



Límites y continuidad

Tema 0



Límites y continuidad

Podríamos empezar diciendo que los límites son importantes en el cálculo, pero afirmar tal cosa sería infravalorar su auténtica importancia. Sin límites el cálculo no existiría. Cualquier noción del cálculo es un límite en uno u otro sentido.

Límites y continuidad

¿Qué es la velocidad instantánea? Es el límite de las velocidades medias.

¿Qué es la pendiente de una curva? Es el límite de las pendientes de las rectas secantes.

¿Qué es la longitud de una curva? Es el límite de la longitud de los caminos poligonales.

¿Qué es la suma de una serie infinita? Es el límite de las sumas finitas.

¿Qué es el área de una región limitada por curvas? Es el límite de la suma de las áreas de las regiones delimitadas por segmentos de rectas poligonales.

Idea intiutiva de límite

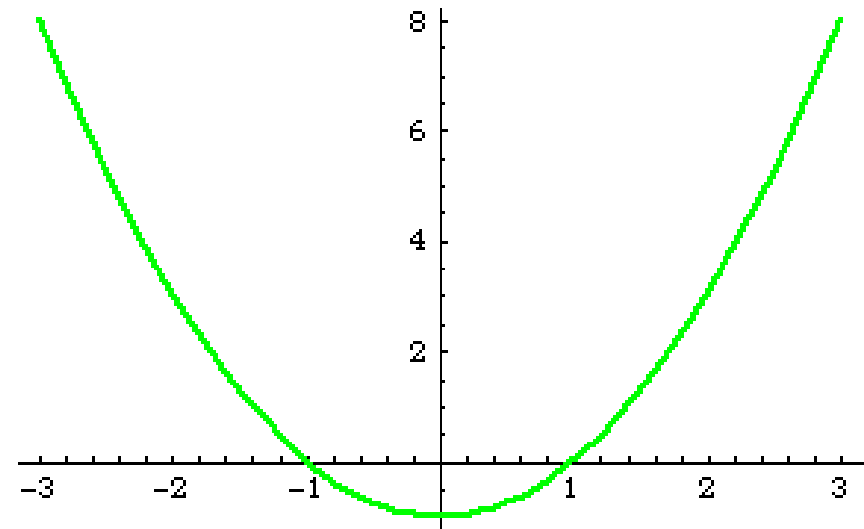
Empezamos con un número c y una función f definida cerca de c aunque no necesariamente en el mismo c . El número L es el límite de f cuando x se aproxima a c , y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

si y sólo si los valores de la función $f(x)$ se aproximan (tienden) a L cuando x se aproxima a c .

Consideremos la función: $f(x) = x^2 - 1$

| x | $f(x)$ |
|--------|------------|
| 1.9 | 2.61 |
| 1.99 | 2.9601 |
| 1.999 | 2.996001 |
| 1.9999 | 2.99960001 |
| 2.0001 | 3.00040001 |
| 2.001 | 3.004001 |
| 2.01 | 3.0401 |
| 2.1 | 3.41 |



Cuando x se aproxima a 2, tanto por la izquierda como por la derecha, tomando valores menores o mayores que 2, $f(x)$ se aproxima, es decir, tiende cada vez más a 3.

Consideremos la función: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad x \neq 1$

Esta función no está definida en $x=1$; sin embargo vamos a estudiar su comportamiento en los alrededores de $x=1$.

| | | | | | | | | | | | |
|----------------------------------|-----|------|-----|------|-------|---|-------|--------------------------------|-----|------|-----|
| x se acerca a 1 por la izquierda | | | | | | → | ← | x se acerca a 1 por la derecha | | | |
| x | 0.5 | 0.75 | 0.9 | 0.99 | 0.999 | 1 | 1.001 | 1.01 | 1.1 | 1.25 | 1.5 |
| f(x) | 1.5 | 1.75 | 1.9 | 1.99 | 1.999 | ? | 2.001 | 2.01 | 2.1 | 2.25 | 2.5 |
| f(x) se acerca a 2 | | | | | | → | ← | f(x) se acerca a 2 | | | |

