Integración y aplicaciones

Tema 2 (II)

Integración y aplicaciones

- El problema del área
  (concepto de integral definida)
- Teoremas fundamentales del cálculo
  (regla de Barrow)
- Integral indefinida
- Integración por cambio de variable
- Integración por partes
- Integración de funciones racionales

Integración de funciones racionales

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

Si el grado de *P(x)* ≥ *Q(x)*:

1. Dividimos *P(x)* por *Q(x)* y obtenemos *C(x)* y *R(x)* tal que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

2. Integramos *C(x)* y *R(x)/Q(x)* por separado:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$$

Integración de funciones racionales

Si el grado de *P(x)* < *Q(x)*

Método de las fracciones parciales:

1. Factorizamos *Q(x)* *(raíces simples y múltiples)*:

$$(x-a_1)^i \ldots (x-a_n)^j (x^2+b_1x+c_1)^k \ldots (x^2+b_mx+c_m)^l$$

2. Para las raíces reales (factores lineales):

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_i}{(x-a_1)^i} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{B_1}{(x-a_n)} + \frac{B_2}{(x-a_n)^2} + \ldots + \frac{B_j}{(x-a_n)^j} + \ldots$$

Integración de funciones racionales

3. Para raíces imaginarias (factores cuadráticos):

$$+\frac{C_1x+D_1}{(x^2+b_1x+c_1)}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+b_1x+c_1)^2}+\ldots+\frac{C_ix+D_i}{(x^2+b_1x+c_1)^i}+\ldots$$

$$+\frac{E_1x+F_1}{(x^2+b_mx+c_m)}+\frac{E_2x+F_2}{(x^2+b_mx+c_m)^2}+\ldots+\frac{E_jx+F_j}{(x^2+b_mx+c_m)^j}$$

4. Resolver el sistema de ecuaciones ($A_1,A_2,\ldots,B_1,B_2,\ldots,C_1,C_2,\ldots,D_1,D_2,\ldots,E_1,E_2,\ldots$)

5. Integrar la suma de fracciones simples

Ejemplo 1

$$\int \frac{2x^3 - x^2 + 4}{x^2 - 4}\,dx$$

Ejemplo 1

$$\int \frac{2x^3 - x^2 + 4}{x^2 - 4} dx$$

Dividimos *P(x)/Q(x)* y cambiamos por *C(x)+R(x)/Q(x)*

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & -x^2 & & +4 & x^2-4 \\ \cline{5-5} -2x^3 & & +8x & & 2x-1 \\ \cline{1-4} & -x^2 & +8x & +4 & \\ & x^2 & & -4 & \\ \cline{1-4} & & 8x & & \end{array}$$

$$\int \frac{2x^3 - x^2 + 4}{x^2 - 4} dx = \int (2x-1) dx + \int \frac{8x}{x^2-4} dx =$$

$$= x^2 - x + \int \frac{8x}{x^2-4} dx = x(x-1) + \int \frac{8x}{x^2-4} dx$$

Ejemplo 1

$$\int \frac{8x}{x^2-4}dx = \int \frac{8x}{(x-2)(x+2)}dx$$

$$\frac{8x}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$8x = A(x+2)+B(x-2) = Ax+2A+Bx-2B$$

$$8x = (A+B)x \quad 0 = 2A-2B \quad A = B = 4$$

$$\int \frac{8x}{x^2-4}dx = \int \frac{4}{x-2}dx + \int \frac{4}{x+2}dx$$

Ejemplo 1

$$\int \frac{2x^3 - x^2 + 4}{x^2 - 4} dx = x(x-1) + \int \frac{8x}{x^2 - 4} dx =$$

$$= x(x-1) + \int \frac{4}{x-2} dx + \int \frac{4}{x+2} dx =$$

$$= x(x-1) + 4\int \frac{1}{x-2} dx + 4\int \frac{1}{x+2} dx =$$

$$= x(x-1) + 4\ln(x-2) + 4\ln(x+2) + c =$$

$$= x(x-1) + 4\ln[(x-2)(x+2)] + c =$$

$$= x(x-1) + \ln(x^2-4)^4 + c$$

Ejemplo 2

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^5 + 2x^3 + x}\,dx = \int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x(x^2 + 1)^2}\,dx$$

Ejemplo 2

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^5 + 2x^3 + x}\,dx = \int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x(x^2+1)^2}\,dx$$

$$\frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2+1)} + \frac{Dx + E}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{A(x^2+1)^2 + (Bx + C)x(x^2+1) + (Dx + E)x}{x(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{Ax^4 + 2Ax^2 + A + Bx^4 + Cx^3 + Bx^2 + Cx + Dx^2 + Ex}{x(x^2+1)^2}$$

Ejemplo 2

$$\int \frac{x^3-2x^2+x-1}{x^5+2x^3+x}dx=\int \frac{x^3-2x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}dx$$

$$\frac{x^3-2x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{(A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A}{x(x^2+1)^2}$$

$$A+B=0 \quad C=1 \quad 2A+B+D=-2 \quad C+E=1 \quad A=-1$$

$$A=-1 \quad B=1 \quad C=1 \quad D=-1 \quad E=0$$

Ejemplo 2

$$\int \frac{x^3-2x^2+x-1}{x^5+2x^3+x}dx = \int \frac{x^3-2x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}dx$$

$$\frac{x^3-2x^2+x-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{-1}{x} + \frac{1x+1}{(x^2+1)} + \frac{-1x+0}{(x^2+1)^2}$$

$$\int \frac{x^3-2x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}dx = \int \frac{-dx}{x} + \int \frac{x+1}{(x^2+1)}dx + \int \frac{-xdx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= -\ln(x) + \int \frac{xdx}{(x^2+1)} + \int \frac{dx}{(x^2+1)} - \int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} =$$

Ejemplo 2

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^5 + 2x^3 + x} dx = \int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x(x^2+1)^2} dx =$$

$$= -\ln(x) + \int \frac{xdx}{(x^2+1)} + \int \frac{dx}{(x^2+1)} - \int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} =$$

Sustituimos $u=(x^2+1)$ y $du=2xdx$

$$= -\ln(x) + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + \arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} =$$

$$= -\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(u) + \arctan(x) - \frac{1}{2}(-1u^{-1}) + c =$$

Ejemplo 2

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^5 + 2x^3 + x}\,dx = \int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x(x^2+1)^2}\,dx =$$

$$= -\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(u) + \arctan(x) - \frac{1}{2}(-1u^{-1}) + c =$$

Restituimos *u=(x²+1)*

$$= -\ln(x) + \frac{\ln(x^2+1)}{2} + \arctan(x) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c =$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right) + \arctan(x) + \frac{1}{2x^2+2} + c$$

Integración y aplicaciones

- El problema del área
  (concepto de integral definida)
- Teoremas fundamentales del cálculo
  (regla de Barrow)
- Integral indefinida
- Integración por cambio de variable
- Integración por partes
- Integración de funciones racionales
- Integrales impropias

Integrales impropias

De primera especie:

Si la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ existe para todo b≥a

y existe $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ entonces la integral

impropia que se denota $\int_a^\infty f(x)dx$ se dice

que converge, y de lo contrario, que diverge.

