



La derivada y sus aplicaciones (I)

Tema 1





La derivada y sus aplicaciones (I)

- Noción de derivada



Noción de derivada

El concepto comenzó a plantearse en la época de la Grecia clásica (siglo III a.C.), pero se formalizó al converger en el siglo XVII matemáticos europeos en el similares sistemas de resolución a 4 problemas:

- **El problema de la recta tangente.**
- **El problema de la velocidad y aceleración.**
- **El problema de máximos y mínimos.**
- **El problema del área.**



¿Cómo varía una función?

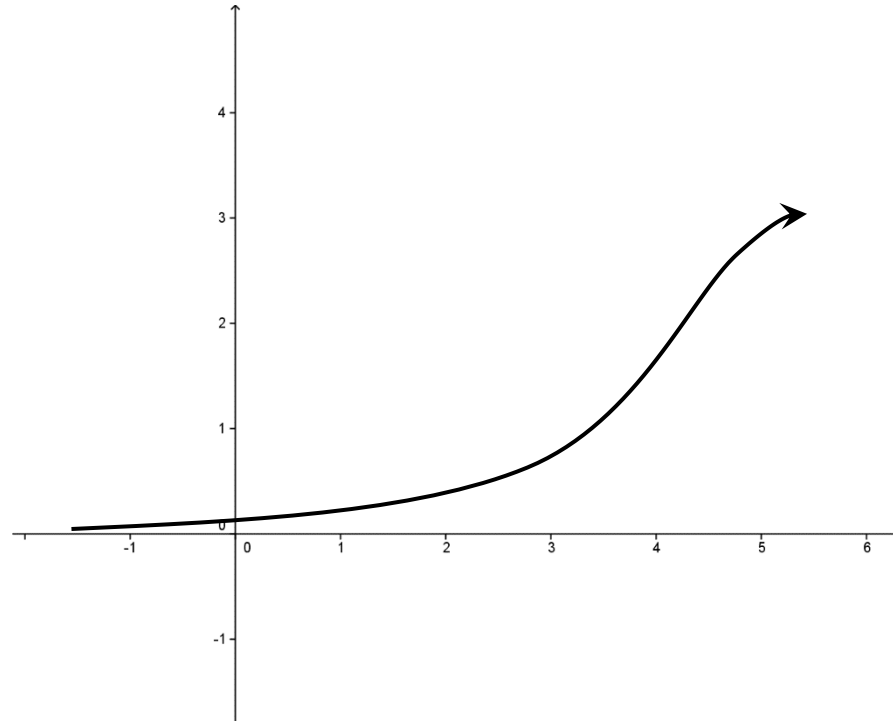
¿En qué rangos crece o decrece, en cuales crece más rápido, etc.?



¿Cómo varía una función?

¿En qué rangos crece o decrece, en cuales crece más rápido, etc.?

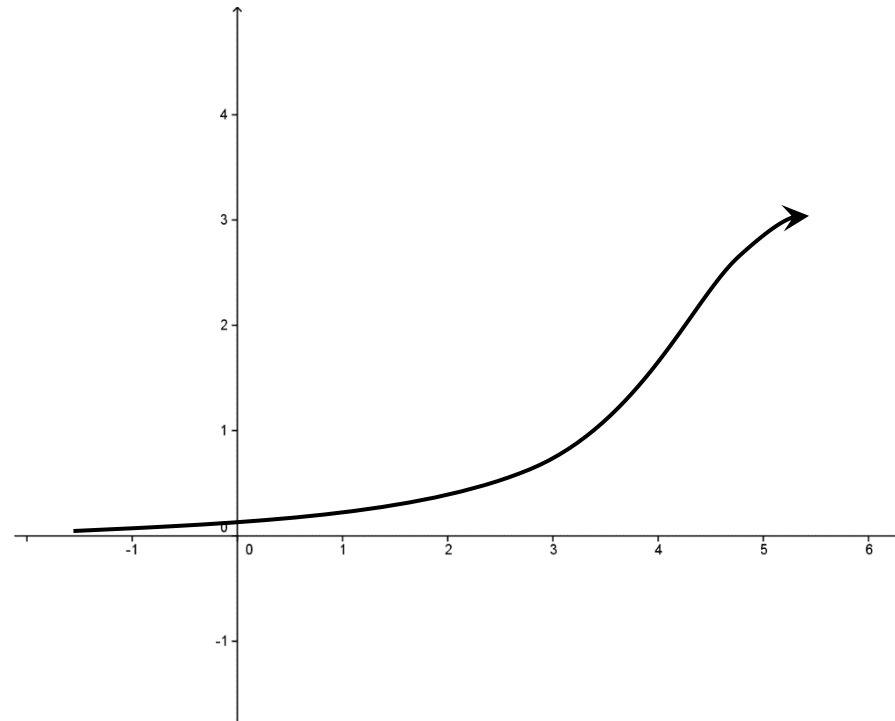
Analizaremos su representación gráfica:



¿Cómo varía una función?

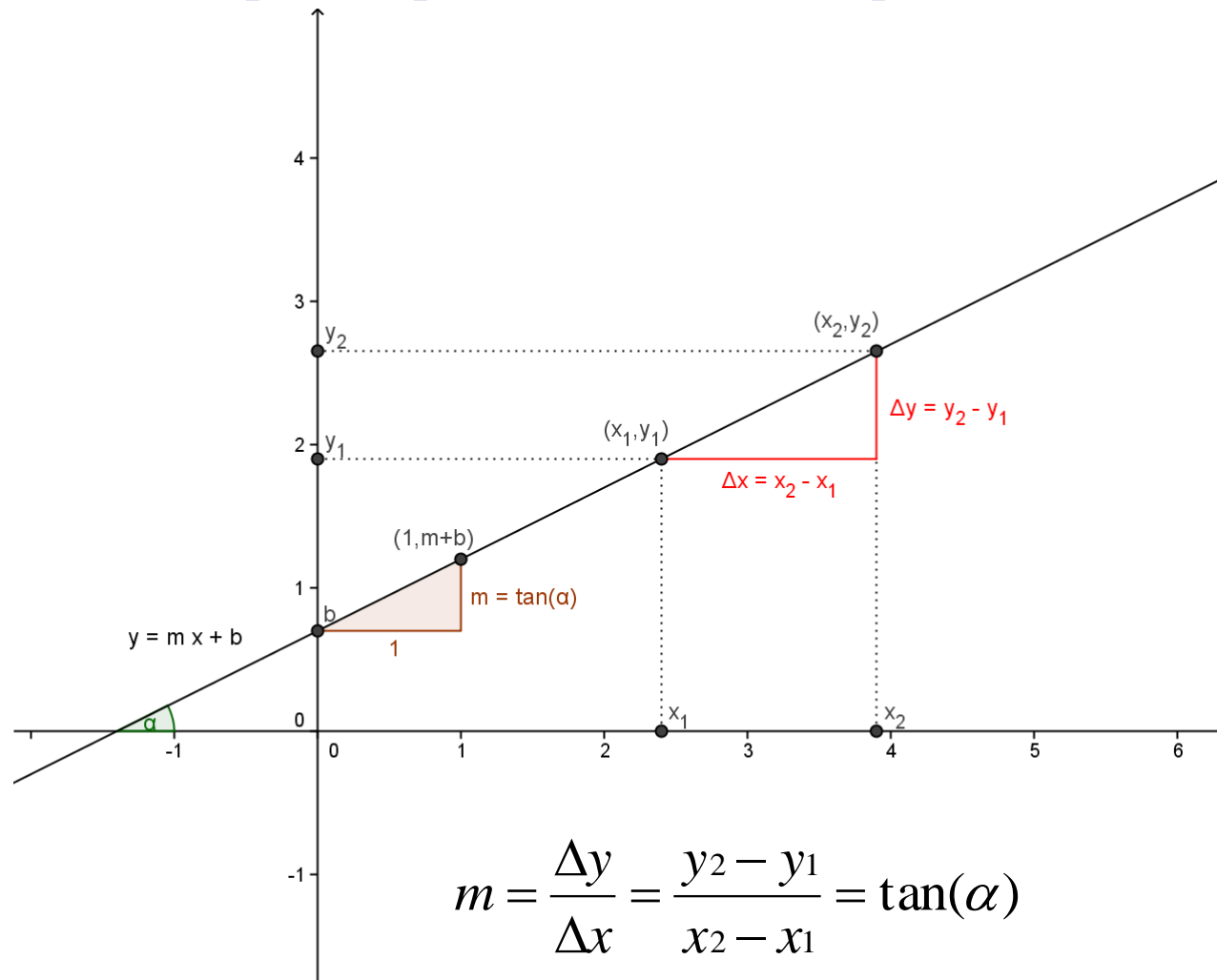
¿En qué rangos crece o decrece, en cuales crece más rápido, etc.?

Analizaremos su representación gráfica:



¿Cuánto varía y por cada unidad de x ?

