La derivada y sus aplicaciones (II)

Tema 1

La derivada y sus aplicaciones (II)

- Noción de derivada
- Características
- Reglas básicas de derivación
- Regla de la cadena
- Tablas de derivadas y ejemplos
- Derivación implícita
- Derivadas de orden superior
- Valores extremos en un intervalo
- Teorema de Rolle y del Valor Medio

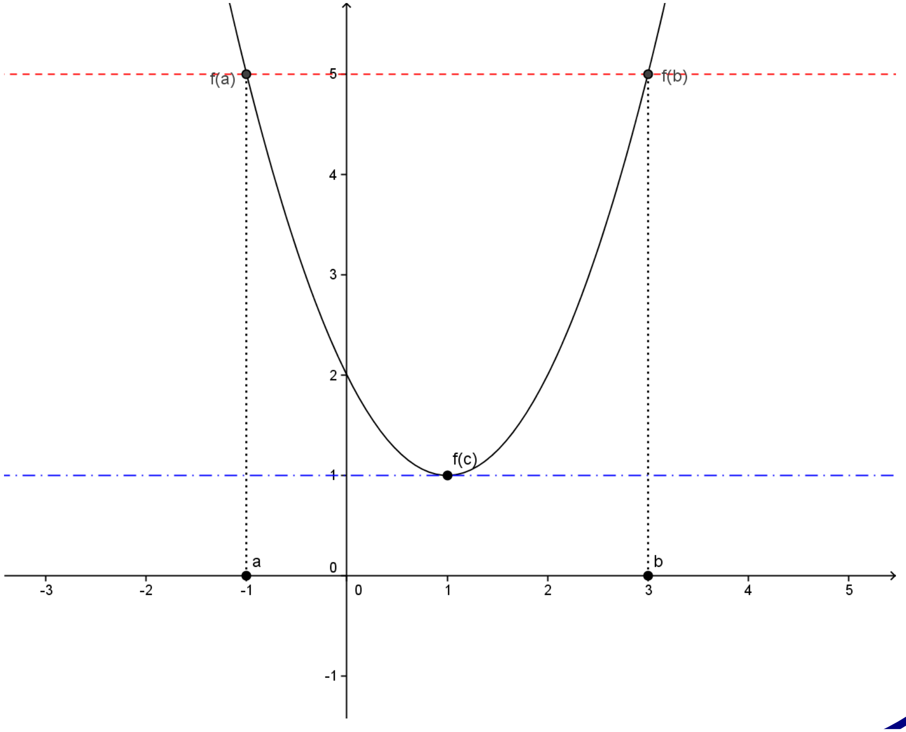
Teorema de Rolle

Sea *f* una función continua en *[a,b]*,
y derivable en *(a,b)*.

Si *f(a) = f(b)*,
entonces existe al menos un *c ϵ (a,b)*
tal que *f´(c) = 0*

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$

en *[-1,3]*
f'(1)=0



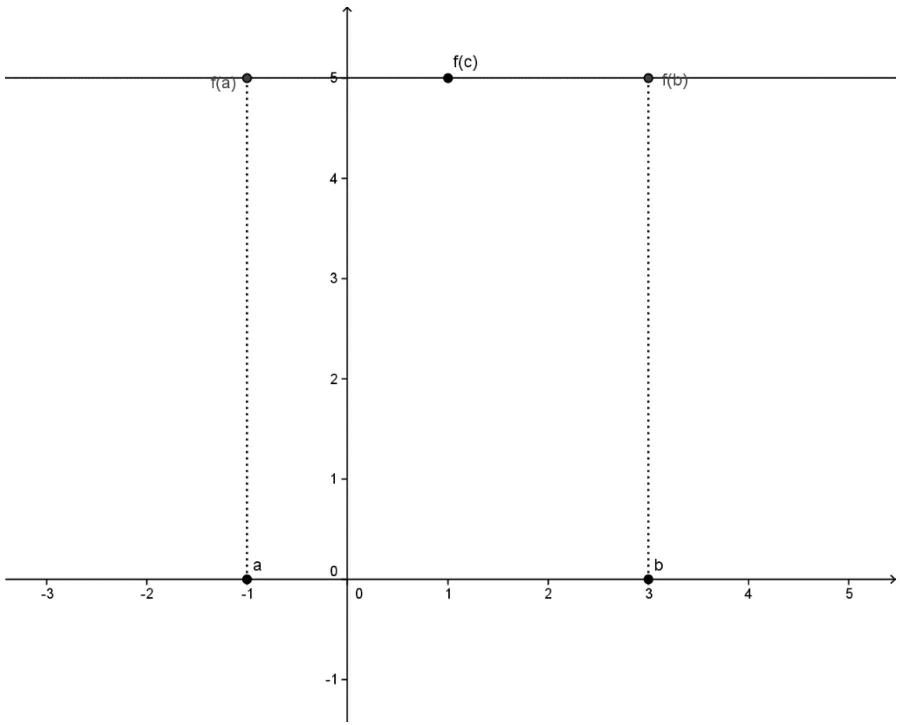
Teorema de Rolle

Demostración:

Si f continua en $[a,b]$ existen x_{max} y x_{min} tales que $f(x_{max})$ es un máximo y $f(x_{min})$ un mínimo

Si $f(x_{max})=f(x_{min})$ f es constante y su derivada 0

$$f(x) = 5$$



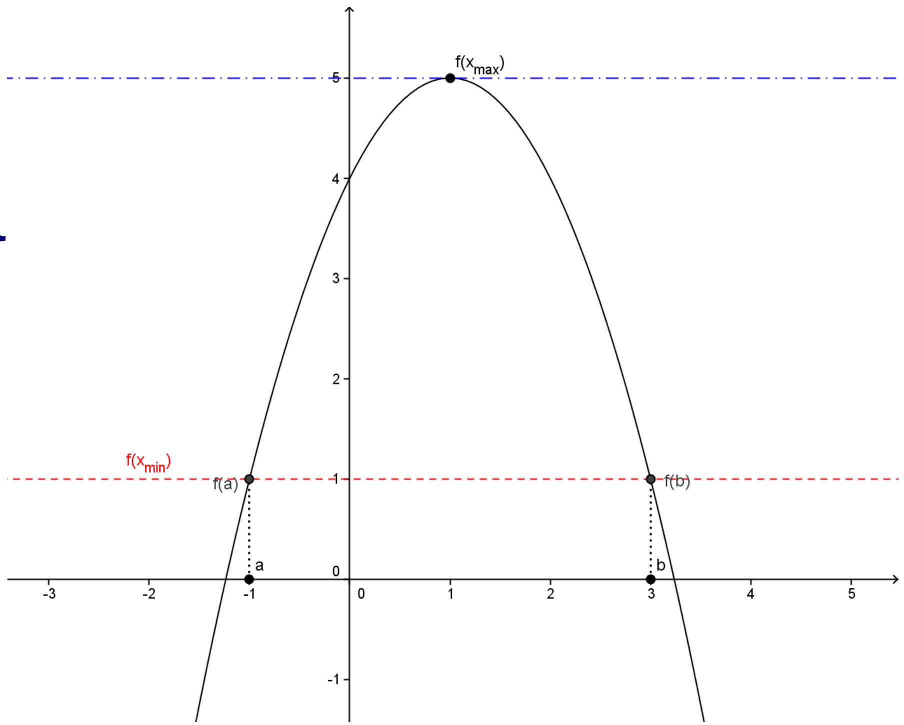
Teorema de Rolle

Demostración (sigue):

Si $f(x_{max}) \neq f(x_{min})$, al menos uno de los dos pertenecerá al intervalo *(a,b)* porque