Ídem para el $\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ y $\int_{-\infty}^b f(x)dx$

Integrales impropias

De segunda especie:

Si el integrando de una integral definida no esta definido en algún punto *c* del intervalo de integración *[a,b],* entonces se dice que la

integral impropia $\int_a^b f(x)dx$ converge

si lo hacen $\lim_{b \to c^-} \int_a^b f(x)dx$ y $\lim_{a \to c^+} \int_a^b f(x)dx$

y si no la integral impropia diverge.

Ejemplos

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$$

Ejemplos

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \qquad \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}[-\frac{1}{x}]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[1-\frac{1}{b}\right]=1$$

Converge

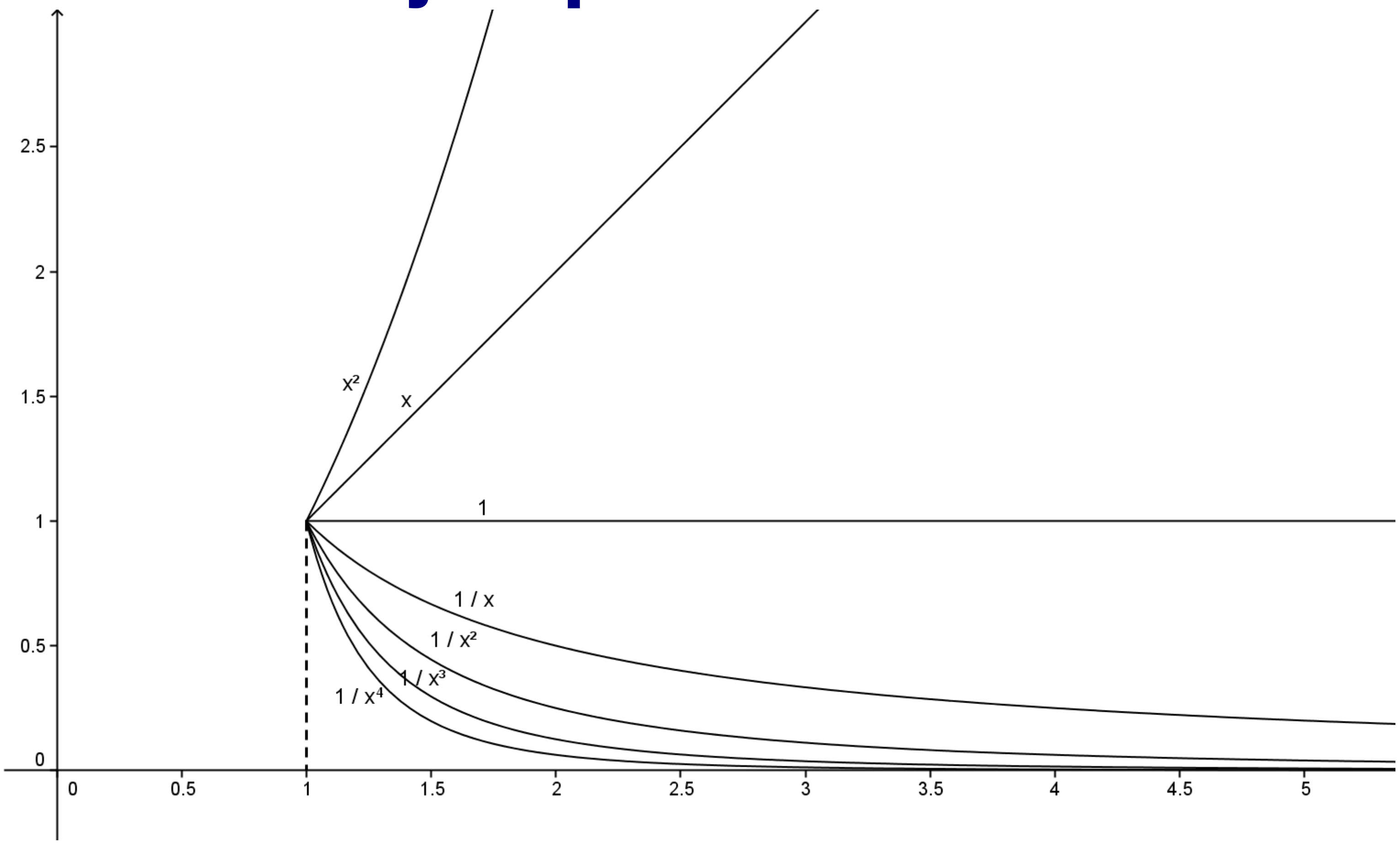
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} \qquad \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}[\ln(x)]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[\ln(b)\right]=\infty$$