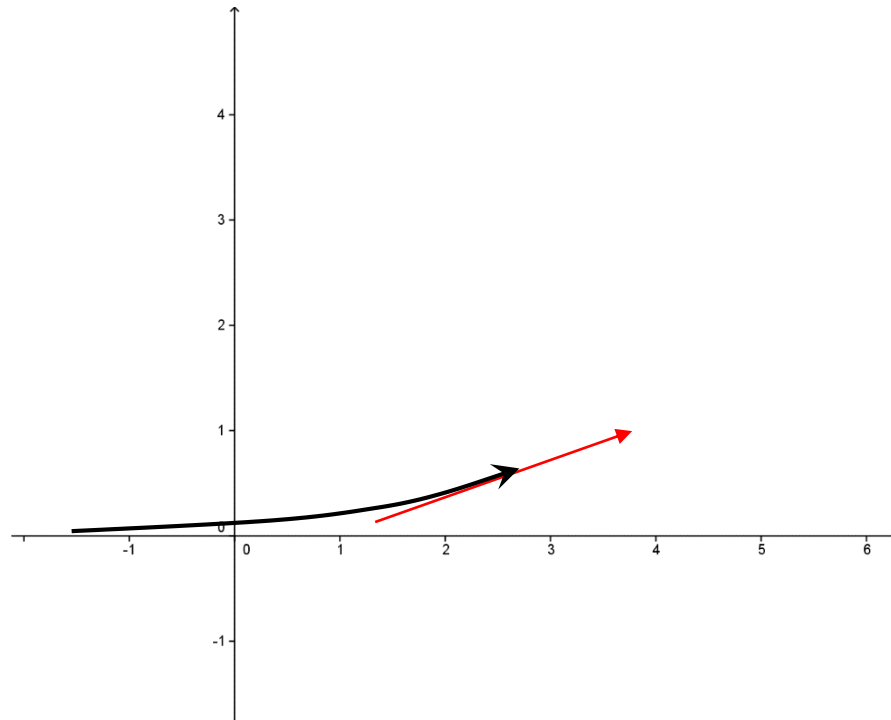
El concepto pendiente puede ayudar



En una recta, m da cuánto varía y por cada unidad de x

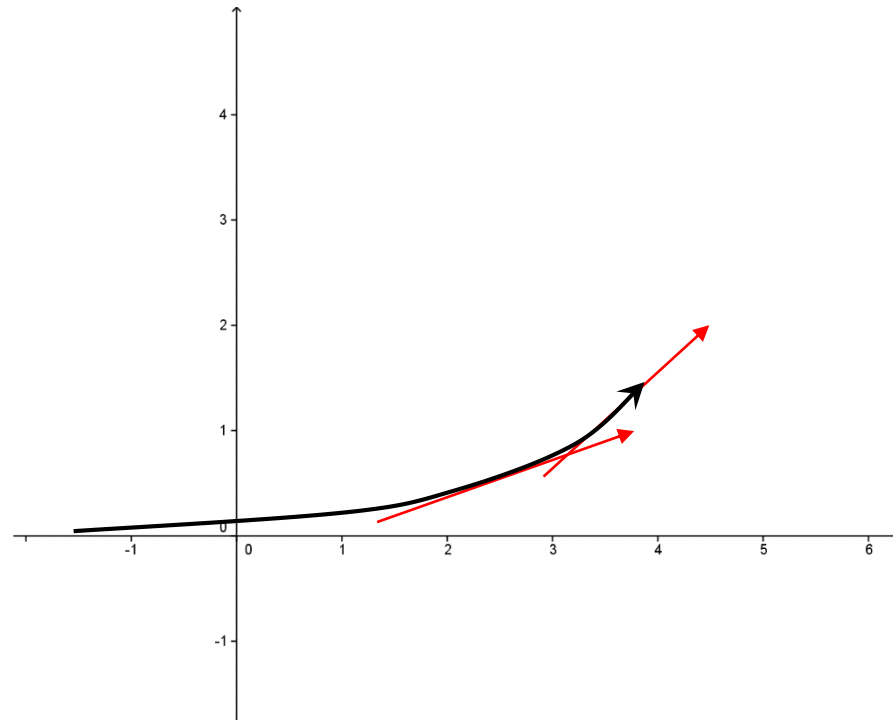
¿Las curvas tienen pendientes?

Podemos considerar que en cada punto, una curva “crece” (“gira” si consideramos el ángulo) con la pendiente de la tangente a ese punto:



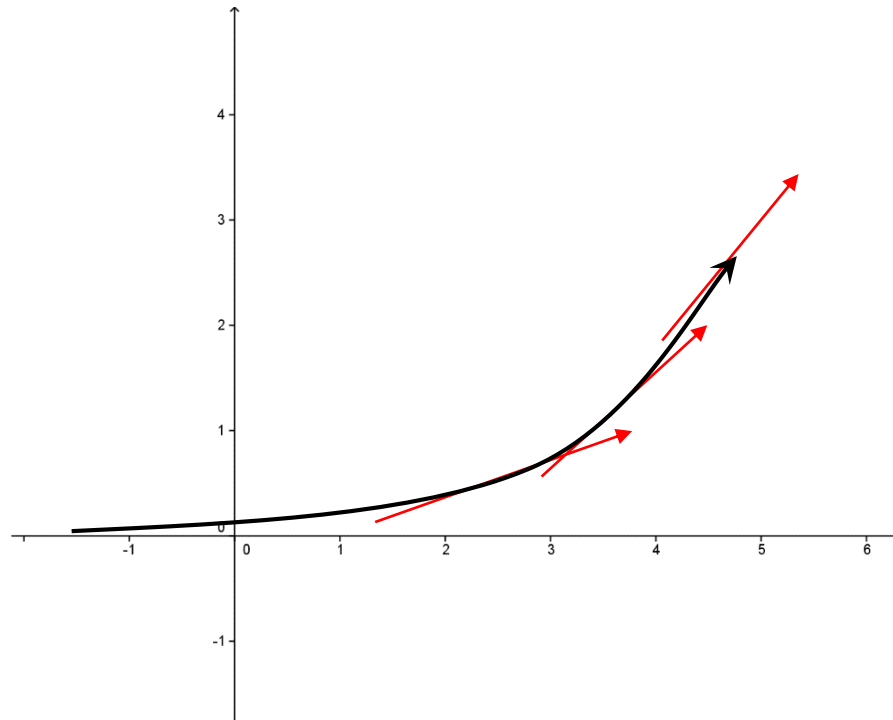
¿Las curvas tienen pendientes?

Podemos considerar que en cada punto, una curva “crece” (“gira” si consideramos el ángulo) con la pendiente de la tangente a ese punto:



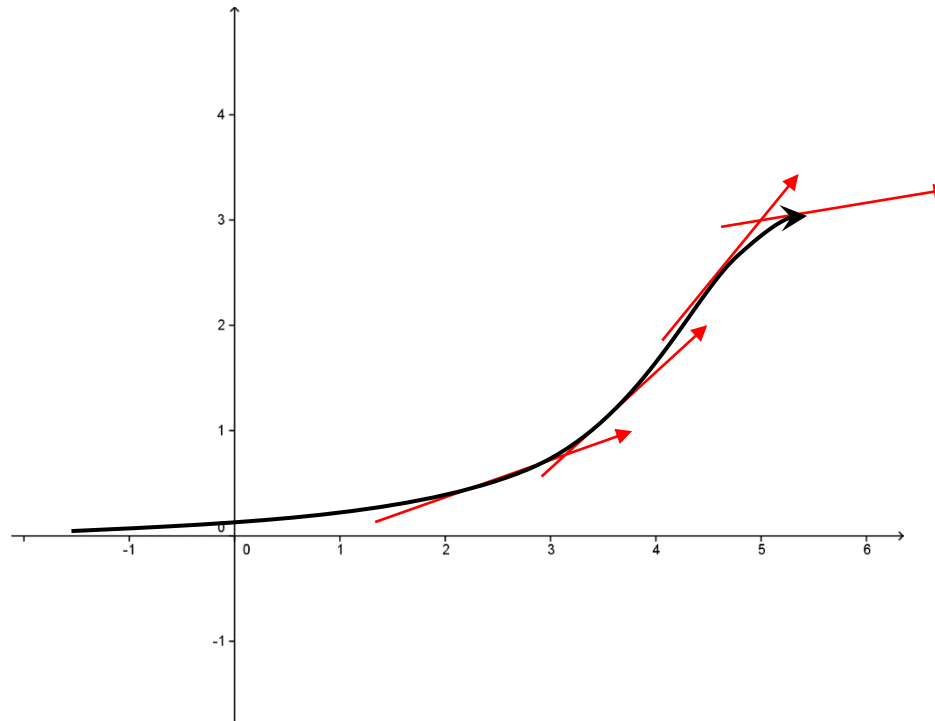
¿Las curvas tienen pendientes?

Podemos considerar que en cada punto, una curva “crece” (“gira” si consideramos el ángulo) con la pendiente de la tangente a ese punto:

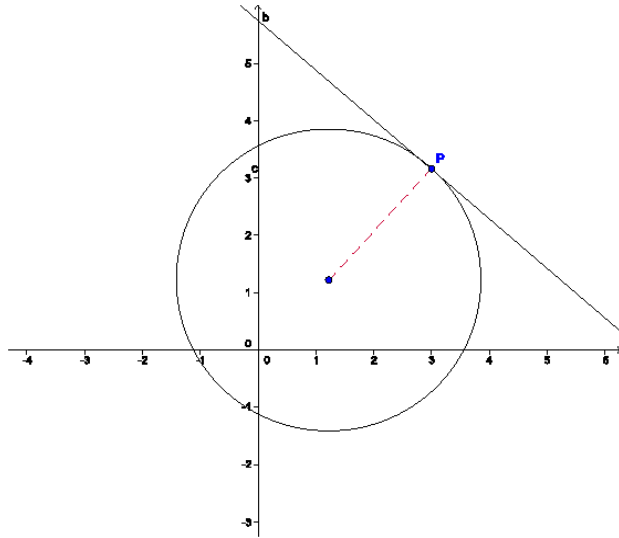


¿Las curvas tienen pendientes?

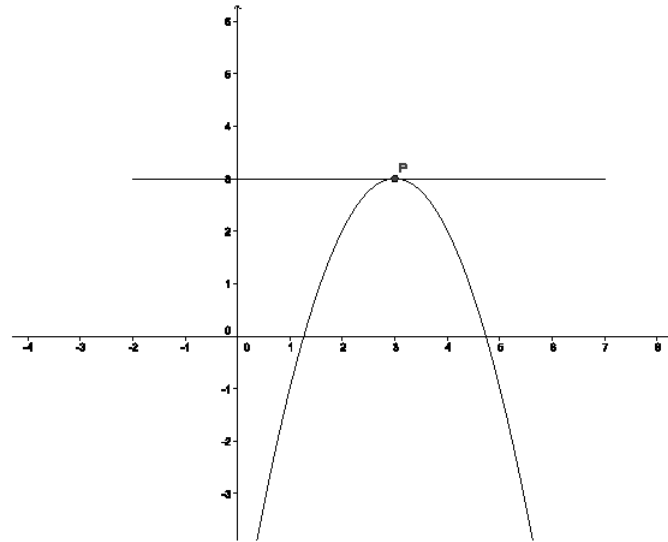
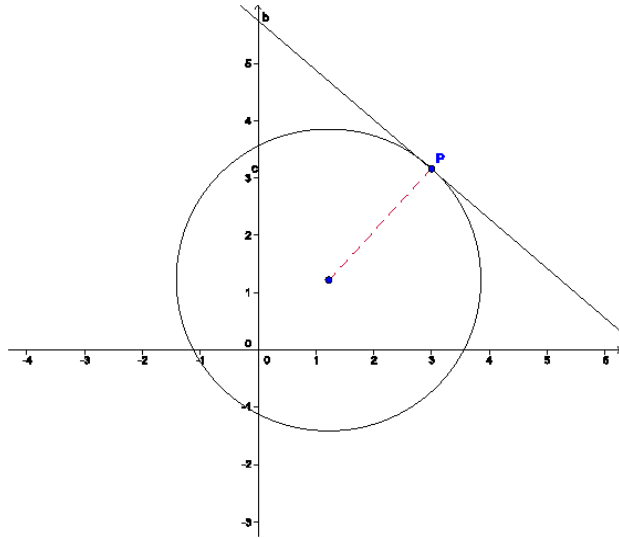
Podemos considerar que en cada punto, una curva “crece” (“gira” si consideramos el ángulo) con la pendiente de la tangente a ese punto:



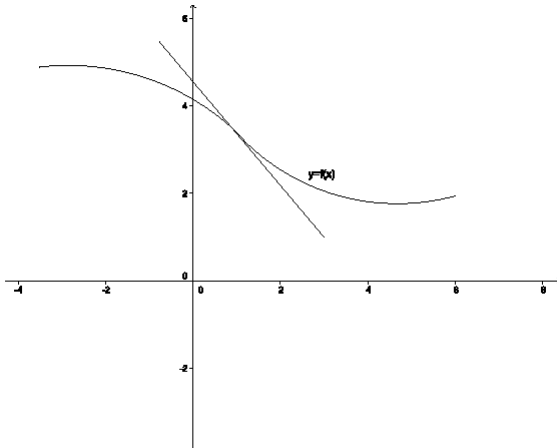
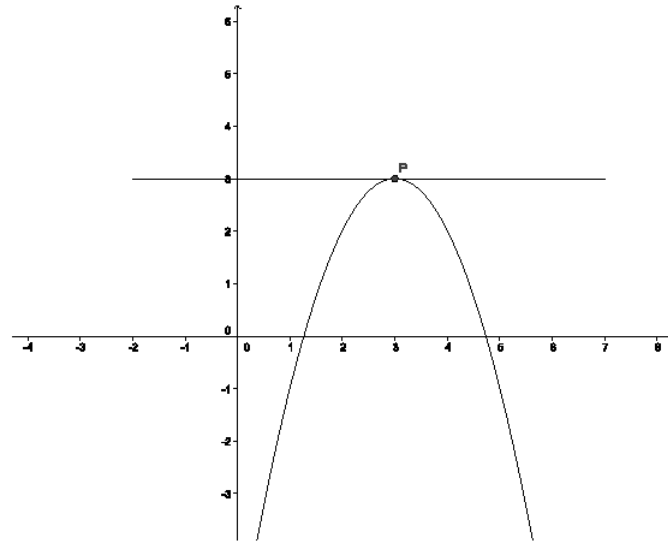
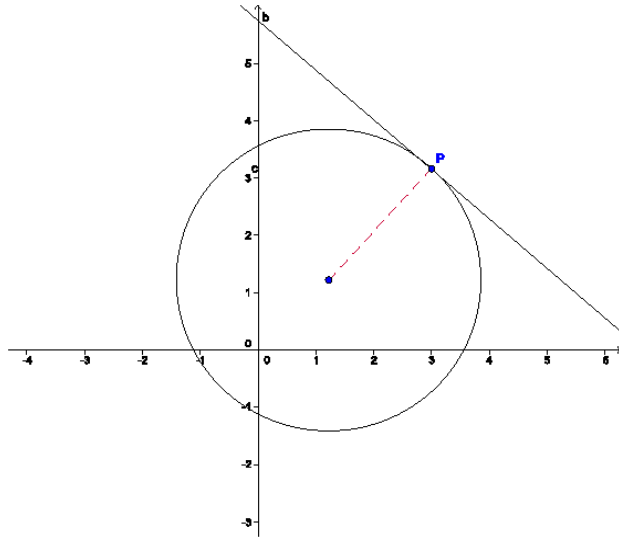
¿Qué recta consideramos tangente a una curva en un punto dado?



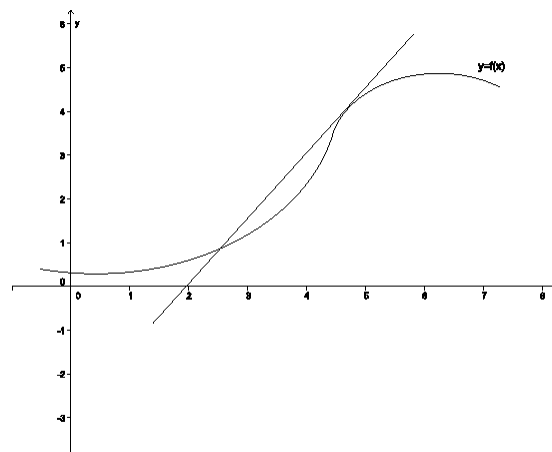
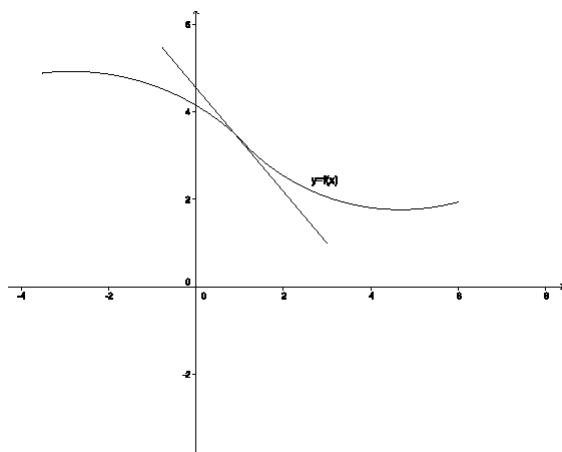
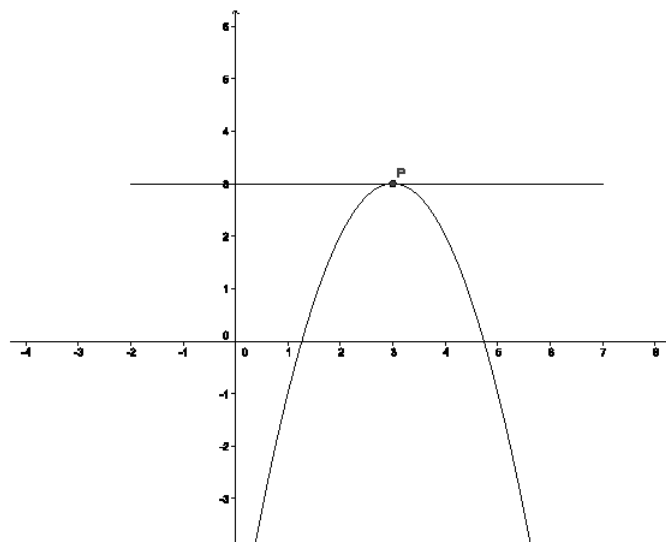
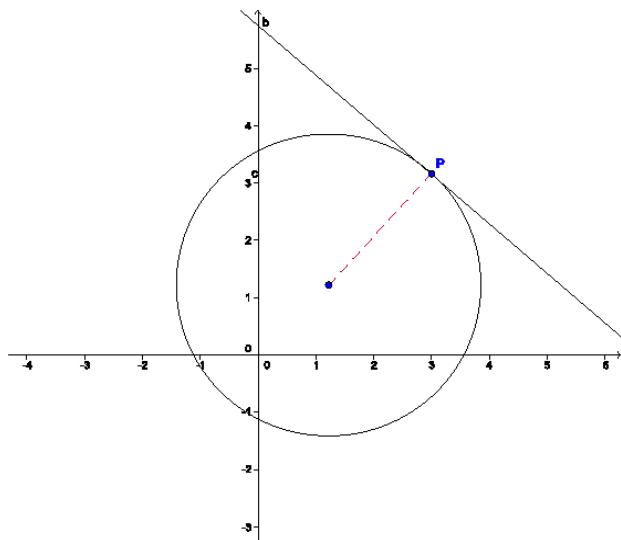
¿Qué recta consideramos tangente a una curva en un punto dado?



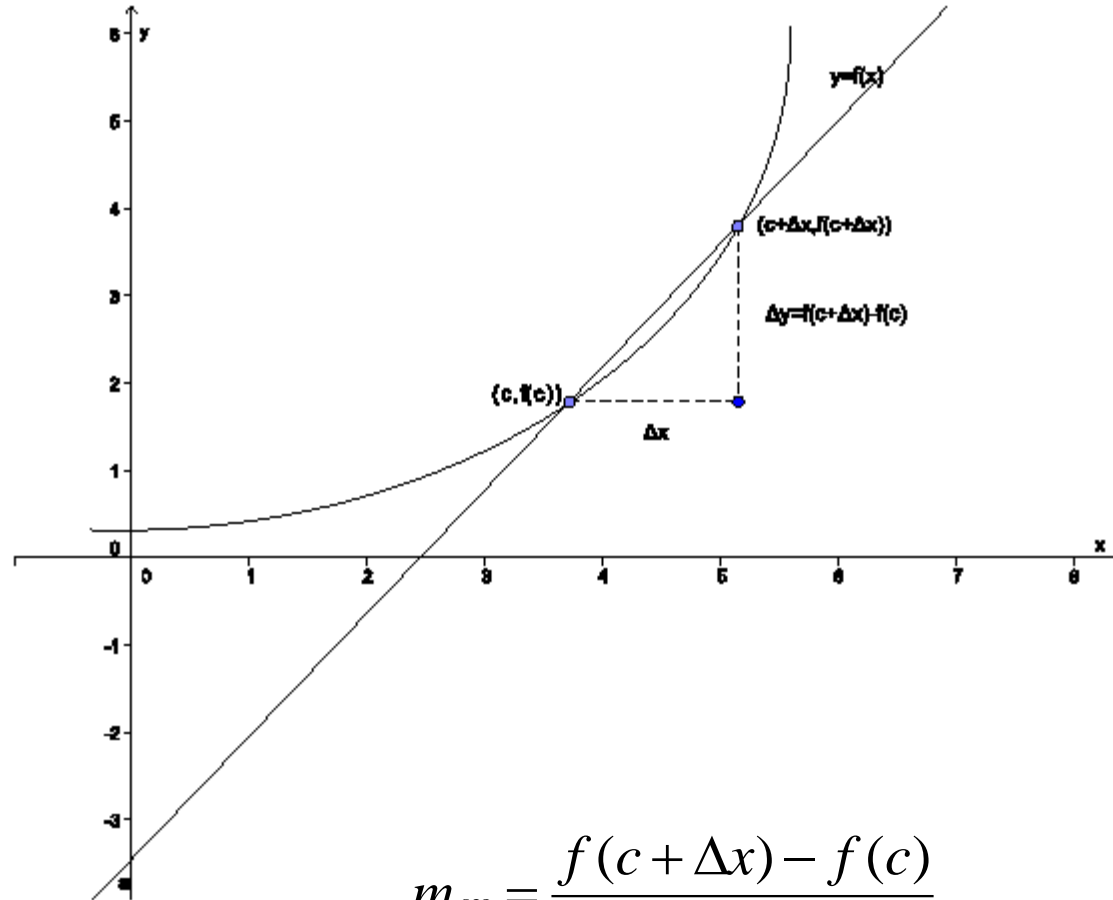
¿Qué recta consideramos tangente a una curva en un punto dado?



¿Qué recta consideramos tangente a una curva en un punto dado?