f(a) = f(b), y como f es derivable en *(a,b)*, la derivada

del x_{max} o x_{min} que pertenezca a *(a,b)* será *0*

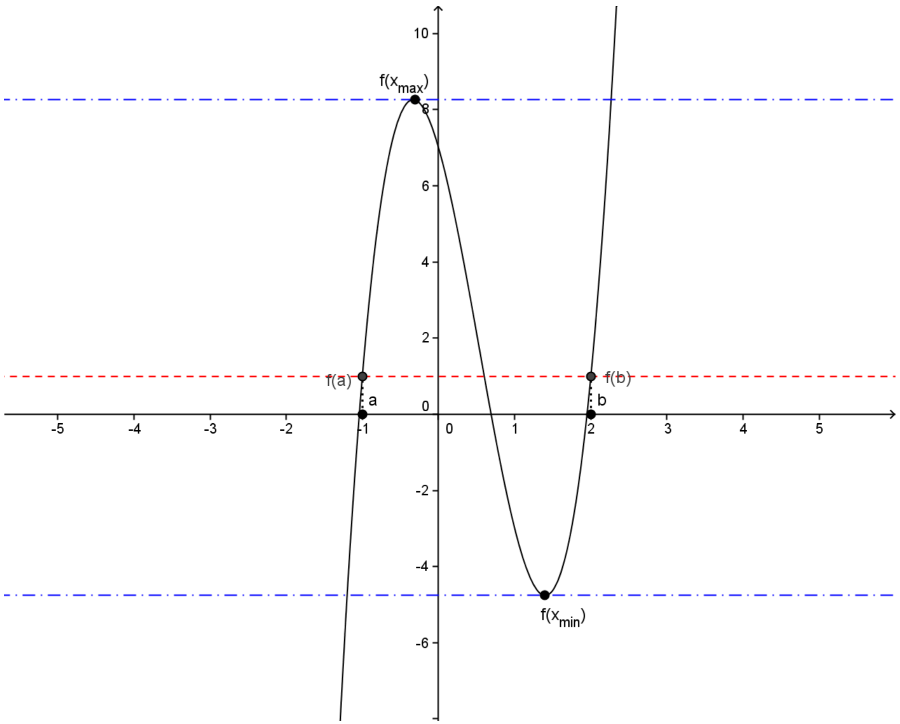


$$f(x) = x^2 + 1$$

Ejemplo 1

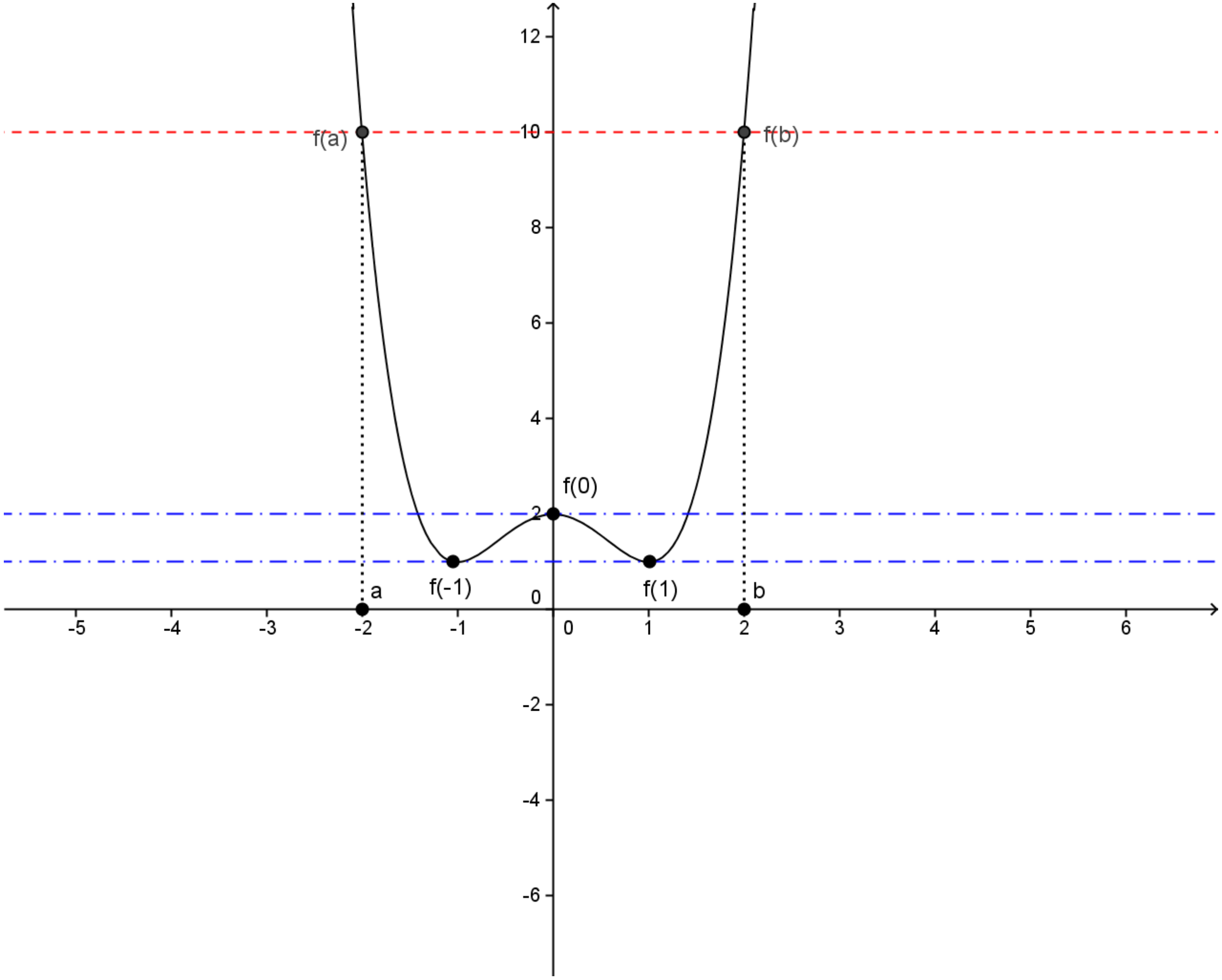
Si $f(x_{max}) \neq f(x_{min})$, puede que tanto x_{max} y x_{min} pertenezcan al intervalo *(a,b)*

$$f(x) = 5x^3 - 8x^2 - 7x + 7$$



Ejemplo 2

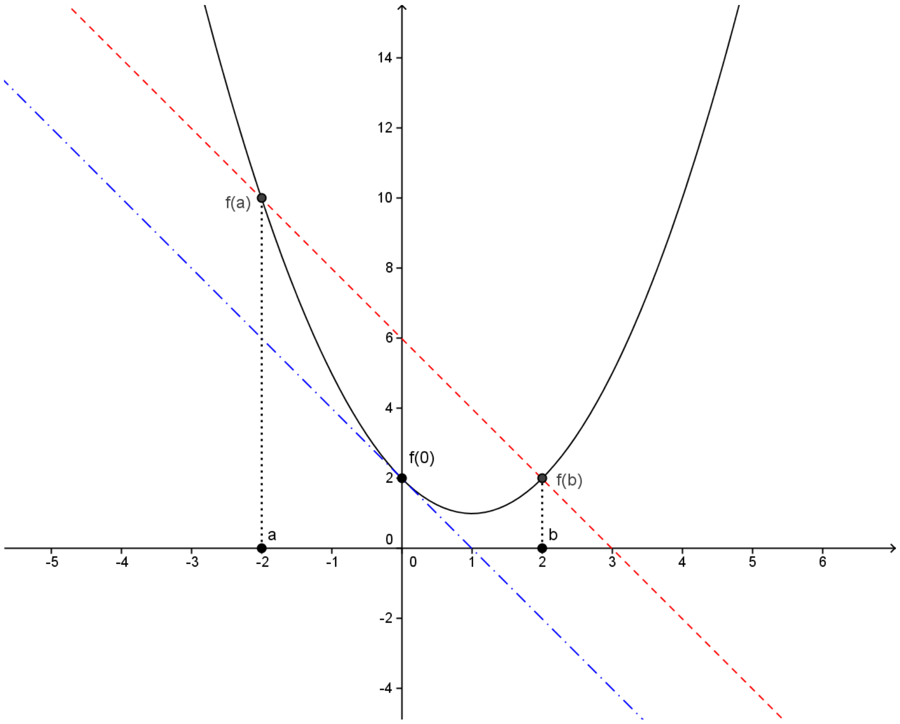
$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$$



Teorema del Valor Medio

Sea *f* una función continua en *[a,b]*,
y derivable en *(a,b)*.
entonces existe al menos un *c* ϵ *(a,b)* que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$

Teorema del Valor Medio

Demostración:

La secante que pasa por *(a,f(a))* y *(b,f(b))* es

$$y=\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a)+f(a)$$

Consideramos *g(x)=f(x)-y*

$$g(x)=f(x)-y=f(x)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a)-f(a)$$

Evaluamos *g(x)* en los terminales *a* y *b*:

$$g(a)=0=g(b)$$

Teorema del Valor Medio

Demostración (sigue):

Si *g(a)=g(b)* podemos aplicar Rolle a *g* ya que es continua y derivable en *(a,b),* de forma que exiete un c tal que

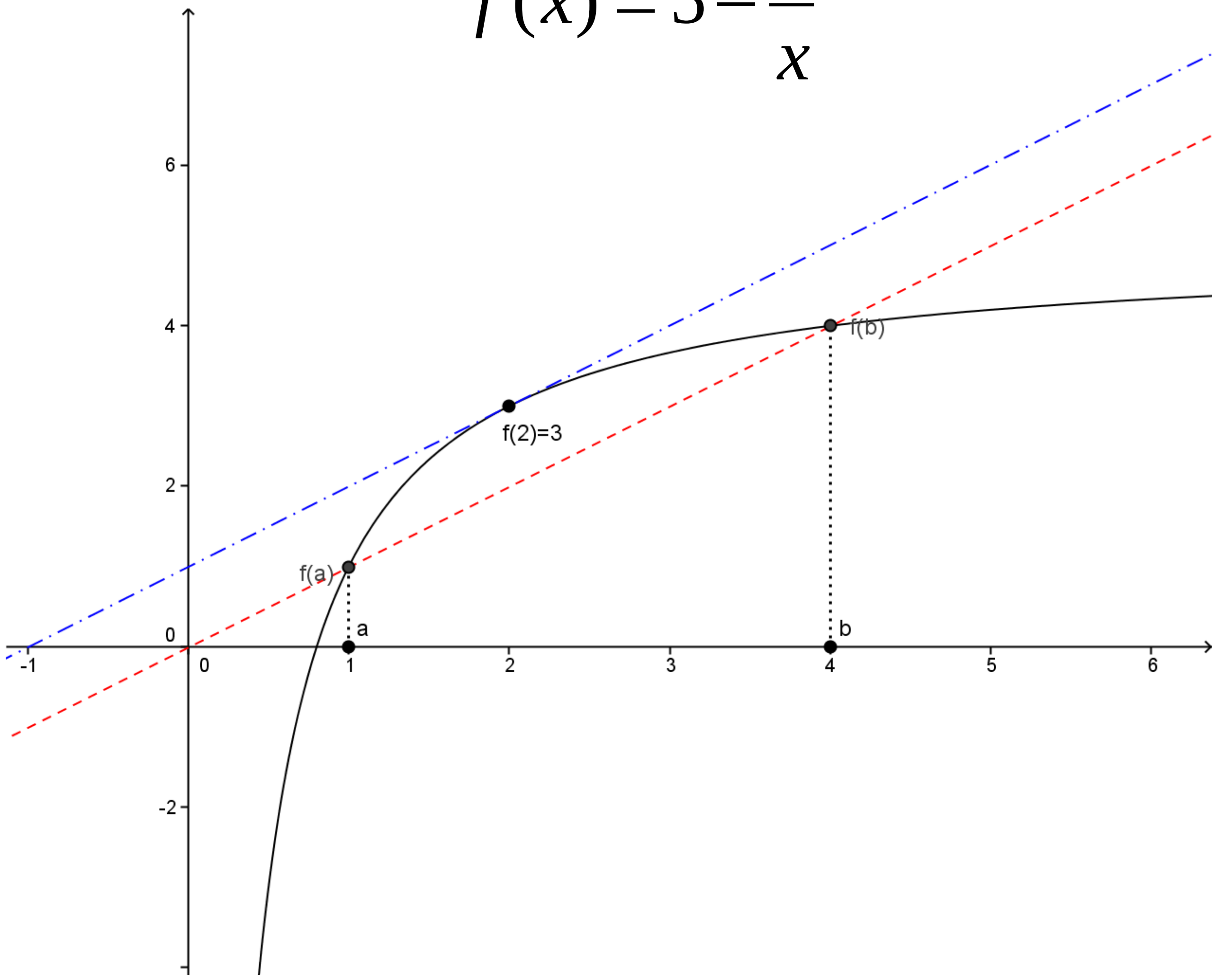
$$g'(c) = f'(c) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] = 0$$

Es decir, existe un c є (a,b) que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ejemplo

$$f(x) = 5 - \frac{4}{x}$$



La derivada y sus aplicaciones (I)

- Noción de derivada
- Características
- Reglas básicas de derivación
- Regla de la cadena
- Tablas de derivadas y ejemplos
- Derivación implícita
- Derivadas de orden superior
- Valores extremos en un intervalo
- Teorema de Rolle y del Valor Medio
- Funciones crecientes y decrecientes (Primera derivada)

Funciones crecientes y decrecientes

Una **función es creciente** sobre un intervalo si para cualquiera de dos números x_1 y x_2 en el intervalo, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$

Intuitivamente, pendiente positiva

Una **función es decreciente** sobre un intervalo si para cualquiera de dos números x_1 y x_2 en el intervalo, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$

Intuitivamente, pendiente negativa

Criterio de crecimiento y decrecimiento

Teorema:

Sea *f* una función que es continua en el intervalo cerrado *[a,b*] y derivable en el intervalo abierto *(a,b)*, entonces

1. Si $f'(x)>0$ para todo x en (a,b), entonces *f* es creciente en $[a,b]$.
2. Si $f'(x)<0$ para todo x en (a,b), entonces *f* es decreciente en $[a,b]$.
3. Si $f'(x)=0$ para todo x en (a,b), entonces *f* es constante en $[a,b]$.