Diverge

Ejemplos

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x}$$



$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^n}$$

Diverge si n≤1
y converge para n>1 a $\frac{1}{n-1}$

Integración y aplicaciones

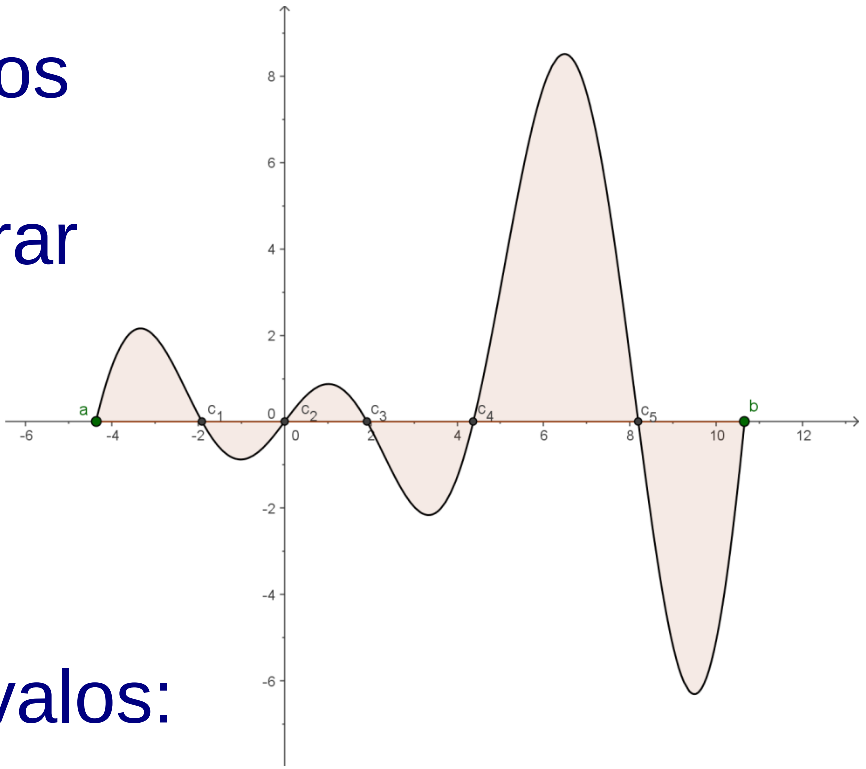
- El problema del área
(concepto de integral definida)
- Teoremas fundamentales del cálculo
(regla de Barrow)
- Integral indefinida
- Integración por cambio de variable
- Integración por partes
- Integración de funciones racionales
- Integrales impropias
- Aplicaciones en áreas, longitudes y volúmenes de revolución

Áreas

Áreas comprendidas en la curva y el eje *x*:

Se deben buscar los puntos de corte de la función con el eje *x* para integrar por intervalos:

$C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C_n$



Se suman las partes en valor absoluto de la integral por intervalos:

$$\left|\int_a^{c_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| + \ldots + \left|\int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)dx\right| + \left|\int_{c_n}^{b} f(x)dx\right|$$

Ejemplo

Área comprendida entre x^4-5x^2+4 y el eje x en $[-2,2]$

Ejemplo

Área comprendida entre x^4-5x^2+4 y el eje x en $[-2,2]$

$$x^4-5x^2+4=(x^2)^2-5(x^2)+4$$

$$(x^2)=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\begin{matrix}4\\1\end{matrix}$$

$$x=\begin{matrix}\pm\sqrt{4}=\begin{matrix}+2\\-2\end{matrix}\\\pm\sqrt{1}=\begin{matrix}+1\\-1\end{matrix}\end{matrix}$$

Al ser función par:

$$A=2\left(\left|\int_0^1(x^4-5x^2+4)dx\right|+\left|\int_1^2(x^4-5x^2+4)dx\right|\right)=$$

$$=2\left(\left|\left[\frac{x^5}{5}-\frac{5x^3}{3}+4x\right]_0^1\right|+\left|\left[\frac{x^5}{5}-\frac{5x^3}{3}+4x\right]_1^2\right|\right)=$$

Ejemplo

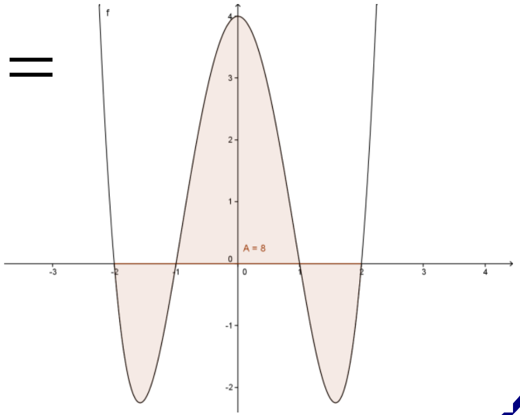
Área comprendida entre x^4-$5x^2$+4 y el eje x en $[-2,2]$

$$A = 2\left(\left|\left[\frac{x^5}{5}-\frac{5x^3}{3}+4x\right]_0^1\right|+\left|\left[\frac{x^5}{5}-\frac{5x^3}{3}+4x\right]_1^2\right|\right)=$$

$$=\frac{2}{15}\left(\left|\left[3x^5-25x^3+60x\right]_0^1\right|+\left|\left[3x^5-25x^3+60x\right]_1^2\right|\right)$$

$$=\frac{2}{15}\left(\left|38-0\right|+\left|\left[96-200+120\right]-38\right|\right)=$$

$$=\frac{2}{15}(38+|16-38|)=\frac{2\cdot 60}{15}=8$$

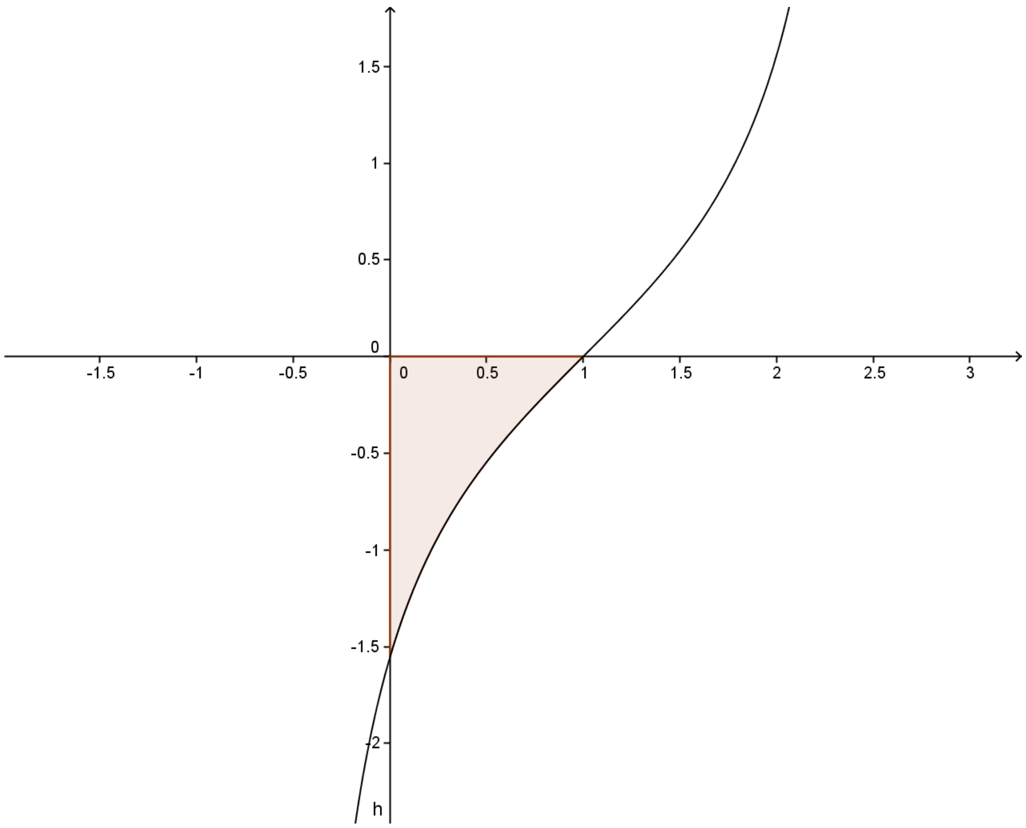


Áreas

Área comprendida entre la curva y los dos ejes:

