***Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial***

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Apellidos:* | | | |
| *Nombre:* | | | |
| *DNI:* | | *Email:* | |

*Grupo de prácticas:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| ☐ | **Grupo 01** | **- Jueves de 09:00 a 11:00** | **(Prof. Martínez Marín, Juan Antonio)** |
| ☐ | **Grupo 02** | **- Miércoles de 13:00 a 15:00** | **(Prof. Ferrández Agulló, Francisco)** |
| ☐ | **Grupo 03** | **- Miércoles de 11:00 a 13:00** | **(Prof. Álvarez Sánchez, Rafael)** |
| ☐ | **Grupo 04** | **- ARA - Miércoles de 11:00 a 13:00** | **(Prof. Escolano Ruiz, Francisco Javier)** |
| ☐ | **Grupo 05** | **- Valenciano - Viernes de 11:00 a 13:00** | **(Prof. Vicent Frances, José Francisco)** |
| ☐ | **Grupo 06** | **- Viernes de 15:30 a 17:30** | **(Prof. Ferrández Agulló, Francisco)** |
| ☐ | **Grupo 07** | **- Martes de 17:30 a 19:30** | **(Prof. Salinas Serrano, José María)** |
| ☐ | **Grupo 08** | **- Viernes de 17:30 a 19:30** | **(Prof. Ferrández Agulló, Francisco)** |
| ☐ | **Grupo 09** | **- Jueves de 11:00 a 13:00** | **(Prof. Martínez Marín, Juan Antonio)** |
| ☐ | **Grupo 10** | **- Martes de 11:00 a 13:00** | **(Prof. Zamora Gómez, Antonio)** |
| ☐ | **Grupo 11** | **- Martes de 09:00 a 11:00** | **(Prof. Martínez Pérez, Francisco Miguel)** |
| ☐ | **Grupo 12** | **- Miércoles de 09:00 a 11:00** | **(Prof. Álvarez Sánchez, Rafael)** |
| ☐ | **Grupo 13** | **- Lunes de 17:30 a 19:30** | **(Prof. Garcés Rubira, Pablo José)** |

## Práctica final de Matemáticas II, --/05/2014

**Instrucciones generales:**
Debes crear en el escritorio una carpeta a la que nombrarás con el grupo de prácticas al que perteneces, tus apellidos, tu nombre y tu DNI (ejemplo GRUPO 11 MARTINEZ PEREZ FRANCISCO DNI 12345678D) y guardar en ella todos los archivos que se indiquen en los distintos apartados, con los nombres que se asignen. Cuando finalice el examen, deberás copiar tu carpeta en la carpeta del ordenador del profesor, correspondiente al grupo de prácticas al que perteneces, ir a su mesa para que el profesor compruebe que todos los archivos se han copiado correctamente y, a continuación, borrar la carpeta creada y vaciar la papelera.

| Problema | Valor | Nota |
|---|---|---|
| 1 | 3,0 | |
| 2 | 3,0 | |
| 3 | 4,0 | |
| | **Total:** | |

## ADVERTENCIA:

**Para evitar problemas con bugs que se han detectado en la versión 4.4 de Geogebra, instala la versión 4.2 antes de empezar el examen y asegúrate que usas esa versión. El profesor facilitará la versión 4.2 en una carpeta compartida. También puedes descargarla de los materiales dispuestos en Campus Virtual para la asignatura o en:**

**http://download.geogebra.org/installers/4.2/**

**1) Triángulo recto óptimo** ***(3'0 puntos)*** **Guarda el archivo con el nombre: PRACTICA1.ggb**

**Vamos a determinar para un perímetro dado, cual es el triángulo rectángulo con mayor área.**

***a)*** ***(0'5 puntos)*** **Para ello crea dos deslizadores. Uno llamado $p$, para el perímetro, que vaya de $0$ a $10$. El otro será la altura, que puede variar de $0$ a la mitad del perímetro, como mucho, es decir $p/2$, y se llamará $h$. La altura $h$ en un triángulo rectángulo es uno de los catetos, la base $b$ será el otro cateto. Si la hipotenusa al cuadrado es la suma del cuadrado de los catetos, el perímetro será:**