Criterio de crecimiento y decrecimiento

Demostración:

Cojamos x_1 y x_2 en *[a,b]* tales que $x_1 < x_2$.

f es continua en *[a,b]* y derivable en *(a,b)*

Aplicamos Valor Medio:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Si $f'(c)>0$ y $x_2-x_1>0$ entonces $f(x_1)<f(x_2)$

Igualmente con signo contrario y obvio para 0

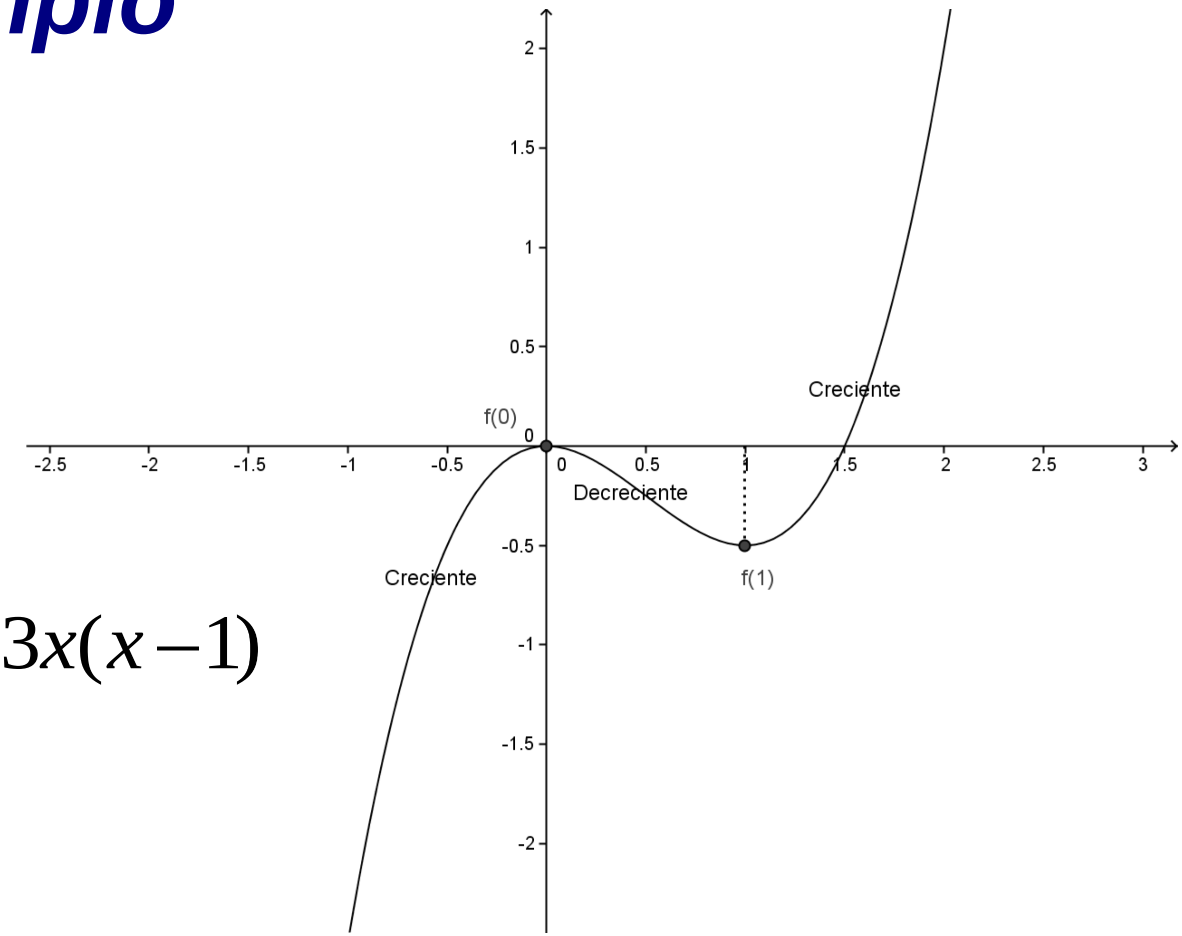
Estrategia

1. Localizar puntos críticos de f y utilizarlos para delimitar intervalos
2. Determinar el signo de f’ en cada intervalo
3. Aplicar el criterio para concluir si la función es creciente o decreciente

Ejemplo

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3x = 3x(x-1)$$



Intervalo	Valor	Signo	Conclusión
$-\infty < x < 0$	$x = -1$	$f'(-1) = 6 > 0$	Creciente
$0 < x < 1$	$x = \frac{1}{2}$	$f'(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4} < 0$	Decreciente
$1 < x < \infty$	$x = 2$	$f'(2) = 6 > 0$	Creciente

Criterio de la primera derivada

Teorema:

Sea *c* un punto crítico de una función f continua en *(a,b)*, y derivable al menos los $x \neq c$, entonces

1. Si *f'(x)* cambia de negativa a positiva en *c*, entonces *f* tiene un mínimo relativo en *f(c)*.

2. Si *f'(x)* cambia de positiva a negativa en *c*, entonces *f* tiene un máximo relativo en *f(c)*.

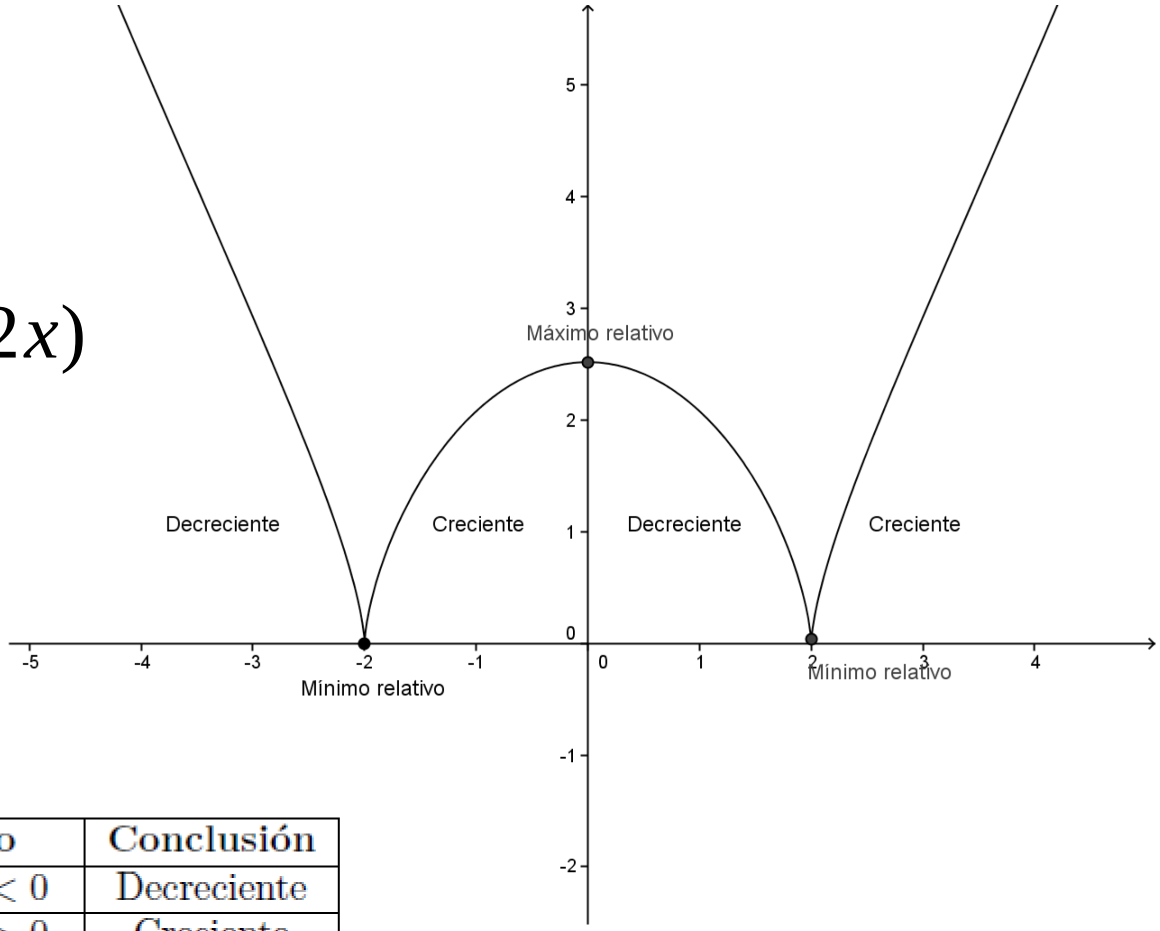
3. Si *f'(x)* es positiva en ambos lados de *c* o negativa en ambos lados de *c*, entonces *f(c)* no es ni mínimo ni máximo.

Ejemplo

$$f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2 - 4)^{-1/3}(2x)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{3(x^2 - 4)^{1/3}}$$



Intervalo	Valor	Signo	Conclusión
$-\infty < x < -2$	$x = -3$	$f'(-3) < 0$	Decreciente
$-2 < x < 0$	$x = -1$	$f'(-1) > 0$	Creciente
$0 < x < 2$	$x = 1$	$f'(1) < 0$	Decreciente
$2 < x < \infty$	$x = 3$	$f'(3) > 0$	Creciente

La derivada y sus aplicaciones (I)

- Noción de derivada
- Características
- Reglas básicas de derivación
- Regla de la cadena
- Tablas de derivadas y ejemplos
- Derivación implícita
- Derivadas de orden superior
- Valores extremos en un intervalo
- Teorema de Rolle y del Valor Medio
- Funciones crecientes y decrecientes (Primera derivada)
- Concavidad (Segunda derivada)

Concavidad

Sea *f* derivable en un intervalo *(a,b)*.

Su gráfica es **cóncava hacia arriba** sobre el intervalo si *f'* es creciente en *(a,b)*

y **cóncava hacia abajo**

si *f'* es decreciente en ese intervalo.

Quiere decir:

Cóncava hacia arriba (**convexa**) si la gráfica yace sobre todas sus tangentes.

Cóncava hacia abajo (sólo **cóncava**) si la gráfica subyace bajo todas sus tangentes.

Criterio de concavidad

Teorema:

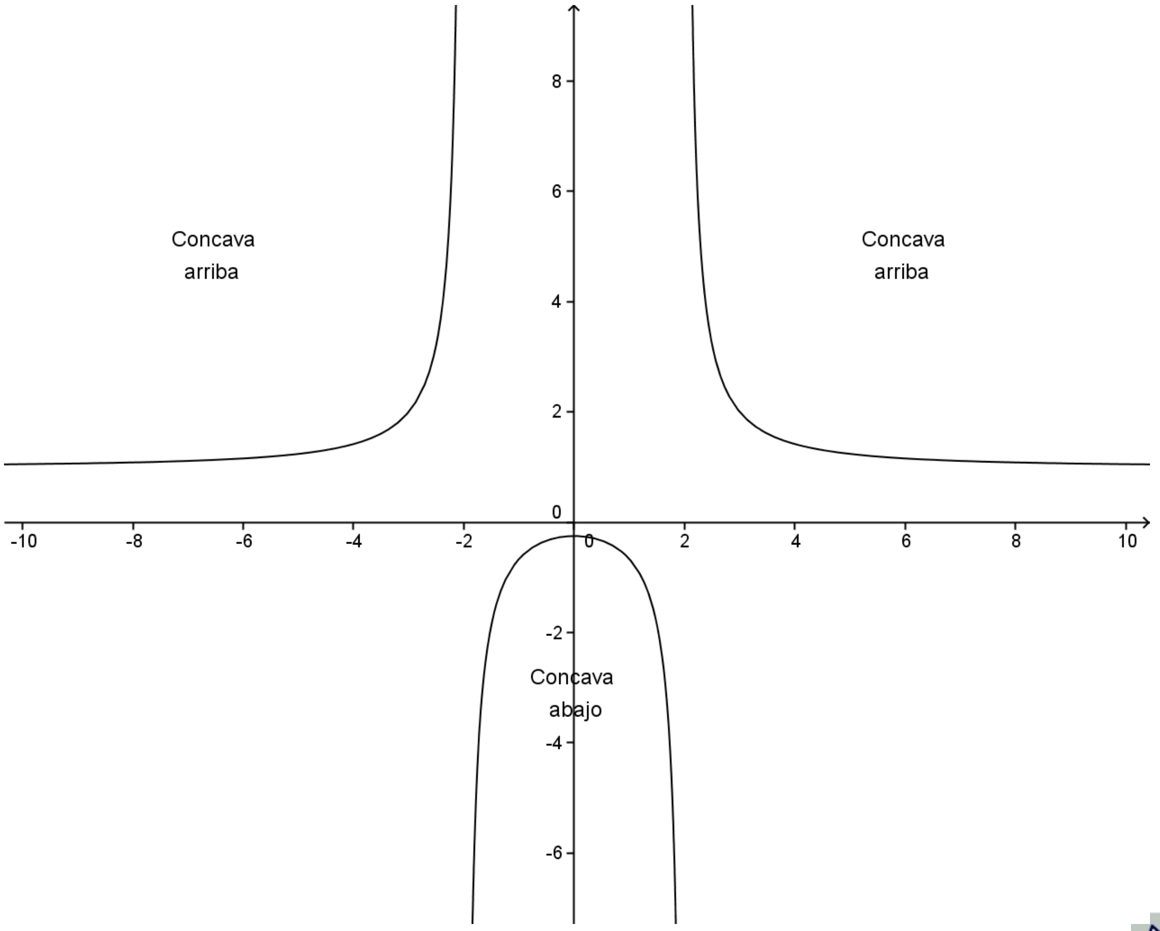
Sea *f* una función cuya segunda derivada existe en el intervalo abierto *(a,b)*, entonces

