Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial

Alumno:	
Grupo teoría:	(de a)
DNI:	
Email:	

Ejercicios de Cálculo e Interpolación de Matemáticas II, 2015/16

Instrucciones generales:

Todos los ejercicios deben estar bien explicados y realizados a mano.

Se deben de entregar el día del examen, 30 de Mayo.

	Nota	
Ejercicio 1	1,75	
Ejercicio 2	1,75	
Ejercicio 3	1,75	
Ejercicio 4	1,75	
Ejercicio 5	3	
Total		

1. La función $f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x - 4$ tiene una raíz en el intervalo $[-2, 2]$. Utilizando el método de la bisección, ¿Calcula cuántas iteraciones te aseguran, para asegurar un error relativo (límite de tolerancia) inferior a un 1%?

$\delta = 1\% = 0{,}01 = 10^{-2}$ $\frac{\Delta}{|x_0|} \leq 10^{-2}$ $\Delta \leq 10^{-2} \cdot |x_0|$

Si $x_0 \in [-2\,, 2]$ entonces $10^{-2} \cdot |x_0| \leq 10^{-2} \cdot 2$

así que para asegurarnos que $\delta = 10^{-2}$ es una cota del error relativo tendremos que exigir que la cota de error absoluto cumpla: $\Delta \leq 10^{-2} \cdot 2$

Como en el método de la bisección, $h = \frac{|b-a|}{2^n}$ es una cota del error absoluto, podemos aplicar la fórmula del límite de tolerancia haciendo $\frac{|2+2|}{2^n} \leq 10^{-2} \cdot 2$ y deducir:

$\frac{|2+2|}{2^{n+1}} \leq 10^{-2}$ y $n + 1 \geq \log_2\left(\frac{4}{10^{-2}}\right) = \log_2(400) = 8{,}643856$ $n > 8$

Aplica el método y calcula en cada iteración una cota del error relativo. Comprueba que se cumple el apartado anterior.

Realiza los cálculos con todos los valores redondeados a 5 decimales, salvo las cotas de error relativo en cada iteración que puedes expresar en porcentaje con sólo un par de decimales.

$n =$ 9 $\delta = \left|\frac{h}{c}\right| 100\%$

i	a	b	c	h	f(a)	f(b)	f(c)	δ
1	-2	2	0	2	-26	18	-4	∞
2	0	2	1	1	-4	18	-2	100%
3	1	2	1,5	0,5	-2	18	1,34375	33,33%
4	1	1,5	1,25	0,25	-2	1,34375	-1,10449	20,00%
5	1,25	1,5	1,375	0,125	-1,10449	1,34375	-0,15933	9,09%
6	1,375	1,5	1,4375	0,0625	-0,15933	1,34375	0,50976	4,35%
7	1,375	1,4375	1,40625	0,03125	-0,15933	0,50976	0,15629	2,22%
8	1,375	1,40625	1,39063	0,01563	-0,15933	0,15629	-0,006	1,12%
9	1,39063	1,40625	1,39844	0,00782	-0,006	0,15629	-0,08373	0,56%

Resultado: 1,39844 ±0,00782 ó 1,39844 ±0,56%

2. Comprueba si se cumple el teorema de la convergencia del método de Newton para el valor $c_0 = 4$ en el intervalo $[3\,,4]$ y la función $f(x) = \frac{e^x}{8} + \frac{1}{e^x} - \operatorname{sen}(x) - 4$.

   Si las condiciones del teorema se cumplen, aplica el método de Newton a partir de ese valor inicial, hasta obtener una raíz de la ecuación con una precisión de al menos 10^{-5}.

   Realiza los cálculos con todos los valores redondeados a 7 decimales.

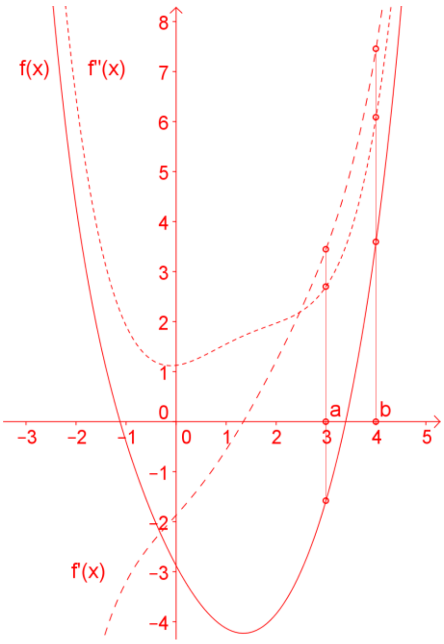
Consideramos $a = 3$ y $b = 4$ y comprobamos que tanto $f(x)$, $f'(x)$ como $f''(x)$ son continúas en el intervalo $[a\,,b]$.