Se busca b más próximo a *0* tal que *f(b)=0* y:

$$A = \left| \int_0^b f(x)dx \right|$$



Ejemplo

Área comprendida entre $f(x)=\tan(x-1)$ y ambos ejes

Ejemplo

Área comprendida entre *f(x)=tan(x-1)* y ambos ejes

$$\tan(x-1)=0$$

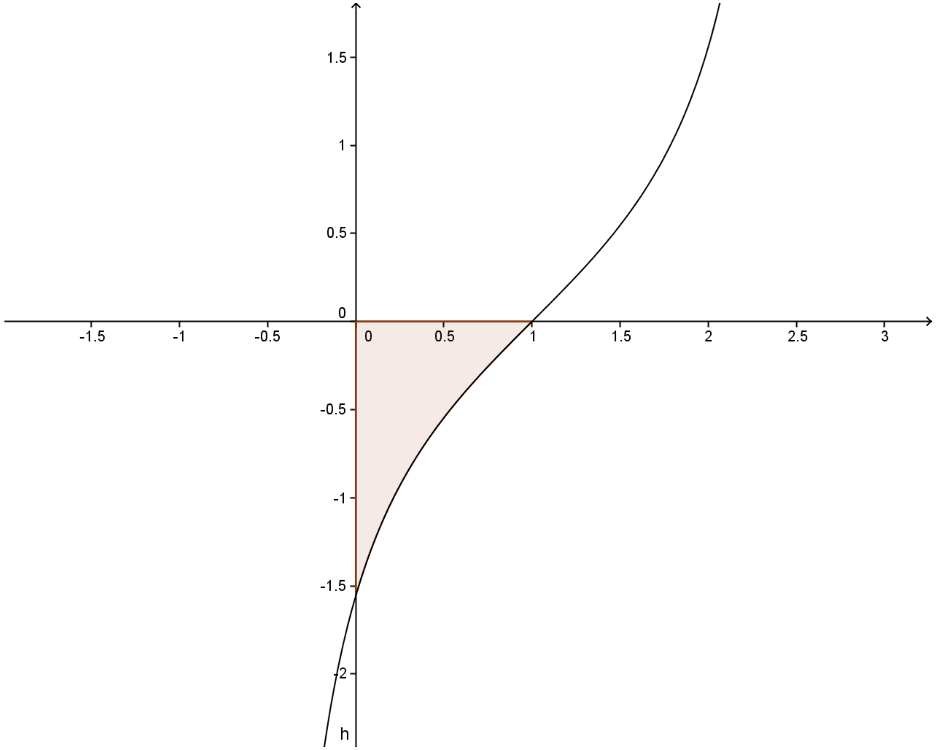
Corte con el eje *y* en *x=1*

$$A=\left|\int_0^1 \tan(x-1)dx\right|$$

$$=\left|\left[-\ln(\cos(x-1))\right]_0^1\right|$$

$$=\left|\left[0+\ln(\cos(-1))\right]\right|$$

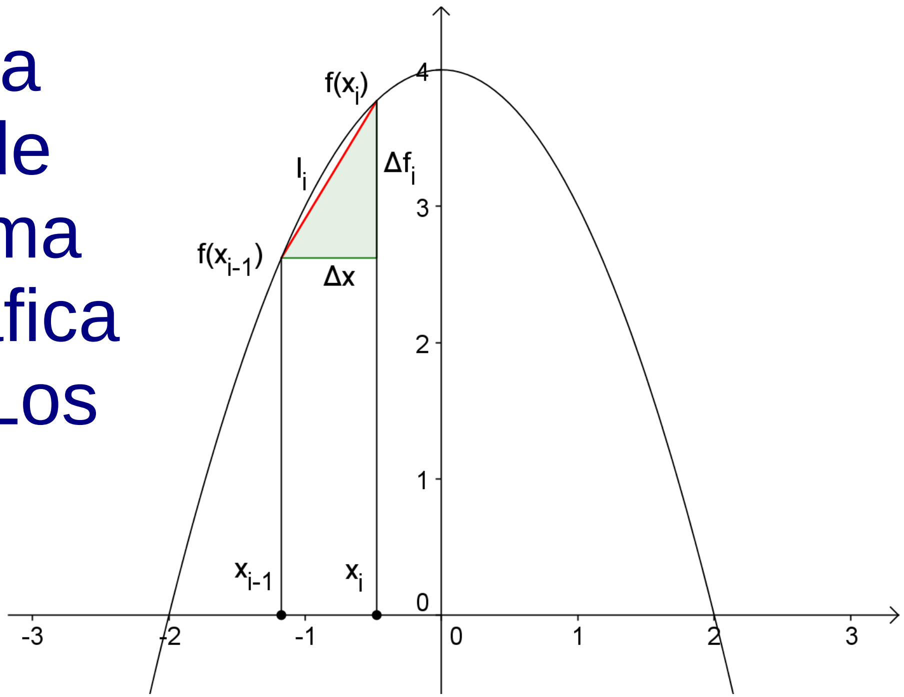
$$=-\ln(\cos(1))$$



Longitud de una gráfica

Dividimos el intervalo *[a,b]* en *n* subintervalos donde *f(x)* es continua y de igual longitud $\Delta x=(b-a)/n$

En cada subintervalo, una hipotenusa l_i que va de $f(x_{i-1})$ a $f(x_i)$ se aproxima a la longitud de la gráfica en ese subintervalo. Los catetos son Δx y $\Delta f_i=f(x_i)-f(x_{i-1})$



$$l_i=\sqrt{\Delta x^2+\Delta f_i^{\,2}}=\sqrt{\Delta x^2+[f(x_i)-f(x_{i-1})]^2}$$