1. Si $f''(x)>0$ para todo x en (a,b), entonces f es cóncava hacia arriba en (a,b).

2. Si $f''(x)<0$ para todo x en (a,b), entonces f es cóncava hacia abajo en (a,b).

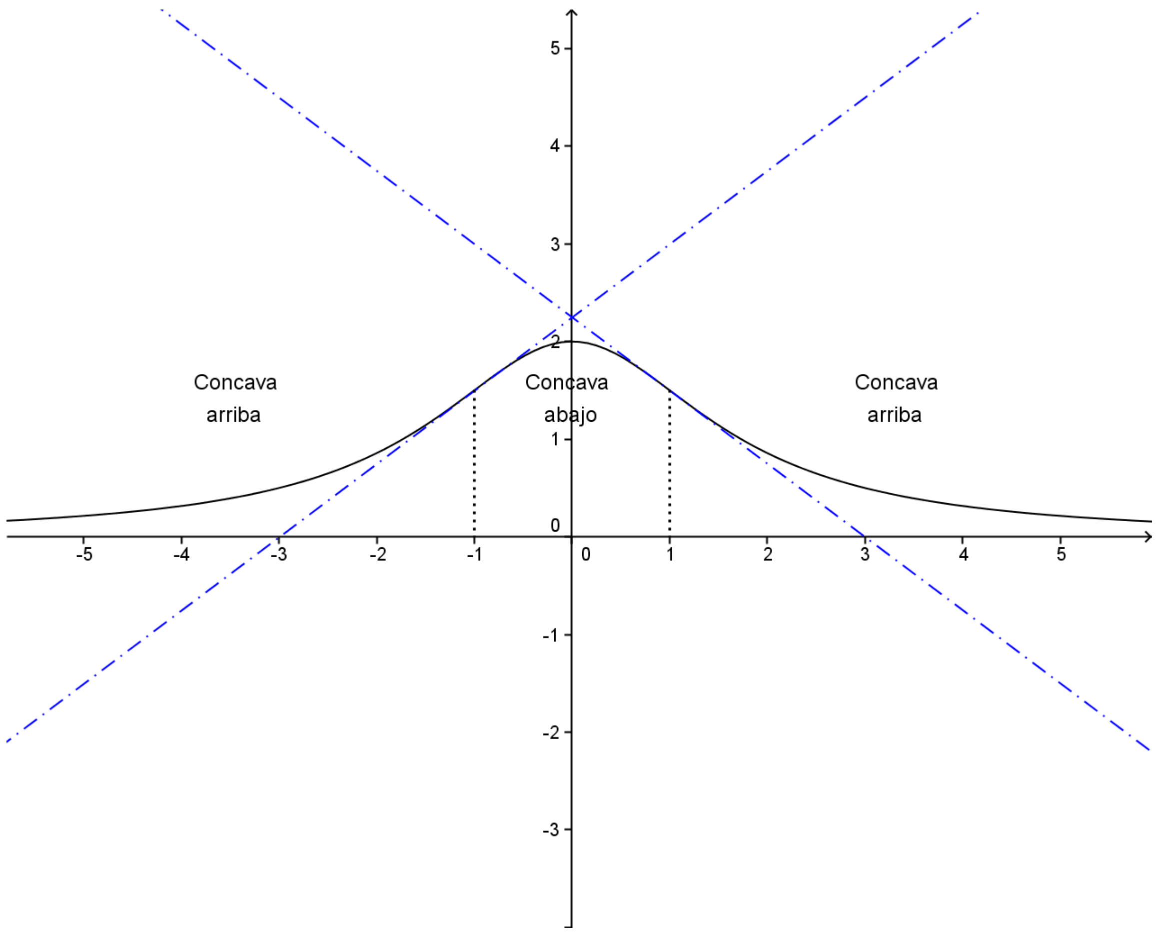
Ejemplo 1

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-4} \qquad f'(x)=\frac{-10x}{(x^2-4)^2} \qquad f''(x)=\frac{10(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$



Ejemplo 2

$$f(x)=\frac{6}{x^2+3} \qquad f'(x)=\frac{-12x}{(x^2+3)^2} \qquad f''(x)=\frac{36(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2+3)^4}$$



Punto de inflexión

- Sea *f* una función que es continua en un intervalo *(a,b)* y sea *c* un punto en ese intervalo.

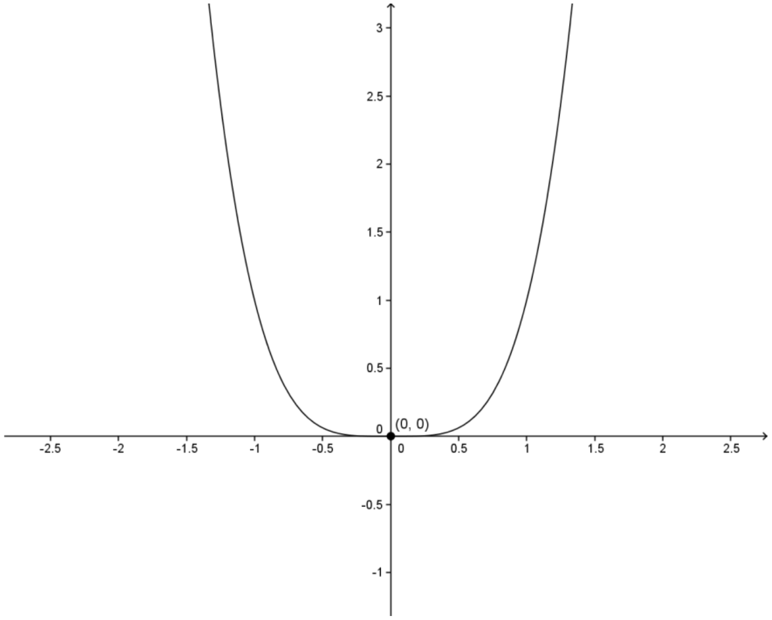
- Si la gráfica de *f* tiene una recta tangente en este punto *(c,f(c))*, entonces este punto es un **punto de inflexión de la gráfica** de *f* si la concavidad de *f* cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa en ese punto.

Punto de inflexión

Teorema:

Si *(c,f(c))* es un punto de inflexión de la gráfica de *f*, entonces $f''(c)=0$ o $f''(c)$ no existe en $x = c$

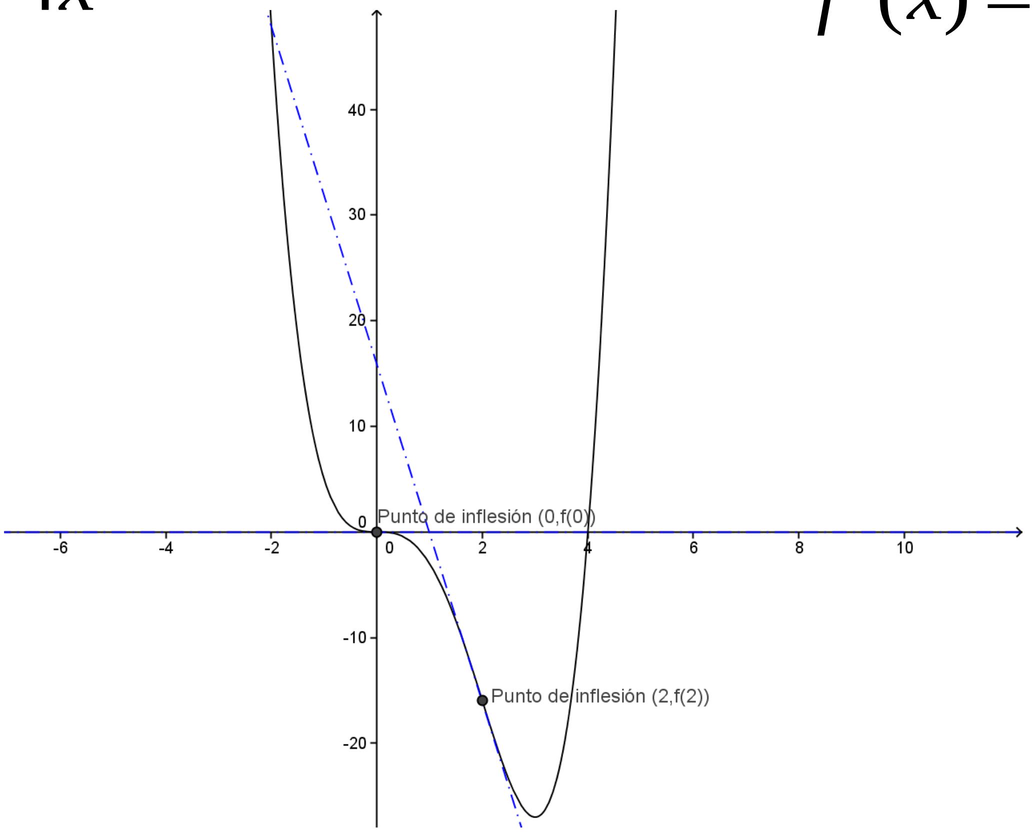
Lo contrario no es cierto:
Contra ejemplo $f(x)=x^4$