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

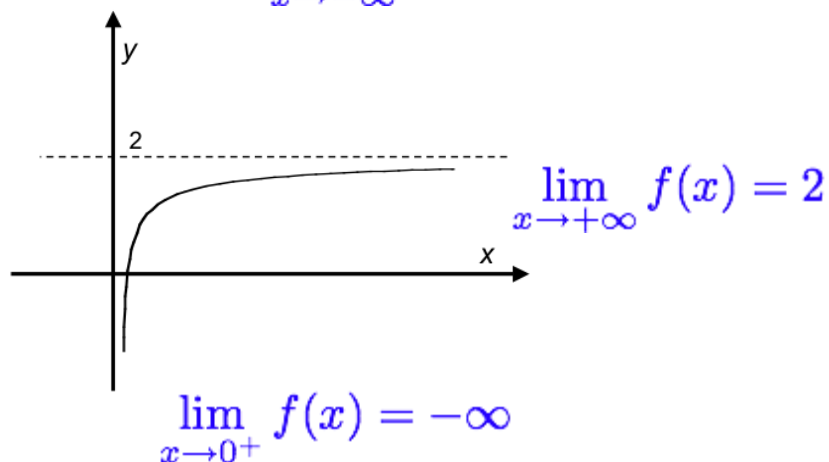
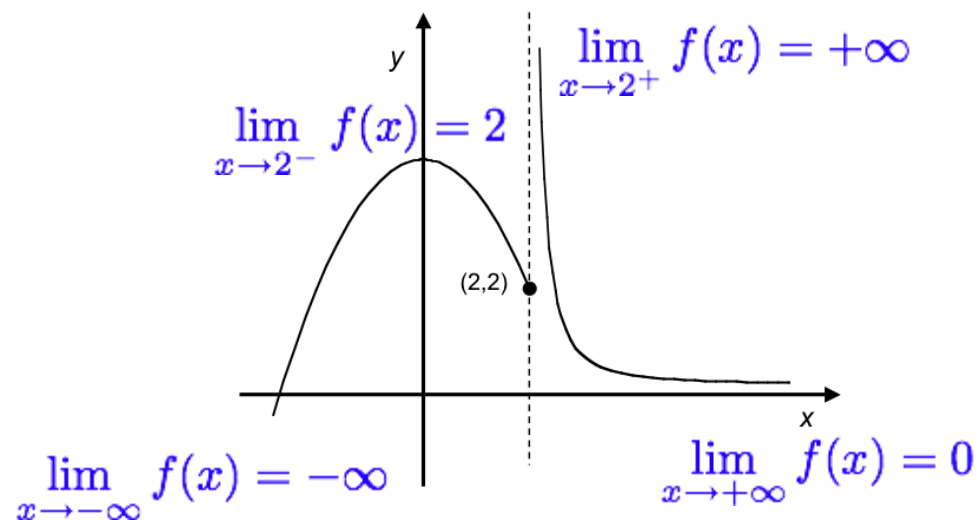
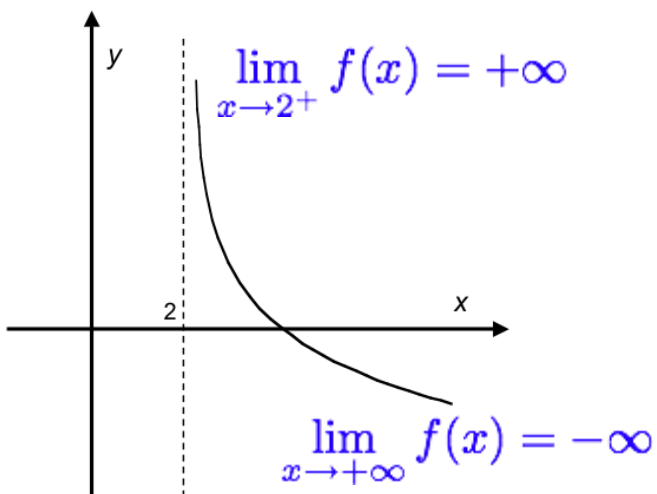
Límites laterales

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

Límites infinitos y límites en el infinito

Si $f(x)$ crece indefinidamente cuando el valor de x tiende a a , se dice que su límite es infinito ($+\infty$ o $-\infty$). Análogamente, también es posible definir límites de una función cuando el valor de x tiende a $+\infty$ o a $-\infty$.



