de la hoja de 103,57 cm^2.

3) Sumas de Riemann *(2 puntos)* Guarda el archivo con el nombre: **PRA03.ggb**

Dada una función, $f(x)$, positiva en el intervalo $[a,b]$, vamos a calcular el área bajo la curva para ese intervalo mediante la integral definida y, utilizando las sumas superiores e inferiores de Riemann, vamos a aproximar su valor y compararlo con el valor de la integral.

a) *(0,6 puntos)* Construcción:

- Representa gráficamente la función $f(x)=\frac{x^2}{4}+2$ y define a = -2, b = 3, A = (a, *0*) y B = (b, *0*).
- Define un deslizador n que tome los valores comprendidos entre 1 y 100 con incremento 1. Este deslizador nos servirá para determinar el número de rectángulos que vamos a utilizar en las sumas de Riemann.
- Calcula la superficie S como la integral definida de $f(x)$ entre a y b. Oculta el rótulo.

Anota la instrucción utilizada	S= Integral[f, a, b]

- Crea un texto dinámico que muestre el valor de S:

$$S=\int_{-2}^{3} f(x)dx = \text{valor de la integral}$$

b) *(0,7 puntos)* Utilizando la instrucción SumaSuperior[], define una variable S_S que contenga las sumas superiores de Riemann para f en el intervalo $[a,b]$ con n rectángulos. Asígnale color azul y oculta el rótulo.

Anota la instrucción utilizada	S_S = SumaSuperior[f, a, b, n]

- Crea una casilla de control que nos permita mostrar/ocultar las sumas superiores de Riemann.
- Crea un texto dinámico en color azul que muestre el valor de S_S:

$$S_S=\sum_{i=1}^{n} S_i = \text{ valor de la suma superior}$$

c) *(0,7 puntos)* Utilizando la instrucción SumaInferior[],define una variable S_I que contenga las sumas inferiores de Riemann para f en el intervalo $[a,b]$ con n rectángulos. Asígnale color verde y oculta el rótulo.

Anota la instrucción utilizada	S_I = SumaInferior[f, a, b, n]

- Crea una casilla de control que nos permita mostrar/ocultar las sumas inferiores de Riemann.
- Crea un texto dinámico en color verde que muestre el valor de S_I:

$$S_I=\sum_{i=1}^{n} I_i = \text{ valor de la suma inferior}$$

4) Método de la secante *(2 puntos)* Guarda el archivo con el nombre: **PRA04.ggb**

Debes implementar el método de la secante para resolver la ecuación $x \operatorname{sen} x = 3x - 9$, tomando como intervalo inicial $[p_{-1}, p_0] = [0,8]$.

Como sabes, la ecuación de recurrencia que se utiliza para el método de la secante es

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}(p_{n-1} - p_{n-2}), \text{ para n = 1, 2, 3, } \cdots$$

Activa en opciones, redondeo, 4 Lugares Decimales.

a) *(0,5 puntos)* Empieza definiendo la función *f* para la que tengas que encontrar la raíz (solución de $f(x) = 0$).

Anota la función

$f(x) = x \operatorname{sen} x - 3x + 9$

b) *(0,9 puntos)* Define los valores del intervalo inicial $p_{-1} = 0$ (p_{−1}) y $p_0 = 8$. Utiliza la hoja de cálculo y asigna a la casilla A1 el valor p_{-1}, a la casilla A2 el valor p_0 y a la casilla A3 el valor p_1.

Anota las fórmulas de las casillas A1, A2 y A3

A1 ⇒ =p_{-1}

A2 ⇒ =p_0

A3 ⇒ =A2 - f(A2) / (f(A2) - f(A1)) (A2 - A1)

c) *(0,3 puntos)* Extendiendo la fórmula de la casilla A3 a las siguientes hasta A22, asigna a la casilla A_{n+2} el valor p_n, para n = 2,···,20. Al final del proceso deben estar rellenas las casillas A1 hasta A22.
Observarás en las casillas de la columna A que la sucesión $\{p_1, p_2, \ldots, p_{19}, p_{20}\}$ converge a la única raíz de *f*, solución de la ecuación $x \operatorname{sen} x = 3x - 9$.

Anota el valor de convergencia

Solución a la ecuación $x \operatorname{sen} x = 3x - 9$

x = 3,0716

d) *(0,3 puntos)* Utiliza la instrucción Raíces[] para que Geogebra obtenga la raíz de *f* y comprueba que coincide con el valor que has obtenido con la hoja de cálculo.

Anota la instrucción utilizada

X_p = Raíces[f, 0, 8]

5) Interpolación *(2 puntos)* Guarda el archivo con el nombre: **PRA05.ggb**

Durante un experimento científico, se mide la cantidad de luz emitida en una reacción exoluminíca pero, desgraciadamente, el sensor no funciona bien y se pierden algunos datos. Los datos que se recuperan son

Instante (x)	1	2	3	7	8	9
Intensidad (y)	5	6	4	3	2	5

a) *(0,3 puntos)* Crea una lista de puntos que contenga las mediciones anteriores. Llámala *L*.

b) *(0,3 puntos)* Obtén un polinomio de interpolación, llámalo $p(x)$, que pase por los puntos de la lista *L*.

c) *(1,2 puntos)* Obtén una secuencia de puntos estimados, $(i,p(i))$, desde el instante i = 3,5 hasta 6,5 con un incremento de 0,5. Llámala *T*, asígnale color azul y estima la intensidad en los instantes i = 4, 5, 6.

Anota la instrucción utilizada para la lista *T*

T= Secuencia[(i, p(i)), i, 3.5, 6.5, 0.5]

Intensidad en los instantes 4,5,6

x	**Intensidad estimada (*y*)**
i =4 ⇒	p(4)=2,93
i = 5 ⇒	p(5)=3,23
i = 6 ⇒	p(4)=3,64

d) *(0,2 puntos)* ¿Consideras que tendría sentido la estimación en el instante 10?

Breve respuesta

La interpolación consiste en la obtención de nuevos puntos intermedios a partir de un conjunto discreto de puntos conocidos. El instante 10 no es un valor intermedio de los conocidos (1,2,3,7,8,9) por lo que no tiene mucho sentido hablar de estimación mediante interpolación (el valor estimado, mediante el polinomio obtenido, en 10 se dice que es un valor extrapolado).