Ejemplo

$$f(x) = x^4 - 4x^3$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$$



$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$$

Criterio de la segunda derivada

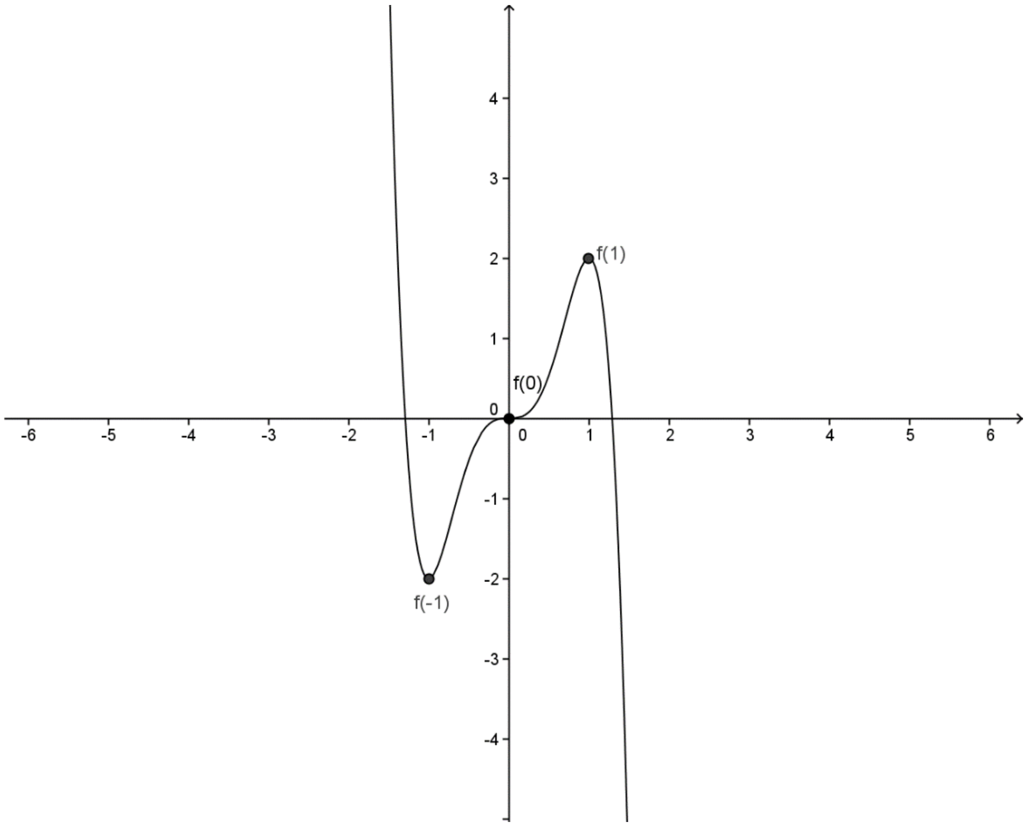
Teorema:

Sea *f* una función tal que *f'(c)=0* y la segunda derivada de *f* existe en un intervalo *(a,b)* que contiene a *c*, entonces

1. Si *f''(c)>0*, entonces *f(c)* es un mínimo relativo.
2. Si *f''(c)<0*, entonces *f(c)* es un máximo relativo.
3. Si *f''(c)=0*, *f(c)* puede o no ser un valor extremo. Se dice entonces que el criterio de la segunda derivada falla y sólo es aplicable el de la primera derivada.

Ejemplo

$$f(x) = -3x^5 + 5x^3 \qquad f'(x) = -15x^4 + 15x^2 = 15x^2(1 - x^2)$$



$$f''(x) = -60x^3 + 30x = 30x(1 - 2x^2)$$

La derivada y sus aplicaciones (II)

- Noción de derivada
- Características
- Reglas básicas de derivación
- Regla de la cadena
- Tablas de derivadas y ejemplos
- Derivación implícita
- Derivadas de orden superior
- Valores extremos en un intervalo
- Teorema de Rolle y del Valor Medio
- Funciones crecientes y decrecientes (Primera derivada)
- Concavidad (Segunda derivada)
- Límites, asíntotas y uso de la Regla de L'Hôpital

Asíntotas horizontales

Si *L* es un número real:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

significa que para todo *ε>0*, existe un *M>0* tal que |*f(x)*-*L*|<*ε* para todo *x>M*

Y:

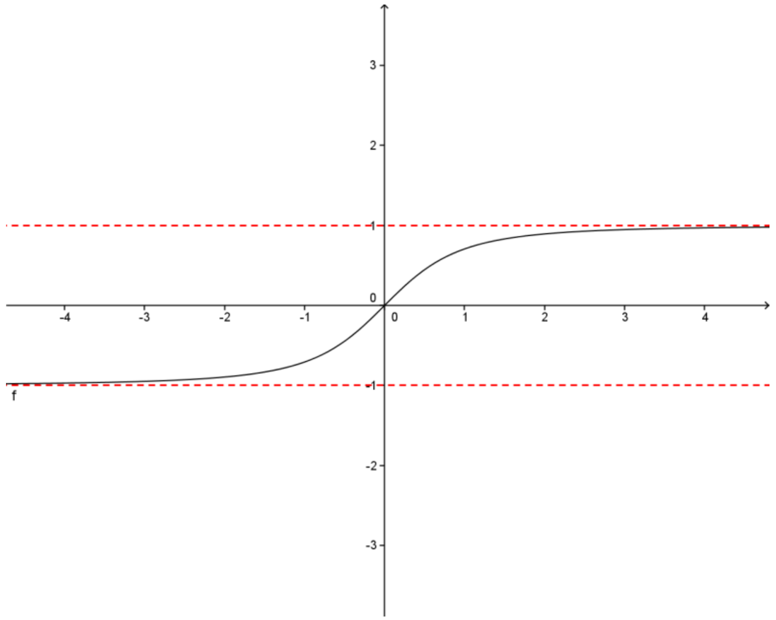
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa que para todo *ε>0, existe* un *N<0* tal que |*f(x)*-*L*|<*ε* para todo *x<N*

Asíntotas horizontales

La recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f si:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \text{ó} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$



Propiedades

El límite de la suma es la suma de límites:

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to\infty}f(x)+\lim_{x\to\infty}g(x)$$

El del producto es el producto de límites:

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)g(x)\right]=\lim_{x\to\infty}f(x)\cdot\lim_{x\to\infty}g(x)$$

Límites al infinito

Teorema:

Si *r* es un número racional positivo y *c* es cualquier número real, entonces:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{c}{x^r} = 0$$

Además, si x^r se define cuando $x < 0$, entonces

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{c}{x^r} = 0$$

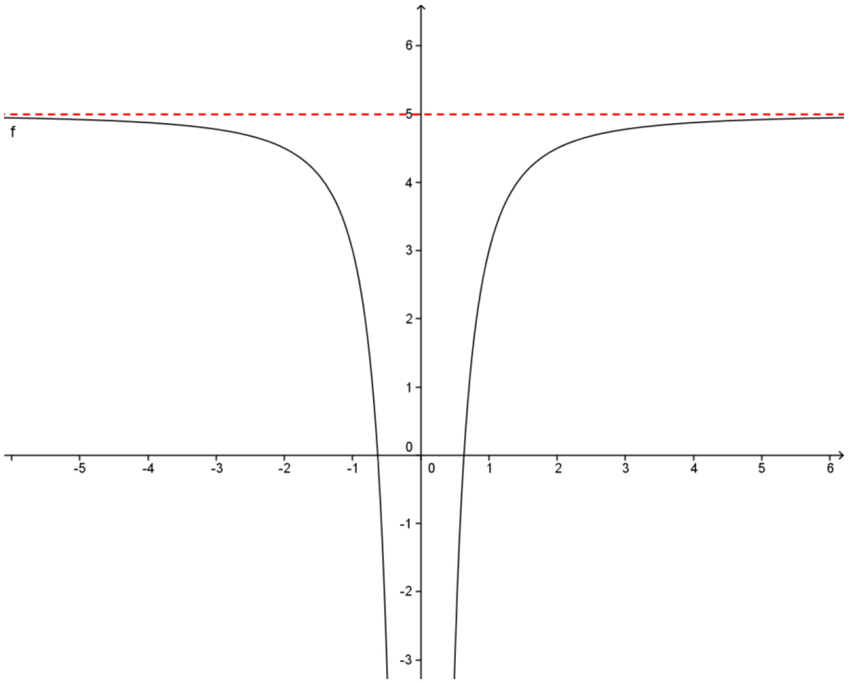
Ejemplo 1

$$\lim_{x\to\infty}\left(5-\frac{2}{x^2}\right)$$

Ejemplo 1

$$\lim_{x\to\infty}\left(5-\frac{2}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(5-\frac{2}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}5-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}=5-0=5$$



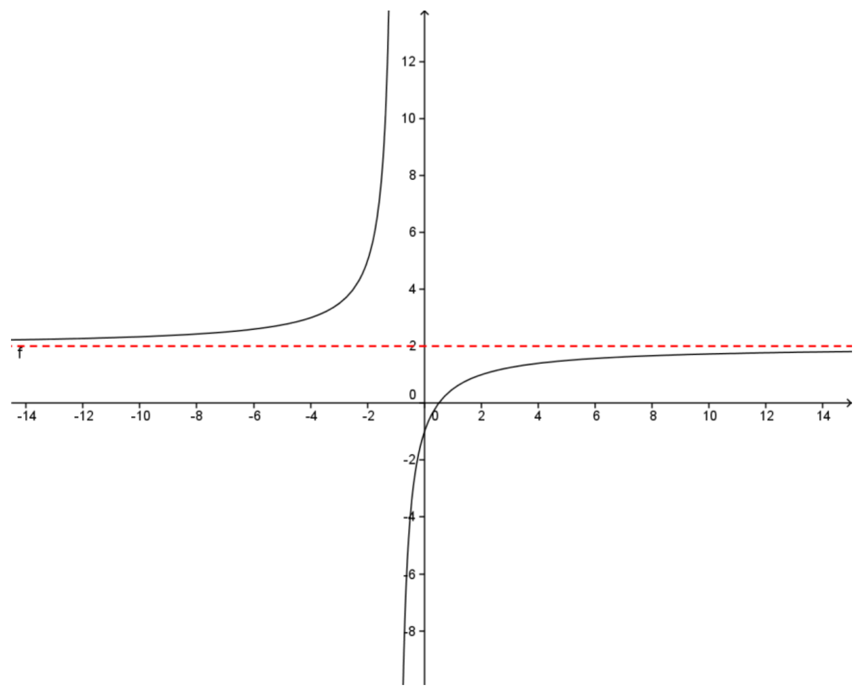
Ejemplo 2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x+1}$$

Ejemplo 2

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{x+1}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2-1/x}{1+1/x} = \frac{2-0}{1+0} = 2$$



Estrategia para determinar límites al infinito de funciones racionales

Si el grado del **numerador** es ***menor*** que el grado del **denominador**, entonces el límite de la función racional es ***0***.

Si el grado del **numerador** es ***igual*** que el grado del **denominador**, entonces el límite de la función racional es el ***cociente de los coeficientes dominantes***.

Si el grado del **numerador** es ***mayor*** que el grado del **denominador**, entonces el límite de la función racional ***no existe límite finito***.