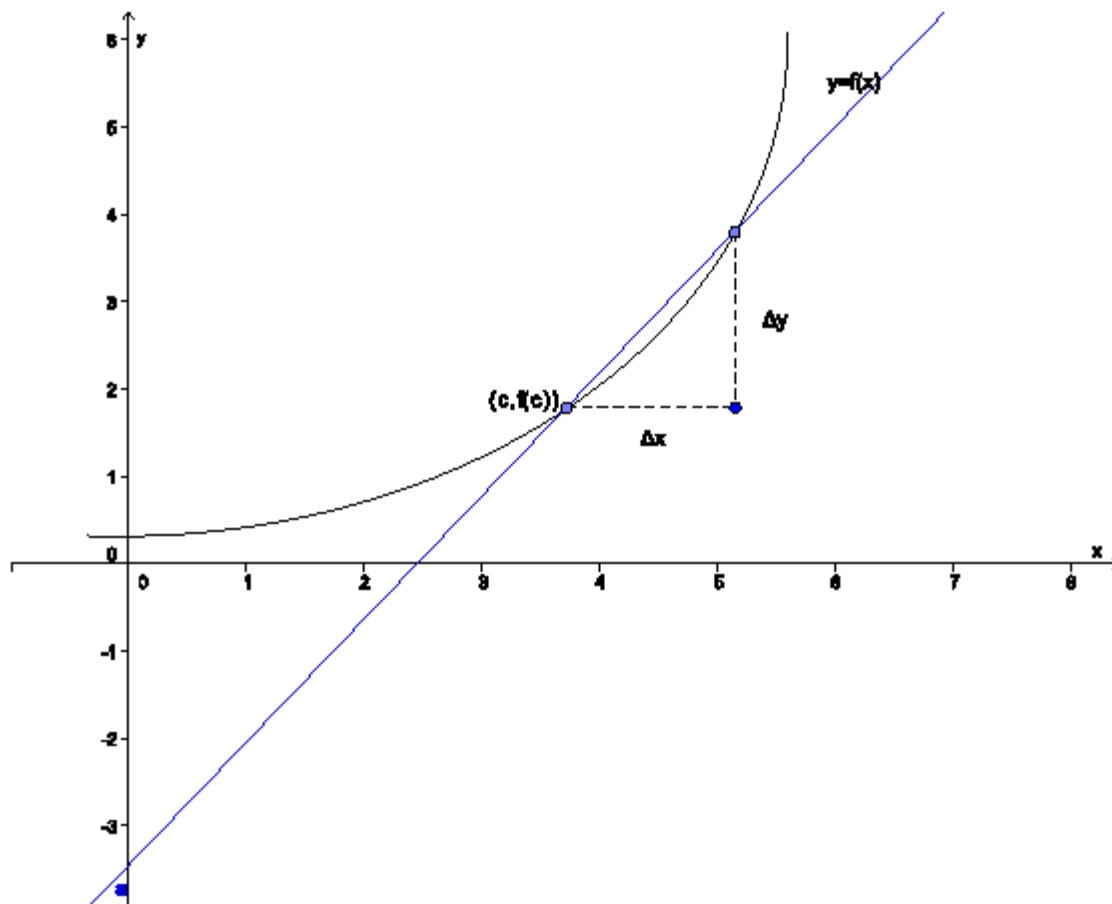


Definición a partir de la secante

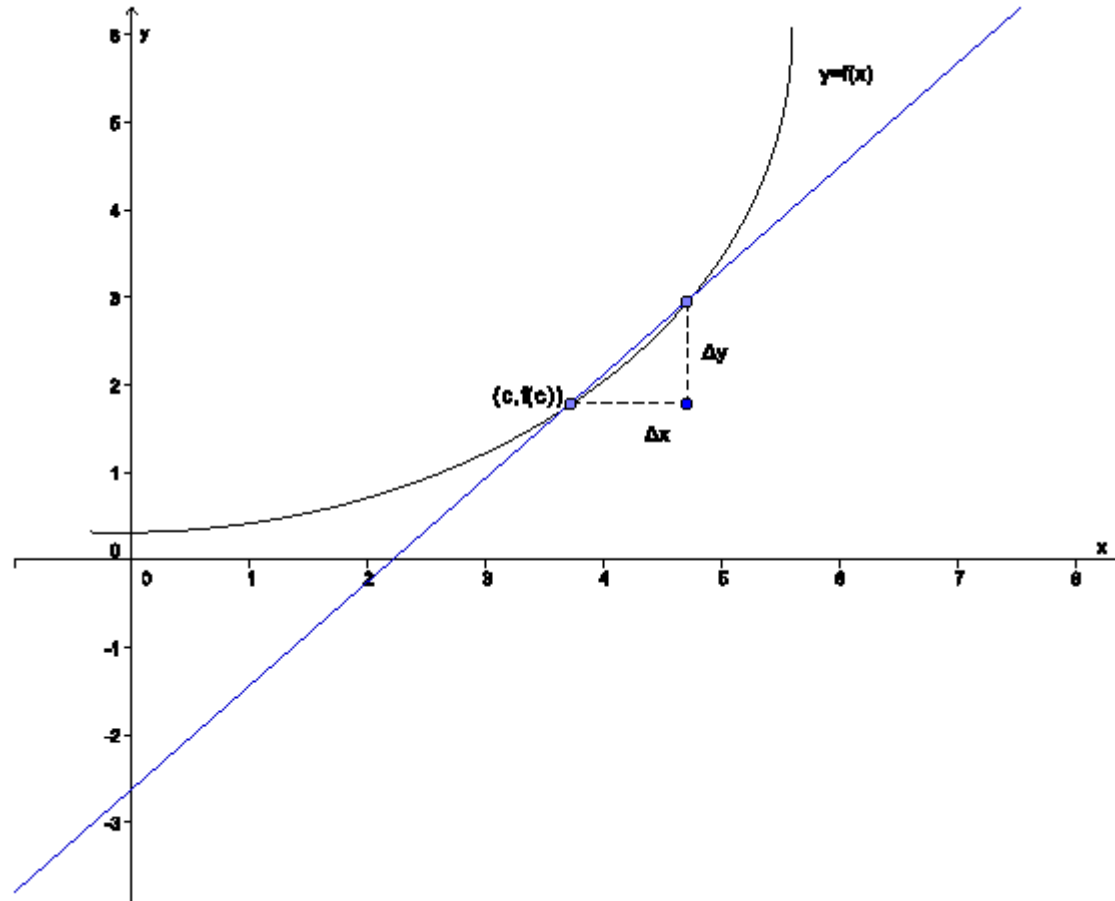


$$m_{\text{sec}} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

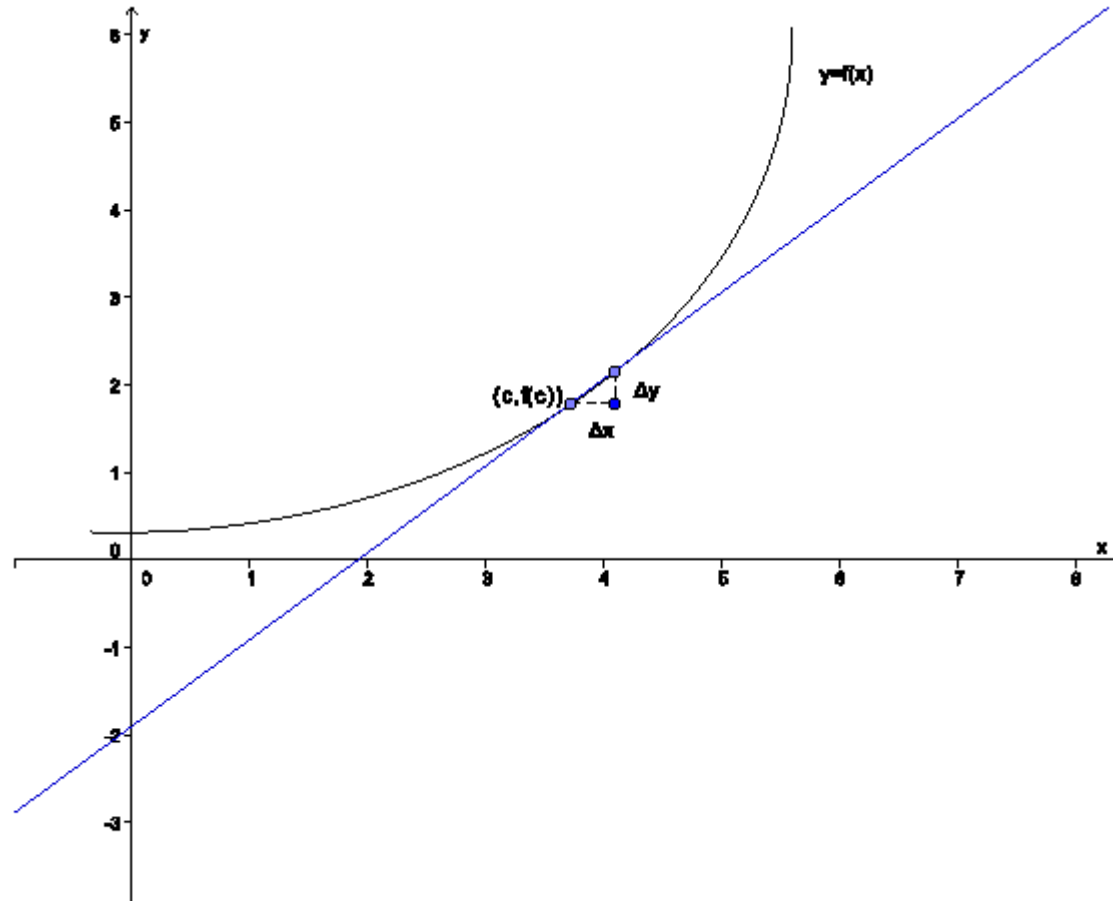
Cuanto más se reduce el incremento...



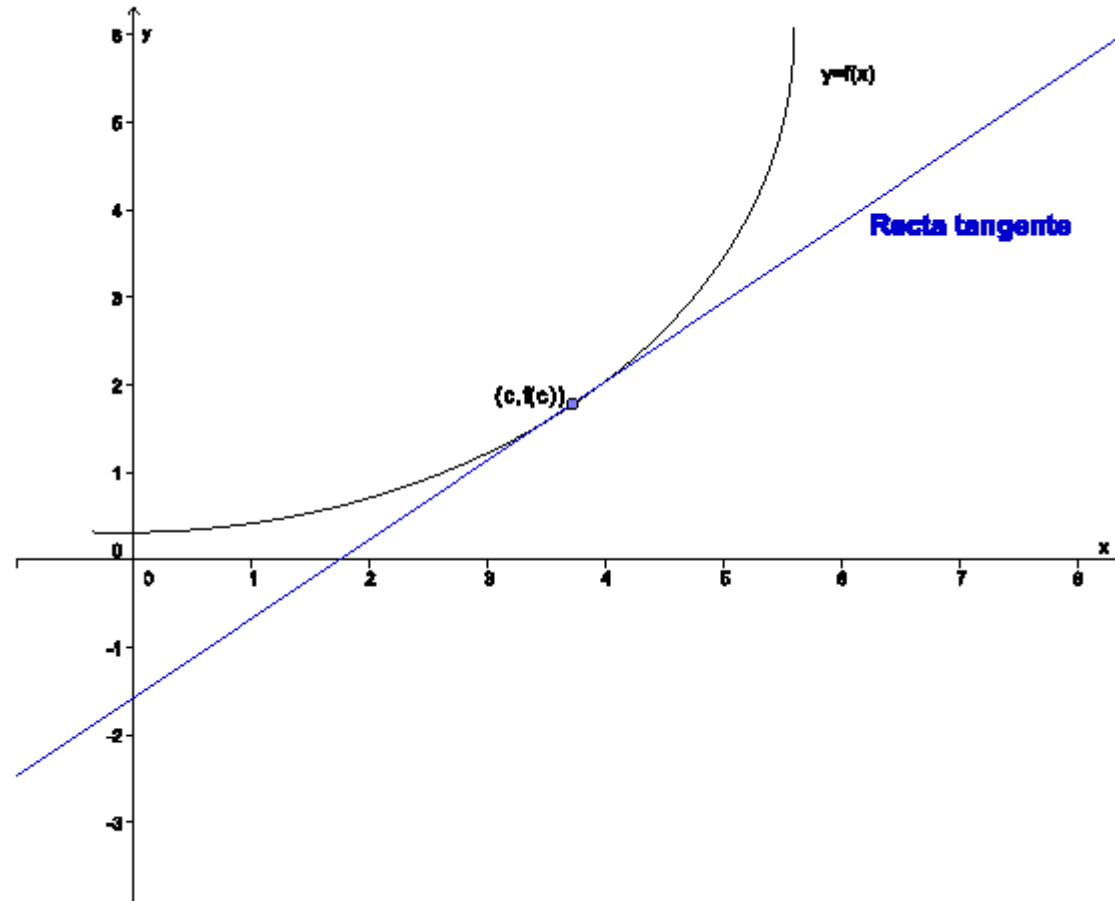
Cuanto más se reduce el incremento...