Indeterminaciones

En el cálculo de límites, se dice que hay una indeterminación cuando el límite de la función no se obtiene directamente de los límites de las funciones que la componen.

Las indeterminaciones son:

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{0}{0}$$

$$0 \cdot \infty$$

$$\infty - \infty$$

$$1^\infty$$

$$\infty^0$$

$$0^0$$

En algunos casos, simplificando las expresiones u obteniendo expresiones equivalentes a las iniciales, se puede resolver la indeterminación y calcular el límite. En otros casos, se requerirá el uso de otras herramientas más potentes.

Cálculo de límites

Para calcular el límite de una función suelen aplicarse las propiedades generales de los límites. Sin embargo, a veces aparecen indeterminaciones que es preciso resolver.

Infinito entre infinito: si se trata de funciones polinómicas, se divide el numerador y el denominador por el término de mayor grado. Si las funciones presentan radicales, se multiplican el denominador y el numerador por el conjugado de la expresión que contiene el radical.

Cálculo de límites

Cero entre cero: si se trata de funciones polinómicas, se factorizan el numerador y el denominador y se simplifican los polinomios iguales resultantes. En funciones con radicales, se multiplican el numerador y el denominador por la expresión conjugada de la que contiene el radical.

Cálculo de límites

Cero por infinito: si $f(x)$ tiende a 0, y $g(x)$ tiende a infinito, la expresión $f(x) \cdot g(x)$ se puede sustituir por $f(x) / (1 / g(x))$, que es del tipo $0 / 0$. También podemos sustituir $f(x) \cdot g(x)$ por $g(x) / (1 / f(x))$ que es una indeterminación del tipo infinito entre infinito.

Cálculo de límites

Infinito menos infinito: si se trata de una diferencia de funciones, se realiza la operación de manera que se obtenga una expresión como cociente de funciones, para después calcular el límite. Si aparecen radicales, se multiplica y se divide por la expresión conjugada de la que contiene el radical.

Cálculo de límites

Uno elevado a infinito: se resuelve transformando la expresión en una potencia del número e, teniendo en cuenta que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Si $f(x)$ tiende a 1 cuando x tiende a c (real o infinito) y $g(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a c , entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow c} \left(1 + f(x) - 1\right)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \left[1 + \frac{1}{1/(f(x) - 1)}\right]^{\frac{1}{f(x) - 1} \cdot [f(x) - 1]g(x)} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - 1]g(x)} \end{aligned}$$

Cálculo de límites

Infinito elevado a cero: teniendo en cuenta que el logaritmo de un límite es el límite del logaritmo,

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow c} g(x) \ln f(x)}$$

Cálculo de límites

Cero elevado a cero: teniendo en cuenta que el logaritmo de un límite es el límite del logaritmo,

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow c} g(x) \ln f(x)}$$

Continuidad

En el lenguaje coloquial, decir que algo es “continuo” equivale a decir que transcurre sin interrupción y sin cambios abruptos. En el lenguaje matemático, la palabra “continuo” tiene, en gran parte, el mismo significado.

La idea básica es la siguiente: supongamos dados una función f y un número c . Se calculan (cuando sea posible) los valores:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \quad \text{y} \quad f(c)$$

y se comparan los resultados. La función f es continua en c si y sólo si estos dos valores coinciden:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

Continuidad

OBSERVACIÓN.- Recordar que en la definición de “límite de f en c ” no exigimos que f esté definida en el propio c . Por el contrario, la definición de “continuidad en c ” requiere que f esté definida en c . Así, de acuerdo con esta definición, una función f es continua en un punto si y sólo si:

f está definida en c

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

Se dice que una función f es discontinua en c si no es continua en ese punto.