$$p = h + b + \sqrt{h^2 + b^2}$$

**Si despejamos la base $b$:**

$$(p-h) - b = \sqrt{h^2+b^2} \qquad (p-h)^2 - 2b(p-h) + b^2 = h^2 + b^2$$

$$b = \frac{(p-h)^2 - h^2}{2(p-h)}$$

**podemos obtener una expresión que nos devuelva la base en función de la altura dado un perímetro:**

$$b(x) = \frac{p^2 - 2px}{2p - 2x}$$

**Crea esa función $b(x)$ delimitando su dominio con el comando** *Función[]* **a exclusivamente el intervalo $[0, p/2\,]$, que es el intervalo de los valores que puede tomar $h$:**

| Anota la instrucción utilizada | ***b(x)=Función[(p^2-2px)/(2p-2x),0,p/2]*** |
|---|---|

**La función la usaremos para calcular la base del triángulo rectángulo cuando nos haga falta, pero no nos interesa su gráfica, así que desactiva el que esa función se muestre.**

***b)*** ***(0'9 puntos)*** **Crea ahora el triángulo rectángulo. Fija el valor de $p$ a $4$, y de $h$ a $1$, por ejemplo. Pon un punto $P_0$ en las coordenadas $(-4,1)$, que será el vértice que une los dos catetos. Crea otro punto $P_h$ con el que delimitar el cateto $h$, su abscisa será la misma que la de $P_0$ y su ordenada estará desplazada $h$ (súmale $h$ a la $y$ de $P_0$).**

| Anota la instrucción utilizada | ***P_h=(x(P_0),y(P_0)+h)*** |
|---|---|

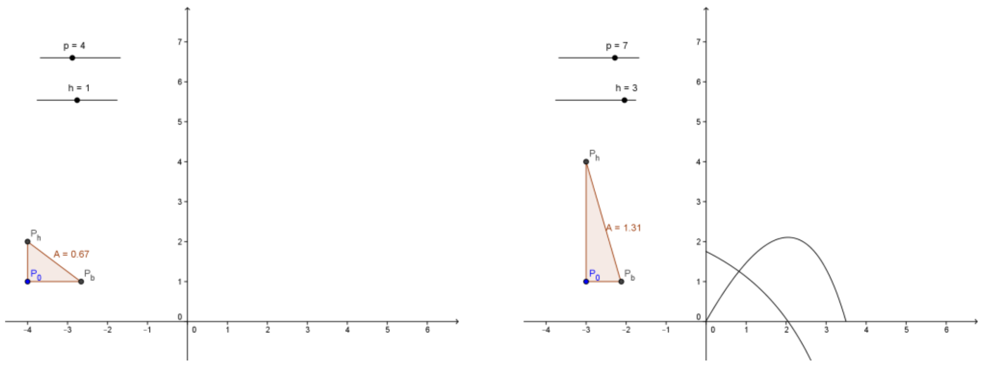
**Haremos lo mismo con un nuevo punto $P_b$, sólo que éste tendrá la misma ordenada de $P_0$ y la abscisa desplazada $b(h)$ (que es el valor de la base en función de la altura para un perímetro dado).**

| Anota la instrucción utilizada | ***P_b=(x(P_0)+b(h),y(P_0))*** |
|---|---|

**Por último, determina gráficamente el área del triángulo pasándole como parámetros al comando** *Polígono[]* **los tres vértices, $P_0$, $P_b$ y $P_h$. Llámale A y haz visible su rótulo con nombre y valor.**

| Anota la instrucción utilizada | ***A=Polígono[P_0,P_b,P_h]*** |
|---|---|

**El triángulo se puede mover arrastrándolo del vértice $P_0$. Variando el perímetro $p$ y la altura $h$ cambia de tamaño y forma. El valor de $A$ se refiere al área del triángulo. Su fórmula es $A = bh/2$.**




***c)*** ***(0'9 puntos)*** **Crea la función $f(x)$ que devuelve el área del triángulo dada una altura $x$, teniendo en cuenta la fórmula del área que se ha indicado, y que la base también dependiente de la altura, base que podemos obtener a su vez de la función $b(x)$. Para ello utiliza el comando** *Función[]* **de forma que se muestre gráficamente sólo en el intervalo de los valores que puede tomar $h$, es decir, de $0$ a $p/2$.**