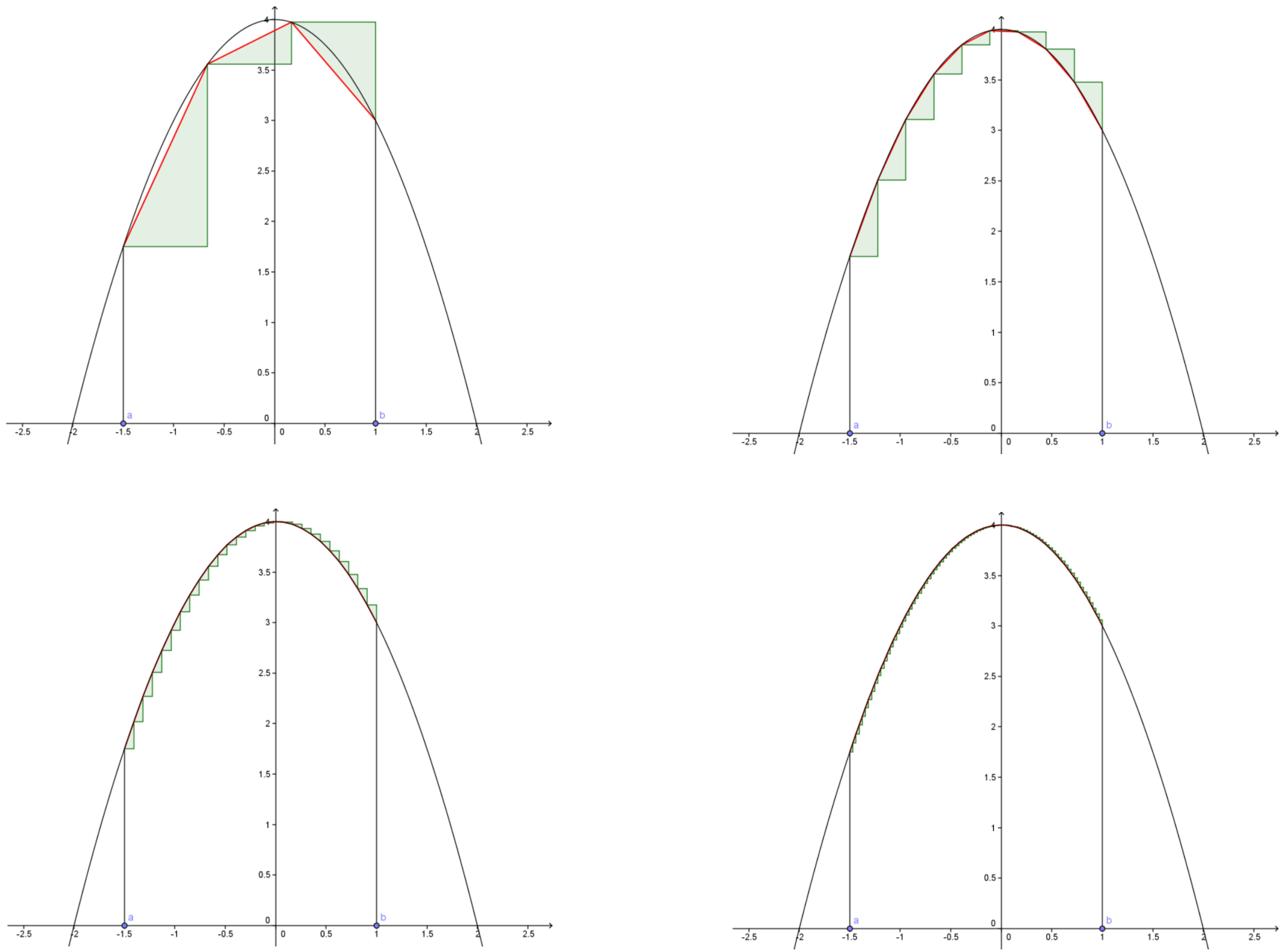
Longitud de una gráfica

$$l_i = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta f_i^{\,2}} = \sqrt{\Delta x^2 + \frac{\Delta f_i^{\,2} \cdot \Delta x^2}{\Delta x^2}} =$$

$$= \sqrt{\Delta x^2 (1 + \frac{\Delta f_i^{\,2}}{\Delta x^2})} = \sqrt{(1 + \frac{\Delta f_i^{\,2}}{\Delta x^2})} \Delta x =$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_i}{\Delta x}\right)^2} \Delta x = \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x}\right)^2} \Delta x$$

Longitud de una gráfica



Longitud de una gráfica

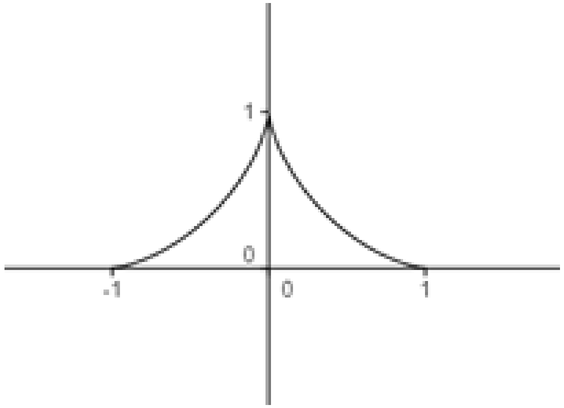
$$L = \sum_{n\to\infty} l_i = \sum_{n\to\infty} \sqrt{1+\left(\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{\Delta x}\right)^2}\,dx$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

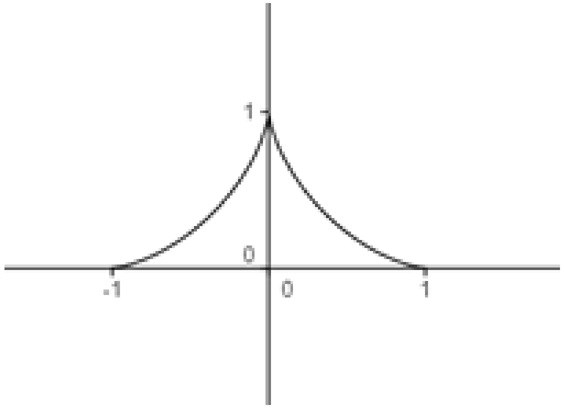
Ejemplo

Calcula la longitud de la curva $x^{2/3}+y^{2/3}=1$



Ejemplo

Calcula la longitud de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$



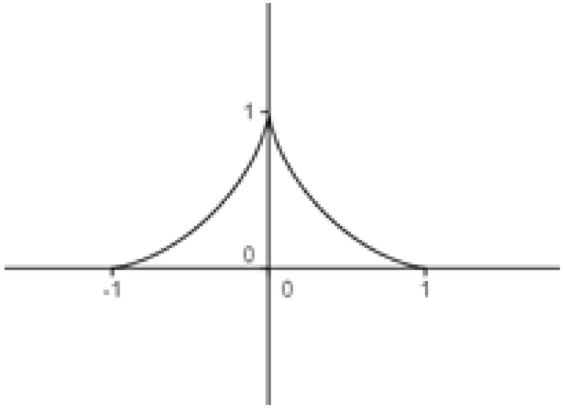
Derivada implícita

$$\frac{2x^{-1/3}}{3} + \frac{2y^{-1/3}}{3}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