Cuanto más se reduce el incremento...



Cuanto más se reduce el incremento...



Cuando Δx tiende a ser 0 la secante tiende a ser tangente

Definición de Tangente

Si la función $f(x)$ está definida en un intervalo abierto que contiene a c y además existe el

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = m$$

entonces la recta que pasa por $(c, f(c))$ con pendiente m es la tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(c, f(c))$.

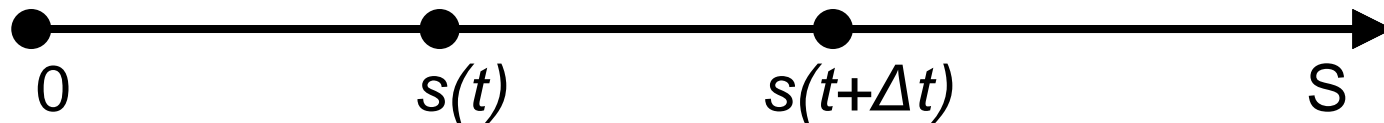
Velocidad media

Supuesta una función $s(t)$ que nos diera el espacio recorrido en un tiempo t .



Velocidad media

Supuesta una función $s(t)$ que nos diera el espacio recorrido en un tiempo t :

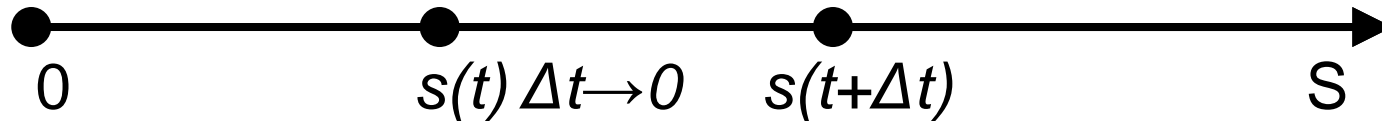


La velocidad media desde el instante t al $t+\Delta t$ sería el espacio recorrido por unidad de tiempo en ese intervalo:

$$v_m = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

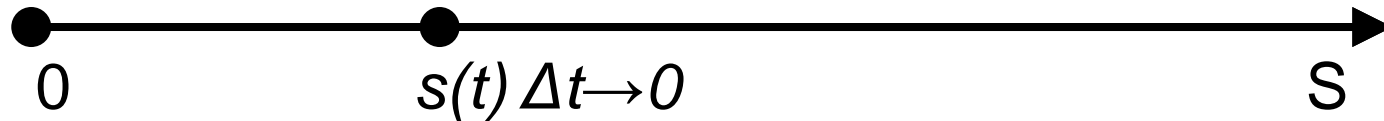
Velocidad instantánea

Si se va reduciendo Δt hasta el límite:



Velocidad instantánea

Si se va reduciendo Δt hasta el límite:



La velocidad calculada resultará instantánea:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Definición de Derivada

La derivada de f en x viene dada por la expresión:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

siempre que exista este límite. Para todos los x para los que exista este límite f' es una función de x .

Notaciones:

$$f'(x) \quad \frac{dy}{dx} \quad y' \quad \frac{d}{dx}[f(x)] \quad D_x[y]$$

Aclaraciones sobre la derivada

- Si existe la derivada $f'(a)$, se dice que f es derivable en el punto a .
- Si no existe la derivada $f'(a)$, se dice que f no es derivable en a .
- Una función es derivable en (a, b) si existe la derivada para cada número que pertenece a ese intervalo.
- La derivada de una función es un límite.
- Para hallar el límite se requiere que la función sea continua en el punto.

Interpretaciones de la derivada

- **Geométrica:**
Pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = c$.
- **Mecánica:**
Velocidad de una partícula cuya posición viene dada por $y = s(t)$ en el instante $t = c$.
- **General:**
Razón instantánea de cambio de $y = f(x)$ con respecto a x cuando $x = c$.



La derivada y sus aplicaciones (I)

- Noción de derivada
- Características

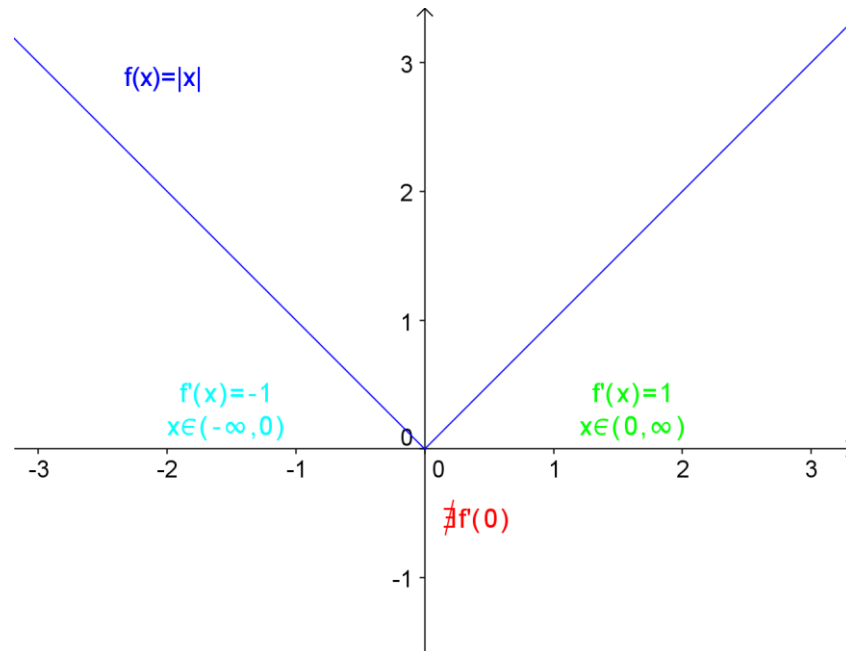


Derivada y continuidad

- Teorema:

Si f es derivable en x , entonces es continua en x .

Lo contrario
no es cierto:



¿Por qué?

Por ejemplo la función valor absoluto es continua para cualquier valor de x , pero sólo es derivable para $x < 0$ y $x > 0$

$$x < 0 \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

$$x > 0 \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

y no es derivable para $x = 0$

Límites laterales

El valor absoluto no es derivable para $x = 0$ porque sus límites laterales no coinciden:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

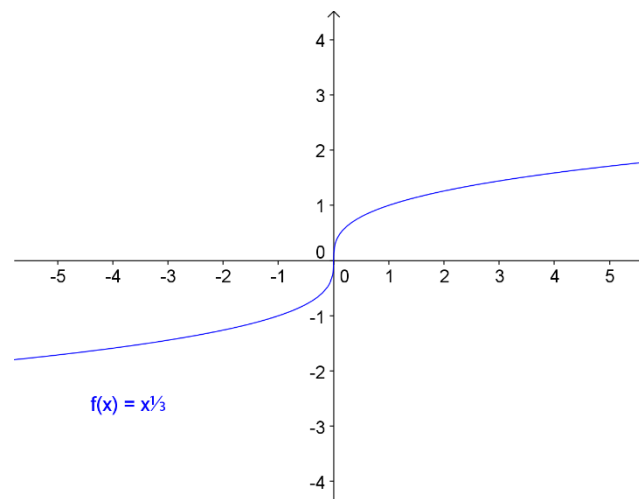
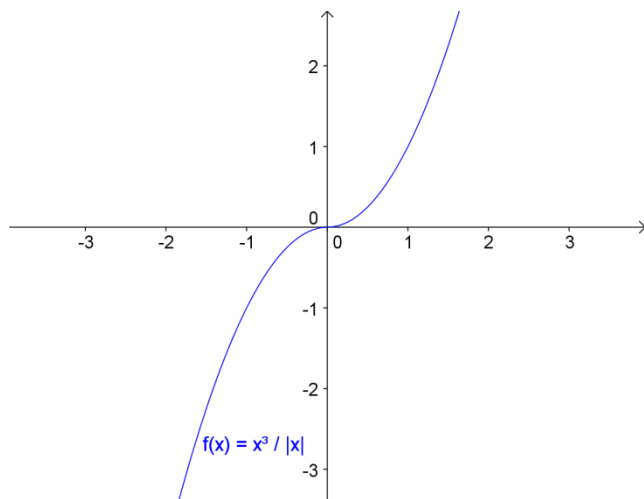
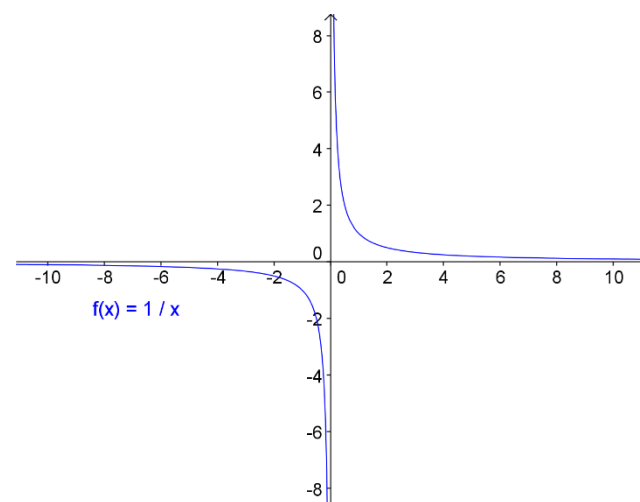
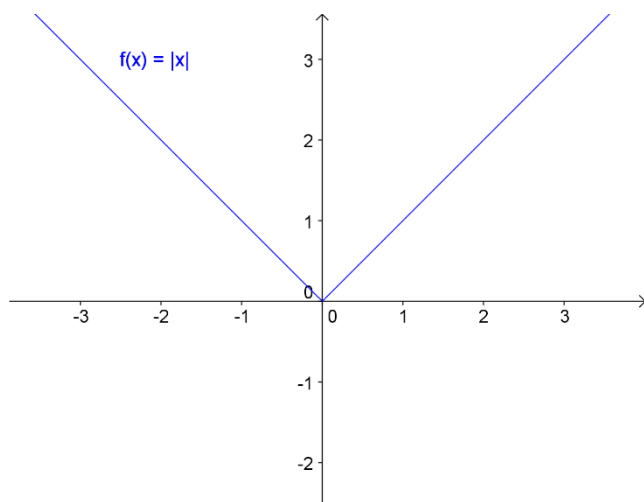
$x = 0$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

La derivada no está definida en $x = 0$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} [|x|] = \frac{x}{|x|}$$

¿Cómo puede ser una función no derivable en un punto?



La derivada y sus aplicaciones (I)

- Noción de derivada
- Características
- Reglas básicas de derivación

Derivada de una constante

Aplicamos la definición de derivada a $f(x)=c$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[c] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$

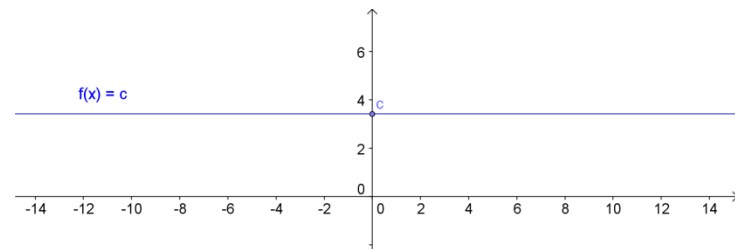
- **Regla de la constante**

La derivada de una función constante es 0.