$$f'(x) = \frac{e^x}{8} - \frac{1}{e^x} - \cos(x)$$

$$f''(x) = \frac{e^x}{8} + \frac{1}{e^x} + \operatorname{sen}(x)$$

Se cumple además que $f(a) \cdot f(b) < 0$ y que $f'(x)$ y $f''(x)$ mantienen su signo en el intervalo $[3\,,4]$ sin anularse en ningún momento.

Como $f(4) \cdot f''(4) > 0$, entonces $c_0 = 4$ es un punto inicial del método de Newton para $f(x)$ que nos asegura su convergencia.



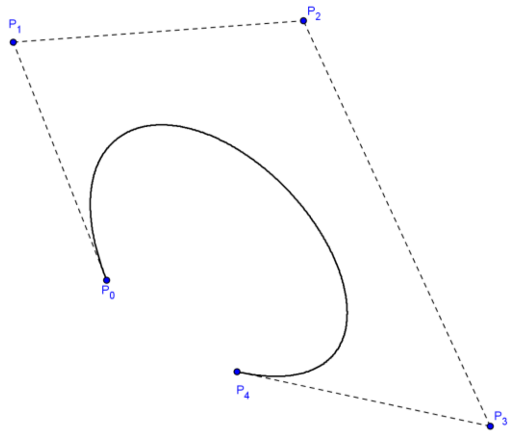
i	a	c	h	f(a)	f'(a)	f(c)
1	4	3,5174477	0,4825523	3,5998869	7,4600967	0,6090319
2	3,5174477	3,3983288	0,1191189	0,6090319	5,1128078	0,0266114
3	3,3983288	3,3926341	0,0056947	0,0266114	4,6730523	0,0000554
4	3,3926341	3,3926222	0,0000119	0,0000554	4,6530573	-0,0000019
5	3,3926222	3,3926226	-0,0000004	-0,0000019	4,6530142	-0,0000028

Resultado: 3,3926226 ±0,0000004

3. La curva paramétrica $b(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ donde $b(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ para $0 \leq t \leq 1$ y $a_i \in \mathbb{R}^2$ para $0 \leq i \leq n$ es en realidad una curva de Bezier de grado n formulada en forma polinómica si sus coeficientes cumplen con la expresión $a_i = \binom{n}{i}\left(\sum_{j=0}^{i}\left((-1)^j \binom{i}{j} P_{i-j}\right)\right)$ y donde los $P_i \in \mathbb{R}^2$ para $0 \leq i \leq n$ son los correspondientes puntos de control de la curva de Bezier.

Compruébalo para una curva de Bezier de grado 4:

$$b(t) = a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$



$$b(t) = P_0(1-t)^4 + 4P_1 t(1-t)^3 + 6P_2 t^2(1-t)^2 + 4P_3 t^3(1-t) + P_4 t^4$$

$$b(t) = P_0(1 - 4t + 6t^2 - 4t^3 + t^4) + 4P_1(t - 3t^2 + 3t^3 - t^4) + \\ + 6P_2(t^2 - 2t^3 + t^4) + 4P_3(t^3 - t^4) + P_4 t^4$$

$$b(t) = P_0 t^4 - 4P_1 t^4 + 6P_2 t^4 - 4P_3 t^4 + P_4 t^4 - 4P_0 t^3 + 12P_1 t^3 - 12P_2 t^3 + 4P_3 t^3 + \\ + 6P_0 t^2 - 12P_1 t^2 + 6P_2 t^2 - 4P_0 t + 4P_1 t + P_0$$

$$b(t) = (P_0 - 4P_1 + 6P_2 - 4P_3 + P_4)t^4 + (-4P_0 + 12P_1 - 12P_2 + 4P_3)t^3 + \\ +(6P_0 - 12P_1 + 6P_2)t^2 + (-4P_0 + 4P_1)t + (P_0)$$

$$b(t) = (\boldsymbol{P_4 - 4P_3 + 6P_2 - 4P_1 + P_0})t^4 + \boldsymbol{4(P_3 - 3P_2 + 3P_1 - P_0)}t^3 + \\ \boldsymbol{+6(P_2 - 2P_1 + P_0)}t^2 + \boldsymbol{4(P_1 - P_0)}t + (\boldsymbol{P_0})$$