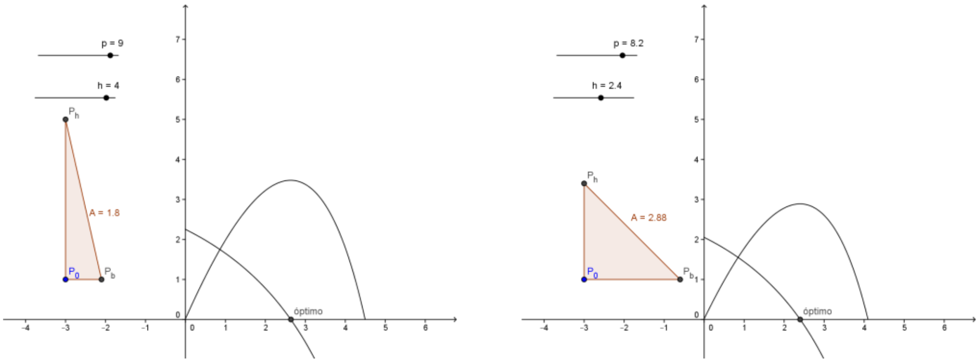
| Anota la instrucción utilizada | ***f(x)=Función[b(x) x / 2, 0, p/2]*** |
|---|---|

**Para determinar dónde tiene el máximo esa función, crea también su derivada, delimitándola igualmente a sólo el intervalo de $0$ a $p/2$.**

| Anota la instrucción utilizada | ***f'(x)=Función[Derivada[f(x)], 0, p/2]*** |
|---|---|

**Dónde la derivada corte con eje de abscisas será el valor de $h$ que mayor $A$ proporciona. Determínalo exactamente creando un punto llamado *óptimo*, pero para evitar problemas con soluciones fuera del rango del problema, crea el punto con el comando *Raíz[]* delimitado al intervalo de $0$ a $p/2$.**

| | |
|---|---|
| **Anota la instrucción utilizada** | ***óptimo=Raíz[f'(x),0,p/2]*** |




***d)*** ***(0'7 puntos)*** **Ahora que ya puedes ver en la ventana algebraica los valores que toma la abscisa del óptimo, varía la altura $h$ y comprueba que, cuando coincide con el valor expresado en la abscisa de óptimo, el área del triángulo $A$ es la máxima posible. Fija la altura $h$ a ese valor óptimo para los perímetros $\mathrm{p}$ que se indican en la tabla, anotando en cada caso a qué valores tienes que fijar $h$, y qué valores toman las áreas $A$ en esos momentos (se os da el caso para $p = 8{,}2$ como ejemplo):**

| | | |
|---|---|---|
| **Para perímetro $p$=9,9** | **$h$ óptimo: *2,9*** | **Área $A$: *4,2*** |
| **Para perímetro $p$=8,2** | **$h$ óptimo: *2,5*** | **Área $A$: *2,88*** |
| **Para perímetro $p$=3,4** | **$h$ óptimo: *1*** | **Área $A$: *0,5*** |

**2) Ajuste de interpolación** *(3'0 puntos)* Guarda el archivo con el nombre: **PRACTICA2.ggb**

Vamos a interpolar una función, en concreto la función $f(x) = x^{\text{sen}(x)}$, en un intervalo de $0$ a $n$ y analizaremos cómo la interpolación se ajusta a la auténtica función dependiendo de la amplitud del intervalo y el número de puntos que escojamos para interpolar, número de puntos que haremos coincidir con los $n+1$ valores enteros que hay en el intervalo $[0,n]$.

***a)*** *(0'6 puntos)* Para ello empezaremos creando el deslizador $n$ de $1$ a $10$ con incremento de $1$. Luego, con el comando *Función[]* define la función $f(x) = x^{\text{sen}(x)}$ de forma que se muestre gráficamente sólo en el intervalo de $0$ a $10$.

| Anota la instrucción utilizada | *f(x)= Función[x^sen(x), 0,10]* |
|---|---|

Pon la función de color azul para distinguirla luego del polinomio que vamos a interpolar.

***b)*** *(0'6 puntos)* Ahora crea una lista $x_i$ con los $n+1$ valores de $x$ que usaremos en la interpolación ($x = 0,1,\dots,n$).

| Anota la instrucción utilizada | *x_i=Secuencia[i, i, 0, n]* |
|---|---|

Crea otra lista $y_i$ con los valores que la función y la interpolación deben tomar como ordenadas ($y = f(0), f(1), \dots f(n)$).

