Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial

Alumno:	
Grupo prácticas:	*Nº (Día de semana: de a horas)*
DNI:	
Email:	

Práctica final de Julio de Matemáticas II, 18-06-2012

Instrucciones generales:
Debes crear en el escritorio una carpeta a la que nombrarás con el grupo de prácticas al que perteneces, tus apellidos, tu nombre y tu DNI (ejemplo GRUPO 13 RUIZ SANCHEZ ALBERTO DNI 32455861D) y guardar en ella todos los archivos que se indiquen en los distintos apartados, con los nombres que se asignen, sustituyendo los ?? por el número de grupo (en el ejemplo para la primera práctica: GR13PRA01.ggb). Cuando finalice el examen, deberás copiar tu carpeta en la carpeta del ordenador del profesor, correspondiente al grupo de prácticas al que perteneces, ir a su mesa para que el profesor compruebe que todos los archivos se han copiado correctamente y, a continuación, borrar la carpeta creada y vaciar la papelera.

Pregunta	Máx	Nota
1	2,0	
2	2,0	
3	2,0	
4	2,0	
5	2,0	
	Total:	

1) Secuencia de radios en una circunferencia centrada en el origen de coordenadas *(2 punto)*

Guarda el archivo con el nombre: **GR??PRA01.ggb**

a) *(0'2 puntos)* **Crea un deslizador α de tipo ángulo que tome valores entre $0°$ y $360°$ e incremento de $1°$.**

Observa que el símbolo de ° que se debe usar es el que aparece en el menú desplegable de símbolos especiales y alfabeto griego (botón α) del campo de entrada, y no el símbolo º que aparece en el teclado físico, a la izquierda de la tecla del 1.

b) *(0'2 puntos)* **Crea una circunferencia c de radio $r = 5$ centrada en el origen: x^2 + y^2 = r^2.**

c) *(0'6 puntos)* **Crea un punto A sobre la circunferencia según el valor de α. Para ello recuerda las razones trigonométricas:**

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \text{sen}\,\alpha = \frac{y}{r}$$

Comando que crea el punto A: ***A = (r*cos(α), r*sin(α))***

d) *(1 puntos)* **Utiliza el comando *Secuencia* para crear una lista l con segmentos desde el origen hasta los puntos de la circunferencia, tantos como indique α (uno por grado); es decir, si $\alpha = 45°$, entonces debe haber 45 segmentos, cada uno con la pendiente determinada por α. Ten en cuenta que el incremento debe ser de $1°$.**

Anota la instrucción utilizada: ***l=Secuencia[Segmento[(0, 0), (r*cos(i), r*sin(i))], i, 1°, α, 1°]***

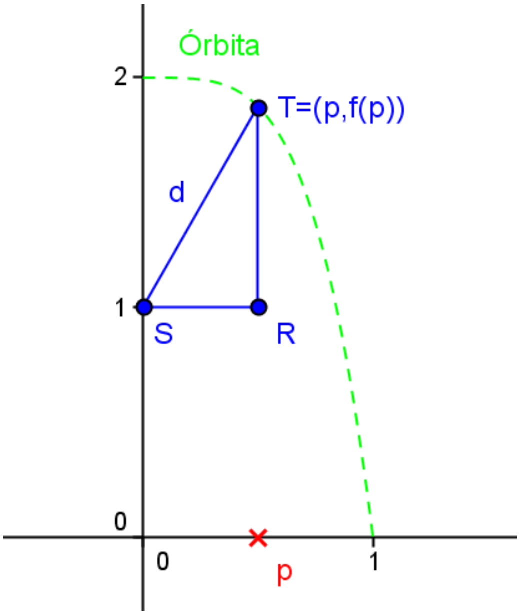
2) Distancia mínima de un punto a una curva *(2 puntos)*