$$a_4 = \binom{4}{4}\left((-1)^0\binom{4}{0}P_4 + (-1)^1\binom{4}{1}P_3 + (-1)^2\binom{4}{2}P_2 + (-1)^3\binom{4}{3}P_1 + (-1)^4\binom{4}{4}P_0\right) = \\ = (\boldsymbol{P_4 - 4P_3 + 6P_2 - 4P_1 + P_0})$$

$$a_3 = \binom{4}{3}\left((-1)^0\binom{3}{0}P_3 + (-1)^1\binom{3}{1}P_2 + (-1)^2\binom{3}{2}P_1 + (-1)^3\binom{3}{3}P_0\right) = \\ = \boldsymbol{4(P_3 - 3P_2 + 3P_1 - P_0)}$$

$$a_2 = \binom{4}{2}\left((-1)^0\binom{2}{0}P_2 + (-1)^1\binom{2}{1}P_1 + (-1)^2\binom{2}{2}P_0\right) = \boldsymbol{6(P_2 - 2P_1 + P_0)}$$

$$a_1 = \binom{4}{1}\left((-1)^0\binom{1}{0}P_1 + (-1)^1\binom{1}{1}P_0\right) = \boldsymbol{4(P_1 - P_0)}$$

$$a_0 = \binom{4}{0}\left((-1)^0\binom{0}{0}P_0\right) = (\boldsymbol{P_0})$$

4. Construir un spline cúbico interpolador de extremo natural para los puntos:

$$(1,0),\ (2,8),\ (4,4),\ (5,4) \text{ y } (9,8).$$

Procura expresar, mientras puedas, los valores en fracción, y en caso de tener que realizar cálculos con decimales redondea a 5 decimales antes de volver a operar.

	x_i	y_i	h_i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	1	0	1	0	10	0	-2
1	2	8	2	8	4	-6	3/2
2	4	4	1	4	-2	3	-1
3	5	4	4	4	1	0	0
4	9	8		8		0	

$$h_i = x_{i-1} - x_i \qquad m_{i,i} = 2(h_{i-1} + h_i) \qquad M = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{2,1} & 0 \\ m_{1,2} & m_{2,2} & m_{3,2} \\ 0 & m_{2,3} & m_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$a_i = y_i \qquad m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = h_i$$

$$|M| = 6(6\cdot 10 - 1\cdot 1) - 2(2\cdot 10 - 1\cdot 0) + 0(2\cdot 1 - 6\cdot 0) = 360 - 6 - 40 = 314$$

$$M^* = \begin{bmatrix} (6\cdot 10 - 1\cdot 1) & -(2\cdot 10 - 1\cdot 0) & (2\cdot 1 - 6\cdot 0) \\ -(2\cdot 10 - 0\cdot 1) & (6\cdot 10 - 0\cdot 0) & -(6\cdot 1 - 2\cdot 0) \\ (2\cdot 1 - 0\cdot 6) & -(6\cdot 1 - 0\cdot 2) & (6\cdot 6 - 2\cdot 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 59 & -20 & 2 \\ -20 & 60 & -6 \\ 2 & -6 & 32 \end{bmatrix}$$

$$v_i = \frac{3(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{3(a_i - a_{i-1})}{h_{i-1}} \qquad V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3(4-8)}{2} - \frac{3(8-0)}{1} \\ \frac{3(4-4)}{1} - \frac{3(4-8)}{2} \\ \frac{3(8-4)}{4} - \frac{3(4-4)}{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$M^{*t} = M^* \qquad M^{-1} = \frac{M^{*t}}{|M|} \qquad C = M^{-1}V = \frac{M^*V}{|M|} = \begin{bmatrix} 59 & -20 & 2 \\ -20 & 60 & -6 \\ 2 & -6 & 32 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -30 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}\frac{1}{314}$$

$$c_0 = 0$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1884 \\ 942 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{1}{314} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad b_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{h_i(2c_i + c_{i+1})}{3} \qquad d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}$$