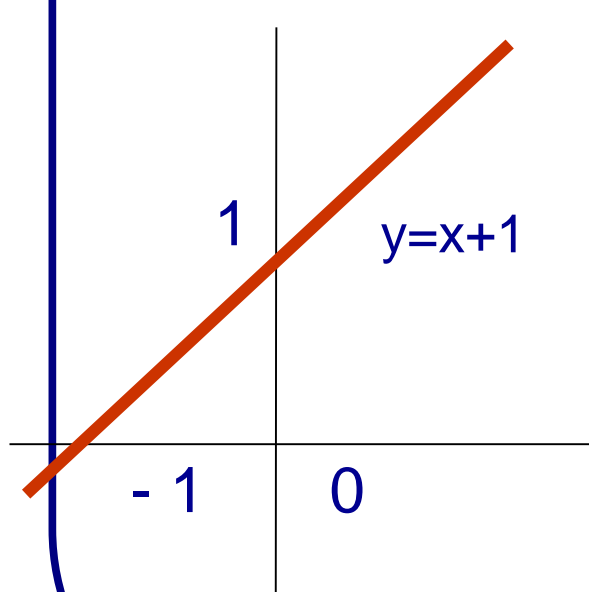
Continuidad gráfica

Una función se dice que es continua en todo su dominio cuando podemos ser capaces de dibujarla de un solo trazo continuo, sin levantar el lápiz del papel.