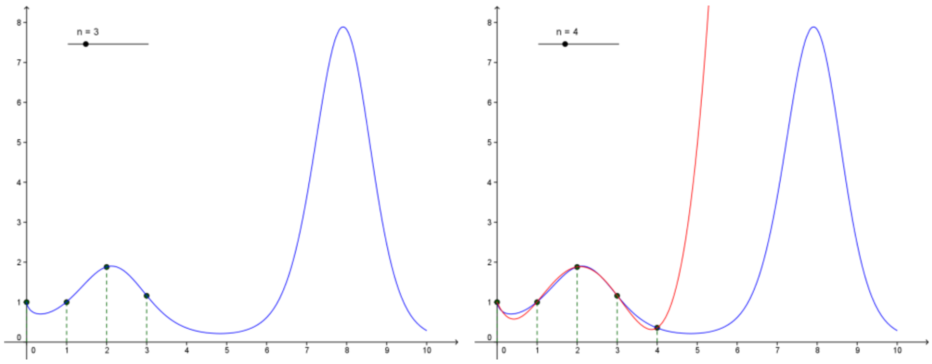
| Anota la instrucción utilizada | *y_i=Secuencia[f(i), i, 0,n]* |
|---|---|

***c)*** *(0'6 puntos)* Haremos ahora una lista $P_i$ de puntos $(x,y)$ a interpolar. Créala a partir de la lista de abscisas $x_i$ y de ordenadas $y_i$, teniendo en cuenta que las listas son de $n+1$ elementos.

| Anota la instrucción utilizada | *P_i= Secuencia[(Elemento[x_i, i], Elemento[y_i, i]), i, 1, n + 1]* |
|---|---|

Opcionalmente, por estética, puedes crear una lista de segmentos $s_i$, con líneas discontinuas, que vayan del punto que se corresponde con la abscisa en el eje $X$ hasta el punto en la función, como se aprecian en las imágenes.

| Anota la instrucción utilizada | *s_i= Secuencia[<br>Segmento[(Elemento[x_i, i], 0), Elemento[P_i, i]], i, 1, n + 1]* |
|---|---|




***d)*** *(0'8 puntos)* con los comandos *Polinomio[]* y *Función[]* combinados para que se visualice sólo el intervalo de $0$ a $10$ añade en rojo el polinomio de interpolación $p(x)$.

| Anota la instrucción utilizada | *p(x)= Función[Polinomio[P_i], 0, 10]* |
|---|---|

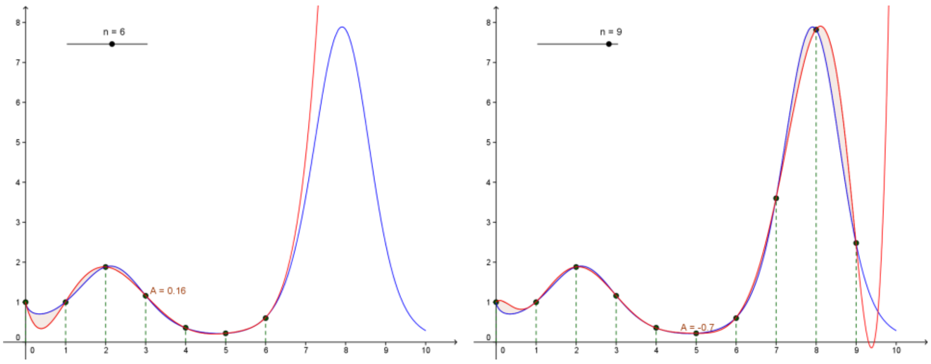
Además, remarca las áreas entre las curvas de la función $f(x)$ y el polinomio $p(x)$ creando el valor $A$ con el comando *IntegralEntre[]* en el intervalo a estudiar $[0,n]$.

| Anota la instrucción utilizada | *A= IntegralEntre[f(x), p(x), 0, n]* |
|---|---|

El valor $A$ es la suma de las áreas comprendidas entre las dos curvas, pero considerando positivas unas y negativas otras dependiendo de si la curva de la función está por encima de la del polinomio o viceversa. Podemos considerarlo (en valor absoluto) una medida del error cometido por la aproximación que el polinomio de interpolación hace de la función. Si dividimos la amplitud del intervalo interpolado por ese error tendremos una medida de lo que la interpolación se ajusta a la auténtica función.