$$c_4 = 0$$

$$\boldsymbol{S_0(x) = 10(x-1) - 2(x-1)^3 \quad x \in [1,2]}$$

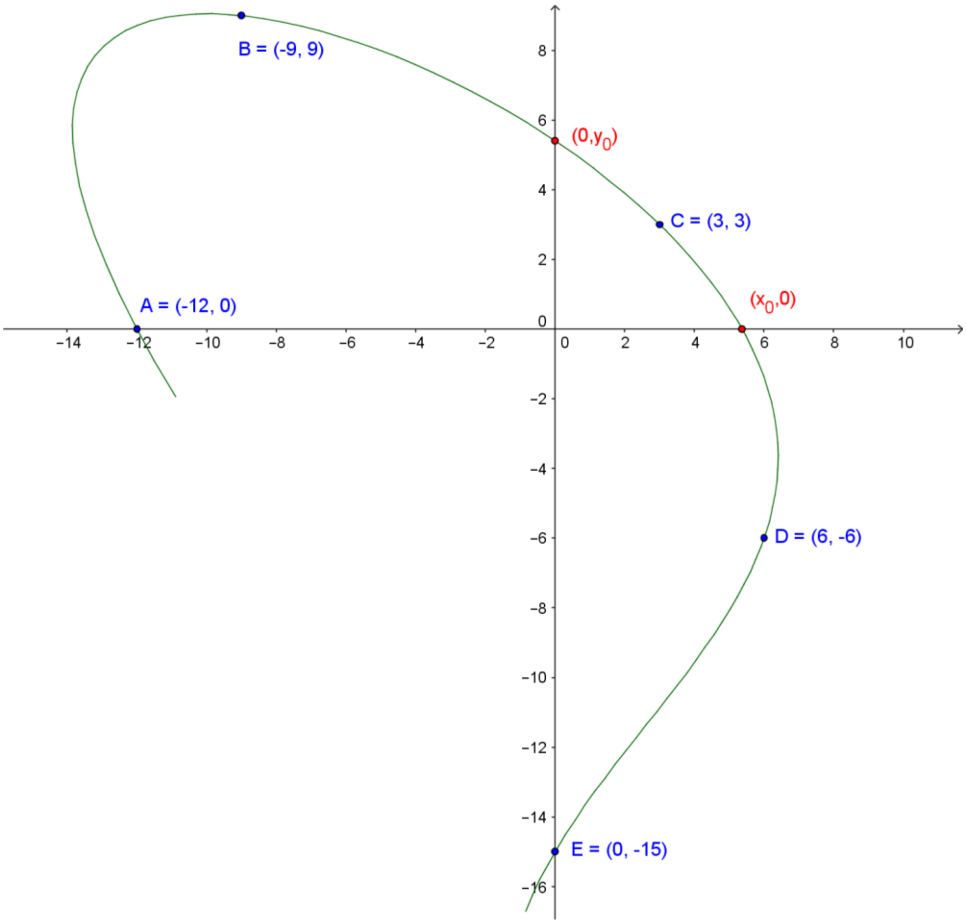
$$\boldsymbol{S_1(x) = 8 + 4(x-2) - 6(x-2)^2 + \frac{3}{2}(x-2)^3 \quad x \in [2,4]}$$

$$\boldsymbol{S_2(x) = 4 - 2(x-4) + 3(x-4)^2 - (x-4)^3 \quad x \in [4,5]}$$

$$\boldsymbol{S_3(x) = 4 + (x-5) \quad x \in [5,9]}$$

5. Interpola mediante diferencias divididas en 2D, con un polinomio para abscisas X(t) y otro polinomio para ordenadas Y(t), la curva que pasa por los puntos A, B, C, D y E.

   Luego calcula con el método regula falsi, con una cota de error absoluto menor a 10^{-4}, los valores x_0 e y_0 correspondientes a los puntos de corte de la curva interpolada con los ejes de coordenadas. En caso de tener que realizar cálculos con decimales redondea a 5 decimales antes de volver a operar.



	t	X(t)	Y(t)
A	0	-12	0
B	¼	-9	9
C	½	3	3
D	¾	6	-6
E	1	0	-15

t_i	$X(t_i)$	$X[t_{i-1},t_i]$	$X[t_{i-2},t_{i-1},t_i]$	$X[t_{i-3},\dots,t_i]$	$X[t_0,\dots,t_n]$
0	-12				
		$\frac{(-9+12)}{\left(\frac{1}{4}-0\right)}=12$			
$\frac{1}{4}$	-9		$\frac{(48-12)}{\left(\frac{1}{2}-0\right)}=72$		
		$\frac{(3+9)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)}=48$		$\frac{(-72-72)}{\left(\frac{3}{4}-0\right)}=-192$	
$\frac{1}{2}$	3		$\frac{(12-48)}{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)}=-72$		$\frac{(0+192)}{(1-0)}=192$
		$\frac{(6-3)}{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)}=12$		$\frac{(-72+72)}{\left(1-\frac{1}{4}\right)}=0$	
$\frac{3}{4}$	6		$\frac{(-24-12)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}=-72$		
		$\frac{(0-6)}{\left(1-\frac{3}{4}\right)}=-24$			
1	0				