Guarda el archivo con el nombre: **GR??PRA02.ggb**

Dado el punto $S = (0{,}1)$ y la función $f(x) = -2x^4 + 2$, debes obtener el punto $T = (x, f(x))$, sobre la curva $f(x)$, cuya distancia al punto S sea la mínima. El problema se podría asociar a encontrar en qué puntos la Tierra (T) está más cerca o lejos del Sol (S) si sigue la órbita de la curva $f(x)$.

a) *(0'4 puntos)* Construcción.
Para simplificar vamos a centrar nuestro estudio en el cuadrante positivo, en el que:

- Define el punto $S = (0{,}1)$.
- Define la función $f(x) = -2x^4 + 2$, de manera que se muestre sólo en el intervalo $[0{,}1]$. Edita sus propiedades para que muestre el subtítulo Órbita y un trazo discontinuo de color verde.
- Crea un punto auxiliar, P, sobre el eje de abscisas ($P = Punto[EjeX]$). Define la variable p como la abscisa del punto P ($p = x(P)$). Haz que el punto P, de coordenadas $(p, 0)$, muestre el subtítulo p y utilice el estilo de punto $\times$ con color rojo. Comprueba que puedes moverlo libremente por el eje de abscisas.
- Define el punto $T = (p, f(p))$. Edita sus propiedades para que muestre el subtítulo $T = (p, f(p))$ con color azul. Comprueba que se mueve por la gráfica de $f(x)$ cuando desplazas P a lo largo del eje de abscisas.



- Define el punto $R = (p, 1)$. Edita sus propiedades para que se muestre en color azul.
- Define el segmento ST. Edita sus propiedades y que se muestre en azul y con el subtítulo d.
- Los segmentos SR y RT. Edita sus propiedades para que se muestren en color azul.

b) *(1 puntos)* Función a optimizar.

- Teniendo en cuenta que la longitud del cateto vertical, del triangulo azul formado por los tres segmento definidos en el apartado anterior, es $f(x) - 1$, obtén la función $d(x)$ que mide la distancia entre S y T en función de x.

Anota la función:	$d(x) = \sqrt{(f(x) - 1)^2 + x^2}$

- Define la función $d(x)$ y su derivada $d'(x)$ de manera que se muestren sólo en el intervalo $[0{,}1]$.

c) *(0,6 punto)* Desplazando el punto auxiliar P por el intervalo $[0{,}1]$ y observando la gráfica de $d'(x)$, obtén las coordenadas del punto T en las que la distancia entre S y T es mínima.

Cuando ST mínimo:	$T = (0.8\,, 1.2)$
Anota las instrucciones utilizadas: (puedes visualizar el protocolo de construcción y anotar las instrucciones)	*S=(0,1)* *f(x)=Función[-2x^4,2]* *P=Punto[EjeX]* *p=x(P)* *T=(p,f(p))* *R=(p,1)* *ST=Segmento[S,T]* *SR=Segmento[S,R]* *RT=Segmento[R,T]* *d(x)=Función[sqrt((f(x)-1)^2+x^2),0,1]* *d'(x)=Función[Derivada[d(x)],0,1]*

3) Teorema del Valor Medio *(2 puntos)* Guarda el archivo con el nombre: **GR??PRA03.ggb**

Representa gráficamente la función $f(x) = ln(x + x^3)$ y observa que se cumplen las hipótesis del teorema del Valor Medio a lo largo de la función. Recuerda que este teorema dice que si la función es continua en $[a, b]$ y derivable en (a,b) entonces existe un punto c en $[a, b]$ tal que:

$$f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$$

a) *(0,4 puntos)* Define $f(x) = ln(x + x^3)$ y muestra su gráfica en color azul. Fija dos puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (b, f(b))$ de manera que las variables $a = 2$ y $b = 10$, fijadas previamente, sean respectivamente las abscisas de dichos puntos. Define $SecAB$ (en color verde), la secante que pasa por A y B y calcula el valor de su pendiente m_s (también en verde y mostrando como rótulo nombre y valor).

b) *(0'4 puntos)* Usando un deslizador Δ que tome valores entre 0 y 1 con incrementos de $0{,}01$, define un valor c que tome valores entre a y b conforme se varíe Δ, es decir, $c = a + (b - a)\Delta$.