Si c es un número real

$$\frac{d}{dx}[c] = 0$$

Ya que la pendiente en toda su gráfica es 0:



Apliquemos ahora la definición de derivada a otro ejemplo, la función $f(x)=ax^2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}[ax^2] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a(x + \Delta x)^2 - ax^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a[(x + \Delta x)^2 - x^2]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a[(x + \Delta x) + x][(x + \Delta x) - x]}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a[(x + \Delta x) + x]\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a[(x + \Delta x) + x] = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a(2x + \Delta x) = 2ax \end{aligned}$$

Ejemplo de derivada de potencia por constante:

$$\frac{d}{dx}[ax^2] = 2ax$$

Reglas básicas

- **Regla de la potencia:**

Si n es un número racional, entonces la función $f(x)=x^n$ es derivable y

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

- **Regla del múltiplo constante**

Si f es una función derivable y c una número real, entonces cf también es derivable y

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$$

Reglas de suma y diferencia

La suma (o diferencia) de dos funciones derivables f y g es derivable y

- Regla de la suma:

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

- Regla de la diferencia:

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$$

Regla del producto

El producto de dos funciones derivables f y g es derivable y

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Generalización al producto de varias funciones:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] = \\ = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x) \end{aligned}$$

Regla del cociente

El cociente de dos funciones derivables f y g es derivable para todos los valores de x en los que $g(x) \neq 0$, y

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Apliquemos la definición esta vez a $f(x) = \ln x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} [\ln x] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta x} \ln \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right) \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [\ln(1 + \Delta x / x)^{1/\Delta x}] \end{aligned}$$

Apliquemos la definición esta vez a $f(x) = \ln x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} [\ln x] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta x} \ln \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right) \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [\ln(1 + \Delta x / x)^{1/\Delta x}] \end{aligned}$$

Sustituimos $u = \Delta x / x$ ($u \rightarrow 0$ en vez de $\Delta x \rightarrow 0$)

$$\lim_{u \rightarrow 0} [\ln(1 + u)^{1/ux}] = \lim_{u \rightarrow 0} [(1/x) \ln(1 + u)^{1/u}] = \frac{1}{x} \ln [\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{1/u}]$$

Apliquemos la definición esta vez a $f(x) = \ln x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} [\ln x] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta x} \ln \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right) \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [\ln(1 + \Delta x / x)^{1/\Delta x}] \end{aligned}$$

Sustituimos $u = \Delta x / x$ ($u \rightarrow 0$ en vez de $\Delta x \rightarrow 0$)

$$\lim_{u \rightarrow 0} [\ln(1 + u)^{1/ux}] = \lim_{u \rightarrow 0} [(1/x) \ln(1 + u)^{1/u}] = \frac{1}{x} \ln [\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{1/u}]$$

Por definición $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{1/u}$

Entonces $\frac{d}{dx} [\ln x] = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$

La derivada y sus aplicaciones (I)

- Noción de derivada
- Características
- Reglas básicas de derivación
- Regla de la cadena

Regla de la cadena

Si $y=f(u)$ es una función derivable de u y a su vez $u=g(x)$ es una función derivable de x , entonces $y=f(g(x))$ es una función derivable de x tal que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

Apliquemos regla de la cadena a $y = \ln e^x$
suponiendo $u=e^x$

$$\frac{d}{dx}[\ln e^x] = \frac{d}{du}[\ln e^x] \cdot \frac{d}{dx}[e^x]$$

Como vimos anteriormente $\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$

Por lo que $\frac{d}{dx}[\ln e^x] = \frac{1}{e^x} \cdot \frac{d}{dx}[e^x]$

Si además $\frac{d}{dx}[\ln e^x] = \frac{d}{dx}[x] = 1$

Entonces $\frac{1}{e^x} \cdot \frac{d}{dx}[e^x] = 1$ **y** $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$

Regla general de la potencia

Aplicando la regla de la cadena se puede generalizar la regla de la potencia:

Si $y=[u(x)]^n$, donde u es una función derivable de x y n un número racional, entonces

$$\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1} \frac{du}{dx}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}u'$$

La derivada y sus aplicaciones (I)

- Noción de derivada
- Características
- Reglas básicas de derivación
- Regla de la cadena
- Tablas de derivadas y ejemplos

Tablas de derivadas

- Demostradas en ejemplos:

- $f(x) = |x|$ $f'(x) = x/|x|$ si $x \neq 0$
- $f(x) = \ln x$ $f'(x) = 1/x$ si $x > 0$
- $f(x) = e^x$ $f'(x) = e^x$

- Algunas trigonométricas:

- $f(x) = \sin x$ $f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x$ $f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \tan x$ $f'(x) = \sec^2 x$
- $f(x) = \cot x$ $f'(x) = \csc^2 x$
- $f(x) = \sec x$ $f'(x) = \sec x \tan x$
- $f(x) = \csc x$ $f'(x) = -\csc x \cot x$

- Reglas y tablas completas:

- http://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Tabla_de_derivadas

Tabla resumen

Reglas generales de derivación			
Producto por un número	$\frac{d}{dx} [cf] = cf'$		
Suma	$\frac{d}{dx} [f + g] = f' + g'$	Diferencia	$\frac{d}{dx} [f - g] = f' - g'$
Producto	$\frac{d}{dx} [fg] = f'g + fg'$	Cociente	$\frac{d}{dx} \left[\frac{f}{g} \right] = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
Derivadas de funciones algebraicas			
Regla de la constante	$\frac{d}{dx} [c] = 0$	Regla simple de la potencia	$\frac{d}{dx} [x^n] = nx^{n-1}, \frac{d}{dx} [x] = 1$
Derivadas de funciones trigonométricas			
Seno	$\frac{d}{dx} [\text{sen } x] = \cos x$	Coseno	$\frac{d}{dx} [\cos x] = -\text{sen } x$
Tangente	$\frac{d}{dx} [\tan x] = \sec^2 x$	Cotangente	$\frac{d}{dx} [\cot x] = -\csc^2 x$
Secante	$\frac{d}{dx} [\sec x] = \sec x \tan x$	Cosecante	$\frac{d}{dx} [\csc x] = -\csc x \cot x$
Regla de la cadena			
Regla de la cadena	$\frac{d}{dx} [f(u)] = f'(u) u'$	Regla general de la potencia	$\frac{d}{dx} [u^n] = n u^{n-1} u'$



Ejemplo 1

Obtener la derivada para $y = (x^2 + 1)^3$



Ejemplo 1

Obtener la derivada para $y = (x^2 + 1)^3$

Consideraremos $u = (x^2 + 1)$
e $y = u^3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot u' = 3(x^2 + 1)^2 \cdot (2x) = 6x(x^2 + 1)^2$$

Ejemplo 2

¿Dónde $f'(x)$ es 0 y dónde no existe?

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$$

Ejemplo 2

¿Dónde $f'(x)$ es 0 y dónde no existe?

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$$

Consideraremos $u = (x^2 - 1)$ e $y = u^{2/3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2/3)u^{-(1/3)} \cdot u' = \frac{2}{3}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \cdot (2x)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

Ejemplo 2

¿Dónde $f'(x)$ es 0 y dónde no existe?

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$$

Consideraremos $u = (x^2 - 1)$ e $y = u^{2/3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2/3)u^{-(1/3)} \cdot u' = \frac{2}{3}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \cdot (2x)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

$f'(x)=0$ si $4x=0$, es decir, si $x=0$

$f'(x)$ no existe si $x^2-1=0$, es decir, si $x=\pm 1$

Ejemplo 3

Obtenir la derivada de $f(x) = \text{sen}^3 4x$

$$f(x) = (\text{sen}(4x))^3$$

Ejemplo 3

Obtenir la derivada de $f(x) = \text{sen}^3 4x$

$$f(x) = (\text{sen}(4x))^3$$

Consideraremos

$$y = u^3, \quad u = \text{sen } t \quad y \quad t = 4x$$

Ejemplo 3

Obtenir la derivada de $f(x) = \text{sen}^3 4x$

$$f(x) = (\text{sen}(4x))^3$$

Consideraremos

$$y = u^3, \quad u = \text{sen } t \quad y \quad t = 4x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot \left(\frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \right) = 3(\text{sen}(t))^2 \cdot (\cos(t)) \cdot t'$$

$$f'(x) = 3(\text{sen}(4x))^2 (\cos(4x))4 = 12 \cdot \text{sen}^2 4x \cdot \cos 4x$$

Ejemplo 4

Obtener la tangente a $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x$
en el punto $(\pi, 1)$

Ejemplo 4

Obtenir la tangente a $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x$
en el punto $(\pi, 1)$

Consideraremos

$$y = 2u + t, \quad u = \operatorname{sen} x, \quad t = \cos s, \quad y \quad s = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \frac{dy}{du} + \frac{dt}{dx} = 2 \cos(x) + \left(\frac{dt}{ds} \cdot \frac{ds}{dx} \right) = 2 \cos(x) + (-\operatorname{sen}(s)) \cdot s'$$

$$f'(x) = 2 \cos x + (-\operatorname{sen}(2x))2 = 2 \cos x - 2 \operatorname{sen} 2x$$

Ejemplo 4

Obtener la tangente a $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x$ en el punto $(\pi, 1)$

Consideraremos

$$y = 2u + t, \quad u = \operatorname{sen} x, \quad t = \cos s, \quad y \quad s = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \frac{dy}{du} + \frac{dt}{dx} = 2 \cos(x) + \left(\frac{dt}{ds} \cdot \frac{ds}{dx} \right) = 2 \cos(x) + (-\operatorname{sen}(s)) \cdot s'$$

$$f'(x) = 2 \cos x + (-\operatorname{sen}(2x))2 = 2 \cos x - 2 \operatorname{sen} 2x$$

Pendiente en $(\pi, 1)$ $f'(\pi) = 2 \cos \pi - 2 \operatorname{sen} 2\pi = -2$

Recta con pendiente -2 que pasa por $(\pi, 1)$

$$y = mx + b = -2x + (1 + 2\pi)$$

La derivada y sus aplicaciones (I)

- Noción de derivada
- Características
- Reglas básicas de derivación
- Regla de la cadena
- Tablas de derivadas y ejemplos
- Derivación implícita

Derivación implícita

Hasta ahora hemos trabajado siempre con funciones explícitas de la forma: $y=f(x)$

No siempre es posible obtener una expresión con la y despejada a la izquierda de la igualdad, y a la derecha una expresión dependiente únicamente de x , y tanto una parte como la otra de la igualdad podrán depender de ambas variables: $\sigma(x,y)=\tau(x,y)$

Derivación implícita

Otras veces simplemente nos interesará más la forma implícita que la explícita, como estrategia para simplificar la derivada, o entender mejor el concepto a aplicar, etc.

Podemos derivar una expresión implícita derivando ambos lados de la igualdad, pero siendo conscientes de que derivamos ambos respecto a la misma variable, x por lo general.

