

La derivada y sus aplicaciones (I)

Tema 1

La derivada y sus aplicaciones (I)

- Noción de derivada

Noción de derivada

El concepto comenzó a plantearse en la época de la Grecia clásica (siglo III a.C.), pero se formalizó al converger en el siglo XVII matemáticos europeos en el similares sistemas de resolución a 4 problemas:

- **El problema de la recta tangente.**
- **El problema de la velocidad y aceleración.**
- **El problema de máximos y mínimos.**
- **El problema del área.**

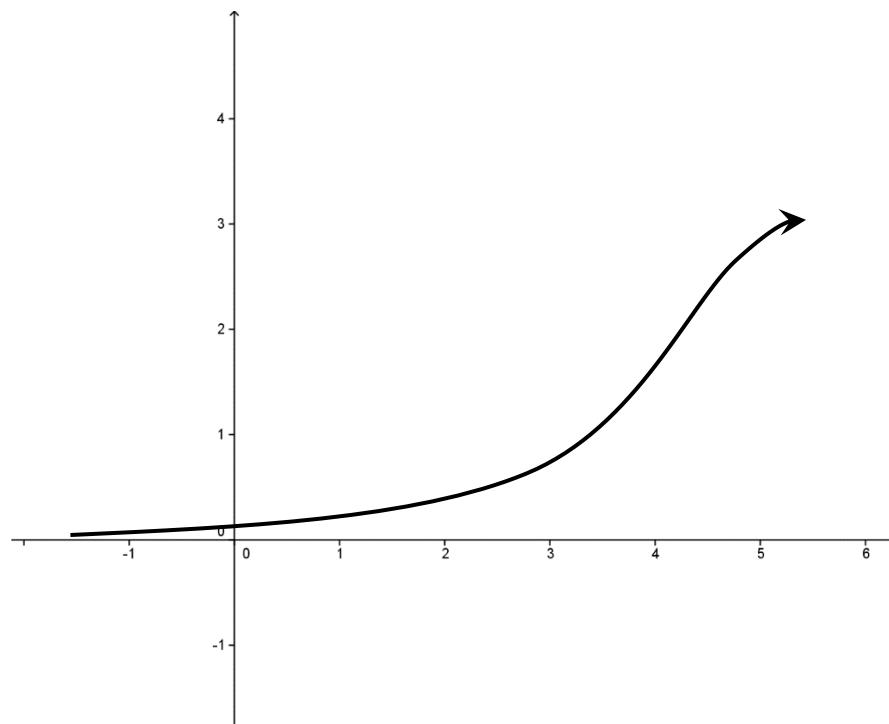
¿Cómo varía una función?

¿En qué rangos crece o decrece, en cuales crece más rápido, etc.?

¿Cómo varía una función?

¿En qué rangos crece o decrece, en cuales crece más rápido, etc.?

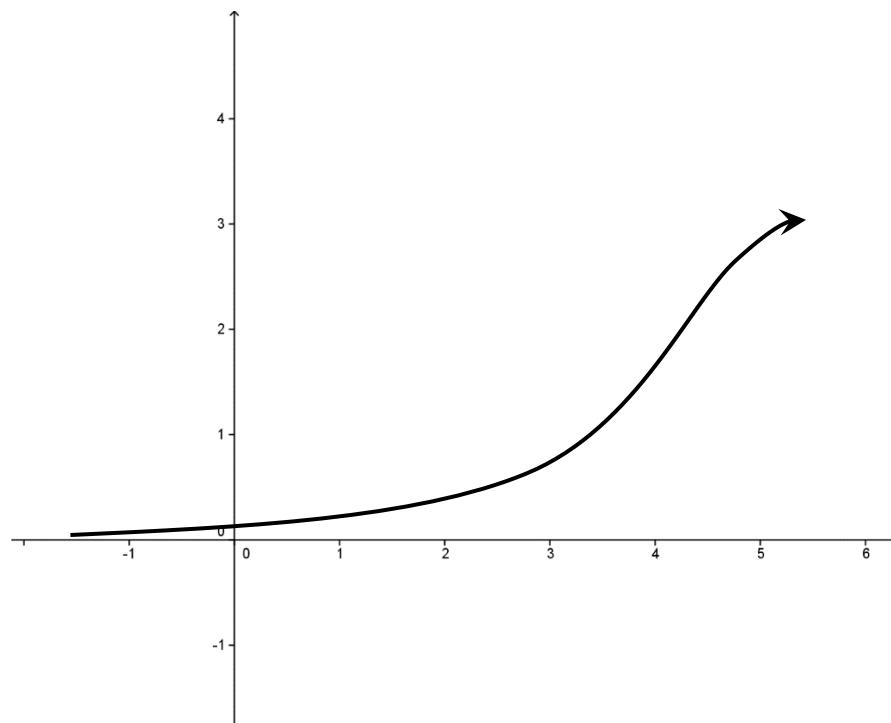
Analizaremos su representación gráfica:



¿Cómo varía una función?

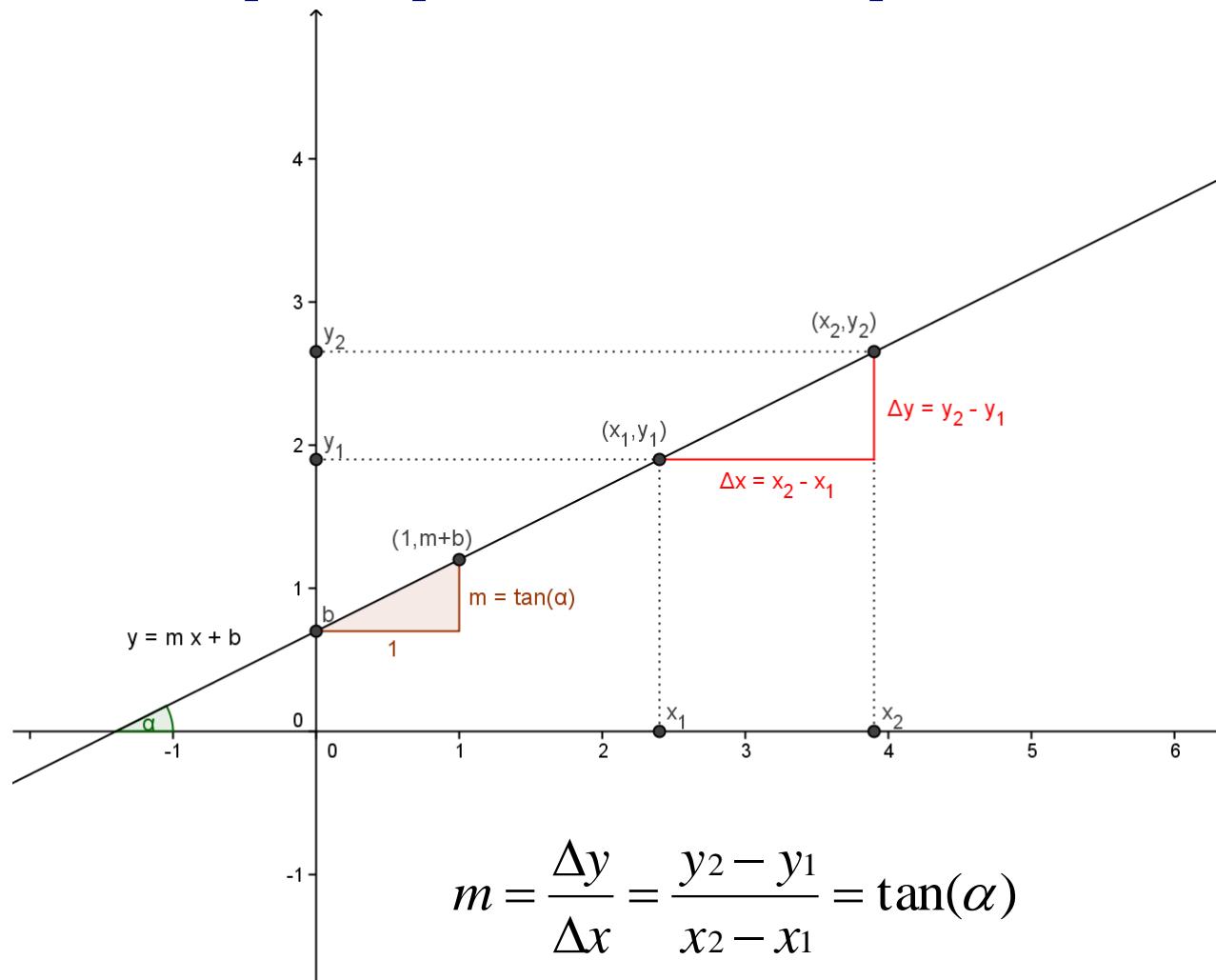
¿En qué rangos crece o decrece, en cuales crece más rápido, etc.?

Analizaremos su representación gráfica:



¿Cuánto varía y por cada unidad de x?