Calcula esa medida llamándole *ajuste*.

| Anota la instrucción utilizada | *ajuste = n / abs(A)* |
|---|---|



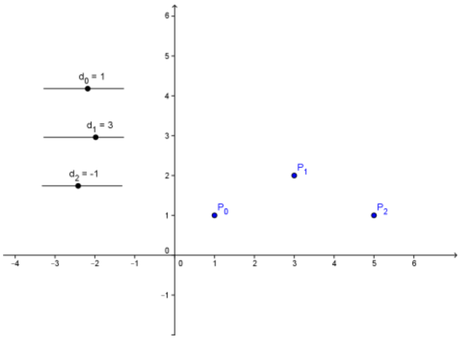

***e)*** *(0'4 puntos)* **Indica para qué dos valores de $n$ se ajusta más (el valor *ajuste* es mayor) la interpolación a la función, y qué valores toman $A$ y *ajuste* en esos casos:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Primera interpolación más ajustada** | $n$: ***2*** | ***ajuste*: *92,55*** | $A$: ***0,02*** |
| **Segunda interpolación más ajustada** | $n$: ***5*** | ***ajuste*: *85,46*** | $A$: ***0,06*** |

**3) Hermite de grado 5** *(4'0 puntos)* **Guarda el archivo con el nombre: PRACTICA3.ggb**

**Vamos a interpolar una curva que pase por tres puntos con un polinomio de interpolación de Hermite de grado 5.**

***a)*** ***(2 puntos)*** **Necesitaremos tres puntos libres que llamaremos $P_0$, $P_1$ y $P_2$, y tres deslizadores para determinar la derivada en esos tres puntos. Los deslizadores los llamaremos $d_0$, $d_1$ y $d_2$ y abarcarán intervalos de $-10$ a $10$:**



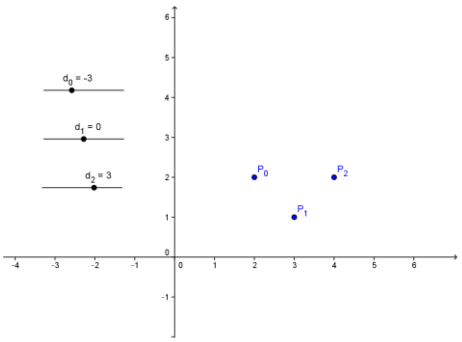

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | | | | | |
| 2 | | | 1 | | | | |
| 3 | 1 | 1 | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | 3 | 2 | | | | | |
| 6 | | | 3 | | | | |
| 7 | 3 | 2 | | | | | |
| 8 | | | | | | | |
| 9 | 5 | 1 | | | | | |
| 10 | | | -1 | | | | |
| 11 | 5 | 1 | | | | | |

**Abre la vista de hoja de cálculo de Geogebra, donde montaremos la pirámide de diferencias divididas para Hermite (la formulación se os recuerda a continuación). Para ello usa las celdas remarcadas que aparecen en la imagen (para ahorrar tiempo, tú no es necesario que las remarques, si no quieres). Es decir:**

- **La columna $z_i$ de la pirámide usará las celdas de la columna $A$, filas impares, de la hoja de cálculo (las abscisas $x_i$ de los puntos $P_i$)**
- **La columna $f[z_i]$ de la pirámide usará las celdas impares de la columna $B$ de la hoja de cálculo (las ordenadas $y_i$ de los puntos $P_i$)**
- **La columna $f[z_{i-1}, z_i]$ de la pirámide usará las celdas pares de la columna $C$ de la hoja de cálculo, tres de ellas contendrán las derivadas $d_i$, y las otras dos aplicarán la correspondiente fórmula de diferencias divididas.**
- **Las otras columnas ($f[z_{i-2}, z_{i-1}, z_i]$, $f[z_{i-3}, \dots, z_i]$, $f[z_{i-4}, \dots, z_i]$ y $f[z_{i-5}, \dots, z_i]$) irán alternado el uso de filas impares y pares en las columnas $D$, $E$, $F$ y $G$, aplicando siempre la correspondiente diferencia dividida.**

