CASA

- $285x + 84y = 15$
- $555x + 94y = 21$
- $791x + 336y = 35$

- $285x + 84y = 15$

0 Identidad de Bezout

$285 = 84 \times 3 + 33$ V

$84 = 33 \times 2 + 18$ V

$33 = 18 \times 1 + 15$ V

$18 = 15 \times 1 + 3$ V

$15 = 3 \times 5 + 0$

$\boxed{a = bq + r}$

$18 = 15 \times 1 + 3$

$\boxed{r = a + b(-q)}$

$3 = 18 + 15(-1)$

$3 = 18 + [33 + 18(-1)](-1)$

$3 = 18 + 33(-1) + 18(1)$

$3 = 18(2) + 33(-1)$

$3 = [84 + 33(-2)](2) + 33(-1)$

$3 = 84(2) + 33(-4) + 33(-1)$

$3 = 84(2) + 33(-5)$

$3 = 84(2) + [285 + 84(-3)](-5)$

$3 = 84(2) + 285(-5) + 84(15)$

$3 = 84(17) + 285(-5)$

1 $d = mcd(a, b) = mcd(285, 48) = 3$ $\quad 3 \mid 15 \Rightarrow$ Hay solución

2 Bezout $\quad d = as + bt \Rightarrow 3 = 285s + 48t$

$3 = 285(-5) + 84(17) \qquad (s, t) = (-5, 17$

Calcula razonadamente y enunciando los teoremas utilizados, el número de vértices de grado uno que tiene un árbol con dos vértices de grado cuatro y tres vértices de grado tres. Se supone que el árbol sólo tiene vértices de grado 1, 3 y 4.

① $V_1 = \{u \in V, d_G(u) = 1\}$

$V_3 = \{u \in V, d_G(u) = 3\}$

$V_4 = \{u \in V, d_G(u) = 4\}$

② $\text{Card}(V_1) = n$

$\text{Card}(V_3) = 3$

$\text{Card}(V_4) = 2$

③ $V_1 \cup V_3 \cup V_4 = V$

$V_i \cap V_j = \emptyset$

FORMA FRANCÉS

④ $\{V_1, V_3, V_4\}$ (3) Partición de V

⑤ (2) $\text{Card}(V) = \text{Card}(V_1) + \text{Card}(V_3) + \text{Card}(V_4)$

⑥ (1) $\sum_{u \in V} d_G(u) = \sum_{u \in V_1} d_G(u) + \sum_{u \in V_3} d_G(u) + \sum_{u \in V_4} d_G(u)$

Teorema

⑦ **Teorema 1**: $G(V, A) \Rightarrow \sum d_G(v) = 2\,\text{card}(A)$

⑧ **Teorema 2**: $T(V, A) \Rightarrow \text{Card}(A) = \text{Card}(V) - 1$

⑨ (1) (7-8) $\sum_{u \in V_1} d_G(u) + \sum_{u \in V_2} d_G(u) + \sum_{u \in V_3} d_G(u) = 2\,\text{Card}(V) - 2$

$1 \cdot \text{Card}(V_1) + 3 \cdot \text{Card}(V_3) + 4 \cdot \text{Card}(V_4) =$

$2\,\text{Card}(V_1) + 2\,\text{Card}(V_3) + 2\,\text{Card}(V_4) - 2$

⑩ $1 \cdot n + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 2n + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - 2$

$n + 9 + 8 = 2n + 6 + 4 - 2$

$\boxed{n = 9}$

FORMA PRO

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum d_G(v) = 2\,\text{Card}(A) \\ \text{Card}(A) = \text{Card}(V) - 1 \end{array}}$$