Respecto a la variable apropiada

Si derivamos respecto a x son correctas las expresiones:

$$1. \quad \frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2$$

$$2. \quad \frac{d}{dx}[y^3] = 3y^2 \frac{dy}{dx}$$

$$3. \quad \frac{d}{dx}[x + 3y] = 1 + 3 \frac{dy}{dx}$$

$$4. \quad \frac{d}{dx}[xy^2] = \frac{d}{dx}[x]y^2 + x \frac{d}{dx}[y^2] = 1y^2 + x \left((2y) \frac{dy}{dx} \right) = y^2 + 2xy \frac{dy}{dx}$$

Estrategia para la derivación implícita

1. Derivar ambos lados de la ecuación respecto a x .
2. Agrupar todos los términos en que aparezca dy/dx en el lado izquierdo de la ecuación y pasar todos los demás a la derecha.
3. Sacar factor común dy/dx en el lado izquierdo de la ecuación.
4. Despejar dy/dx

Ejemplo

Obtener la derivada de y respecto a x de $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$

Paso 1)

Derivar ambos lados de la ecuación respecto de x

$$\frac{d}{dx}[y^3 + y^2 - 5y - x^2] = \frac{d}{dx}[-4]$$

$$\frac{d}{dx}[y^3] + \frac{d}{dx}[y^2] - \frac{d}{dx}[5y] - \frac{d}{dx}[x^2] = \frac{d}{dx}[-4]$$

$$3y^2 \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} - 5 \frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

Ejemplo

Obtener la derivada de y respecto a x de $y^3+y^2-5y-x^2=-4$

Paso 2)

Agrupar todos los términos en los que aparezca dy/dx en el lado izquierdo de la ecuación y pasar todos los demás a la derecha.

$$3y^2 \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} - 5 \frac{dy}{dx} = 2x$$

Ejemplo

Obtener la derivada de y respecto a x de $y^3+y^2-5y-x^2=-4$

Paso 3)

Sacar factor común dy/dx en el lado izquierdo de la ecuación.

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 + 2y - 5) = 2x$$

Paso 4)

Despejar la derivada de y respecto a x .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$$

La derivada y sus aplicaciones (I)

- Noción de derivada
- Características
- Reglas básicas de derivación
- Regla de la cadena
- Tablas de derivadas y ejemplos
- Derivación implícita
- Derivadas de orden superior

Derivadas de orden superior

Llamamos derivada de segundo orden a la derivada de la función derivada de una dada.

$$f(x) \Rightarrow \frac{df}{dx}(x) = f'(x) \Rightarrow \frac{d^2 f}{dx}(x) = f''(x)$$

La derivada tercera es la derivada de la función derivada segunda.

$$f(x) \Rightarrow \frac{df}{dx}(x) \Rightarrow \frac{d^2 f}{dx}(x) \Rightarrow \frac{d^3 f}{dx}(x)$$

Y así sucesivamente se da origen a las derivadas de orden superior.

Ejemplo

Obtener todas las derivadas de orden superior de $f(x)=x^5$

$$f(x) = x^5$$

$$\frac{d(x^5)}{dx} = 5x^4$$

$$\frac{d^2(x^5)}{dx^2} = \frac{d(5x^4)}{dx} = 20x^3$$

$$\frac{d^3(x^5)}{dx^3} = \frac{d^2(5x^4)}{dx^2} = \frac{d(20x^3)}{dx} = 60x^2$$

$$\frac{d^4(x^5)}{dx^4} = \frac{d^3(5x^4)}{dx^3} = \frac{d^2(20x^3)}{dx^2} = \frac{d(60x^2)}{dx} = 120x$$

$$\frac{d^5(x^5)}{dx^5} = \frac{d^4(5x^4)}{dx^4} = \frac{d^3(20x^3)}{dx^3} = \frac{d^2(60x^2)}{dx^2} = \frac{d(120x)}{dx} = 120$$

$$\frac{d^6(x^5)}{dx^6} = \frac{d^5(5x^4)}{dx^5} = \frac{d^4(20x^3)}{dx^4} = \frac{d^3(60x^2)}{dx^3} = \frac{d^2(120x)}{dx^2} = \frac{d(120)}{dx} = 0$$

Y a partir de esta todas son 0.

La derivada y sus aplicaciones (I)

- Noción de derivada
- Características
- Reglas básicas de derivación
- Regla de la cadena
- Tablas de derivadas y ejemplos
- Derivación implícita
- Derivadas de orden superior
- Valores extremos en un intervalo

Máximo y mínimo

Sea f una función definida sobre un intervalo $[a,b]$ que contiene a c :

$f(c)$ es un **máximo** de f en $[a,b]$ si $f(c) \geq f(x)$
para todo $x \in [a,b]$

$f(c)$ es un **mínimo** de f en $[a,b]$ si $f(c) \leq f(x)$
para todo $x \in [a,b]$

Se conocen por **Valores extremos**

Máximo absoluto

Mínimo absoluto

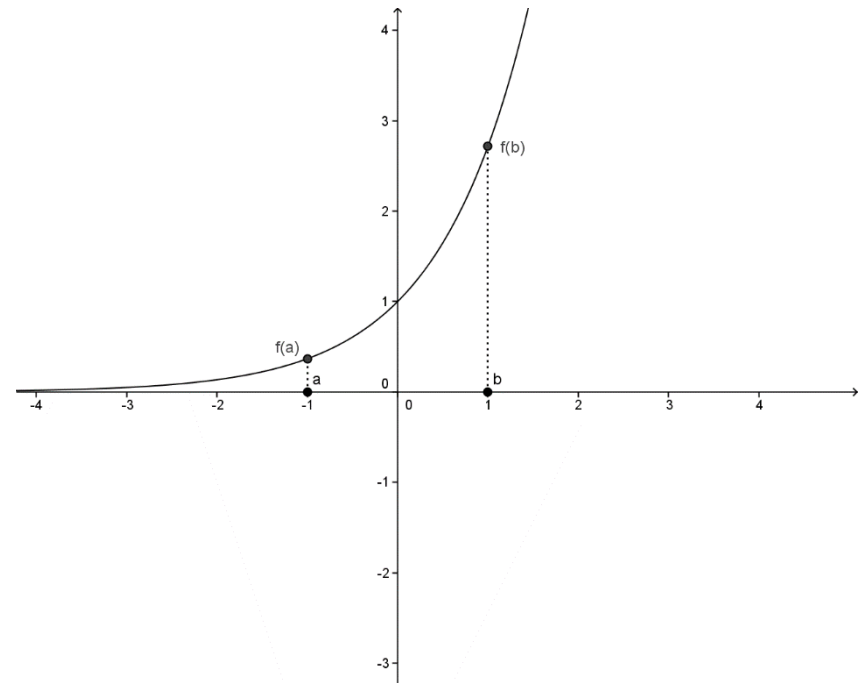
Extremos terminales

En un intervalo cerrado $[a,b]$ los valores extremos pueden coincidir en los valores terminales del intervalo:

$$f(x)=e^x \text{ en } [-1, 1]$$

No puede ocurrir en un intervalo abierto

$$f(x)=e^x \text{ en } (-1, 1)$$



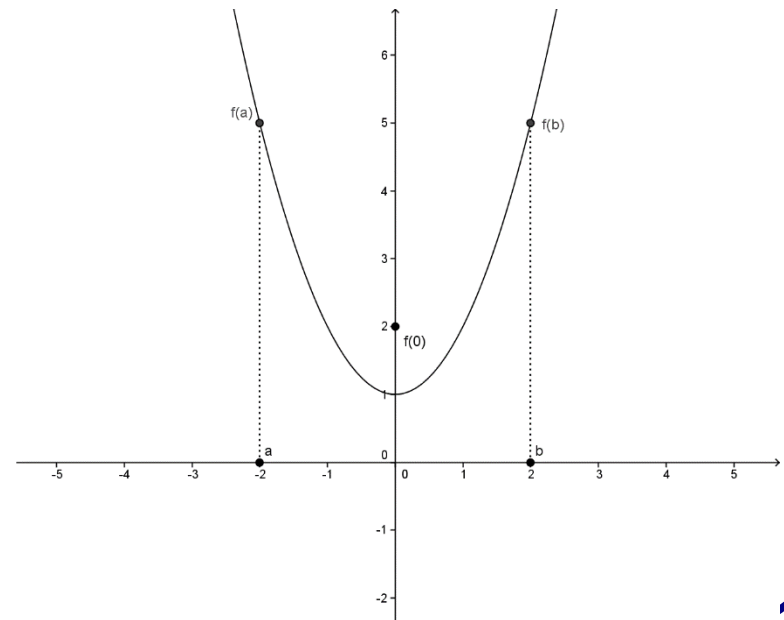
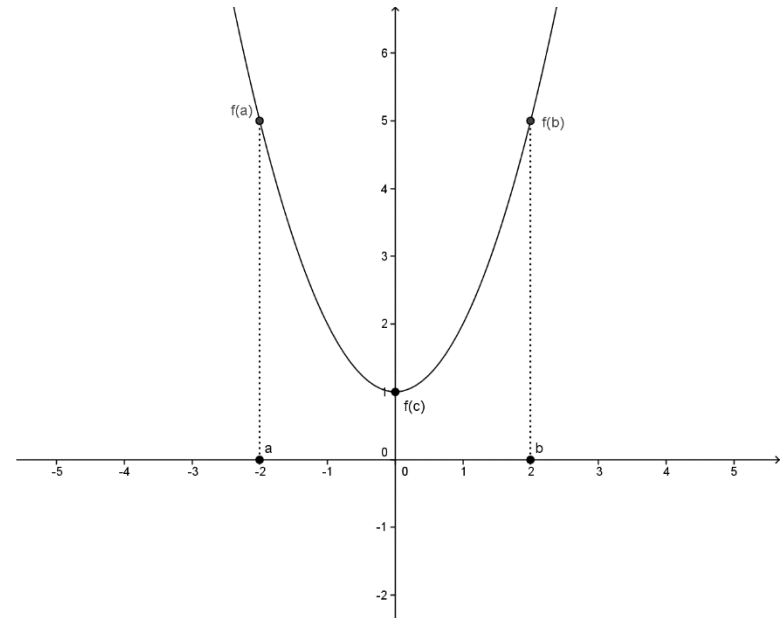
Sin máximo o mínimo

$f(0)$ mínimo en $(-2,2)$:

$$f(x) = x^2 + 1$$

$f(-2)=f(2)$
máximos en $[-2,2]$

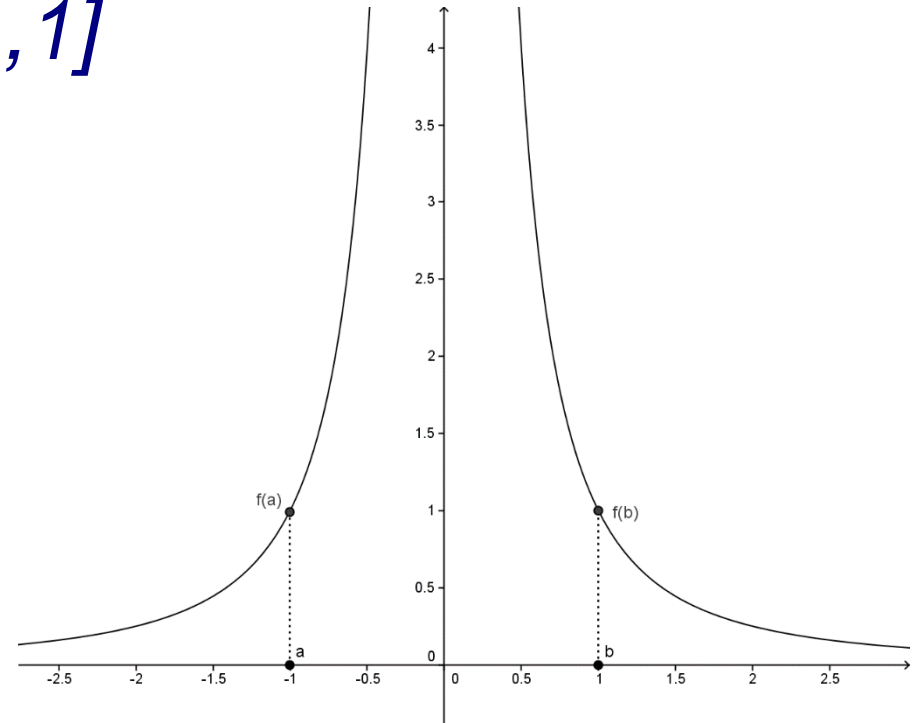
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$