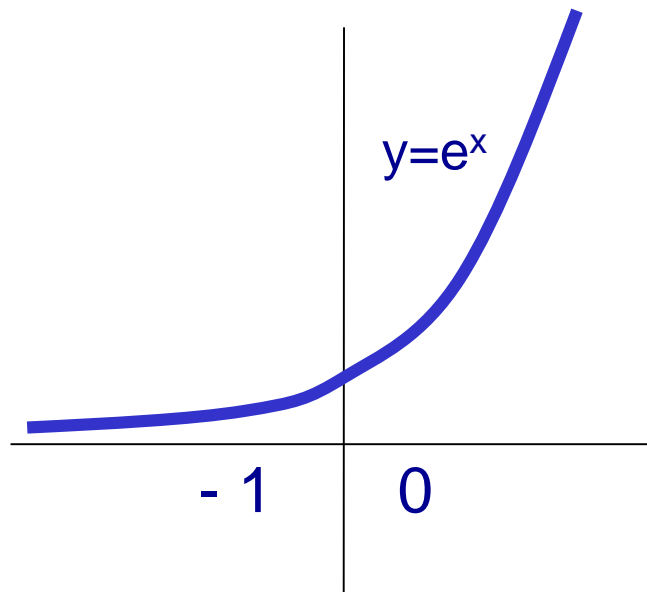
Ejemplo 1

Ejemplo 2

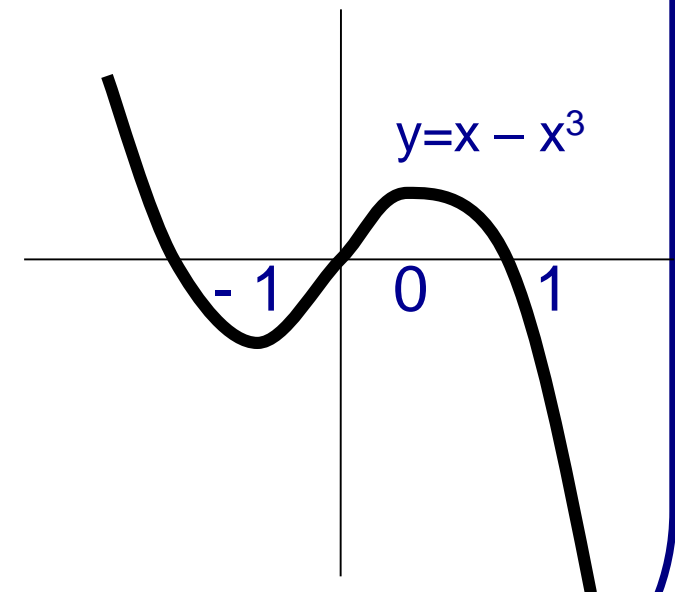
Ejemplo 3



Función continua en \mathbb{R}



Función continua en \mathbb{R}

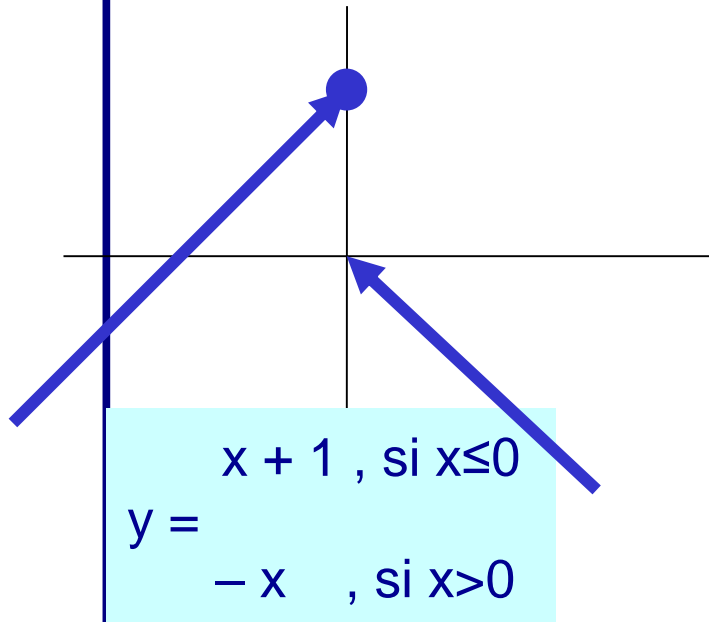


Función continua en \mathbb{R}

Discontinuidad gráfica

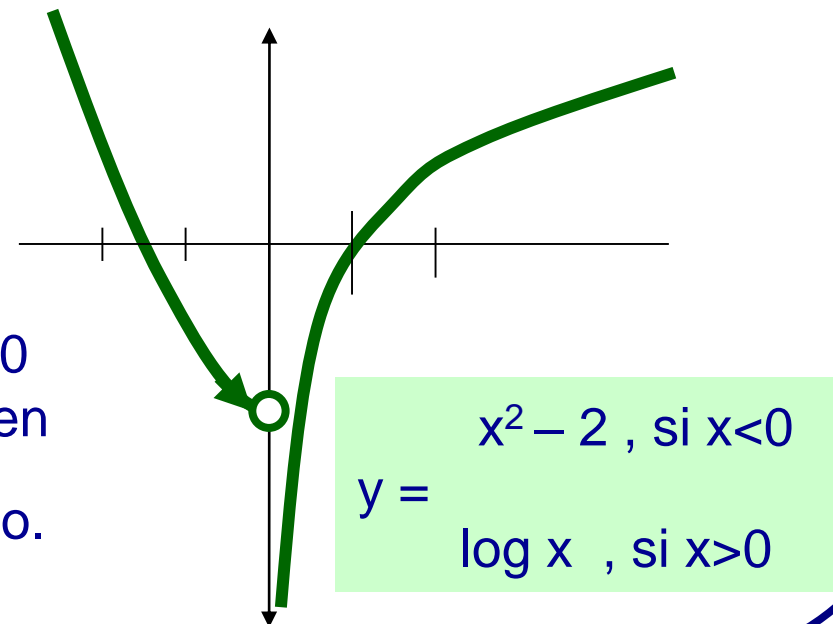
Ejemplo 1

Función continua en \mathbb{R} , excepto en $x=0$
En $x=0$ la función existe y vale 1.
Pero a la izquierda de 0 la función vale 1 ($y=1$) y
a la derecha del 0 la función vale 0 ($y=0$).
Hay una discontinuidad en $x=0$, un salto finito.



Ejemplo 2

- Función continua en \mathbb{R} , excepto en $x=0$
- En $x=0$ hay una discontinuidad, pues en ese punto no existe la función y a la izquierda del 0 su valor baja hasta $-\infty$.
- $x=0$ no forma parte del dominio.



Tipos de discontinuidades

Para estudiar la continuidad de una función hay que hacerlo en todo su dominio de definición. En aquellos puntos singulares del dominio o en aquellos puntos que no pertenezcan al dominio de la función, estudiaremos detenidamente la función y determinaremos el tipo de discontinuidad que pueda presentar.

- 1) **EVITABLE** , que es cuando no existe la función en dicho punto, pero sí el límite.
- 2) **DE 1ª ESPECIE** , cuando el valor de la función en dicho punto no coincide con el límite.
- 3) **DE 2ª ESPECIE SALTO FINITO** , cuando no existe el límite, al no coincidir el límite derecho con el izquierdo.
- 4) **DE 2ª ESPECIE SALTO INFINITO** , cuando uno de los límites derecho o izquierdo, o los dos, son más o menos infinito.