x de grado 1 → x

3 de grado 3 → 9

2 de grado 4 → 8

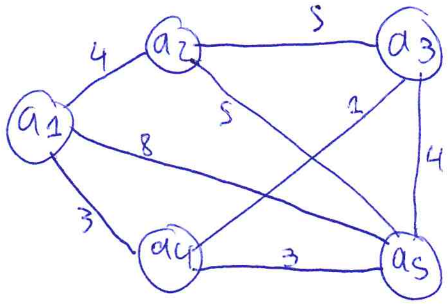
$x + 5$ $\quad x + 17$

$\sum d_G(v) = x + 17 = 2(\text{Card}(V) - 1) = 2(x + 5 - 1)$

$x + 17 = 2x + 8$

$\boxed{x = 9}$

3



$T = \emptyset \quad U = \langle a_1 \rangle$

$L(a_2) = w_{a_1 a_2} = 4$

$\boxed{L(a_4) = w_{a_1 a_4} = 3}$

$L(a_5) = w_{a_1, a_5} = 8$

$L(a_3) = \infty$

$T = \langle\langle a_1, a_4 \rangle\rangle \quad U = \langle a_1, a_4 \rangle$

$L(a_2) = Mín(L(a_2), w_{a_4, a_2}) = Mín(4, \infty) = 4$

$\boxed{L(a_3) = Mín(L(a_3), w_{a_4, a_3}) = Mín(\infty, 1) = 1}$

$L(a_5) = Mín(L(a_5), w_{a_4, a_5}) = Mín(8, 3) = 3$

$T = \langle\langle a_1, a_4 \rangle, \langle a_4, a_3 \rangle\rangle \quad U = \langle a_1, a_3, a_4 \rangle$

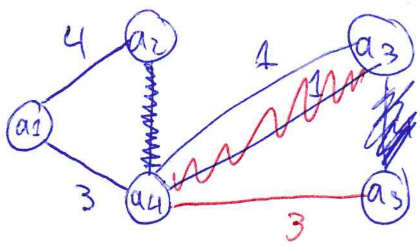
$L(a_2) = Mín(L(a_2), w_{a_3, a_2}) = Mín(4, 5) = 4$

$\boxed{L(a_5) = Mín(L(a_5), w_{a_3 a_5}) = Mín(3, 4) = 3}$

$T = \langle\langle a_1, a_4 \rangle, \langle a_4, a_3 \rangle, \langle a_4, a_5 \rangle\rangle \quad U = \langle a_1, a_3, a_4, a_5 \rangle$

$\boxed{L(a_2) = Mín(L(a_2), w_{a_5 a_2}) = Mín(4, 5) = 4}$

$T = \langle\langle a_1, a_4 \rangle, \langle a_4, a_3 \rangle, \langle a_4, a_5 \rangle, \langle a_1, a_2 \rangle\rangle \quad U = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \rangle$ ~~STOP~~



coste total = 11

2011 – Junio

④ Variables

Z: discos duros

x:

y:

$2000 \leq z \leq 3000$

$Z \equiv 13 \pmod{17}$

$Z \equiv 19 \pmod{29}$

$\boxed{\begin{aligned} Z &= 17x+13 \\ Z &= 29y+19 \end{aligned}}$

$17x+13=29y+19$

$\boxed{17x-29y=6}$ → Ec. diofántica

A B C

Dn

$a=17$

$b=-29$

$c=6$

① Algoritmo Euclides

mcd(29,17):