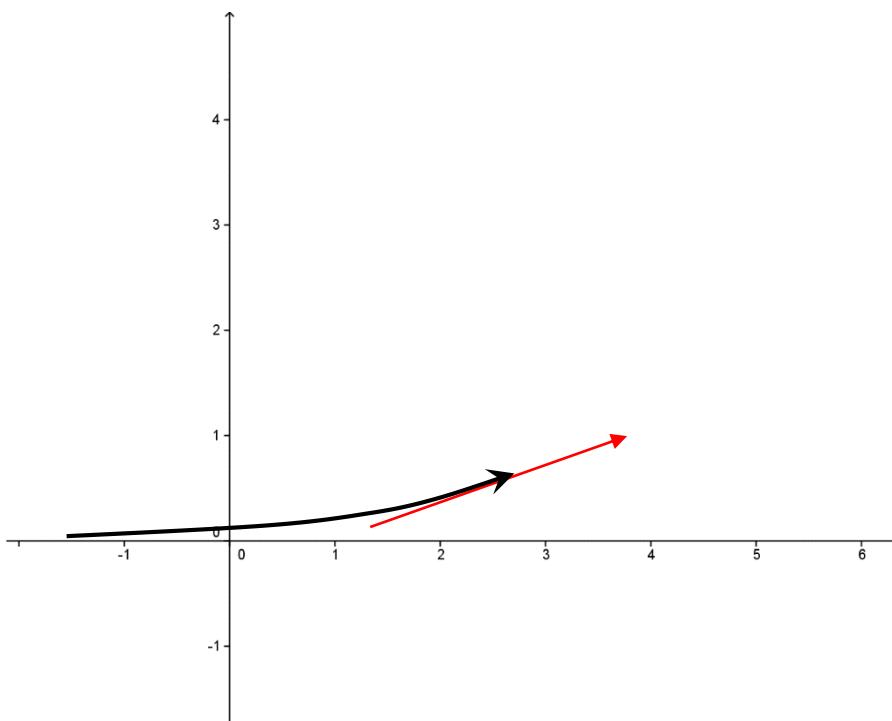
El concepto pendiente puede ayudar



En una recta, m da cuánto varía y por cada unidad de x

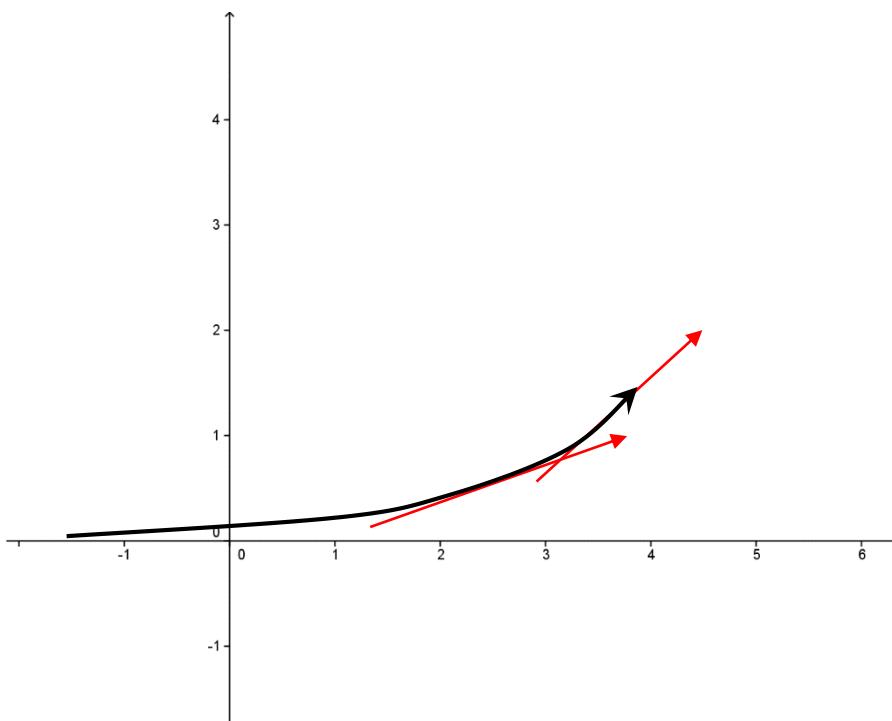
¿Las curvas tienen pendientes?

Podemos considerar que en cada punto, una curva “crece” (“gira” si consideramos el ángulo) con la pendiente de la tangente a ese punto:



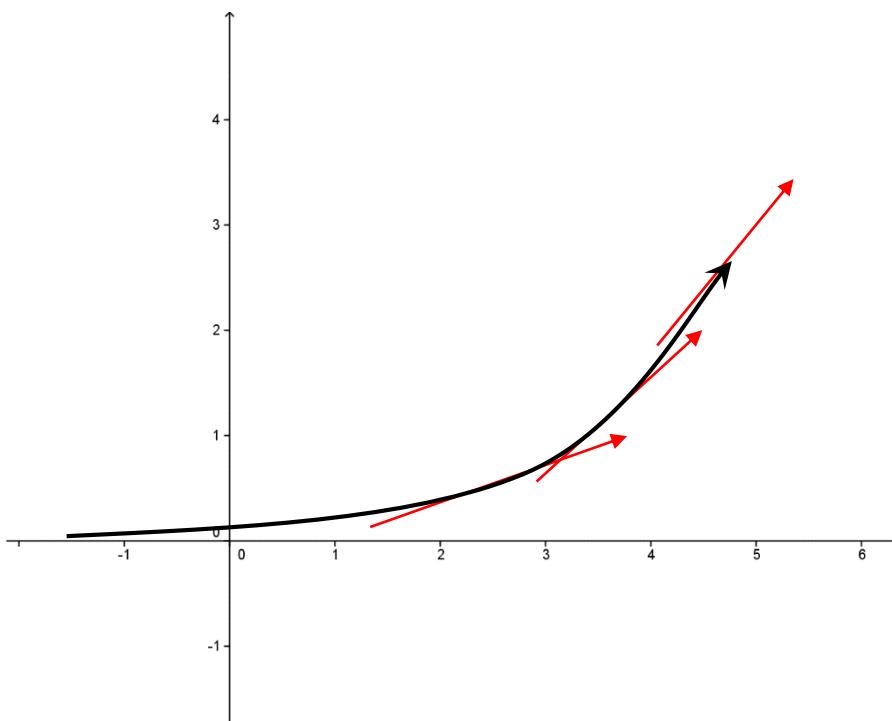
¿Las curvas tienen pendientes?

Podemos considerar que en cada punto, una curva “crece” (“gira” si consideramos el ángulo) con la pendiente de la tangente a ese punto:



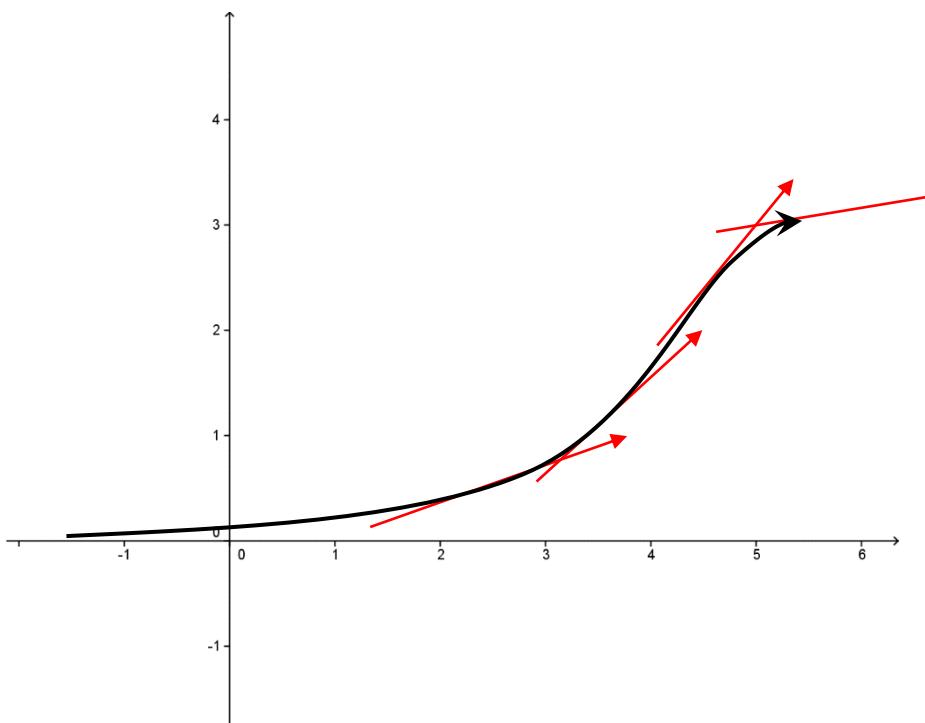
¿Las curvas tienen pendientes?

Podemos considerar que en cada punto, una curva “crece” (“gira” si consideramos el ángulo) con la pendiente de la tangente a ese punto:

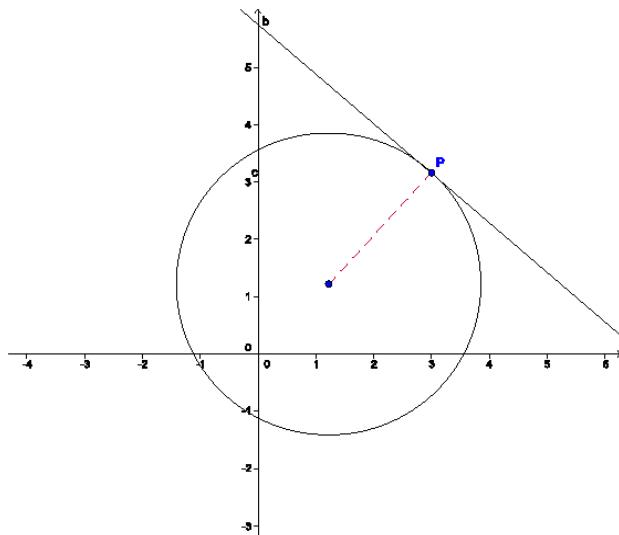


¿Las curvas tienen pendientes?

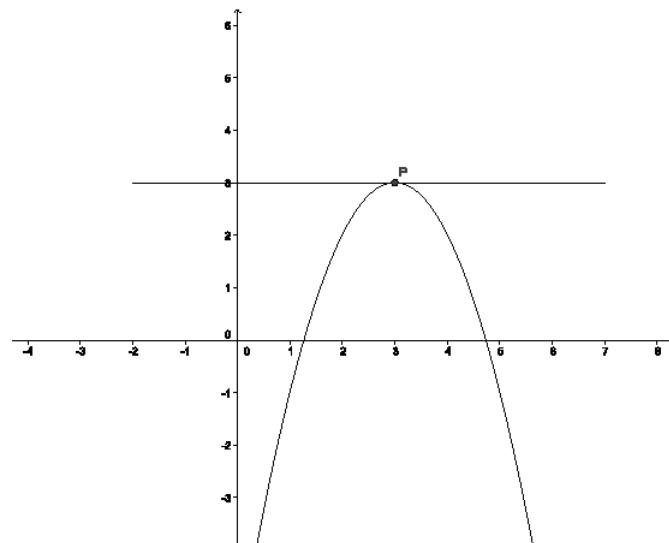
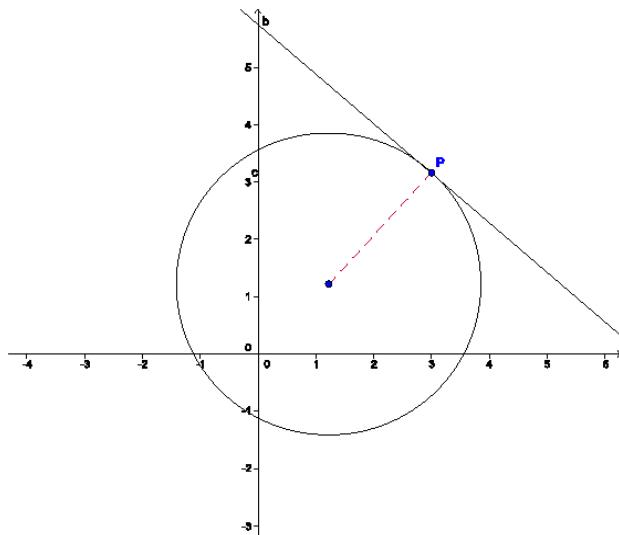
Podemos considerar que en cada punto, una curva “crece” (“gira” si consideramos el ángulo) con la pendiente de la tangente a ese punto:



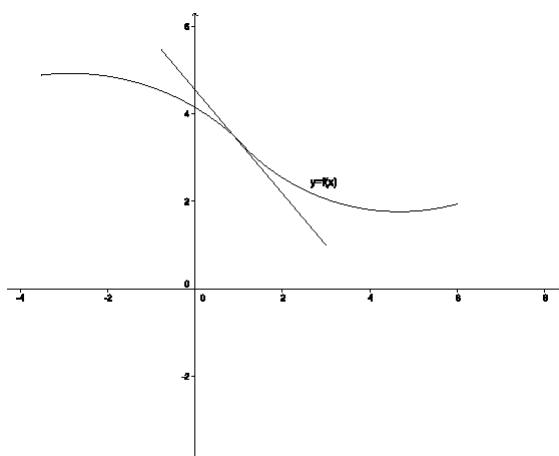
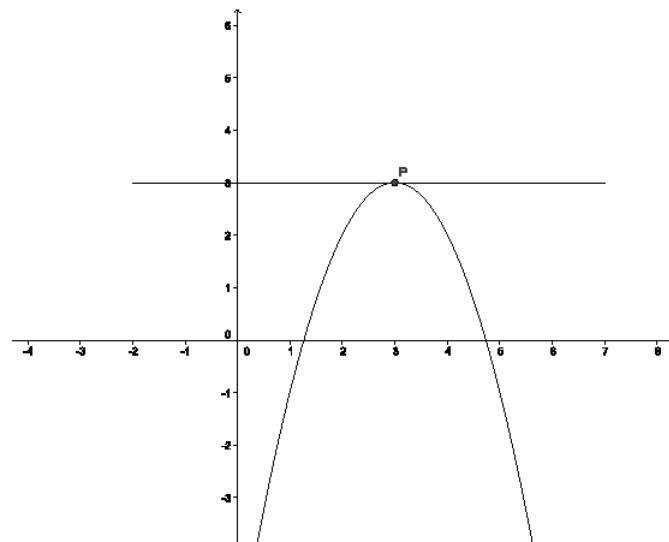
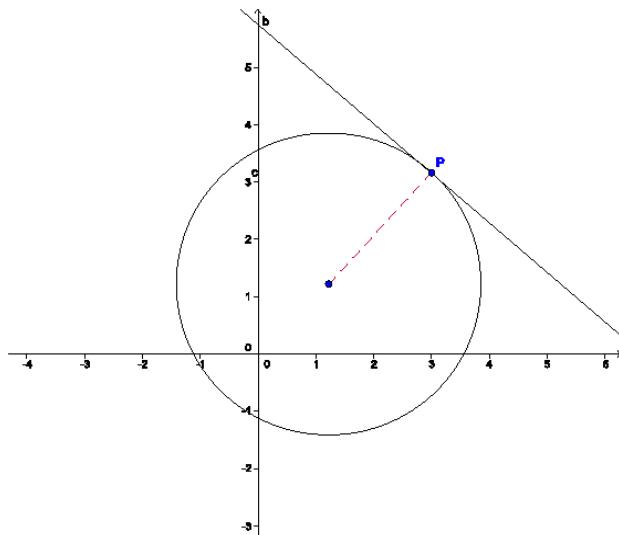
¿Qué recta consideramos tangente a una curva en un punto dado?



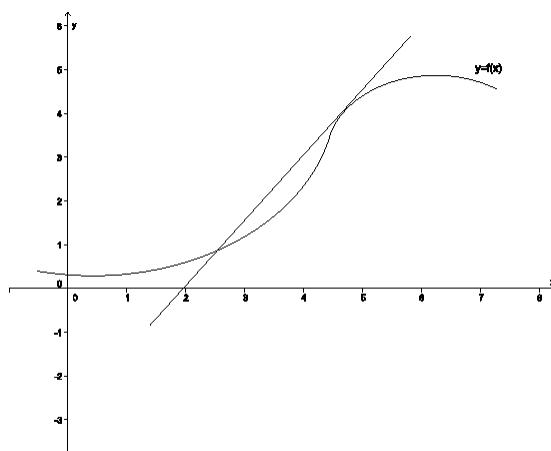
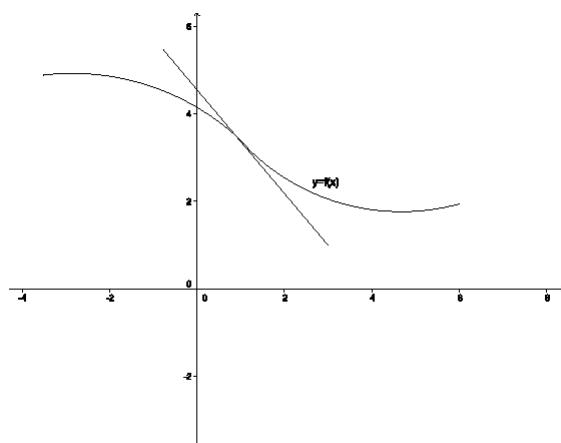
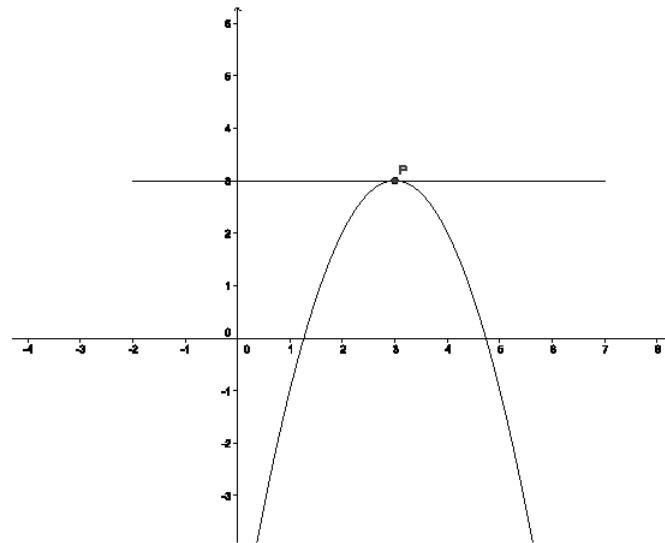
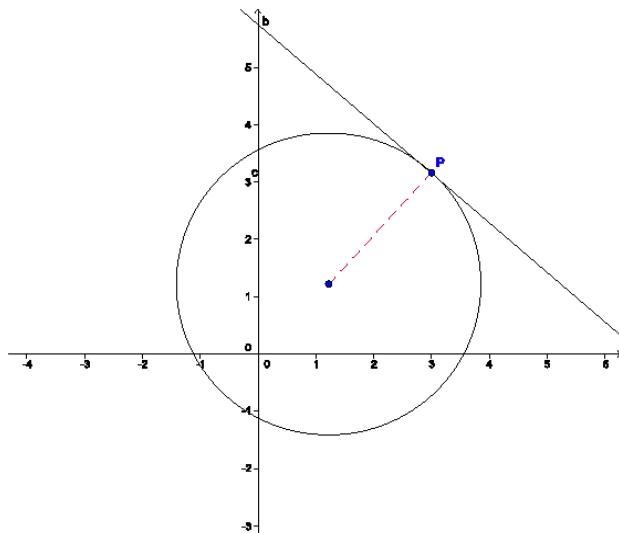
¿Qué recta consideramos tangente a una curva en un punto dado?



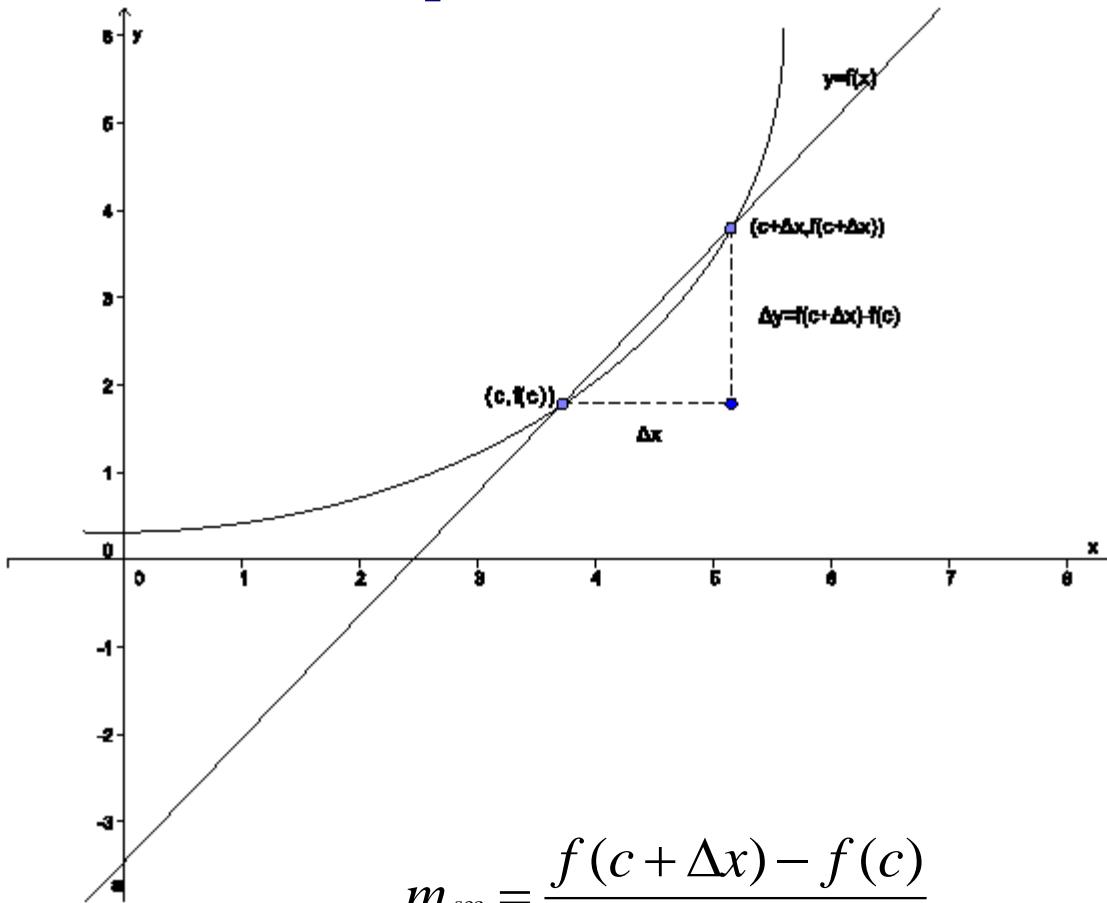
¿Qué recta consideramos tangente a una curva en un punto dado?



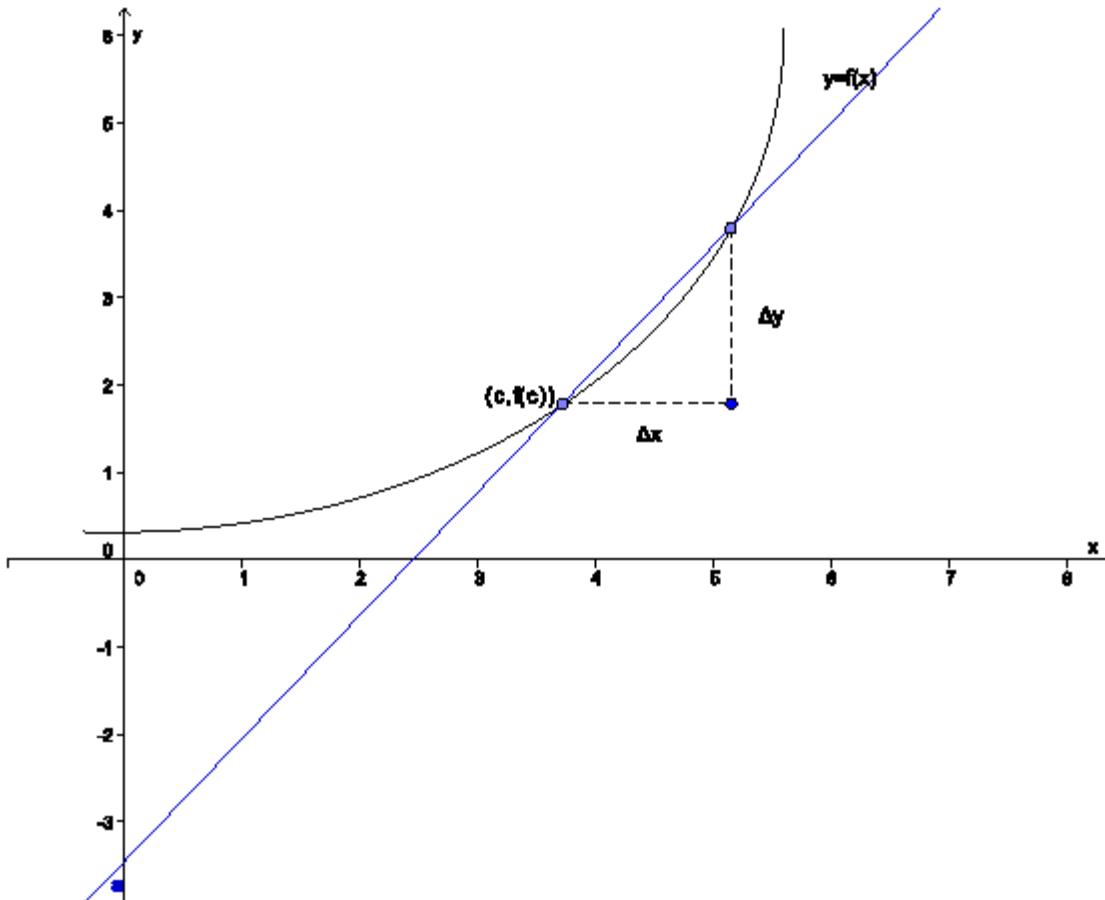
¿Qué recta consideramos tangente a una curva en un punto dado?