Anota la instrucción utilizada para definir el valor de c:	$c = a + (b - a) * \Delta$

c) *(0'4 puntos)* Define el punto $C = (c, f(c))$. Define $TanC$ (en color rojo), la recta tangente a $f(x)$ que pasa por C, y calcula el valor de su pendiente m_t (también en rojo y mostrando como rótulo nombre y valor).

d) *(0'8 puntos)* Mueve el deslizador Δ hasta que las pendientes de $SecAB$ y $TanC$ sean idénticas. Anota entonces los valores de:

La pendiente de $SecAB$:	$m_s = 0.58$
El valor del deslizador:	$\Delta = 0.38$
La recta tangente:	$TanC$: $y = 0.58x + 1.97$

4) Método de Newton *(2 puntos)* Guarda el archivo con el nombre: **GR??PRA04.ggb**

a) *(0'3 puntos)* Introduce la función $f(x) = sen(x)\cos(x)$ con su gráfica en color rojo y crea un deslizador llamado a con valores de 2 a 5 e incremento 1.

b) *(0'4 puntos)* En la vista de hoja de cálculo, introduce en la celda $A1$ el valor de a. Define la celda $A2$ como la siguiente iteración con la fórmula del método de Newton (Considera que el valor de la celda $A1$ es p_n y el de la celda $A2$ el cálculo del nuevo p_{n+1}):

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}$$

c) *(0'4 puntos)* Extiende la fórmula de la celda $A2$ hasta la celda $A5$.

d) *(0'3 puntos)* Crea el punto $P = (A5,0)$ que se corresponda con la raíz hallada.

e) *(0,6 puntos)* ¿A qué raíz converge el método para los siguientes valores de a?

Raíz con $a = 2$:	$x = 1.57$
Raíz con $a = 3$:	$x = \pi$
Raíz con $a = 4$:	$x = 7.85$
Raíz con $a = 5$:	$x = 4.71$

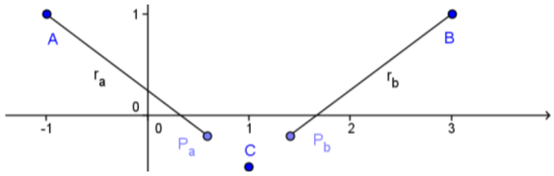
5) Punta redondeada *(2'0 puntos)* Guarda el archivo con el nombre: **GR??PRA05.ggb**

En un vértice $\widehat{ACB}$ formado por tres puntos en uve: A, B **y, en la punta inferior,** C; **vamos a fijar dos puntos,** P_a **y** P_b**, en los segmentos** AC **y** CB **desde los cuales redondear la punta. Lo haremos con una interpolación de Hermite que considere como puntos de interpolación** P_a **y** P_b **y, como derivadas en esos puntos, las pendientes de los segmentos** AP_a **y** P_bB.

a) *(0'5 puntos)* **Crea dos puntos libres** A **y** B **aproximadamente a la misma altura (ordenada positiva). Entre medio de los dos puntos, pero más bajo (ordenada negativa) pon un tercer punto libre** C**. Imagina dos segmentos,** AC **y** CB **que forman una uve con vértice en** C**. Combinando los comandos** Punto[] **y** Segmento[]**, crea un punto** P_a **en el segmento imaginario** AC **y que se pueda deslizar por él.**

Anota la instrucción utilizada | *P_a = Punto[Segmento[A, C]]*

Repite el proceso para obtener un punto P_b **que se deslice entre** C **y** B**, como lo hace** P_a **entre** A **y** C**. Luego, crea un segmento,** r_a **que vaya de** A **a** P_a **y otro,** r_b **que vaya de** P_b **a** B**. Ahora solo falta unir** P_a **y** P_b **con un arco del polinomio de tercer grado que vamos a obtener mediante interpolación por Hermite.**