| $z_i$ | $f[z_i]$ | $f[z_{i-1},z_i]$ | $f[z_{i-2},z_{i-1},z_i]$ | $f[z_{i-3},\dots,z_i]$ | $f[z_{i-4},\dots,z_i]$ | $f[z_{i-5},\dots,z_i]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_0 = x_0$ | $f[z_0] = y_0$ | | | | | |
| | | $f[z_0,z_1] = \frac{dy_0}{dx}$ | | | | |
| $z_1 = x_0$ | $f[z_1] = y_0$ | | $\frac{f[z_1,z_2] - f[z_0,z_1]}{z_2 - z_0}$ | | | |
| | | $\frac{f[z_2] - f[z_1]}{z_2 - z_1}$ | | $\frac{f[z_1,z_2,z_3] - f[z_0,z_1,z_2]}{z_3 - z_0}$ | | |
| $z_2 = x_1$ | $f[z_2] = y_1$ | | $\frac{f[z_2,z_3] - f[z_1,z_2]}{z_3 - z_1}$ | | $\frac{f[z_1,\dots,z_4] - f[z_0,\dots,z_3]}{z_4 - z_0}$ | |
| | | $f[z_2,z_3] = \frac{dy_1}{dx}$ | | $\frac{f[z_2,z_3,z_4] - f[z_1,z_2,z_3]}{z_4 - z_1}$ | | $\frac{f[z_1,\dots,z_5] - f[z_0,\dots,z_4]}{z_5 - z_0}$ |
| $z_3 = x_1$ | $f[z_3] = y_1$ | | $\frac{f[z_3,z_4] - f[z_2,z_3]}{z_4 - z_2}$ | | $\frac{f[z_2,\dots,z_5] - f[z_1,\dots,z_4]}{z_5 - z_1}$ | |
| | | $\frac{f[z_4] - f[z_3]}{z_4 - z_3}$ | | $\frac{f[z_3,z_4,z_5] - f[z_2,z_3,z_4]}{z_5 - z_2}$ | | |
| $z_4 = x_2$ | $f[z_4] = y_2$ | | $\frac{f[z_4,z_5] - f[z_3,z_4]}{z_5 - z_3}$ | | | |
| | | $f[z_4,z_5] = \frac{dy_2}{dx}$ | | | | |
| $z_5 = x_2$ | $f[z_5] = y_2$ | | | | | |

**Cambia los puntos $P_0$, $P_1$ y $P_2$ a las posiciones $(2{,}2)$, $(3{,}1)$, y $(4{,}2)$, y los deslizadores a los valores $d_0 = -3$, $d_1 = 0$ y $d_2 = 3$, y comprueba que los valores que toma la pirámide de Hermite en la hoja de cálculo coinciden con los de la imagen:**




| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | | | | | |
| 2 | | | -3 | | | | |
| 3 | 2 | 2 | | 2 | | | |
| 4 | | | -1 | | -1 | | |
| 5 | 3 | 1 | | 1 | | 0.5 | |
| 6 | | | 0 | | 0 | | 0 |
| 7 | 3 | 1 | | 1 | | 0.5 | |
| 8 | | | 1 | | 1 | | |
| 9 | 4 | 2 | | 2 | | | |
| 10 | | | 3 | | | | |
| 11 | 4 | 2 | | | | | |

**Anota la fórmula Geogebra usada en cada celda de la hoja de cálculo:**

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | = x(P₀) | = y(P₀) | | | | | |
| 2 | | | = d₀ | | | | |
| 3 | = x(P₀) | = y(P₀) | | =(C4-C2)/(A5-A1) | | | |
| 4 | | | =(B5-B3)/(A5-A3) | | =(D5-D3)/(A7-A1) | | |
| 5 | = x(P₁) | = y(P₁) | | =(C6-C4)/(A7-A3) | | =(E6-E4)/(A9-A1) | |
| 6 | | | = d₁ | | =(D7-D5)/(A9-A3) | | =(F7-F5)/(A11-A1) |
| 7 | = x(P₁) | = y(P₁) | | =(C8-C6)/(A9-A5) | | =(E8-E6)/(A11-A3) | |
| 8 | | | =(B9-B7)/(A9-A7) | | =(D9-D7)/(A11-A5) | | |
| 9 | = x(P₂) | = y(P₂) | | =(C10-C8)/(A11-A7) | | | |
| 10 | | | = d₂ | | | | |
| 11 | = x(P₂) | = y(P₂) | | | | | |