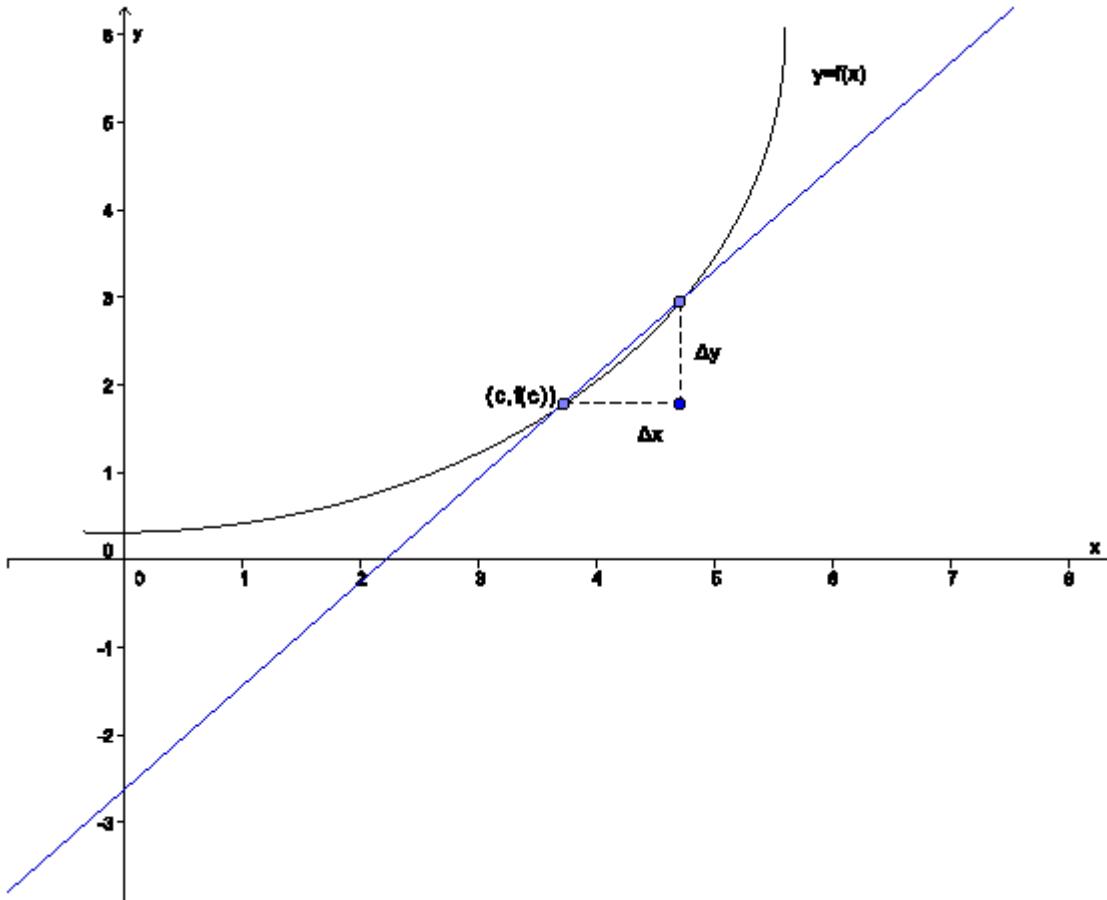
Definición a partir de la secante



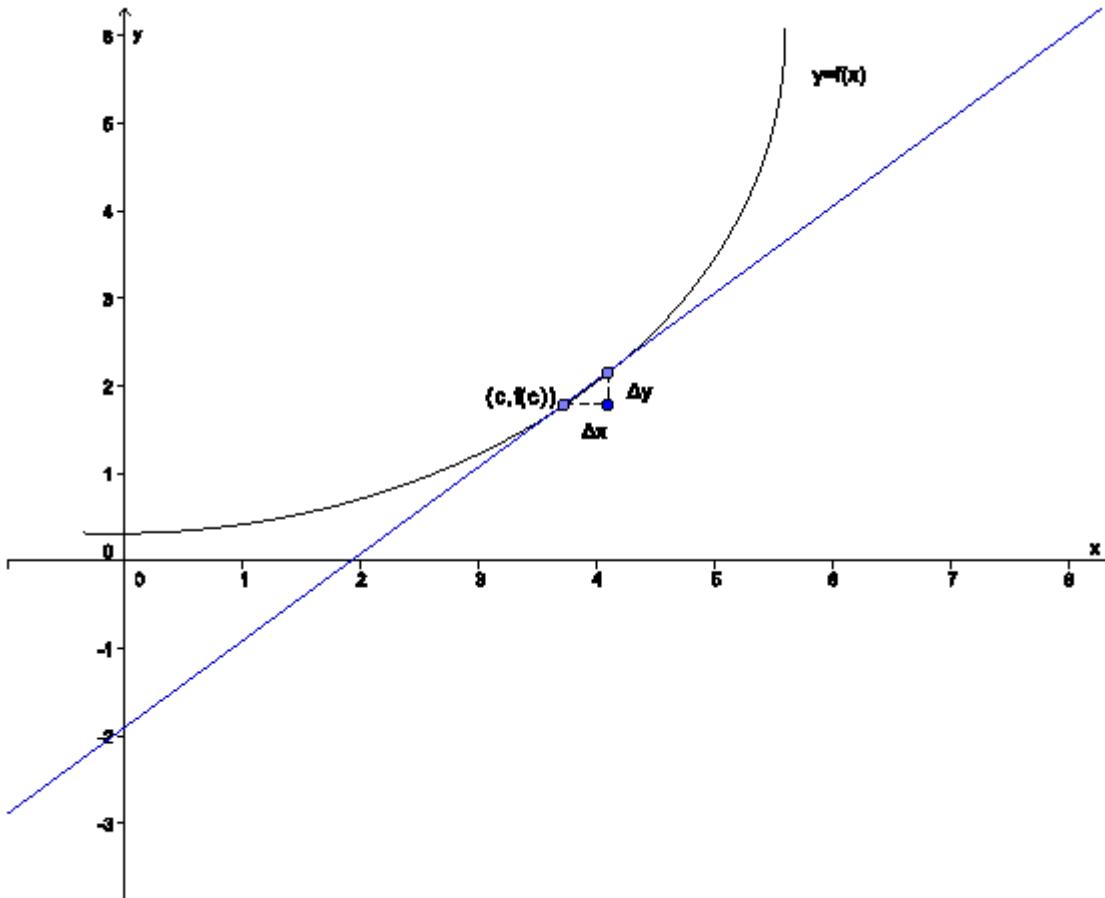
Cuanto más se reduce el incremento...



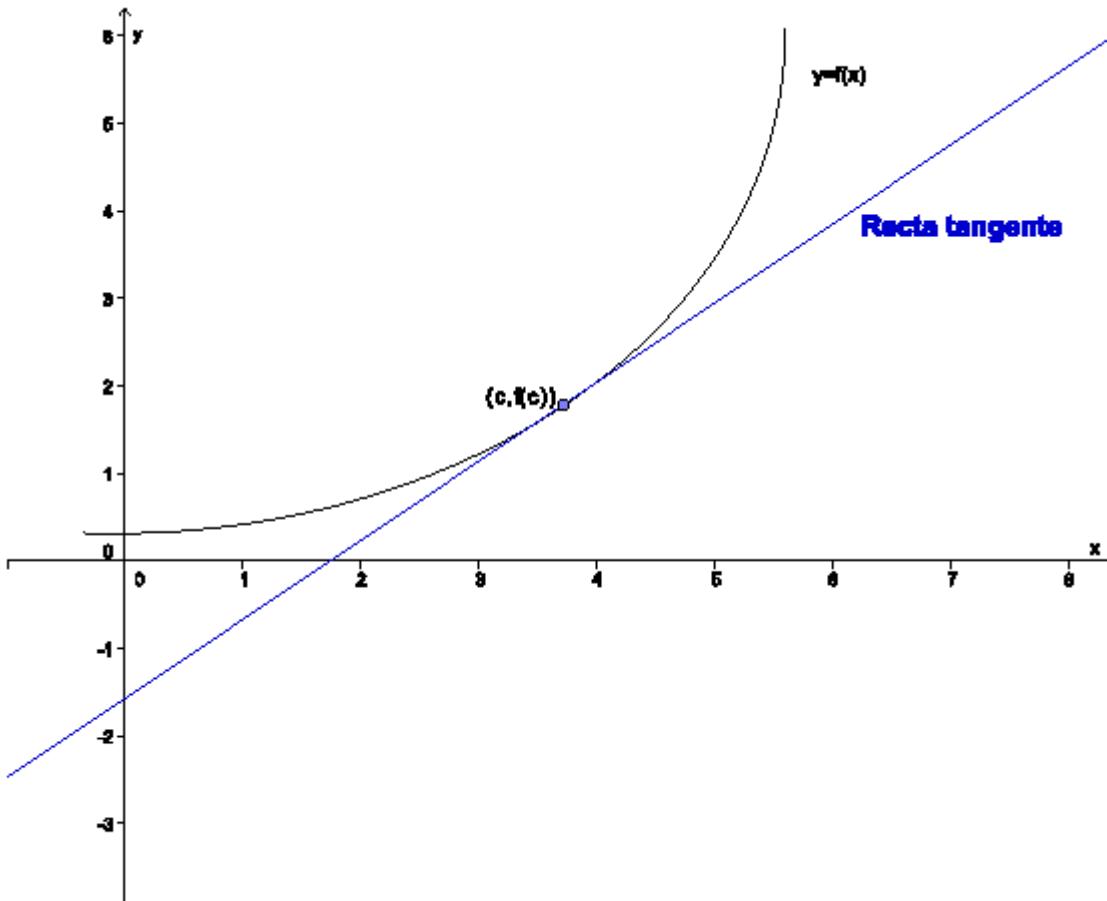
Cuanto más se reduce el incremento...