$29=17\times1+12$ ✓

$17=12\times1+5$ ✓

$12=5\times2+2$ ✓

$5=2\times2+1$ ✓

$2=1\times2+0$

② Identidad de Bezout

$\boxed{d=as+bt}$

$\boxed{a=qb+r}$

$5=2\times2+1$

$\boxed{r=q(-b)+a}$

$1=2(-2)+5$

$1=[12+5(-2)](-2)+5$

$1=12(-2)+5(4)+5$

$1=12(-2)+5(5)$

$1=12(-2)+[17+12(-1)](5)$

$1=12(-2)+17(5)+12(-5)=12(-7)+17(5)$

$1=[29+17(-1)](-7)+17(5)$

$1=29(-7)+17(7)+17(5)=29(-7)+17(12)$

$1=17(12)-29(7)$

$s=12$

$t=7$

③ $c/D = 6/1$

④

$A=\alpha D \Rightarrow 17=\alpha$

$B=\beta D \Rightarrow 29=\beta$

⑤ Solución particular

$\left.\begin{aligned} D&=1 \\ Dn&=6 \end{aligned}\right\} n=Dn/d=6$

$(x_0,y_0)=(72,42)$

⑥ Solución general

$x=x_0+\beta k=72+29k$

$Y=y_0+\alpha k=42+17k$

⑦ Comprobación

$\begin{cases} x=72+29=101 \\ y=42+17=59 \end{cases}$

$17(101)-29(59)=6$

Parte 1

$z = 17x + 13 = 17(72 + 29k) + 13 = 1224 + 493k + 13 = 1237 + 493k$

$z = 29y + 19 = 29(42 + 17k) + 19 = 1218 + 493k + 19 = 1237 + 493k$

Parte 2

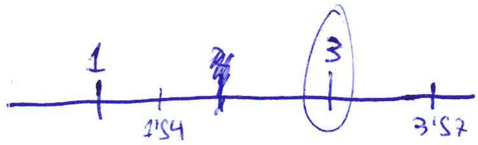
$2000 \leq z \leq 3000$

$2000 \leq 1237 + 493k \leq 3000$

$763 \leq 493k \leq 1763$

$\frac{763}{493} \leq k \leq \frac{1763}{493}$

$1'54 \leq k \leq 3'57$



$k \in \langle 3 \rangle$

$z = 1237 + 493 \cdot 3$

$z = 1237 + 1479$

$\underline{z = 2716}$

2011 – Junio

5 a) Para $\mathbb{Z}_{13}$ → Resultado con representantes del 0 al 12

$$\begin{cases} [4]x + [3]y = [2] \\ [5]x - y = [5] \end{cases}$$

1.

$$\begin{cases} (\cdot 2)\ [8]x + [6]y = [4] \\ [5]x - y = [5] \end{cases}$$

$[13]x + [5]y = [9]$

$[13] \to 0$

$y = [5]^{-1}[9]$

2. $\boxed{[5]^{-1}}$: mcd(13,5) ⇒ Algoritmo Euclides

$13 = 5 \times 2 + 3$ ✓

$5 = 3 \times 1 + 2$ ✓

$3 = 2 \times 1 + 1$ ✓

$2 = 1 \times 2 + 0$

3. Identidad de Bezout

$\boxed{a = q(b) + r}$

$\boxed{r = q(-b) + a}$

$1 = 2(-1) + 3$

$1 = [5 + 3(-1)](-1) + 3 = 3(2) + 5(-1)$

$1 = [5(-2) + 13](2) + 5(-1)$

$1 = 5(-5) + 13(2)$

~~$1 = 6(-1) + 7$~~

~~$1 = [7(-1) + 13](-1) + 7 = 7 + 13(-1) + 7$~~

$1 = 7(2) + 13(-1)$

4. $[1] = [5] \cdot [-5] + [13] \cdot [2]$, $[13] \to 0$

$[5]^{-1} = [-5]$

QUÉ HACER? Pasarlo a $\mathbb{Z}_{13}$

5. $\boxed{y = [5]^{-1}[9] = [-5] \cdot [9] = [-45] = [7]}$

$[13 \times 4 - 45] = [7]$

45 | 13 → 6, 3, ↑ 1

$[5]x - y = [5] \Rightarrow [5]x - [7] = [5]$

$[5]x = [12]$

$[5]^{-1}[5]x = [5]^{-1}[12]$

$x = [5]^{-1}[12]$

$x = [-5][12]$ → [5]

$\boxed{x = [-60]} = \boxed{[13 \times 4 - 60] = [2]}$

~~50 | 13 → 11, 3, 1, 4~~

60 | 13 → 08, 4, 1

mcd(5,13)

~~$13 = 5 \times 2 + 3$ ✓~~

~~$5 = 3 \times 1 + 2$ ✓~~

~~$3 = 2 \times 1 + 1$ ✓~~

~~$2 = 1 \times 2 + 0$~~

Bezout

~~$1 = 2(-1) + 3$~~

~~$1 = [5 + 3(-1)](-1) + 3$~~

~~$1 = 5(-1) + 3(2)$~~

~~$1 = 5(-1) + [13 + 5(-2)](2)$~~

~~$1 = 5(-1) + 13(2) + 5(-4)$~~

~~$1 = 5(-5) + 13(2)$~~

~~$[1] = [5][-5] + [13][2]$~~, $[13] \to (0)$

~~$[5]^{-1} = [-5]$~~

-60 | 13 → 5

2012 - Julio

5) a) $\left.\begin{array}{l} x+[2]y=[2] \\ [5]x+[5]y=[4] \end{array}\right\}$ Resolver para $\mathbb{Z}_8$ y expresar sol con representantes de clase 0 y 7.