Ejemplo

Calcula la longitud de la curva $x^{2/3}+y^{2/3}=1$



Derivada implícita

$$\frac{2x^{-1/3}}{3}+\frac{2y^{-1/3}}{3}\frac{dy}{dx}=0$$

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

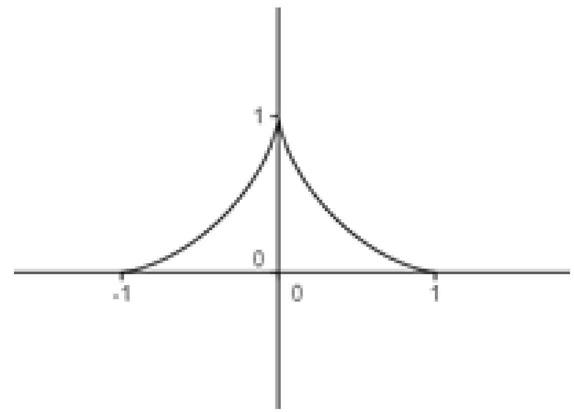
$$y^{2/3}=1-x^{2/3}$$

$$f'(x)^2=\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}=\frac{1-x^{2/3}}{x^{2/3}}=x^{-2/3}-1$$

Ejemplo

Calcula la longitud de la curva $x^{2/3}+y^{2/3}=1$

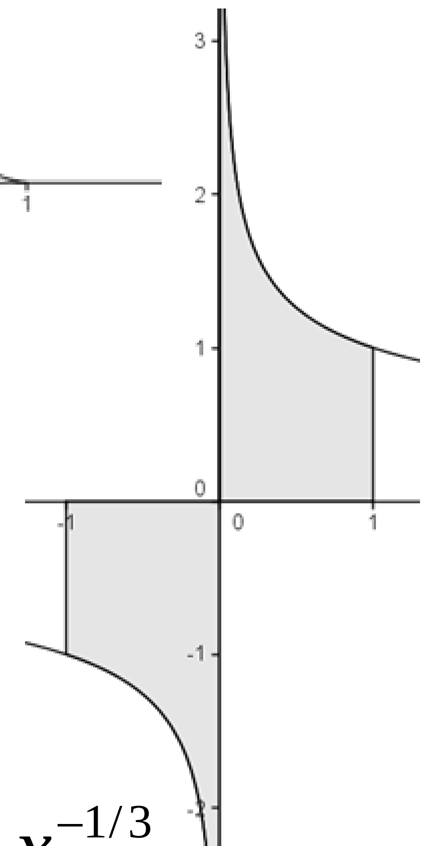
$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$



$$f'(x)^2=\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}=x^{-2/3}-1$$

Longitud
de -1 a 1

$$L=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$



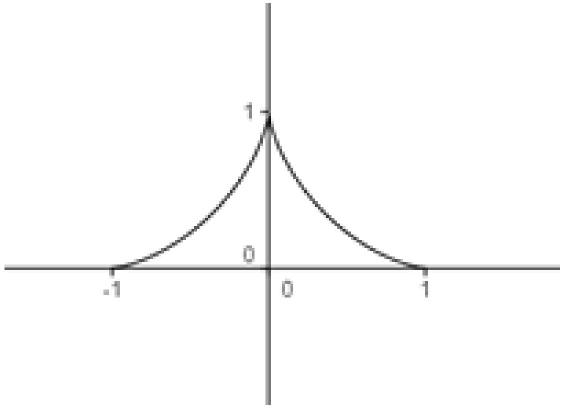
Ojo con el integrando y qué
signos dan los intervalos

$$\sqrt{1+f'(x)^2}=\sqrt{1+x^{-2/3}-1}=\sqrt{x^{-2/3}}=x^{-1/3}$$

Ejemplo

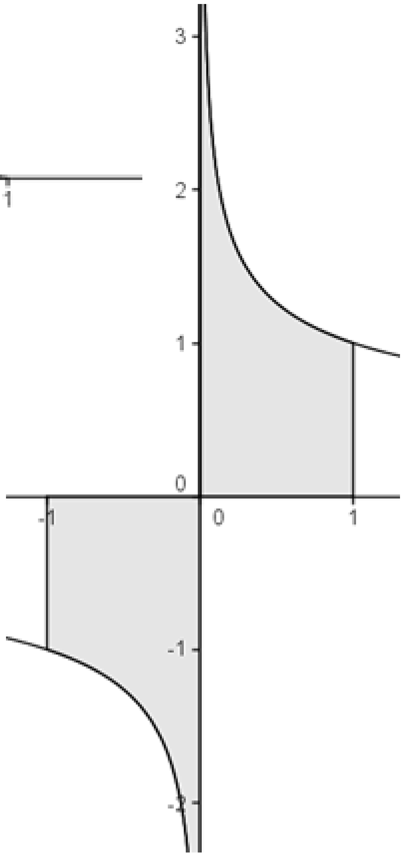
Calcula la longitud de la curva $x^{2/3}+y^{2/3}=1$

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$



$$f'(x)^2=\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}=x^{-2/3}-1$$

Longitud de -1 a 1

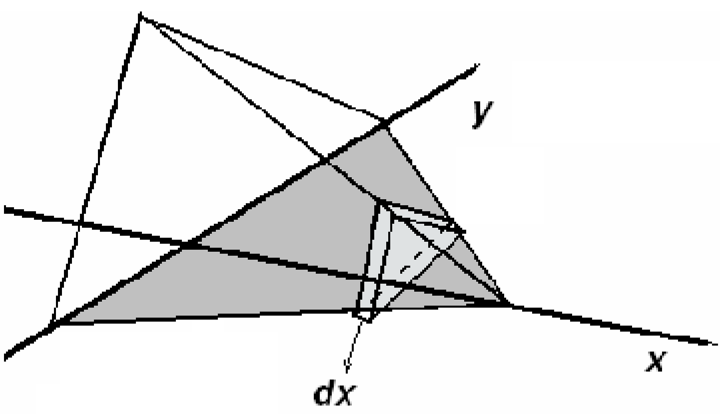


$$L=2\int_0^1\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=2\int_0^1 x^{-1/3}=$$