Cuanto más se reduce el incremento...



Cuanto más se reduce el incremento...



Cuando Δx tiende a ser 0 la secante tiende a ser tangente

Definición de Tangente

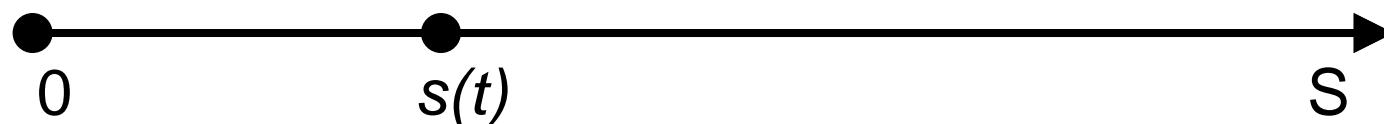
Si la función $f(x)$ está definida en un intervalo abierto que contiene a c y además existe el

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = m$$

entonces la recta que pasa por $(c, f(c))$ con pendiente m es la tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(c, f(c))$.

Velocidad media

Supuesta una función $s(t)$ que nos diera el espacio recorrido en un tiempo t :



Velocidad media

Supuesta una función $s(t)$ que nos diera el espacio recorrido en un tiempo t :

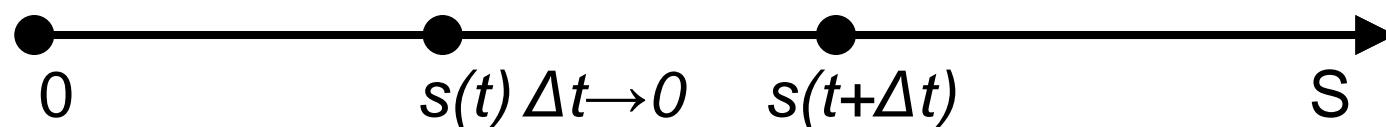


La velocidad media desde el instante t al $t+\Delta t$ sería el espacio recorrido por unidad de tiempo en ese intervalo:

$$v_m = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

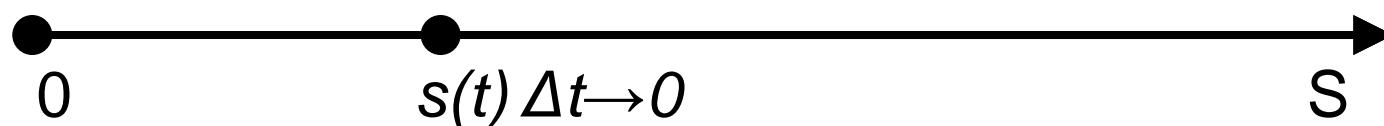
Velocidad instantánea

Si se va reduciendo Δt hasta el límite:



Velocidad instantánea

Si se va reduciendo Δt hasta el límite:



La velocidad calculada resultará instantánea:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Definición de Derivada

La derivada de f en x viene dada por la expresión:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

siempre que exista este límite. Para todos los x para los que existe este límite f' es una función de x .

Notaciones:

$$f'(x) \quad \frac{dy}{dx} \quad y' \quad \frac{d}{dx}[f(x)] \quad D_x[y]$$

Aclaraciones sobre la derivada

- Si existe la derivada $f'(a)$, se dice que f es derivable en el punto a .
- Si no existe la derivada $f'(a)$, se dice que f no es derivable en a .
- Una función es derivable en (a, b) si existe la derivada para cada número que pertenece a ese intervalo.
- La derivada de una función es un límite.
- Para hallar el límite se requiere que la función sea continua en el punto.

Interpretaciones de la derivada

- Geométrica:

Pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = c$.

- Mecánica:

Velocidad de una partícula cuya posición viene dada por $y = s(t)$ en el instante $t = c$.

- General:

Razón instantánea de cambio de $y = f(x)$ con respecto a x cuando $x = c$.

La derivada y sus aplicaciones (I)

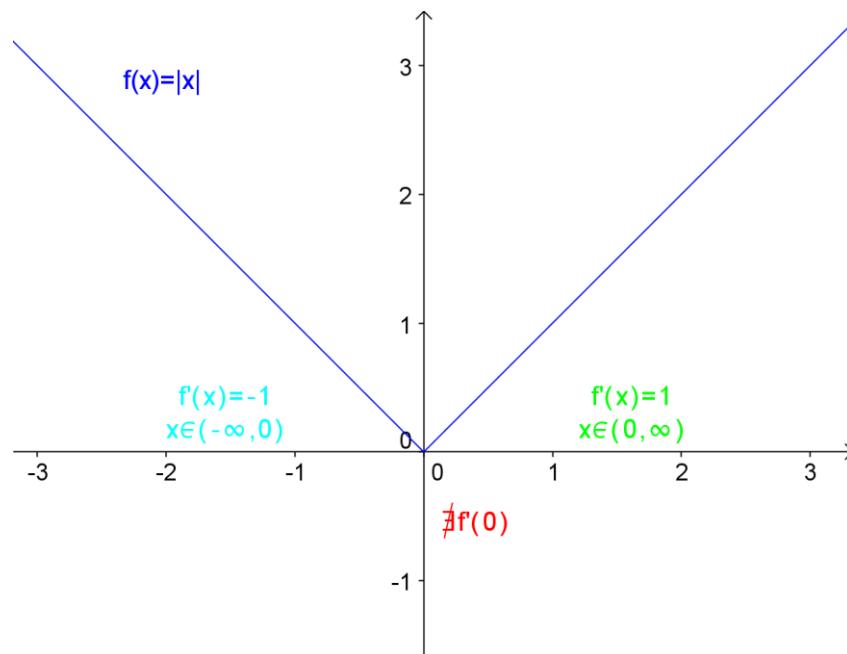
- Noción de derivada
- Características

Derivada y continuidad

- Teorema:

Si f es derivable en x , entonces es continua en x .

Lo contrario
no es cierto:



¿Por qué?

Por ejemplo la función valor absoluto es continua para cualquier valor de x , pero sólo es derivable para $x < 0$ y $x > 0$

$$x < 0 \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

$$x > 0 \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

y no es derivable para $x = 0$

Límites laterales

El valor absoluto no es derivable para $x = 0$ porque sus límites laterales no coinciden:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

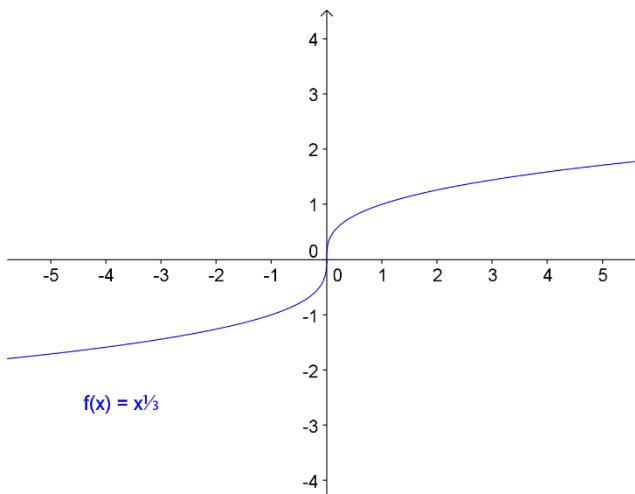
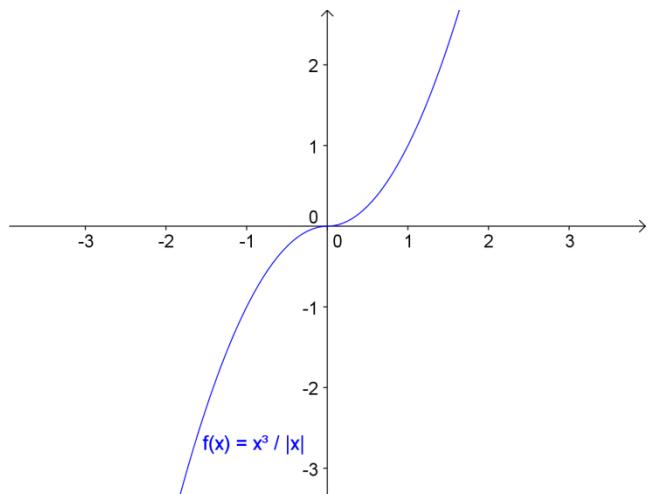
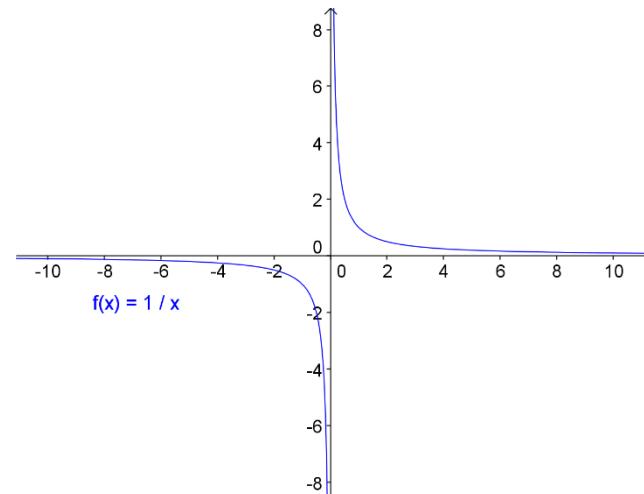
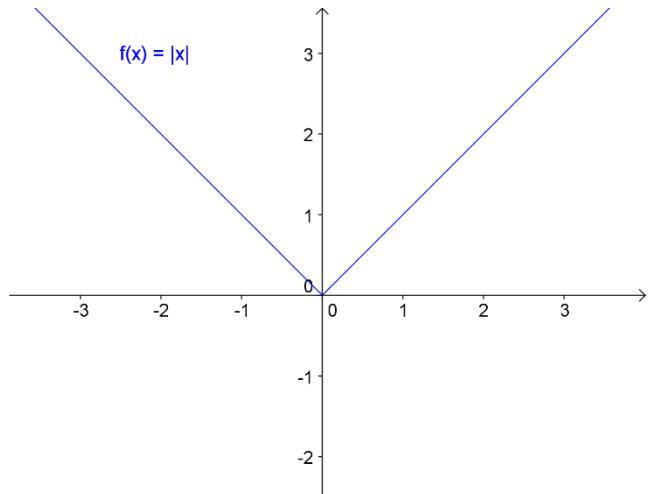
$x = 0$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

La derivada no está definida en $x = 0$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} [|x|] = \frac{x}{|x|}$$

¿Cómo puede ser una función no derivable en un punto?



La derivada y sus aplicaciones (I)

- Noción de derivada
- Características
- Reglas básicas de derivación

Derivada de una constante

Aplicamos la definición de derivada a $f(x)=c$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[c] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$

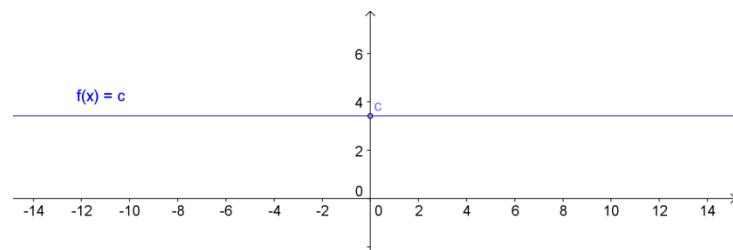
- **Regla de la constante**

La derivada de una función constante es 0.