Falta de continuidad

Sin máximo en $[-1, 1]$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$



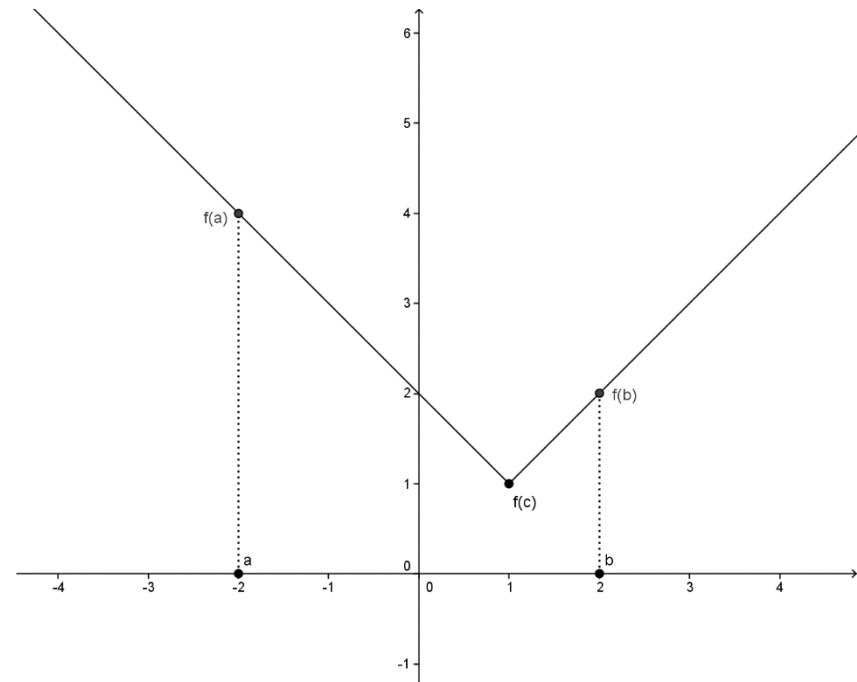
Mínimos en los puntos
terminales porque
el intervalo es cerrado

Teorema del Valor Extremo

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces tiene un mínimo y un máximo en ese intervalo.

$$f(x) = |x - 1| + 1$$

Máximo en el
terminal $f(a)$
Y mínimo en el
intermedio $f(c)$



No se exige derivabilidad

Máximos y mínimos relativos

Sea f una función definida sobre un intervalo abierto (a,b) que contiene a c :

Si $f(c)$ es un máximo de f en (a,b) entonces $f(c)$ es un **máximo relativo**

Si $f(c)$ es un mínimo de f en (a,b) entonces $f(c)$ es un **mínimo relativo**

Máximo local

Mínimo local

Derivadas y extremos locales

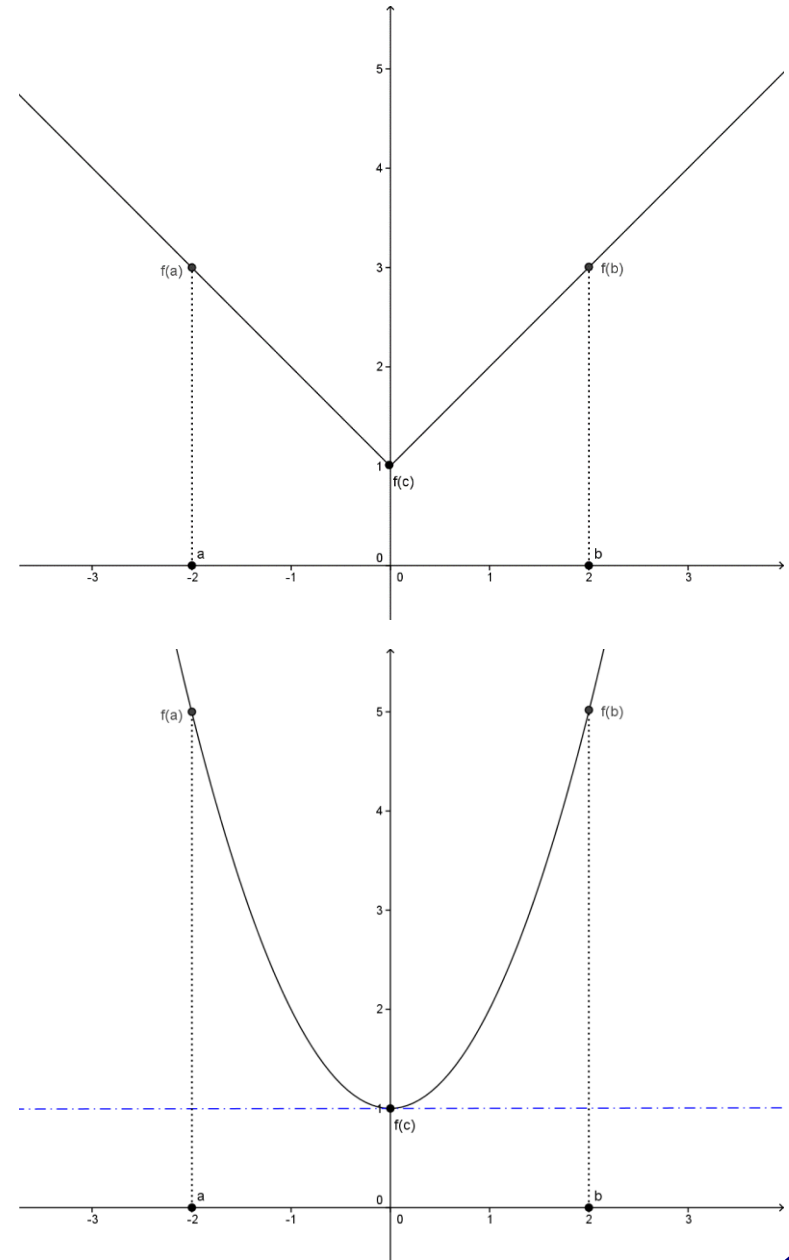
Si la derivada existe es 0:

$$f(x) = |x| + 1$$

$$f'(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$f'(x) = 2x$$



Puntos críticos

Definición:

Sea f definida en c .

Si $f'(c)=0$ o si f no es derivable en c ,
entonces c es un punto crítico de f .

Los extremos relativos ocurren sólo en los
puntos críticos.

Teorema:

Si $f(c)$ es un mínimo relativo o un máximo
relativo en (a,b) , entonces c es un punto
crítico de f .

Determinación de extremos en un intervalo cerrado $[a,b]$

1. Se buscan los punto críticos de f en (a,b) . Usaremos la derivada.
2. Se evalúa f en cada punto crítico en (a,b)
3. Se evalúa f en cada punto terminal del intervalo $[a,b]$: a y b .
4. El más pequeño de estos valores es el mínimo y el más grande es el máximo



Ejemplo 1

Determinar máximo y mínimo absolutos de

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 \text{ en } [-1,2]$$

Ejemplo 1

Determinar máximo y mínimo absolutos de

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 \text{ en } [-1,2]$$

$$\text{Derivamos } f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$$

Puntos críticos: $x=0$ y $x=1$

Ejemplo 1

Determinar máximo y mínimo absolutos de
 $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ en $[-1, 2]$

Derivamos $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$

Puntos críticos: $x=0$ y $x=1$

Valores en puntos críticos:

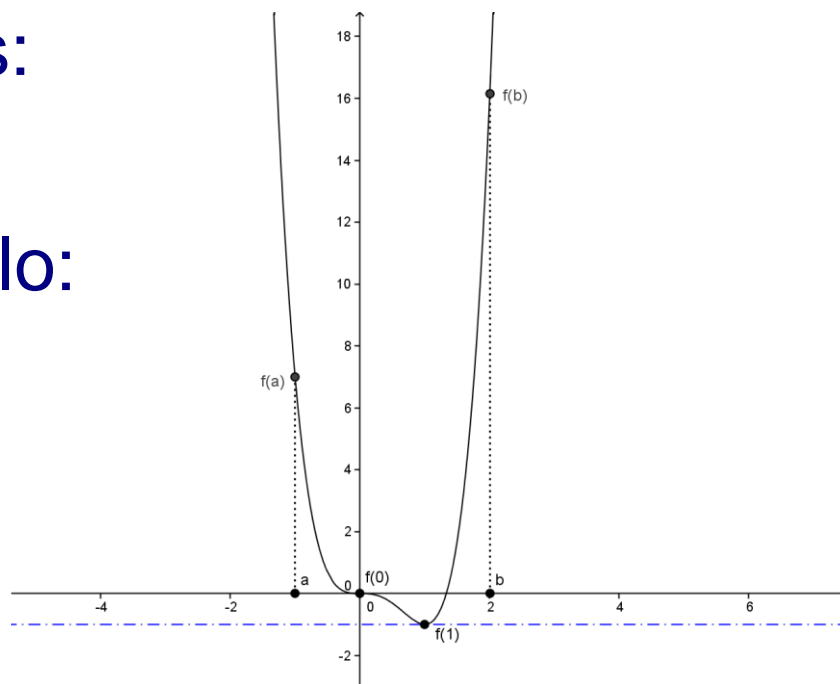
$$f(0)=0 \text{ y } f(1)=-1$$

Y en extremos del intervalo:

$$f(-1)=7 \text{ y } f(2)=16$$

$$\text{Mínimo } f(1)=-1$$

$$\text{Máximo } f(2)=16$$



Ejemplo 2

Determinar máximo y mínimo absolutos de
 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 26$ en $[-2,3]$

Ejemplo 2

Determinar máximo y mínimo absolutos de
 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 26$ en $[-2,3]$

Derivamos $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$

$$= 12x (x^2 - x - 2) = 12x (x + 1) (x - 2)$$

Puntos críticos: $x=-1$, $x=0$ y $x=2$

Ejemplo 2

Determinar máximo y mínimo absolutos de
 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 26$ en $[-2,3]$

$$\begin{aligned}\text{Derivamos } f'(x) &= 12x^3 - 12x^2 - 24x \\ &= 12x(x^2 - x - 2) = 12x(x + 1)(x - 2)\end{aligned}$$

Puntos críticos: $x=-1$, $x=0$ y $x=2$

Valores en críticos:

$$f(-1)=21 \quad f(0)=26 \quad \text{y} \quad f(2)=-6$$

Y en terminales:

$$f(-2)=58 \quad \text{y} \quad f(3)=53$$

$$\text{Mínimo } f(2)=-6$$

$$\text{Máximo } f(-2)=58$$