t_i	$Y(t_i)$	$Y[t_{i-1},t_i]$	$Y[t_{i-2},t_{i-1},t_i]$	$Y[t_{i-3},\dots,t_i]$	$Y[t_0,\dots,t_n]$
0	0				
		$\frac{(9-0)}{\left(\frac{1}{4}-0\right)}=36$			
$\frac{1}{4}$	9		$\frac{(-24-36)}{\left(\frac{1}{2}-0\right)}=-120$		
		$\frac{(3-9)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)}=-24$		$\frac{(-24+120)}{\left(\frac{3}{4}-0\right)}=128$	
$\frac{1}{2}$	3		$\frac{(-36+24)}{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)}=-24$		$\frac{(32-128)}{(1-0)}=-96$
		$\frac{(-6-3)}{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)}=-36$		$\frac{(0+24)}{\left(1-\frac{1}{4}\right)}=32$	
$\frac{3}{4}$	-6		$\frac{(-36+36)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}=0$		
		$\frac{(-15+6)}{\left(1-\frac{3}{4}\right)}=-36$			
1	-15				

$$X(t)=-12+12(t-0)+72(t-0)\left(t-\frac{1}{4}\right)-192(t-0)\left(t-\frac{1}{4}\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)+192(t-0)\left(t-\frac{1}{4}\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{3}{4}\right)$$

$$Y(t)=0+36(t-0)-120(t-0)\left(t-\frac{1}{4}\right)+128(t-0)\left(t-\frac{1}{4}\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)-96(t-0)\left(t-\frac{1}{4}\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{3}{4}\right)$$

$$X(t)=-12+12t+(72t^2-18t)-(192t^3-144t^2+24t)+(192t^4-288t^3+132t^2-18t)$$

$$Y(t)=36t-(120t^2-30t)+(128t^3-96t^2+16t)-(96t^4-144t^3+66t^2-9t)$$

$$X(t)=192t^4-480t^3+348t^2-48t-12$$

$$Y(t)=-96t^4+272t^3-282t^2+91t$$

$X(t) =$ 192 t^4 -480 t^3 +348 t^2 -48 t -12

$Y(t) =$ -96 t^4 +272 t^3 -282 t^2 +91 t 0

El punto $(0, y_0)$ está en la curva entre los puntos $B = (-9,9)$ y $C = (3,3)$, por lo que en el intervalo (a, b), con $a = ¼$ y $b = ½$, habrá una t_x que hace $X(t_x) = 0$ e $Y(t_x) = y_0$.

i	a	b	c	h	X(a)	X(b)	X(c)
1	0,25	0,5	0,4375	-0,1875	-9	3	0,44824
2	0,4375	0,25	0,4286	0,0089	0,44824	-9	0,04177
3	0,4286	0,25	0,42777	0,00083	0,04177	-9	0,00381
4	0,42777	0,25	0,42769	0,00008	0,00381	-9	0,0001

$c = 0{,}42769$ es una aproximación a la raíz t_x que hace $X(t_x) = 0$.

La ordenada y_0 correspondiente al punto de corte de la paramétrica con el eje Y, será

$$Y(t_x) = -96(0{,}42769)^4 + 272(0{,}42769)^3 - 282(0{,}42769)^2 + 91(0{,}42769) =$$
$$y_0 = 5{,}40386$$

El punto $(x_0, 0)$ está en la curva entre los puntos $C = (3,3)$ y D$= (6, -6)$, por lo que en el intervalo (a, b), con $a = ½$ y $b = ¾$, habrá una t_y que hace $Y(t_y) = 0$ y $X(t_y) = x_0$.

i	a	b	c	h	Y(a)	Y(b)	Y(c)
1	0,5	0,75	0,58333	-0,08333	3	-6	0,00012
2	0,58333	0,75	0,58333	0	0,00012	-6	0,00012

$c = 0{,}58333$ es una aproximación a la raíz t_x que hace $Y(t_y) = 0$.

La abscisa x_0 correspondiente al punto de corte de la paramétrica con el eje X, será

$$X(t_y) = 192(0{,}58333)^4 - 480(0{,}58333)^3 + 348(0{,}58333)^2 - 48(0{,}58333) - 12 =$$
$$x_0 = 5{,}3703$$