Si c es un número real

$$\frac{d}{dx}[c] = 0$$

Ya que la pendiente en
toda su gráfica es 0:



Apliquemos ahora la definición de derivada a otro ejemplo, la función $f(x)=ax^2$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx}[ax^2] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a(x + \Delta x)^2 - ax^2}{\Delta x} = \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a[(x + \Delta x)^2 - x^2]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a[(x + \Delta x) + x][(x + \Delta x) - x]}{\Delta x} = \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a[(x + \Delta x) + x]\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a[(x + \Delta x) + x] = \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a(2x + \Delta x) = 2ax\end{aligned}$$

Ejemplo de derivada de potencia por constante:

$$\frac{d}{dx}[ax^2] = 2ax$$

Reglas básicas

- **Regla de la potencia:**

Si n es un número racional, entonces la función $f(x)=x^n$ es derivable y

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

- **Regla del múltiplo constante**

Si f es una función derivable y c una número real, entonces cf también es derivable y

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$$

Reglas de suma y diferencia

La suma (o diferencia) de dos funciones derivables f y g es derivable y

- Regla de la suma:

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

- Regla de la diferencia:

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$$

Regla del producto

El producto de dos funciones derivables f y g es derivable y

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Generalización al producto de varias funciones:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] &= \\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)\end{aligned}$$

Regla del cociente

El cociente de dos funciones derivables f y g es derivable para todos los valores de x en los que $g(x) \neq 0$, y

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Apliquemos la definición esta vez a $f(x) = \ln x$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx} [\ln x] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta x} \ln \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right) \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [\ln(1 + \Delta x / x)^{1/\Delta x}]\end{aligned}$$

Apliquemos la definición esta vez a $f(x) = \ln x$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx} [\ln x] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta x} \ln \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right) \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [\ln(1 + \Delta x / x)^{1/\Delta x}]\end{aligned}$$

Sustituimos $u = \Delta x / x$ ($u \rightarrow 0$ en vez de $\Delta x \rightarrow 0$)

$$\lim_{u \rightarrow 0} [\ln(1 + u)^{1/ux}] = \lim_{u \rightarrow 0} [(1/x) \ln(1 + u)^{1/u}] = \frac{1}{x} \ln [\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{1/u}]$$

Apliquemos la definición esta vez a $f(x) = \ln x$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx} [\ln x] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta x} \ln \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right) \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [\ln(1 + \Delta x / x)^{1/\Delta x}]\end{aligned}$$

Sustituimos $u = \Delta x / x$ ($u \rightarrow 0$ en vez de $\Delta x \rightarrow 0$)

$$\lim_{u \rightarrow 0} [\ln(1 + u)^{1/u}] = \lim_{u \rightarrow 0} [(1/x) \ln(1 + u)^{1/u}] = \frac{1}{x} \ln [\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{1/u}]$$

Por definición $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{1/u}$

Entonces $\frac{d}{dx} [\ln x] = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$

La derivada y sus aplicaciones (I)

- Noción de derivada
- Características
- Reglas básicas de derivación
- Regla de la cadena

Regla de la cadena

Si $y=f(u)$ es una función derivable de u y a su vez $u=g(x)$ es una función derivable de x , entonces $y=f(g(x))$ es una función derivable de x tal que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

Apliquemos regla de la cadena a $y = \ln e^x$
suponiendo $u=e^x$

$$\frac{d}{dx}[\ln e^x] = \frac{d}{du}[\ln e^x] \cdot \frac{d}{dx}[e^x]$$

Como vimos anteriormente

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$$

Por lo que

$$\frac{d}{dx}[\ln e^x] = \frac{1}{e^x} \cdot \frac{d}{dx}[e^x]$$

Si además

$$\frac{d}{dx}[\ln e^x] = \frac{d}{dx}[x] = 1$$

Entonces

$$\frac{1}{e^x} \cdot \frac{d}{dx}[e^x] = 1 \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

Regla general de la potencia

Aplicando la regla de la cadena se puede generalizar la regla de la potencia:

Si $y=[u(x)]^n$, donde u es una función derivable de x y n un número racional, entonces

$$\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1} \frac{du}{dx}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}u'$$

La derivada y sus aplicaciones (I)

- Noción de derivada
- Características
- Reglas básicas de derivación
- Regla de la cadena
- Tablas de derivadas y ejemplos

Tablas de derivadas

- Demostradas en ejemplos:

- $f(x) = |x| \quad f'(x) = x/|x| \quad \text{si } x \neq 0$
- $f(x) = \ln x \quad f'(x) = 1/x \quad \text{si } x > 0$
- $f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$

- Algunas trigonométricas:

- $f(x) = \sin x \quad f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x \quad f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \tan x \quad f'(x) = \sec^2 x$
- $f(x) = \cot x \quad f'(x) = \csc^2 x$
- $f(x) = \sec x \quad f'(x) = \sec x \tan x$
- $f(x) = \csc x \quad f'(x) = -\csc x \cot x$

- Reglas y tablas completas:

- http://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Tabla_de_derivadas

Tabla resumen

Reglas generales de derivación			
Producto por un número	$\frac{d}{dx} [cf] = cf'$		
Suma	$\frac{d}{dx} [f + g] = f' + g'$	Diferencia	$\frac{d}{dx} [f - g] = f' - g'$
Producto	$\frac{d}{dx} [fg] = f'g + fg'$	Cociente	$\frac{d}{dx} \left[\frac{f}{g} \right] = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
Derivadas de funciones algebraicas			
Regla de la constante	$\frac{d}{dx} [c] = 0$	Regla simple de la potencia	$\frac{d}{dx} [x^n] = nx^{n-1}, \frac{d}{dx} [x] = 1$
Derivadas de funciones trigonométricas			
Seno	$\frac{d}{dx} [\sin x] = \cos x$	Coseno	$\frac{d}{dx} [\cos x] = -\sin x$
Tangente	$\frac{d}{dx} [\tan x] = \sec^2 x$	Cotangente	$\frac{d}{dx} [\cot x] = -\csc^2 x$
Secante	$\frac{d}{dx} [\sec x] = \sec x \tan x$	Cosecante	$\frac{d}{dx} [\csc x] = -\csc x \cot x$
Regla de la cadena			
Regla de la cadena	$\frac{d}{dx} [f(u)] = f'(u) u'$	Regla general de la potencia	$\frac{d}{dx} [u^n] = n u^{n-1} u'$

Ejemplo 1

Obtener la derivada para $y = (x^2 + 1)^3$

Ejemplo 1

Obtener la derivada para $y = (x^2 + 1)^3$

Consideraremos $u = (x^2 + 1)$
e $y = u^3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot u' = 3(x^2 + 1)^2 \cdot (2x) = 6x(x^2 + 1)^2$$

Ejemplo 2

¿Dónde $f'(x)$ es 0 y dónde no existe?

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$$

Ejemplo 2

¿Dónde $f'(x)$ es 0 y dónde no existe?

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$$

Consideraremos $u = (x^2 - 1)$ e $y = u^{2/3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2/3)u^{-1/3} \cdot u' = \frac{2}{3}(x^2 - 1)^{-1/3} \cdot (2x)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

Ejemplo 2

¿Dónde $f'(x)$ es 0 y dónde no existe?

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$$

Consideraremos $u = (x^2 - 1)$ e $y = u^{2/3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2/3)u^{-1/3} \cdot u' = \frac{2}{3}(x^2 - 1)^{-1/3} \cdot (2x)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

$f'(x)=0$ si $4x=0$, es decir, si $x=0$

$f'(x)$ no existe si $x^2-1=0$, es decir, si $x=\pm 1$

Ejemplo 3

Obtener la derivada de $f(x) = \operatorname{sen}^3 4x$

$$f(x) = (\operatorname{sen}(4x))^3$$

Ejemplo 3

Obtener la derivada de $f(x) = \operatorname{sen}^3 4x$

$$f(x) = (\operatorname{sen}(4x))^3$$

Consideraremos

$$y = u^3, \quad u = \operatorname{sen} t \quad y \quad t = 4x$$



Ejemplo 3

Obtener la derivada de $f(x) = \operatorname{sen}^3 4x$

$$f(x) = (\operatorname{sen}(4x))^3$$

Consideraremos

$$y = u^3, \quad u = \operatorname{sen} t \quad y \quad t = 4x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot \left(\frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \right) = 3(\operatorname{sen}(t))^2 \cdot (\cos(t)) \cdot t'$$

$$f'(x) = 3(\operatorname{sen}(4x))^2 (\cos(4x)) 4 = 12 \cdot \operatorname{sen}^2 4x \cdot \cos 4x$$

Ejemplo 4

Obtener la tangente a $f(x) = 2 \sen x + \cos 2x$
en el punto $(\pi, 1)$

Ejemplo 4

Obtener la tangente a $f(x) = 2 \sen x + \cos 2x$ en el punto $(\pi, 1)$

Consideraremos

$$y = 2u + t, \quad u = \sen x, \quad t = \cos s, \quad y = s = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \frac{dy}{du} + \frac{dt}{dx} = 2 \cos(x) + \left(\frac{dt}{ds} \cdot \frac{ds}{dx} \right) = 2 \cos(x) + (-\sen(s)) \cdot s'$$

$$f'(x) = 2 \cos x + (-\sen(2x))2 = 2 \cos x - 2 \sen 2x$$

Ejemplo 4

Obtener la tangente a $f(x) = 2 \sen x + \cos 2x$ en el punto $(\pi, 1)$

Consideraremos

$$y = 2u + t, \quad u = \sen x, \quad t = \cos s, \quad y = s = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \frac{dy}{du} + \frac{dt}{dx} = 2 \cos(x) + \left(\frac{dt}{ds} \cdot \frac{ds}{dx} \right) = 2 \cos(x) + (-\sen(s)) \cdot s'$$

$$f'(x) = 2 \cos x + (-\sen(2x))2 = 2 \cos x - 2 \sen 2x$$

$$\text{Pendiente en } (\pi, 1) \quad f'(\pi) = 2 \cos \pi - 2 \sen 2\pi = -2$$

Recta con pendiente -2 que pasa por $(\pi, 1)$

$$y = mx + b = -2x + (1 + 2\pi)$$



La derivada y sus aplicaciones (I)

- Noción de derivada
- Características
- Reglas básicas de derivación
- Regla de la cadena
- Tablas de derivadas y ejemplos
- Derivación implícita

Derivación implícita

Hasta ahora hemos trabajado siempre con funciones explícitas de la forma: $y=f(x)$

No siempre es posible obtener una expresión con la y despejada a la izquierda de la igualdad, y a la derecha una expresión dependiente únicamente de x , y tanto una parte como la otra de la igualdad prodrán depender de ambas variables: $\sigma(x,y)=\tau(x,y)$

Derivación implícita

Otras veces simplemente nos interesará más la forma implícita que la explícita, como estrategia para simplificar la derivada, o entender mejor el concepto a aplicar, etc.

Podemos derivar una expresión implícita derivando ambos lados de la igualdad, pero siendo conscientes de que derivamos ambos respecto a la misma variable, x por lo general.