Recordemos como es la tabla de diferencias divididas que se usa con Hermite para grado 3:

	z_i	$F[z_i]$	$F[z_{i-1},z_i]$	$F[z_{i-2}z_{i-1},z_i]$	$F[z_{i-3}z_{i-2}z_{i-1},z_i]$
	A	**B**	**C**	**D**	**E**
1	$z_0 = x_0$	$F[z_0] = y_0$			
2	$z_1 = x_0$	$F[z_1] = y_0$	$F[z_0,z_1] = y'_0$		
3	$z_2 = x_1$	$F[z_2] = y_1$	$F[z_1,z_2] = \frac{F[z_2]-F[z_1]}{z_2-z_1}$	$F[z_0,z_1,z_2] = \frac{F[z_1,z_2]-F[z_0,z_1]}{z_2-z_0}$	
4	$z_3 = x_1$	$F[z_3] = y_1$	$F[z_2,z_3] = y'_1$	$F[z_1,z_2,z_3] = \frac{F[z_2,z_3]-F[z_1,z_2]}{z_3-z_1}$	$\frac{F[z_1,z_2,z_3]-F[z_0,z_1,z_2]}{z_3-z_0}$

Abre la vista de hoja de cálculo y pon visible también los objetos auxiliares en la vista algebraica para poder controlar mejor las variables asociadas a las celdas de la hoja. Rellena la tabla anterior sobre la hoja de cálculo considerando que los dos puntos a interpolar son $P_a=(x_0,y_0)$ **y** $P_b=(x_1,y_1)$ **y que la derivada en esos puntos se puede obtener con el comando** Pendiente[] **aplicado a los segmentos** r_a **y** r_b**. Como al crear con el comando un objeto del tipo pendiente se dibuja, puedes hacerlo no visible cambiando sus propiedades en la variable que se crea entre los objetos auxiliares.**

b) *(0'5 puntos)* **Posiciona el punto** A **en las coordenadas** (-2,1)**, el punto** B **en las coordenadas** (2,1)**, el punto** C **en las** (0,-1)**,** P_a **en las** (-1,0) **y** P_b **en las** (1,0)**. Copia en el espacio reservado a continuación los valores que aparecen en estas circunstancias en la tabla de diferencias divididas de Hermite.**

Anota los valores de las celdas usadas

	A	B	C	D	E
1	*-1*	*0*			
2	*-1*	*0*	*-1*		
3	*1*	*0*	*0*	*-0'5*	
4	*1*	*0*	*1*	*-0'5*	*0*

Para construir el Polinómio de tercer grado de Hermite recuerda cual es su fórmula:

$$H_3(x) = F[z_0] + F[z_0,z_1](x-z_0) + F[z_0,z_1,z_2](x-z_0)(x-z_1) + F[z_0,z_1,z_2,z_3](x-z_0)(x-z_1)(x-z_2)$$

c) *(0'5 puntos)* **Crea un polinomio** $H_3(x)$ **aplicando la fórmula anterior.**

Anota la instrucción utilizada | *H_3(x) = B1 + C2(x-A1) + D3 (x-A1)(x-A2) + E4 (x-A1)(x-A2)(x-A3)*

d) *(0'2 puntos)* **Haz no visible el polinomio** $H_3(x)$**, y aplicando el comando** Función[] **crea una variable llamada** c(x) **que visualice sólo de** $H_3(x)$ **el intervalo que va del punto** P_a **al punto** P_b**.**

Anota la instrucción utilizada | *c(x) = Función[H_3, x(P_a), x(P_b)]*

e) *(0'3 puntos)* **A continuación tienes la imagen de como queda la uve con las posiciones que se te han indicado. Dibuja al lado como quedaría si a continuación cambias el punto** C **a la posición** $(0,2)$**:**