

DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN E INTELIGENCIA
ARTIFICIAL
(sesión prácticas)

Problemas Lección 1 MATEMÁTICA DISCRETA Aritmética entera y modular

Ejercicio 1 Resuelve razonadamente las siguientes cuestiones:

- Halla la representación en base 2 del número expresado en base decimal 137.
- Halla la representación usual (en base 10) de $(4165)_7$.
- Obtén mediante el algoritmo de Euclides $d = \text{med}(56, 34)$, y con la ayuda de los pasos de dicho algoritmo encuentra dos enteros s y t tales que $d = 56s + 34t$.

Ejercicio 2 Resuelve la siguiente ecuación diofántica:

$$28x - 36y = 44, \quad x, y \in \mathbb{Z}.$$

Problemas Lección 2 MATEMÁTICA DISCRETA Aritmética entera y modular

Ejercicio 3 Calcula el inverso de [33] en \mathbb{Z}_{50} . Expresa el resultado con el representante de clase entre 0 y 49.

Ejercicio 4 Resuelve en \mathbb{Z}_7 el siguiente sistema. Expresa la solución con representantes de clase entre 0 y 6.

$$\begin{aligned} x &+ [5]y = [2] \\ [2]x &- y = [3] \end{aligned} \quad \left. \right\}$$

Ejercicio 5 Resuelve la siguiente ecuación cuadrática en \mathbb{Z}_{11} .

$$x^2 + [3]x + [4] = 0, \quad x \in \mathbb{Z}_{11}.$$

Expresa el resultado mediante representantes de clase entre 0 y 10.

Ejercicio 6 Usa el teorema de Fermat para calcular el resto de dividir $3^{25} \cdot 7^{68}$ entre 23.

Nota: No olvidéis detallar y justificar correctamente cada pregunta. Una respuesta no justificada se considerará incorrecta. Horas presenciales: 2 horas

ARITMÉTICA ENTERA Y MODULAR

Problemas lección 1

① a) $137 \div 2$

$$\begin{array}{r}
 137 \\
 \underline{\times} \quad 2 \\
 \hline
 68 \\
 \underline{\times} \quad 2 \\
 \hline
 34 \\
 \underline{\times} \quad 2 \\
 \hline
 27 \\
 \underline{\times} \quad 2 \\
 \hline
 08 \\
 \underline{\times} \quad 2 \\
 \hline
 4 \\
 \underline{\times} \quad 2 \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

$$137_{10} = 10001001_2$$

b) $4165_7 = (4 \cdot 7^3 + 1 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^1 + 5 \cdot 7^0)_{10} = 1468_{10}$

c)

$$\text{mcd}(56, 34)$$

$$a = q_1 b + r_1$$

$$d = 56_1 + 34_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 56 = 34 \times 1 + 22 \\ 34 = 22 \times 1 + 12 \end{array} \right. \checkmark$$

$$22 = 10 \times 1 + 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 34 = 22 \times 1 + 12 \\ 22 = 10 \times 1 + 12 \end{array} \right. \checkmark$$

$$12 = a + q_1(-b_1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 22 = 10 \times 1 + 12 \\ 12 = 10 \times 1 + 2 \end{array} \right. \checkmark$$

$$2 = 12 + 10(-1) \quad (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$10 = 2 \times 5 + 0$$

$$2 = 12 + [22 + 12(-1)](-1) = 12 + 22(-1) + 12(-1) = 12(2) + 22(-1)$$

$$2 = [34 + 22(-1)](-2) + 22(-1) = 34(-2) + 22(\frac{1}{2})$$

$$2 = 34(-2) + [56 + 34(-1)](-3) = 34(-2) + 56(-3) + 34(3) = 34(4) + 56(-3)$$

Ecuación diofántica $\rightarrow 2 = 56(-3) + 34(5)$

$$② \text{ da } A = 28x - 36y = 44, x, y \in \mathbb{Z}$$

$$① \text{ mcd}(28, 36)$$

$$36 = 28 \times 1 + 8 \quad \checkmark$$

$$28 = 8 \times 3 + 4 \quad \checkmark$$

$$8 = 4 \times 2 + 0$$

$$d = qb + r$$

$$28 = 8 \times 3 + 4$$

$$r = a + q(-b)$$

$$4 = 28 + 8(-3)$$

$$4 = 28 + [36 + 28(-1)](-3) = 28 + 36(-3) + 28(3) = 28(4) + 36(-3)$$

D

$$\begin{array}{r} 8 \\ 28(4) - 36(3) \\ \hline 4 \end{array}$$

\leftarrow Identidad de Bézout

① D es divisor de C?