$$=2\frac{3}{2}x^{2/3}\Big]_0^1=3x^{2/3}\Big]_0^1=3-0=3$$

Volumen por secciones planas

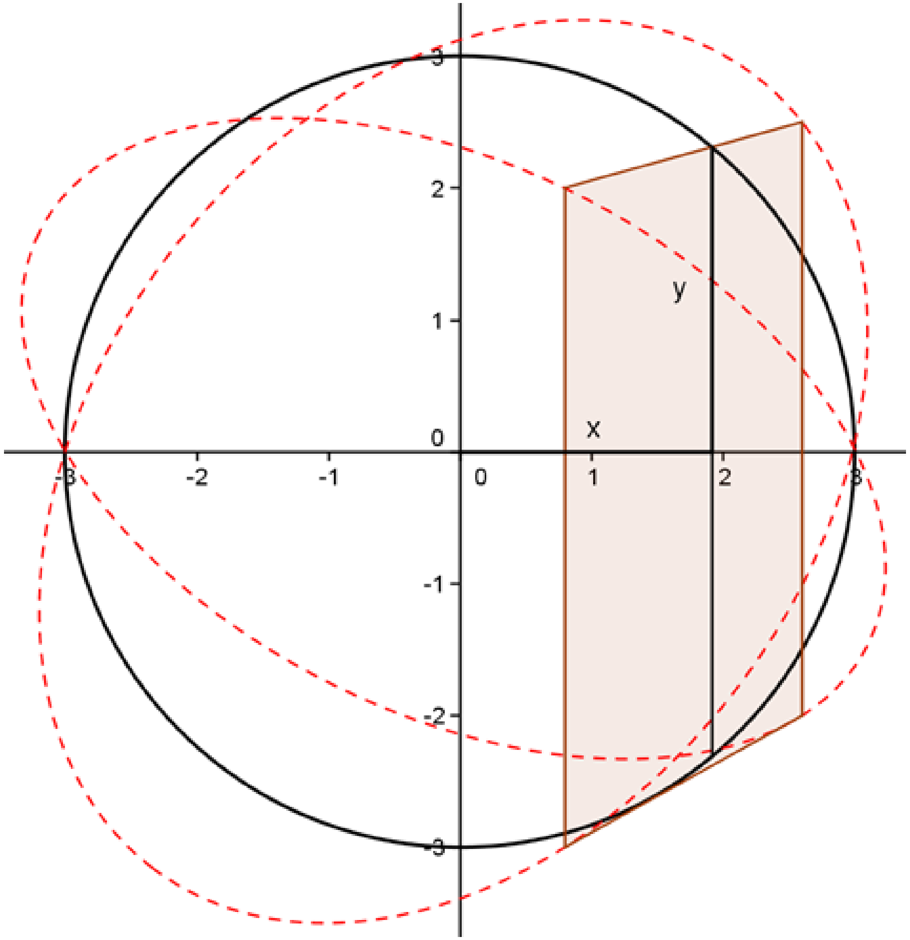
El volumen de un sólido que se extiende de *x=a* a *x=b* (intervalo *[a,b]*) y cuya área de la sección en un punto *x* venga dada por una función *A(x)* se calcula con la integral:



$$V = \int_a^b A(x)dx$$

Ejemplo

Calcula el volumen de un sólido cuyas secciones transversales a lo largo del eje *x* son cuadrados de lado igual a la longitud de la cuerda vertical que pasa por *x* en una circunferencia de radio *3* y centro en el origen de coordenadas.



Ejemplo

Calcula el volumen de un sólido cuyas secciones transversales a lo largo del eje x son cuadrados de lado igual a la longitud de la cuerda vertical que pasa por x en una circunferencia de radio 3 y centro en el origen de coordenadas.