Ejemplos

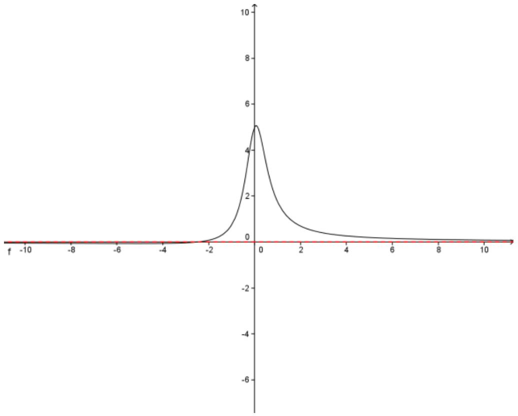
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{3x^2+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5}{3x^2+1}$$

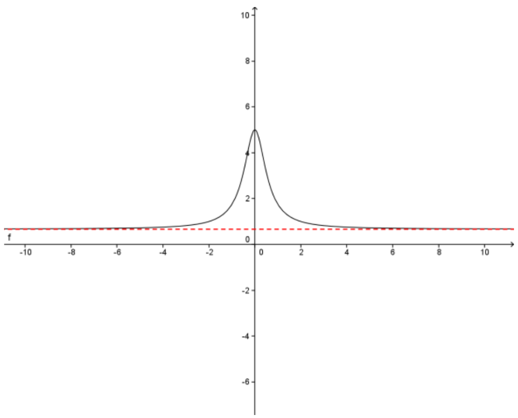
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5}{3x^2+1}$$

Ejemplos

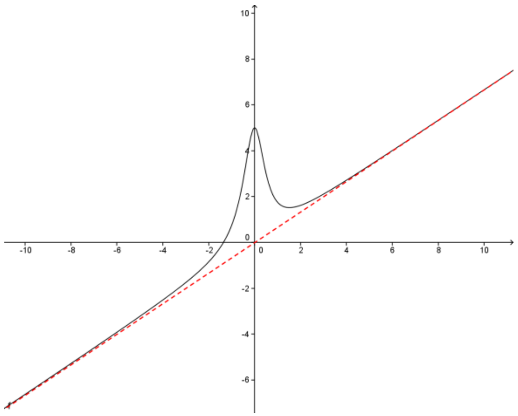
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{3x^2+1}=\frac{2}{\infty}=0$$



$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5}{3x^2+1}=\frac{2}{3}$$



$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5}{3x^2+1}=\frac{\infty}{3}=\infty$$



Ejemplo

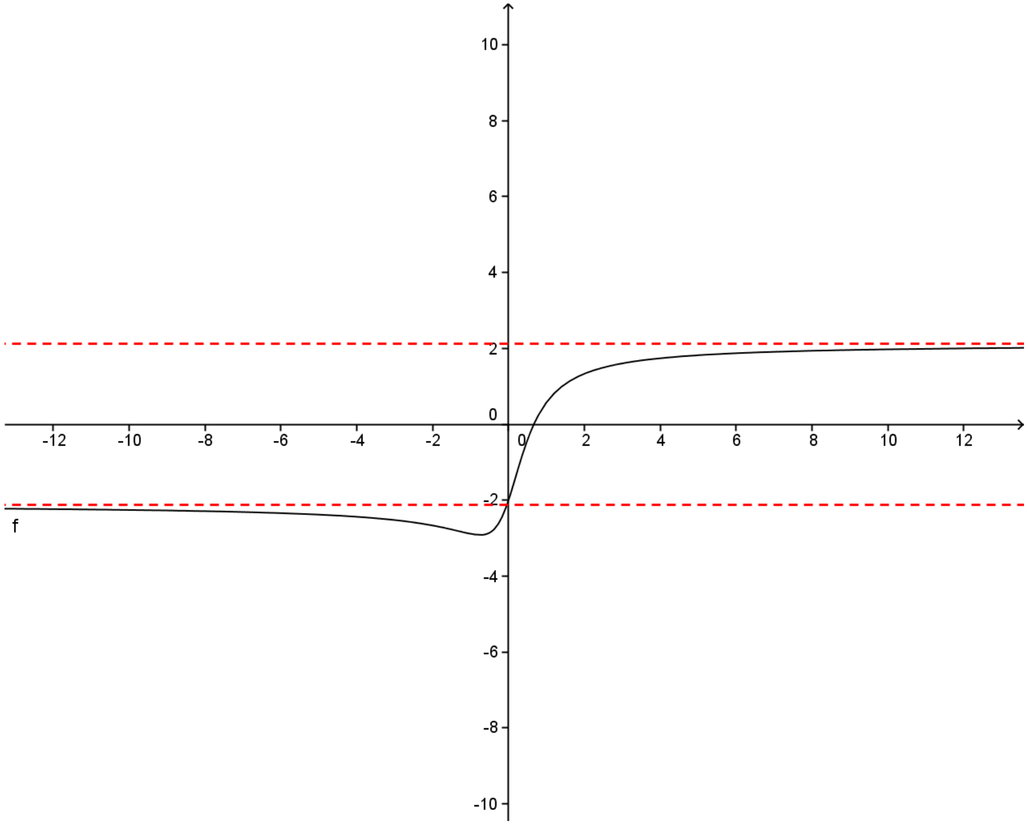
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$$

Ejemplo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}=\frac{-3}{\sqrt{2}}$$



Límites infinitos en el infinito

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

significa que para todo *M>0*, existe un *N>0* tal que *f(x)>M* para todo *x>N*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

significa que para todo *M<0, existe* un *N>0* tal que *f(x)<M* para todo *x>N*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

significa que para todo *M>0*, existe un *N<0* tal que *f(x)>M* para todo *x<N*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

significa que para todo *M<0, existe* un *N<0* tal que *f(x)<M* para todo *x<N*

Regla de L'Hôpital

Sean *f(x)* y *g(x)≠0* derivables en *u* con *g'(u) ≠0,*
para *u* igual a *a*, *0*, +∞ ó -∞, *si f(u)=g(u)=0* entonces

$$\lim_{x \to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demostración:

$$\lim_{x \to u} \frac{f(x)-f(u)}{g(x)-g(u)} = \lim_{x \to u} \frac{\frac{f(x)-f(u)}{x-u}}{\frac{g(x)-g(u)}{x-u}} = \frac{\lim\limits_{x \to u} \frac{f(x)-f(u)}{x-u}}{\lim\limits_{x \to u} \frac{g(x)-g(u)}{x-u}}$$

Si *x* ϵ *(-∞,+∞)*: $\frac{f'(u)}{g'(u)}$ Si *x* = ±∞: $\lim\limits_{x \to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Regla de L'Hôpital

Indeterminaciones *0/0*: $\lim_{x \to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Indeterminaciones ∞/∞: $\lim_{x \to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to u} \frac{1}{g(x)} / \lim_{x \to u} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\infty} / \frac{1}{\infty} = 0/0 = \frac{0}{0}$$

Regla de L'Hôpital

Indeterminaciones *0·∞ ó ∞·0* :

$$\lim_{x\to u} f(x)g(x) = \lim_{x\to u}\frac{f(x)}{1/g(x)} \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to u}\frac{g(x)}{1/f(x)}$$

Ya que:

$$\lim_{x\to u} f(x)g(x) = 0\cdot\infty = \lim_{x\to u}\frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to u}\frac{g(x)}{1/f(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to u} f(x)g(x) = \infty\cdot 0 = \lim_{x\to u}\frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to u}\frac{g(x)}{1/f(x)} = \frac{0}{0}$$

Regla de L'Hôpital

Indeterminaciones *1^{∞}, ∞^{0} ó 0^{0}* :

$$A = \lim_{x \to u}\left[f(x)^{g(x)}\right]$$

$$\ln A = \ln\left(\lim_{x \to u}\left[f(x)^{g(x)}\right]\right)$$

$$\ln A = \lim_{x \to u}\left(\ln\left[f(x)^{g(x)}\right]\right) = \lim_{x \to u}\left(g(x)\ln\left[f(x)\right]\right) = 0 \cdot \infty = M$$

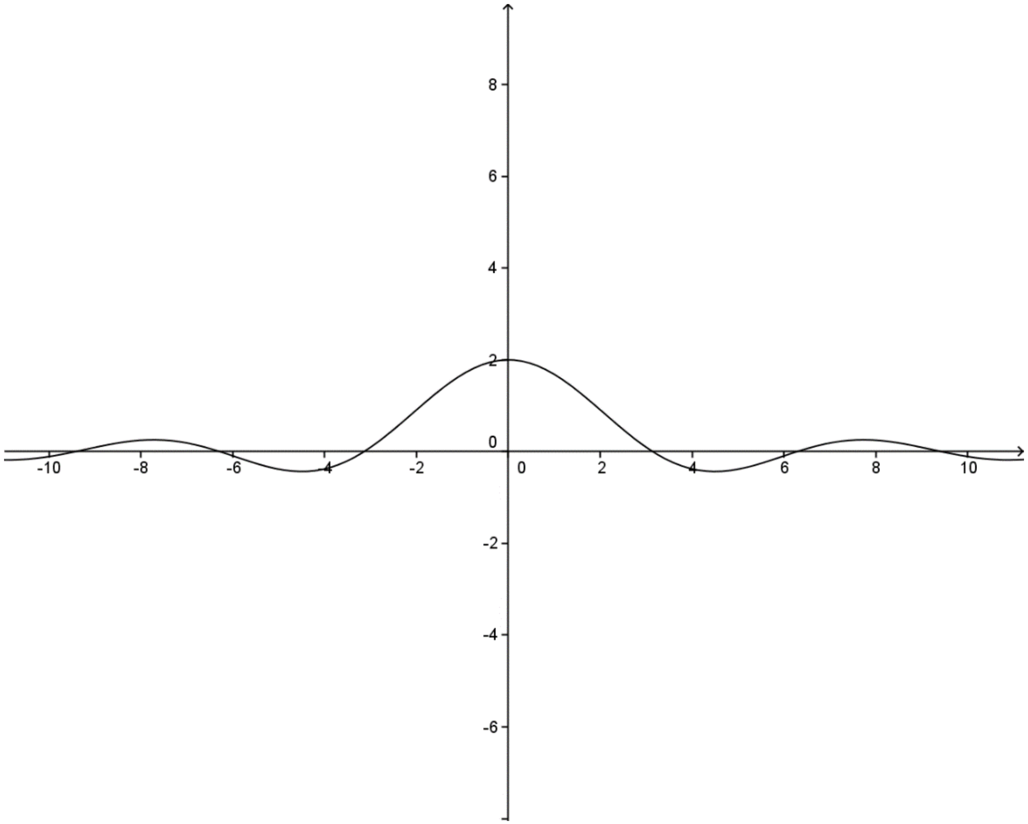
$$\ln A = M \qquad\qquad A = e^{M}$$

Ejemplo 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} x}{x}$$

Ejemplo 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\operatorname{sen} x}{x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{2\cos x}{1} = 2$$



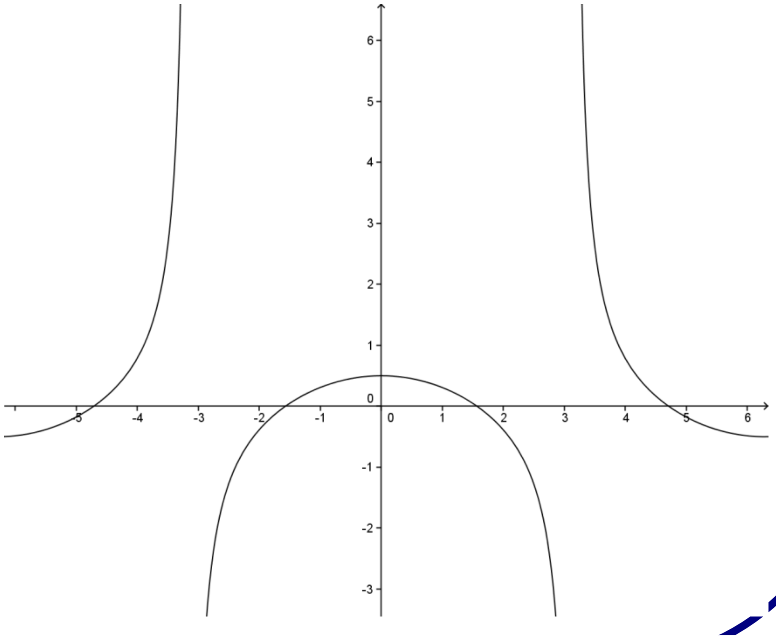
Ejemplo 2

$$\lim_{x\to 0}\left[\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{ctg}x\right]$$