Respecto a la variable apropiada

Si derivamos respecto a x son correctas las expresiones:

$$1. \frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2$$

$$2. \frac{d}{dx}[y^3] = 3y^2 \frac{dy}{dx}$$

$$3. \frac{d}{dx}[x + 3y] = 1 + 3 \frac{dy}{dx}$$

$$4. \frac{d}{dx}[xy^2] = \frac{d}{dx}[x]y^2 + x \frac{d}{dx}[y^2] = 1y^2 + x\left((2y)\frac{dy}{dx}\right) = y^2 + 2xy \frac{dy}{dx}$$

Estrategia para la derivación implícita

1. Derivar ambos lados de la ecuación respecto a x .
2. Agrupar todos los términos en que aparezca dy/dx en el lado izquierdo de la ecuación y pasar todos los demás a la derecha.
3. Sacar factor común dy/dx en el lado izquierdo de la ecuación.
4. Despejar dy/dx

Ejemplo

Obtener la derivada de y respecto a x de $y^3+y^2-5y-x^2=-4$

Paso 1)

Derivar ambos lados de la ecuación respecto de x

$$\frac{d}{dx}[y^3 + y^2 - 5y - x^2] = \frac{d}{dx}[-4]$$

$$\frac{d}{dx}[y^3] + \frac{d}{dx}[y^2] - \frac{d}{dx}[5y] - \frac{d}{dx}[x^2] = \frac{d}{dx}[-4]$$

$$3y^2 \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} - 5 \frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

Ejemplo

Obtener la derivada de y respecto a x de $y^3+y^2-5y-x^2=-4$

Paso 2)

Agrupar todos los términos en los que aparezca dy/dx en el lado izquierdo de la ecuación y pasar todos los demás a la derecha.

$$3y^2 \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} - 5 \frac{dy}{dx} = 2x$$

Ejemplo

Obtener la derivada de y respecto a x de $y^3+y^2-5y-x^2=-4$

Paso 3)

Sacar factor común dy/dx en el lado izquierdo de la ecuación.

$$\frac{dy}{dx} (3y^2 + 2y - 5) = 2x$$

Paso 4)

Despejar la derivada de y respecto a x .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$$

La derivada y sus aplicaciones (I)

- Noción de derivada
- Características
- Reglas básicas de derivación
- Regla de la cadena
- Tablas de derivadas y ejemplos
- Derivación implícita
- Derivadas de orden superior

Derivadas de orden superior

Llamamos derivada de segundo orden a la derivada de la función derivada de una dada.

$$f(x) \Rightarrow \frac{df}{dx}(x) = f'(x) \Rightarrow \frac{d^2f}{dx^2}(x) = f''(x)$$

La derivada tercera es la derivada de la función derivada segunda.

$$f(x) \Rightarrow \frac{df}{dx}(x) \Rightarrow \frac{d^2f}{dx^2}(x) \Rightarrow \frac{d^3f}{dx^3}(x)$$

Y así sucesivamente se da origen a las derivadas de orden superior.

Ejemplo

Obtener todas las derivadas de orden superior de $f(x)=x^5$

$$f(x) = x^5$$

$$\frac{d(x^5)}{dx} = 5x^4$$

$$\frac{d^2(x^5)}{dx^2} = \frac{d(5x^4)}{dx} = 20x^3$$

$$\frac{d^3(x^5)}{dx^3} = \frac{d^2(5x^4)}{dx} = \frac{d(20x^3)}{dx} = 60x^2$$

$$\frac{d^4(x^5)}{dx^4} = \frac{d^3(5x^4)}{dx} = \frac{d^2(20x^3)}{dx} = \frac{d(60x^2)}{dx} = 120x$$

$$\frac{d^5(x^5)}{dx^5} = \frac{d^4(5x^4)}{dx} = \frac{d^3(20x^3)}{dx} = \frac{d^2(60x^2)}{dx} = \frac{d(120x)}{dx} = 120$$

$$\frac{d^6(x^5)}{dx^6} = \frac{d^5(5x^4)}{dx} = \frac{d^4(20x^3)}{dx} = \frac{d^3(60x^2)}{dx} = \frac{d^2(120x)}{dx} = \frac{d(120)}{dx} = 0$$

Y a partir de esta todas son 0.

La derivada y sus aplicaciones (I)

- Noción de derivada
- Características
- Reglas básicas de derivación
- Regla de la cadena
- Tablas de derivadas y ejemplos
- Derivación implícita
- Derivadas de orden superior
- Valores extremos en un intervalo

Máximo y mínimo

Sea f una función definida sobre un intervalo $[a,b]$ que contiene a c :

$f(c)$ es un **máximo** de f en $[a,b]$ si $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$

$f(c)$ es un **mínimo** de f en $[a,b]$ si $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$

Se conocen por **Valores extremos**

Máximo absoluto

Mínimo absoluto

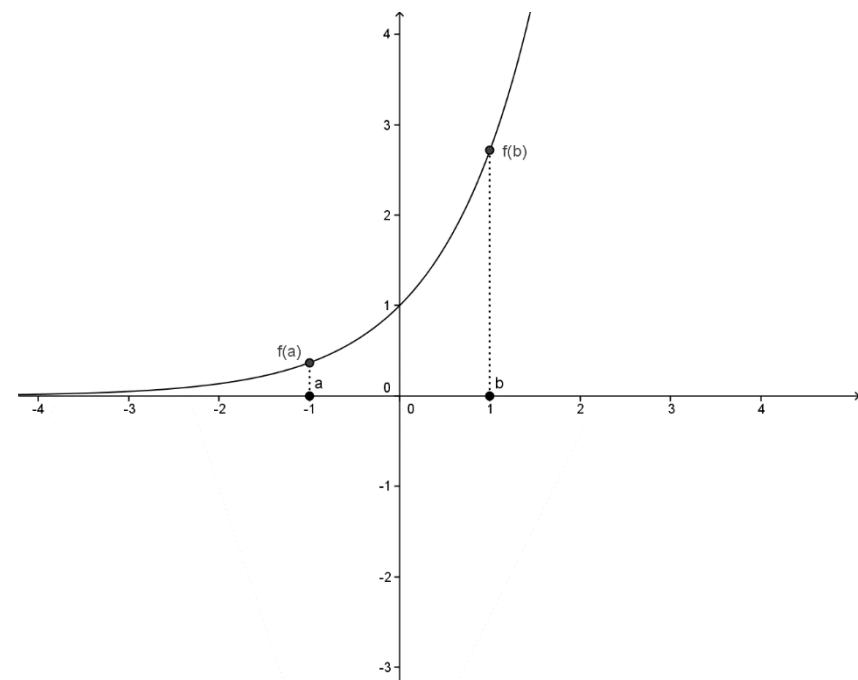
Extremos terminales

En un intervalo cerrado $[a,b]$ los valores extremos pueden coincidir en los valores terminales del intervalo:

$$f(x)=e^x \text{ en } [-1, 1]$$

No puede ocurrir en
un intervalo abierto

$$f(x)=e^x \text{ en } (-1, 1)$$



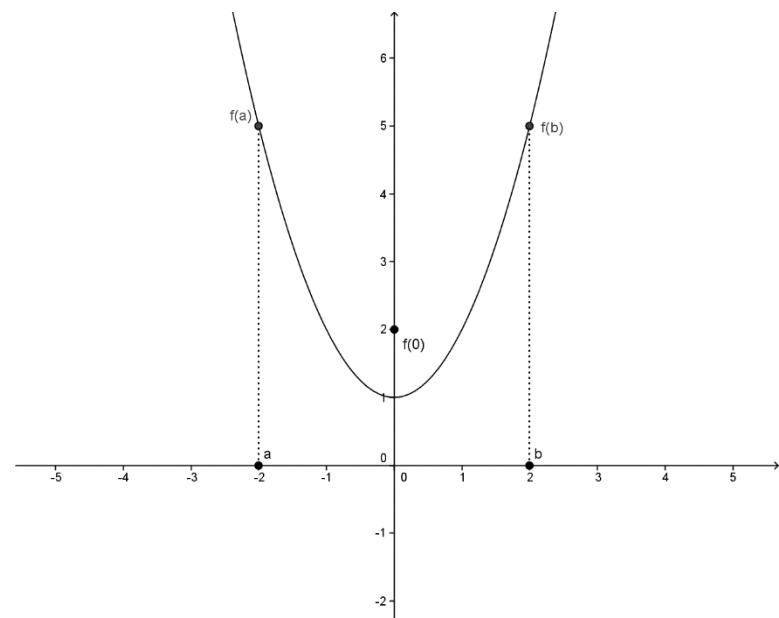
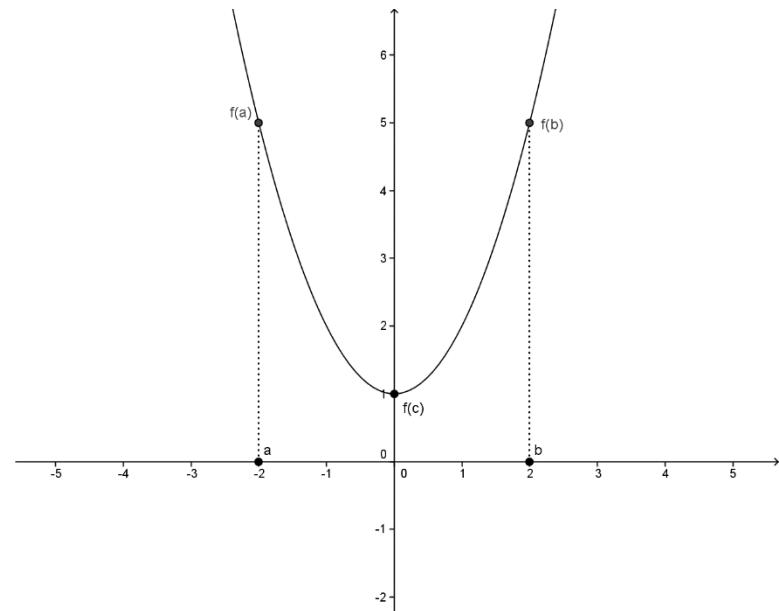
Sin máximo o mínimo

$f(0)$ mínimo en $(-2,2)$:

$$f(x) = x^2 + 1$$

$f(-2)=f(2)$
máximos en $[-2,2]$

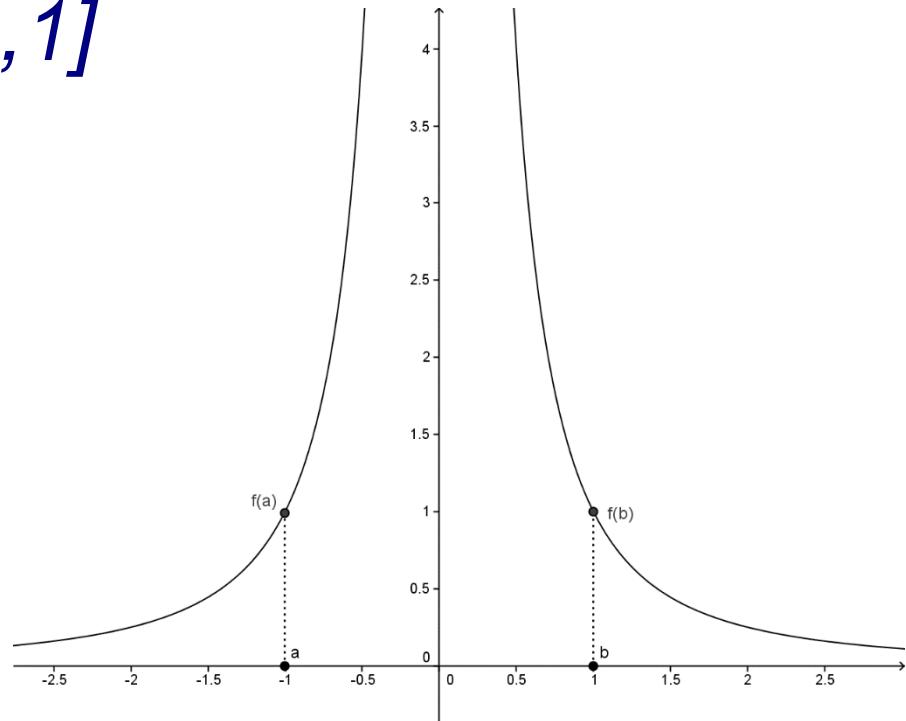
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$