$$C_0 = 44/4 \Rightarrow \text{SI} \Rightarrow \text{luego tiene solución}$$

③ Sean α, β enteros

$$A = \alpha D \Rightarrow 28 = \alpha 4 \Rightarrow \alpha = 28/4 = 7$$

$$B = \beta D \Rightarrow 36 = \beta 4 \Rightarrow \beta = 36/4 = 9$$

② Solución particular

$$\begin{aligned} d &= 4 & m &= 44/d = 11 & (x_0, y_0) &= (44, 33) \\ dn &= 44 & n &= 11 & 11 & 11 \\ & & n &= m & & \end{aligned}$$

④ Solución general

$$x = x_0 + k\alpha = 44 + 9k$$

$$y = y_0 - k\beta = 33 - 7k$$

⑤ Comprobación

✓ ✓ ✓ ✓ ✓

$$\begin{cases} x = 44 + 9 = 53 \\ y = 33 + 7 = 40 \end{cases}$$

$$28(53) - 36(40) = 44$$

Problemas lección 2

③ Hallan $[a]^{-1}$ en \mathbb{Z}_{50} para ~~a=33~~ $a=33$

$$\boxed{\cdot a=33} \quad n=50 \quad \text{mcd}(a,n)=\text{mcd}(33,50)=1 \Rightarrow [33]^{-1} \text{ en } \mathbb{Z}_{50}$$

$$50 = 33 \times 1 + 17 \checkmark$$

$$33 = 17 \times 1 + 16 \checkmark$$

$$17 = 16 \times 1 + 1 \checkmark$$

$$16 = 1 \times 16 + 0$$

Besout

$$1 = 17 + 16(-1)$$

$$1 = 17 + [33 + 17(-1)](-1) = 17 + 33(-1) + 17(-1) = 33(-1) + 17(2)$$

$$1 = 33(-1) + [50 + 33(-1)](2) = 33(-1) + 50(2) + 33(-2) = 33(-3) + 50(2)$$

$$1 = 33(-3) + 50(-2)$$

Síleemos en \mathbb{Z}_{50} 0 en \mathbb{Z}_{50}

$$[1] = [33][-3] + [50][-2]$$

$$[1] = [33][-3]$$

$$[33]^{-1} = [-3] = [50 - 3] = [47]$$

Ejercicio 4

$$\begin{array}{l} x + [5]y = [2] \\ [2]x - y = [3] \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Resolver en } \mathbb{Z}_7 \text{ y expresar con representantes de clase entre} \\ 0 \text{ y } 6. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} [5]x + [25]y = [10] \\ [2]x - y = [3] \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \hline [7]x + [24]y = [13] \end{array}$$

$$[7]x + [13]y = [6]$$

$$y = [6][3]^{-1} = [6] \cdot [-2] = [-12] = [7-12] = [-5] = [7-5] = [2]$$

$$[\boxed{[3]^{-1}}] \quad \text{mcd}(3, 7) \Rightarrow \text{Algoritmo de Euclides}$$

$$7 = 3 \times 2 + 1$$

$$3 = 1 \times 3 + 0$$

Identidad de Bezout

$$\begin{array}{l} d = ap + bq \\ a = 7q + r \\ b = 3r + s \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Esto es para cuando} \\ \text{quieres sacar la Ex. liofántica} \end{array}$$

$$\boxed{a = qb + r}$$

$$7 = 3 \times 2 + 1$$

$$\boxed{r = a + q(-b)}$$

$$1 = 7 + 3(-2) \Rightarrow [1] = [\cancel{7}]^0 + [3] \cdot [-2]$$

$$[1] = [3] \cdot [-2]$$

$$[3]^{-1} = [-2]$$

Despejar x

$$x + [5]y = [2]$$

$$x + [5] \cdot [2] = [2]$$

$$x + [10] = [2]$$

$$x = [2] - [10] = [-8] = [7-8] = [-1] = [6]$$