Ejemplo 2

$$\lim_{x\to 0}\left[\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{ctg} x\right]=0\cdot\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\tan x}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\tan x}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{1}{2}$$



Ejemplo 3

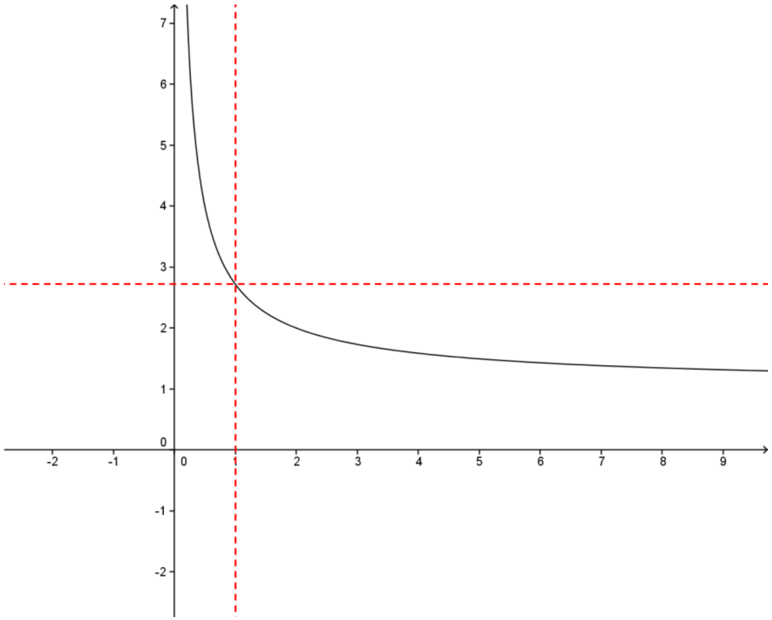
$$\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$$

Ejemplo 3

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = 1^{\infty} = A \Rightarrow \ln\left(\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}\right) = \ln A$$

$$\ln A = \lim_{x\to 1} \ln\left(x^{\frac{1}{x-1}}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to 1} x = 1$$

$$\ln A = 1 \Rightarrow A = e$$



La derivada y sus aplicaciones (II)

- Noción de derivada
- Características
- Reglas básicas de derivación
- Regla de la cadena
- Tablas de derivadas y ejemplos
- Derivación implícita
- Derivadas de orden superior
- Valores extremos en un intervalo
- Teorema de Rolle y del Valor Medio
- Funciones crecientes y decrecientes (Primera derivada)
- Concavidad (Segunda derivada)
- Límites, asíntotas y uso de la Regla de L'Hôpital
- Análisis de gráficas

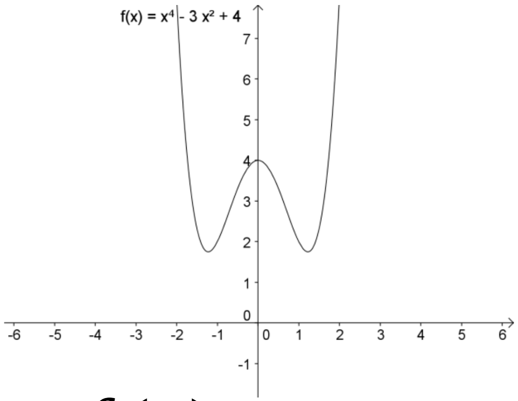
Análisis de la gráfica de una función

- Intersección con los ejes *x* e *y*:

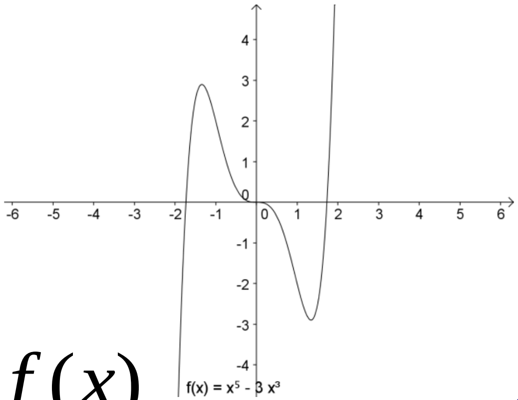
  x=0 *y=0*

- Simetría:
  - Par (o respecto al eje *y*).

    f(-x)=f(x)



$$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 4 = x^4 - 3x^2 + 4 = f(x)$$



  - Impar (o respecto al origen).

    f(-x)=-f(x)

$$f(-x) = (-x)^5 - 3(-x)^3 = -x^5 + 3x^3 = -f(x)$$

Análisis de la gráfica de una función

- Dominio
- Continuidad
- Asíntotas verticales
  - Si para un límite finito tiende a infinito
- Derivabilidad
- Extremos relativos
  - Ínfimo/Supremo=máx/mín(cotas infer/super)
- Concavidad
- Puntos de inflexión
- Asíntotas horizontales (Límites al infinito)
- Límites infinitos al infinito

Estrategia para analizar la gráfica

1. Determinar el dominio y rango de la función.

2. Determinar las intersecciones, asíntotas y simetría de la gráfica.

3. Localizar los valores de x para los cuales f'(x) y f''(x) son cero o no existen.

4. Usar los resultados para determinar extremos relativos y puntos de inflexión.

Ejemplo

$$f(x) = \frac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4}$$

Dominio
Simetría
Intersección en *x*
Intersección en *y*
Asíntotas verticales
Asíntotas horizontal
Primera derivada
Segunda derivada
Puntos críticos
Máximos relativos
Mínimos relativos
Puntos de inflexión
Intervalos de prueba

Ejemplo

$$f(x) = \frac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4}$$

Dominio: La recta real salvo discontinuidad en 2 y -2
Simetría: Respecto al eje *y* (Par)
Intersección en *x*: *(-3,0)* y *(3,0)*
Intersección en *y*: *(0,9/2)*
Asíntotas verticales: *x=-2* y *x=2*
Asíntotas horizontal: *y=2*
Primera derivada
Segunda derivada
Puntos críticos
Máximos relativos
Mínimos relativos
Puntos de inflexión
Intervalos de prueba

Ejemplo

$$f(x) = \frac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4}$$

Dominio: La recta real salvo discontinuidad en 2 y -2
Simetría: Respecto al eje *y* (Par)
Intersección en *x*: *(-3,0)* y *(3,0)*
Intersección en *y*: *(0,9/2)*
Asíntotas verticales: *x=-2* y *x=2*
Asíntotas horizontal: *y=2*
Primera derivada
Segunda derivada
Puntos críticos
Máximos relativos
Mínimos relativos
Puntos de inflexión
Intervalos de prueba

$$f'(x) = \frac{20x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-20(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}$$

Ejemplo

$$f(x)=\frac{2(x^2-9)}{x^2-4}$$

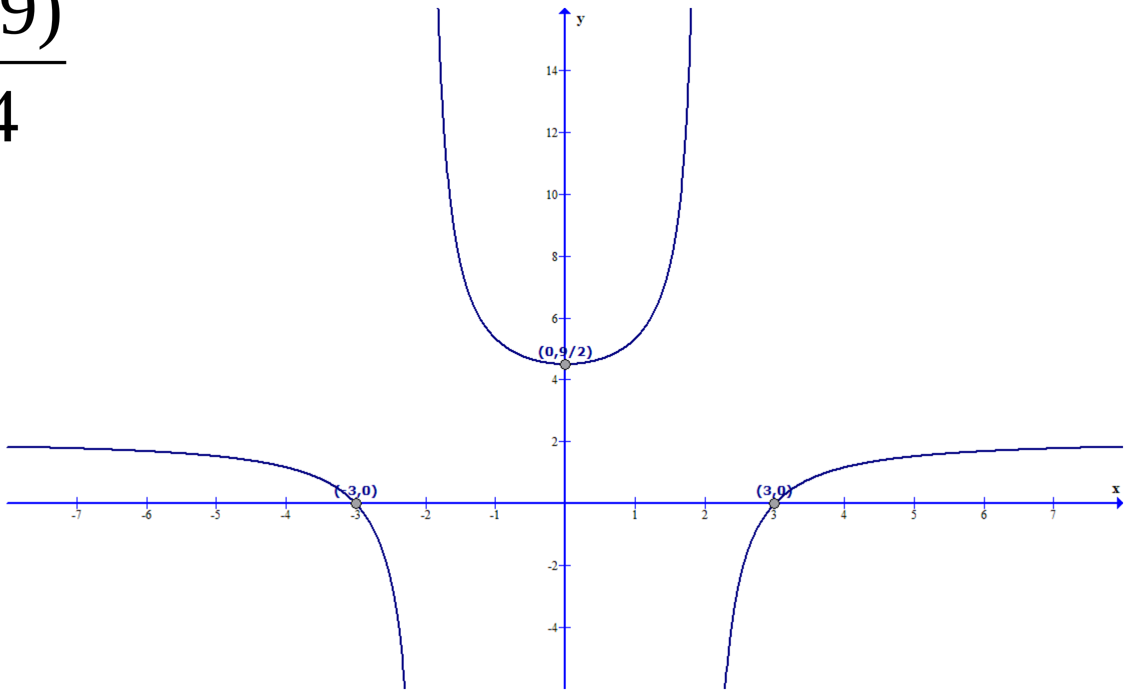
Dominio: La recta real salvo discontinuidad en 2 y -2
Simetría: Respecto al eje *y* (Par)
Intersección en *x*: *(-3,0)* y *(3,0)*
Intersección en *y*: *(0,9/2)*
Asíntotas verticales: *x=-2* y *x=2*
Asíntotas horizontal: *y=2*
Primera derivada
Segunda derivada
Puntos críticos: *x=-2*, *x=0* y *x=2*
Máximos relativos: Ninguno
Mínimos relativos: *x=0*
Puntos de inflexión: Ninguno
Intervalos de prueba: *(-∞,-2)*,*(-2,0)*,*(0,2)*,*(2,∞)*

$$f'(x)=\frac{20x}{(x^2-4)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-20(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$

Ejemplo

$$f(x) = \frac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4}$$



	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Características
$-\infty < x < -2$		-	-	Dec., cóncava hacia abajo
$x = -2$	Indef.	Indef.	Indef.	Asíntota vertical
$-2 < x < 0$		-	$+$	Dec., cóncava hacia arriba
$x = 0$	$\frac{9}{2}$	0	$+$	Mínimo relativo
$0 < x < 2$		$+$	$+$	Cre., cóncava hacia arriba
$x = 2$	Indef.	Indef.	Indef.	Asíntota vertical
$2 < x < \infty$		$+$	-	Cre., cóncava hacia abajo

La derivada y sus aplicaciones (II)