Falta de continuidad

Sin máximo en [-1, 1]

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$



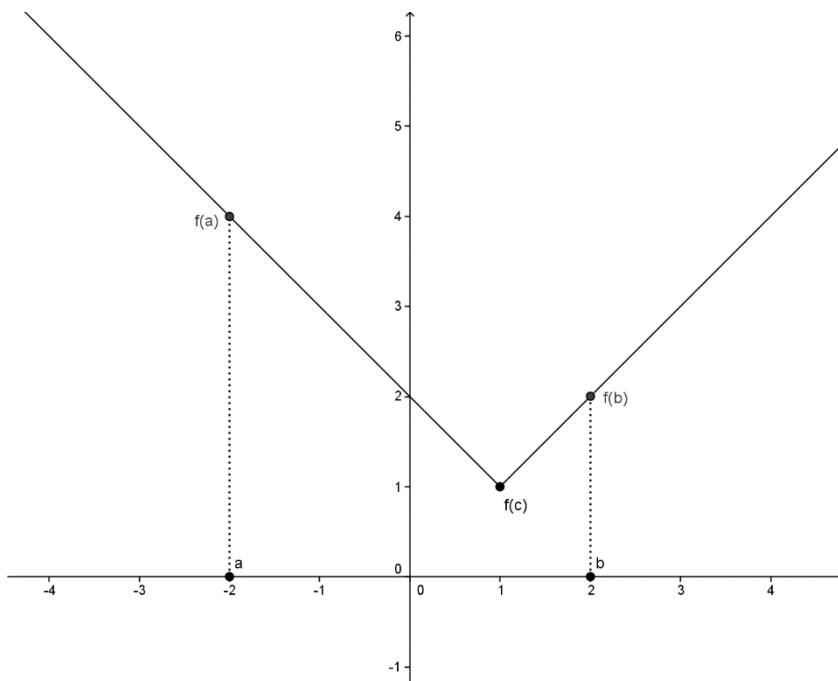
Mínimos en los puntos terminales porque el intervalo es cerrado

Teorema del Valor Extremo

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces tiene un mínimo y un máximo en ese intervalo.

$$f(x) = |x-1| + 1$$

Máximo en el terminal $f(a)$
Y mínimo en el intermedio $f(c)$



No se exige derivabilidad

Máximos y mínimos relativos

Sea f una función definida sobre un intervalo abierto (a,b) que contiene a c :

Si $f(c)$ es un máximo de f en (a,b) entonces $f(c)$ es un **máximo relativo**

Si $f(c)$ es un mínimo de f en (a,b) entonces $f(c)$ es un **mínimo relativo**

Máximo local

Mínimo local

Derivadas y extremos locales

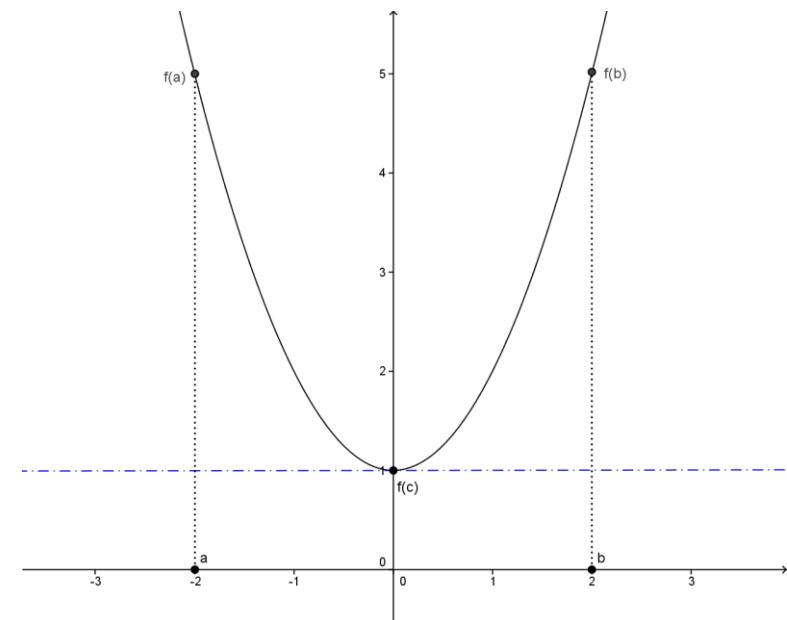
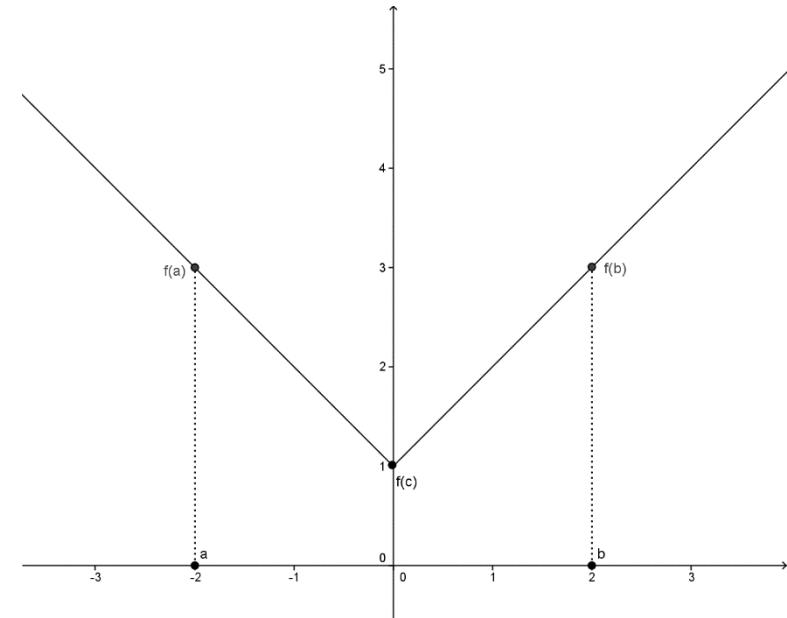
Si la derivada existe es 0:

$$f(x) = |x| + 1$$

$$f'(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$f'(x) = 2x$$



Puntos críticos

Definición:

Sea f definida en c .

Si $f'(c)=0$ o si f no es derivable en c , entonces c es un punto crítico de f .

Los extremos relativos ocurren sólo en los puntos críticos.

Teorema:

Si $f(c)$ es un mínimo relativo o un máximo relativo en (a,b) , entonces c es un punto crítico de f .

Determinación de extremos en un intervalo cerrado $[a,b]$

1. Se buscan los punto críticos de f en (a,b) . Usaremos la derivada.
2. Se evalúa f en cada punto crítico en (a,b)
3. Se evalúa f en cada punto terminal del intervalo $[a,b]$: a y b .
4. El más pequeño de estos valores es el mínimo y el más grande es el máximo

Ejemplo 1

Determinar máximo y mínimo absolutos de
 $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ en $[-1,2]$

Ejemplo 1

Determinar máximo y mínimo absolutos de
 $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ en $[-1,2]$

Derivamos $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$

Puntos críticos: $x=0$ y $x=1$

Ejemplo 1

Determinar máximo y mínimo absolutos de
 $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ en $[-1,2]$

Derivamos $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$

Puntos críticos: $x=0$ y $x=1$

Valores en puntos críticos:

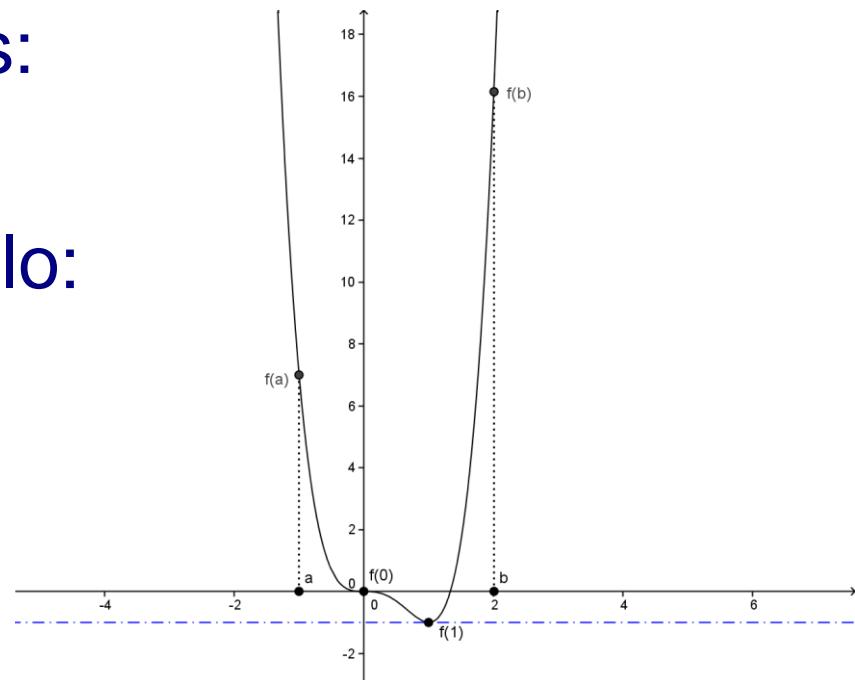
$f(0)=0$ y $f(1)=-1$

Y en extremos del intervalo:

$f(-1)=7$ y $f(2)=16$

Mínimo $f(1)=-1$

Máximo $f(2)=16$



Ejemplo 2

Determinar máximo y mínimo absolutos de
 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 26$ en $[-2, 3]$

Ejemplo 2

Determinar máximo y mínimo absolutos de
 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 26$ en $[-2, 3]$

Derivamos $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$
 $= 12x(x^2 - x - 2) = 12x(x + 1)(x - 2)$

Puntos críticos: $x=-1$, $x=0$ y $x=2$

Ejemplo 2

Determinar máximo y mínimo absolutos de
 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 26$ en $[-2, 3]$

Derivamos $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$
 $= 12x(x^2 - x - 2) = 12x(x + 1)(x - 2)$

Puntos críticos: $x=-1$, $x=0$ y $x=2$

Valores en críticos:

$$f(-1)=21 \quad f(0)=26 \quad y \quad f(2)=-6$$

Y en terminales:

$$f(-2)=58 \quad y \quad f(3)=53$$

Mínimo $f(2)=-6$

Máximo $f(-2)=58$