**b)** ***(1'5 puntos)*** **Construye ahora el polinomio de interpolación de Hermite de grado 5. Recordemos su fórmula:**

$$H_5(x) = f[z_0] + \sum_{i=1}^{5} f[z_0, z_1, \dots, z_i](x - z_0) \dots (x - z_{i-1})$$

$$H_5(x) = f[z_0] + f[z_0, z_1](x - z_0) + f[z_0, z_1, z_2](x - z_0)(x - z_1) + f[z_0, \dots, z_2](x - z_0)(x - z_1)(x - z_2) + \cdots$$

$$H_5(x) = f[z_0] + f[z_0, z_1](x - x_0) + f[z_0, z_1, z_2](x - x_0)^2 + f[z_0, z_1, z_2, z_3](x - x_0)^2(x - x_1) + f[z_0, z_1, z_2, z_3, z_4](x - x_0)^2(x - x_1)^2 + f[z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5](x - x_0)^2(x - x_1)^2(x - x_2)$$

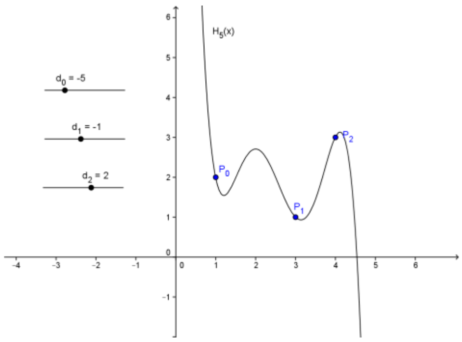
**Ten en cuenta que los $f[z_0, \dots]$ son los valores de la diagonal superior de la pirámide.**

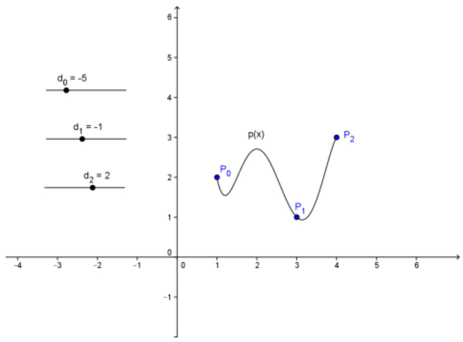
**Anota la instrucción utilizada para crear el polinomio $H_5(x)$:**

***H_5(x)= B1 + (x - A1) (C2 + (x - A3) (D3 + (x - A5) (E4 + (x - A7) (F5 + (x - A9) G6))))*** ***ó***

***H_5(x)= B1 + C2 (x - A1) + D3 (x – A1) (x – A3) + E4 (x – A1) (x – A3) (x – A5) + F5 (x – A1) (x – A3) (x – A5) (x – A7) + G6 (x – A1) (x – A3) (x – A5) (x – A7) (x – A9)*** ***ó***

***H_5(x)= B1 + C2 (x - x(P_0)) + D3 (x - x(P_0))^2 + E4 (x - x(P_0))^2 (x – x(P_1)) + F5 (x - x(P_0))^2 (x – x(P_1))^2 + G6 (x - x(P_0))^2 (x – x(P_1))^2 (x – x(P_2))***




**c)** ***(0'5 puntos)*** **Con el comando *Función[]* define el polinomio $p(x)$ de forma que muestre gráficamente $H_5(x)$ pero sólo en el intervalo de $P_0$ a $P_2$.**

**Anota la instrucción utilizada** ***p(x) = Función[H_5(x), x(P_0), x(P_2)]***

**Oculta el polinomio $H_5(x)$ y deja visible sólo el $p(x)$. Pon los puntos $P_0$, $P_1$ y $P_2$ en las posiciones $(1,0)$, $(3,1)$ y $(5,0)$, los deslizadores en $d_0 = 10$, $d_1 = 0$ y $d_2 = -10$, y di que letra dibuja la curva $p(x)$.**

**Con $P_0 = (1,0)$, $P_1 = (3,1)$, $P_2 = (5,0)$, $d_0 = 10$, $d_1 = 0$ y $d_2 = -10$, $p(x)$ dibuja la letra:** ***M***

**Repite lo mismo con los puntos en las posiciones $(2,2)$, $(3,0)$ y $(4,2)$, y $d_0 = -8$, $d_1 = 0$ y $d_2 = 8$.**

**Con $P_0 = (2,2)$, $P_1 = (3,0)$, $P_2 = (4,2)$, $d_0 = -8$, $d_1 = 0$ y $d_2 = 8$, $p(x)$ dibuja la letra:** ***U***