Ejemplo 1

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} x - 4 & , \text{ si } x < 2 \quad \rightarrow \text{Función lineal} \\ - 2 & , \text{ si } x \geq 2 \quad \rightarrow \text{Función constante} \end{cases}$$

A la izquierda de $x=2$ (función lineal) es continua.

A la derecha de $x=2$ (función constante) es continua.

Miramos si es continua en el punto $x=2$

$$1) f(2) = 2 - 4 = - 2$$

Es decir, $x = 2$ es un punto del dominio de la función.

$$2) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 - 4 = -2 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -2$$

El límite por la izquierda coincide con el límite por la derecha, luego existe dicho límite y vale $- 2$.

$$3) f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow - 2 = - 2$$

La función es también continua en $x = 2$. Es continua en \mathbb{R}

Ejemplo 2

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & , \text{ si } x < 3 \quad \rightarrow \text{Función cuadrática} \\ x - 3 & , \text{ si } x > 3 \quad \rightarrow \text{Función lineal} \end{cases}$$

A la izquierda de $x=3$ (función cuadrática) es continua.

A la derecha de $x=3$ (función lineal) es continua.

Miramos si es continua en el punto $x=3$

1) $f(3) = \text{NO}$ existe.

Es decir, $x=3$ no es un punto del dominio de la función.

$$2) \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3^2 - 9 = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3 - 3 = 0$$

El límite por la izquierda coincide con el límite por la derecha, luego existe dicho límite y vale 0.

$$3) f(3) \neq \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ , al no existir } f(3)$$

La función en $x=3$ presenta una DISCONTINUIDAD EVITABLE

Ejemplo 3

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{si } x \leq 1 \quad \rightarrow \text{Función cuadrática} \\ e^x, & \text{si } x > 1 \quad \rightarrow \text{Función exponencial} \end{cases}$$

A la izquierda de $x=1$ (función cuadrática) es continua.

A la derecha de $x=1$ (función exponencial) es continua.

Miramos si es continua en el punto $x=1$

$$1) f(1) = 1^2 - 2 = 1 - 2 = -1$$

Es decir, $x=1$ es un punto del dominio de la función.

$$2) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1^2 - 2 = 1 - 2 = -1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = e^1 = e$$

El límite por la izquierda NO coincide con el límite por la derecha, luego NO existe límite.

3) No se puede cumplir al no existir límite.

La función en $x=1$ presenta una DISCONTINUIDAD de 2ª ESPECIE CON SALTO FINITO.

Ejemplo 4

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & , \text{ si } x \leq 1 \quad \rightarrow \text{Función cuadrática} \\ \ln(x - 1) & , \text{ si } x > 1 \quad \rightarrow \text{Función logarítmica} \end{cases}$$

A la izquierda de $x=1$ (función cuadrática) es continua.

A la derecha de $x=1$ (función logarítmica) es continua.

Miramos si es continua en el punto $x=1$

$$1) f(1) = 1^2 - 2 = 1 - 2 = -1$$

Es decir, $x=1$ es un punto del dominio de la función.

$$2) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1^2 - 2 = 1 - 2 = -1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \ln(1 - 1) = \ln 0^+ = -\infty$$

El límite por la izquierda NO coincide con el límite por la derecha, luego NO existe límite.

$$3) f(1) \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(x) , \text{ al no existir límite.}$$

La función en $x=1$ presenta una DISCONTINUIDAD de 2ª ESPECIE CON SALTO INFINITO.

Ejemplo 5

Hallar el valor de k para que la función sea continua en todo \mathbb{R}

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & , \text{ si } x \leq 2 \\ x - k & , \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

A la izquierda de $x=2$ (función cuadrática) es continua.

A la derecha de $x=2$ (función lineal) es continua.

Miramos si es continua en el punto $x=2$

$$1) f(2) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

Es decir, $x=2$ es un punto del dominio de la función.

$$2) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 - k$$

Para que exista el límite ambos límites laterales deben ser iguales: $2 = 2 - k \rightarrow$ Luego, en este caso k debe ser 0.

$$3) \text{ Si } k = 0 \quad f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) , \text{ pues } 2 = 2$$

Si $k = 0$, la función también es continua en $x=2$, y por tanto en todo \mathbb{R} .