Buscamos el 0

$\left.\begin{array}{l} [3]x+[6]y=[6] \\ [5]x+[5]y=[4] \end{array}\right\}$ 1

$[8]x+[11]y=[10]$

$[8] \to 0$

$\Downarrow$ En $\mathbb{Z}_8$

$[3]y=[2]$

$\boxed{y=[3]^{-1}[2]=[3]\cdot[2]=[6]}$ 4

2 $[3]^{-1}$: $m.c.d(3,8)=1$

Algoritmo Euclides

$8=3\times2+2$

$3=2\times1+1$

$2=1\times2+0$

Identidad Bézout 3

$3=2\times1+1$

$1=2(-1)+3$

$1=[8+3(-2)](-1)+3=8(-1)+3(2)+3$

$1=8(-1)+3(3)$

$8 \to 0$

$1=3(3)$

$[3]^{-1}=3$

5 $x+[2]y=[2]$

$x+[2]\cdot[6]=[2]$

$x+[12]=[2]$

$x=[2]-[12]$

$x=[2]-[4]$

$\boxed{x=[-2]=[6]}$

2013 – Julio

b)

$$M_{4\times 7} \text{ y } \boxed{\begin{array}{ll} F1: & (0\ 1\ -1\ 0\ 0\ 0\ 1) \\ F3: & (-1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0) \\ F4: & (0\ 0\ 0\ -1\ 1\ 2\ 0) \end{array}}$$

Lo que te dan

- El grafo G puede tener bucles porque si $M=[a_{ij}]$ / $a_{ij}=2$, entonces hay bucle en el vértice i, y la cuarta fila muestra su existencia en la posición 6. Por lo que nos dice el enunciado el grafo solo tiene un bucle, ya que todas las demás columnas suman + de 0 y entonces no se le puede añadir ningún bucle más a la fila restante
- La F2 sería: (1 -1 0 0 -1 0 -1) ya que la suma de las columnas en la matriz de incidencia de un GNO debe ser 0 (menos la del bucle que debe ser 2)
- Sumaría (0 0 0 0 0 0 0), ya que se quedaría sin bucles.

2013 – Junio

1 a) $G(V,A)$ $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$

M. Ady.

$$\hat{A} = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{pmatrix} & & & & \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & & & \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

G. NoD

- $2+1+1=4 \Rightarrow d_G(v_2)=4$
- $\Gamma(v_4)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$
- No, es multigrafo ya que al ser un GNO, para que sea simple no debe haber bucles ni aristas que unan el mismo par de vértices
- Basándonos en que parte del vértice 2, tenemos tres posibles caminos a tomar:
  - El 1º no ~~puede ser~~ será de longitud 2 porque cuando llega al vértice 1, ya tiene longitud 2.
  - El 2º será pasando por el vértice 3 (+1 de longitud) y del vértice 3 al vértice 4 (+1 de longitud).
  - El 3º será yendo directamente al vértice 4, ~~ya que~~ pero ese camino ~~tiene~~ no tiene longitud 2, sino long. 1.

2015 – Julio

① a)

-
$$A=\begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ v_3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ v_5 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

-
$$M=[m_{ij}]/m_{ij}=\begin{cases} 0 \text{ si } v_i \text{ no incidente } a_j \\ 1 \text{ si } v_i \text{ vértice inicial } a_j \\ -1 \text{ si } v_i \text{ vértice final } a_j \\ 2 \text{ si } a_j \text{ bucle en } v_i \end{cases}$$

$$M=\begin{array}{c|ccccccccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} \\ \hline v_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ v_2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ v_5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

-

	Longitud	Cadena simple (a)	Camino (d)	Cadena cerrada (b)	Ciclo (c)
C_1	4	Sí	No	No	No
C_2	3	Sí	Sí	No	No
C_3	3	Sí	No	Sí	No

~~Si no a || no b = bdc~~

if(!a||!b||!d){
!c
}

$C_1: v_1\ e_6\ v_3\ e_{10}\ v_5\ e_8\ v_1\ e_9\ v_3$

$C_2: v_3\ e_{10}\ v_5\ e_3\ v_4\ e_4\ v_2$

$C_3: v_5\ e_8\ v_1\ e_9\ v_3\ e_{10}\ v_5$

② a) $R \leftarrow R_0$

Para $k=1$ hasta n

  Para $i=1$ hasta n

    Para $j=1$ hasta n

      $R(i,j) \leftarrow R(i,j) \vee (R(i,k) \wedge R(k,j))^{1}$

$$r_{ij}^{(k)}=1 \iff \begin{cases} r_{ij}^{(k-1)}=1 \\ \text{o} \\ r_{ij}^{(k-1)}=r_{kj}^{(k-1)}=1 \end{cases}$$

$k=1,2,\dots,n.$

$$R=[r_{ij}]/r_{ij}=\begin{cases} 1 \text{ si } x_i \text{ alcanza } x_j \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$