- Noción de derivada
- Características
- Reglas básicas de derivación
- Regla de la cadena
- Tablas de derivadas y ejemplos
- Derivación implícita
- Derivadas de orden superior
- Valores extremos en un intervalo
- Teorema de Rolle y del Valor Medio
- Funciones crecientes y decrecientes (Primera derivada)
- Concavidad (Segunda derivada)
- Límites, asíntotas y uso de la Regla de L'Hôpital
- Análisis de gráficas
- Problemas de optimización (máximos y mínimos)

Problemas de optimización

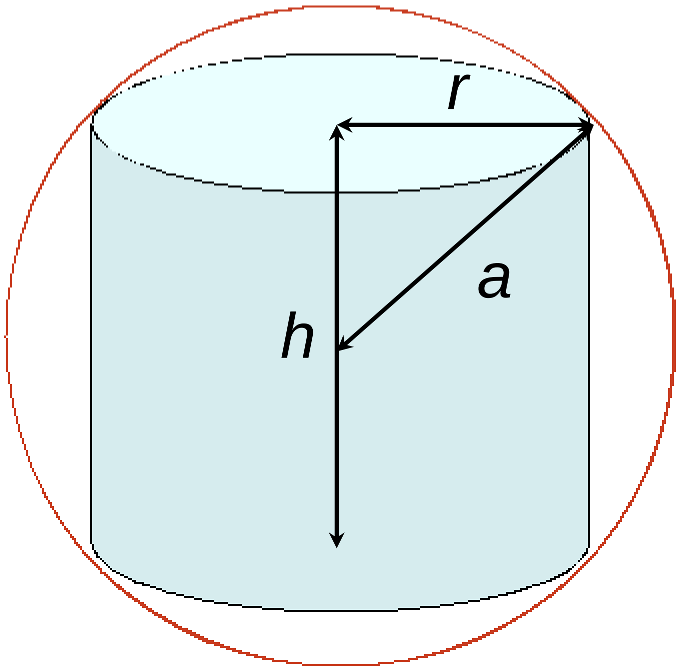
La resolución y cálculo del problema implica la determinación de los valores Máximo y Mínimo.

Estrategia para resolución

1. *Identificar todas las cantidades dadas (datos) y las que se van a determinar (variables). Elaborar dibujo.*
2. *Escribir la ecuación a optimizar.*
3. *Reducir la ecuación a una sola variable independiente.*
4. *Determinar el dominio admisible de la ecuación (intervalos de valores que tienen sentido).*
5. *Determinar el valor máximo o mínimo (aplicar las técnicas de cálculo vistas).*
6. *Interpretar los resultados y rechazar los absurdos.*

Problema 1

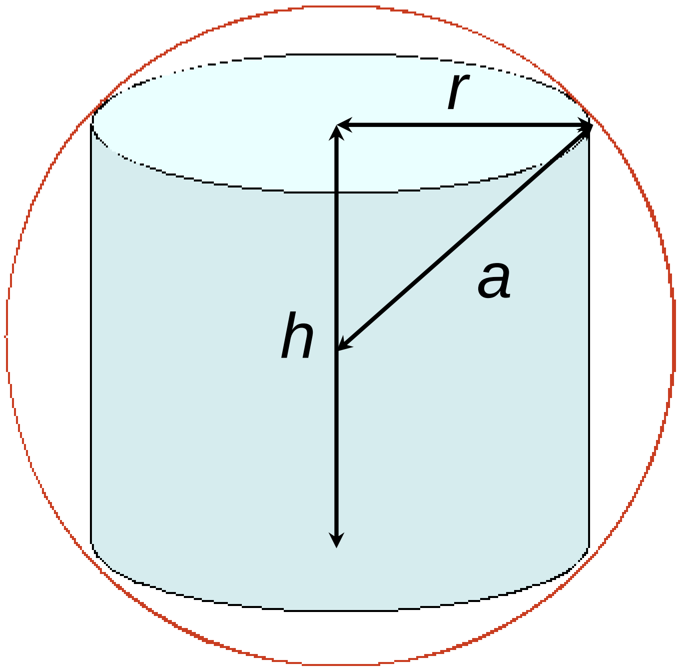
Determinar la altura *h* y radio *r* del cilindro con mayor volumen posible circunscrito en una esfera de radio *a*:



Problema 1

Relación entre la altura *h*, radio *r* de la base del cilindro y el radio *a* de la esfera al estar circunscrito el cilindro a la esfera:

$$r^2 = a^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2$$



Volumen del cilindro:

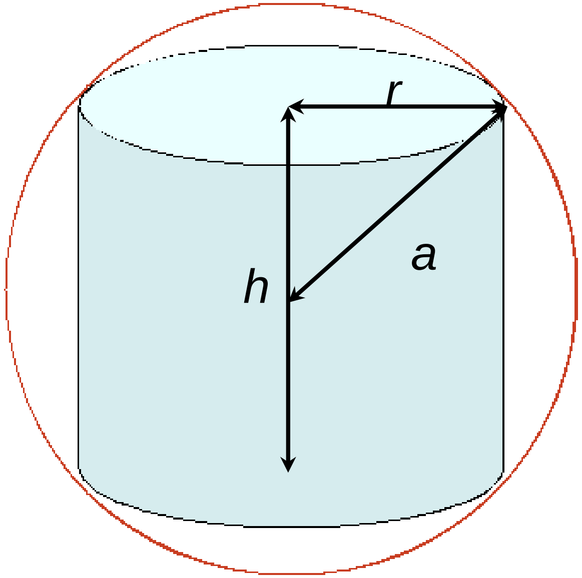
$$V = \pi \cdot r^2 h$$

$$V(h) = \pi \cdot \left(a^2 - \frac{h^2}{4}\right) h$$

Problema 1

La función *V(h)* tiene sentido solo de *0* a *2a*:

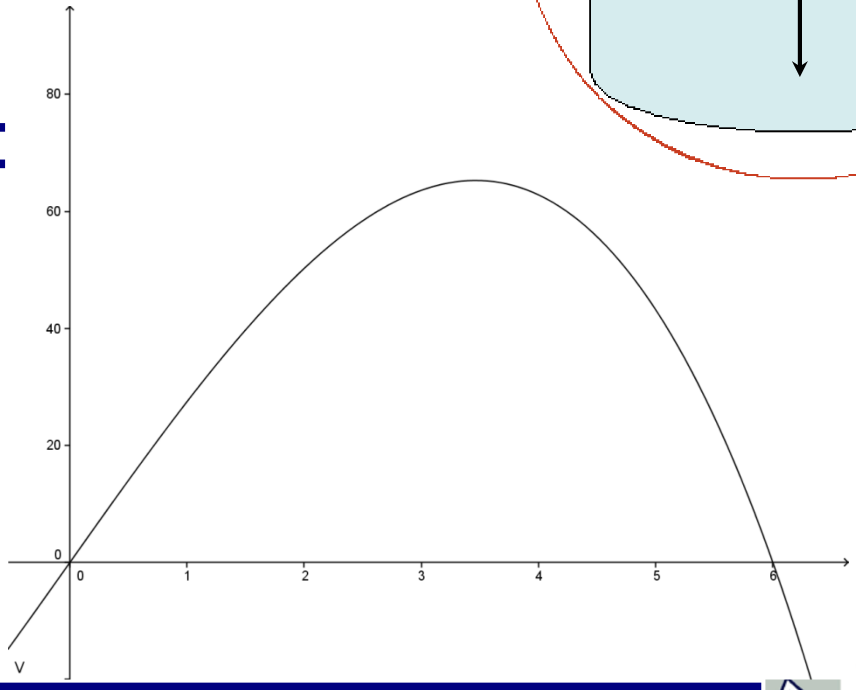
$$V(h) = \pi \cdot \left(a^2 - \frac{h^2}{4} \right) h \qquad h \in [0, 2a]$$



Ejemplo con *a=3*:

$$V(h) = \pi \cdot \left(9 - \frac{h^2}{4} \right) h$$

$$h \in [0,6]$$



Problema 1

Localización de los puntos críticos:

$$V(h) = \pi \cdot \left(a^2 - \frac{h^2}{4} \right) h \qquad h \in [0,2a]$$

$$V'(h) = \pi \left(a^2 - \frac{3}{4} h^2 \right) \qquad \left(a^2 - \frac{3}{4} h^2 \right) = 0 \Rightarrow h = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

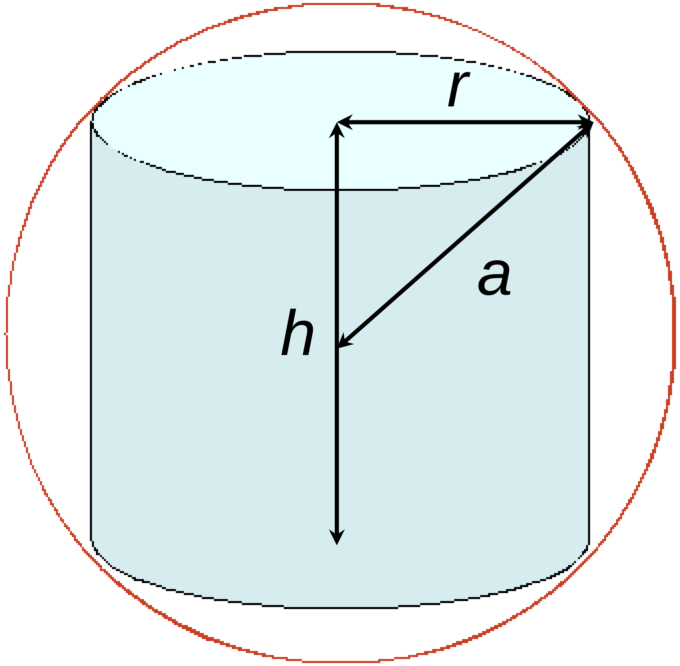
$$h = 0 \qquad h = \frac{2a}{\sqrt{3}} \qquad h = 2a$$

$$V(h) = 0 \qquad V(h) = \frac{4}{3\sqrt{3}} a\pi \qquad V(h) = 0$$

Problema 1

Sustituimos el *h* que proporciona el *V(h)* máximo para obtener *r* :

$$r^2 = a^2 - \frac{h^2}{4} = a^2 - \frac{4a^2}{4 \cdot 3} = \frac{3a^2 - a^2}{3}$$



El radio del cilindro es:

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}a$$

Su altura es: $$h = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

Y su volumen: $$V = \frac{4}{3\sqrt{3}}a\pi$$

Problema 2

Se desea construir un rectángulo que tenga un perímetro de 80 cm. ¿Cuáles deben ser su largo y ancho de manera que el área sea máxima?

Problema 2

Se desea construir un rectángulo que tenga un perímetro de 80 cm. ¿Cuáles deben ser su largo y ancho de manera que el área sea máxima?

- Sea a el ancho
- Sea l el largo
- Y sea A el área

- Tenemos que $2a+2l=80$, de donde $a=40-l$
- La función del área será $A(l)=al=(40-l)l$

Problema 2

La función *A(l)* tiene sentido solo de *0* a *40*:

$$A(l) = 40l - l^2 \qquad l \in [0,40]$$

Buscamos su máximo:

$$A'(l) = 40 - 2l = 0$$

$$l = 20$$

$$A(20) = 800 - 400$$

$$a = 40 - 20 = 20$$