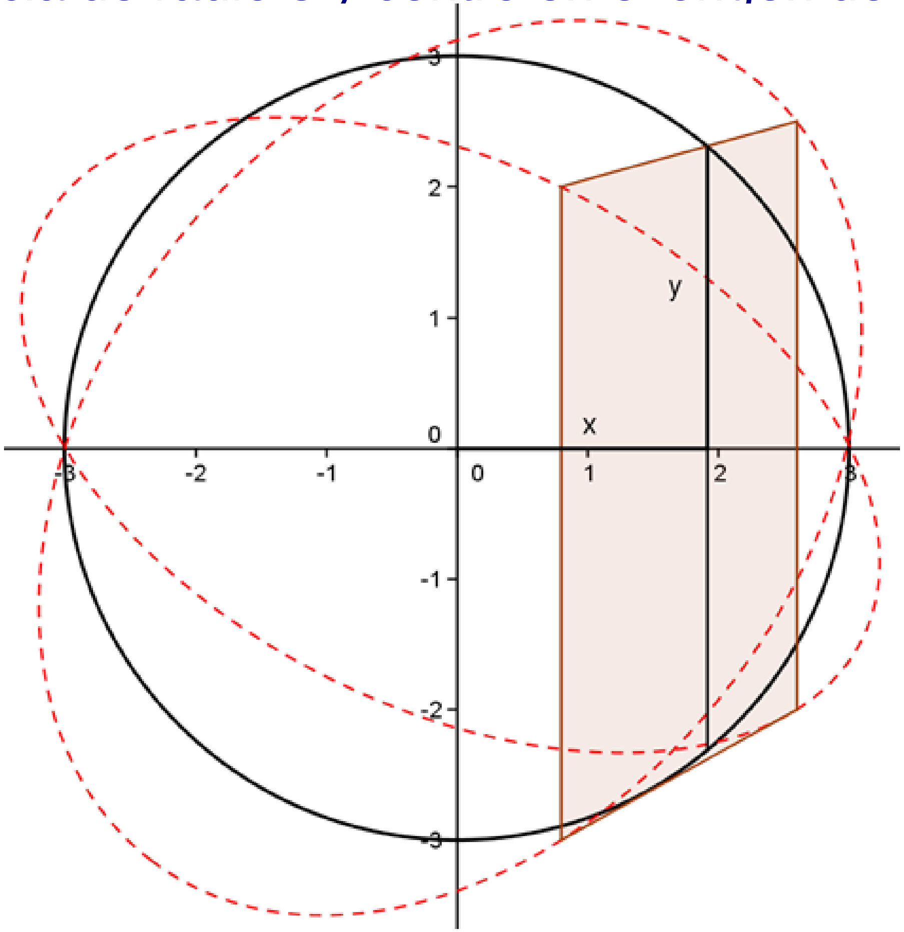
$$y^2 + x^2 = 3^2$$

$$A(x) = (2y)^2 = 4(9 - x^2)$$

$$V = 2\int_0^3 A(x)dx =$$

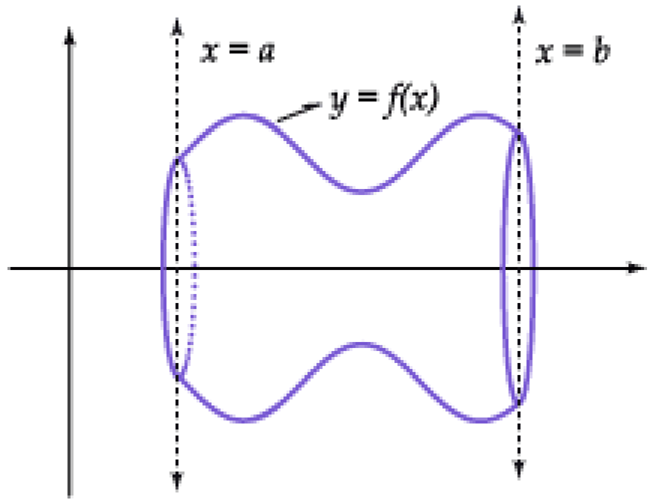
$$= 8\int_0^3 (9 - x^2)dx =$$

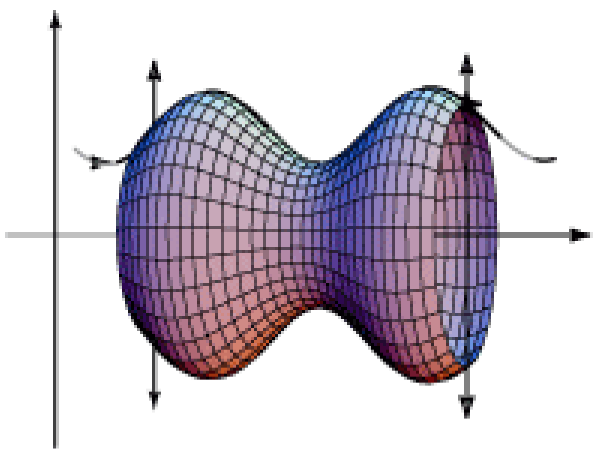
$$= 8\left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^3 = 144$$



Volumen de revolución

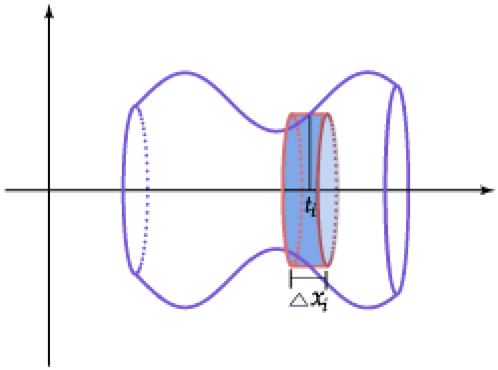
El volumen obtenido al girar sobre el eje *x* la gráfica de una *f(x)≥0* en un intervalo *[a,b]*





Volumen de revolución

Se subdivide *[a,b]* en *n* intervalos donde *f(x)* es continua y con ancho *Δx=(b-a)/n*.



f(x) es el radio de la base del disco e *Δx* su altura. El volumen de cada disco será:

$$v_i = (\pi \cdot f(x_i)^2) \cdot \Delta x$$

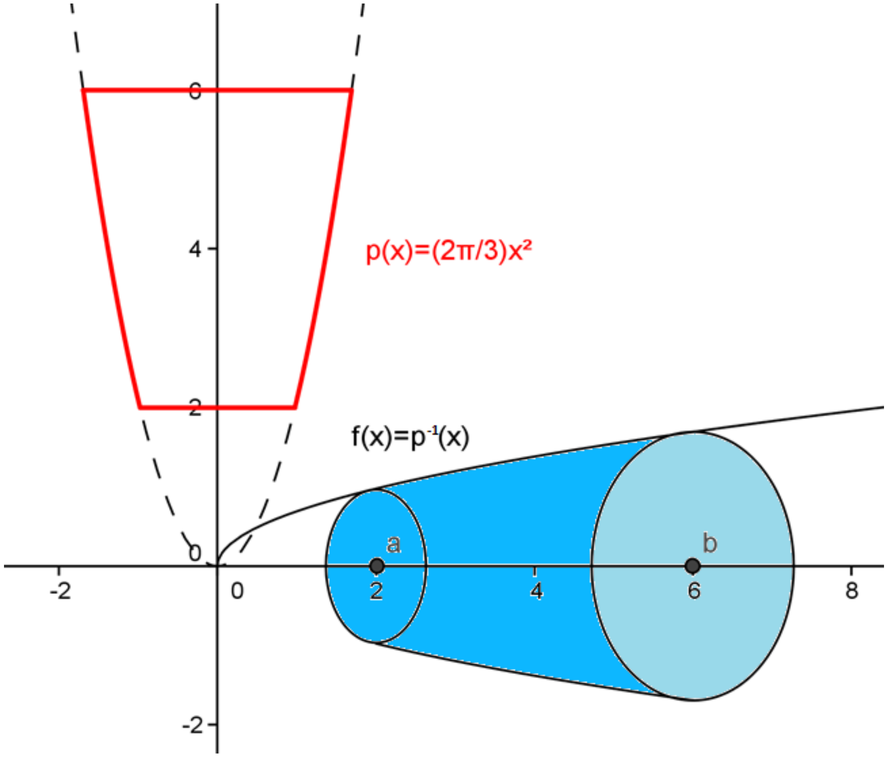
Volumen de revolución

La suma de los volúmenes de los discos se se aproximará al volumen de la figura cuando $n \to \infty$. El volumen de la figura de revolución es entonces la integral:

$$V = \sum_{n \to \infty} (\pi \cdot f(x_i)^2 \Delta x) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

Ejemplo

Calcula el volumen de un vaso cuyo perfil viene determinado por el polinomio $P(x)=(2\pi/3)x^2$ y las rectas $y=2$ e $y=6$:



Ejemplo

Calcula el volumen de un vaso cuyo perfil viene determinado por el polinomio *P(x)=(2π/3)x²* y las rectas *y=2* e *y=6*:

$$f(x)=\sqrt{\frac{3x}{2\pi}}$$

$$V=\pi\int_2^6 f(x)^2\,dx=\pi\int_2^6\frac{3x}{2\pi}dx=$$

$$\int_2^6\frac{3x}{2}dx=\left.\frac{3x^2}{4}\right]_2^6=\frac{108}{4}-\frac{12}{4}=24$$