5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

Llamaremos u_{ij} al peso del camino más corto de i a j. Utilizaremos las variables:

$u_{ij}^{(m)} \equiv$ peso del camino más corto del vértice i al j con la restricción de que no contenga a los vértices $m, m+1, \ldots, n$ (exceptuando a los extremos i y j en su caso).

Estas variables pueden calcularse recursivamente utilizando las ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_{ij}^{(1)} &= w_{ij} \quad \forall i, j \\ u_{ij}^{(m+1)} &= \text{mín}\left\{u_{ij}^{(m)}, u_{im}^{(m)} + u_{mj}^{(m)}\right\} \quad \forall i, j, \\ & m = 1, 2, \ldots n \end{aligned}$$

Y es posible ver que:

$$u_{ij} = u_{ij}^{(n+1)}$$

con lo que tendremos los pesos de los caminos más cortos entre todos los pares de vértices.

Para facilitar la construcción de los caminos más cortos una vez calculados sus pesos, se puede utilizar otra matriz

$$\Theta^{(m)} = [\theta_{ij}^{(m)}]$$

donde $\theta_{ij}^{(m)}$ representa el vértice anterior al j en el camino más corto de i a j en la iteración m.

Inicialmente $\theta_{ij}^{(1)} = i$ si $u_{ij}^{(1)} < +\infty$, y

$$\theta_{ij}^{(m+1)} = \begin{cases} \theta_{ij}^{(m)} & \text{si } u_{ij}^{(m+1)} = u_{ij}^{(m)} \\ \theta_{mj}^{(m)} & \text{si } u_{ij}^{(m+1)} < u_{ij}^{(m)} \end{cases}$$

EJEMPLO

Matrices: $[u_{ij}^{(m)}]$ $[\theta_{ij}^{(m)}]$

(m=1)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	∞	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	∞	9	∞	3
4	1	8	∞	∞	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

	1	2	3	4	5	6
1		1		1		
2			2	2		
3		3		3		3
4	4	4			4	
5						
6			6		6	

(m=2)

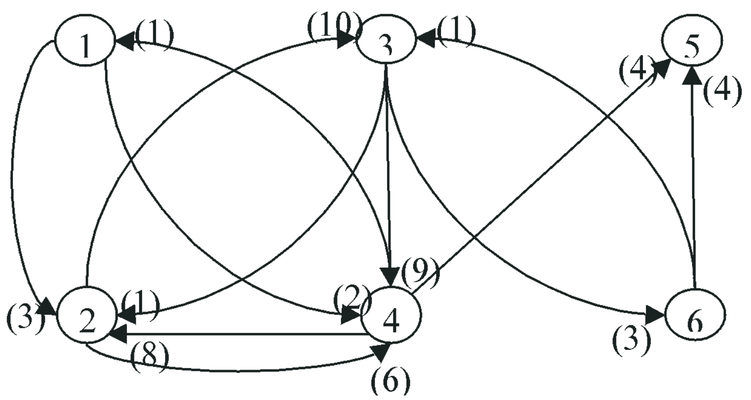
	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	∞	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	∞	9	∞	3
4	1	[4]	∞	[3]	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

	1	2	3	4	5	6
1		1		1		
2			2	2		
3		3		3		3
4	4	[1]		[1]	4	
5						
6			6		6	

(m=3)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	[13]	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	[11]	[7]	∞	3
4	1	4	[14]	3	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

	1	2	3	4	5	6
1		1	[2]	1		
2			2	2		
3		3	[2]	[2]		3
4	4	1	[2]	1	4	
5						
6			6		6	



(m=4)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	13	2	∞	[16]
2	∞	[11]	10	6	∞	[13]
3	∞	1	11	7	∞	3
4	1	4	14	3	4	[17]
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	[2]	1	[8]	4	[4]

	1	2	3	4	5	6
1		1	2	1		[3]
2		[3]	2	2		[3]
3		3	2	2		3
4	4	1	2	1	4	[3]
5						
6		[3]	6	[2]	6	[3]

(m=5)

	1	2	3	4	5	6
1	[3]	3	13	2	[6]	16
2	[7]	[10]	10	6	[10]	13
3	[8]	1	11	7	[11]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	[9]	2	1	8	4	4

	1	2	3	4	5	6
1	[4]	1	2	1	[4]	3
2	[4]	[1]	2	2	[4]	3
3	[4]	3	2	2	[4]	3
4	4	1	2	1	4	3
5						
6	[4]	3	6	2	6	3

(m=6)

	1	2	3	4	5	6
1	3	3	13	2	6	16
2	7	10	10	6	10	13
3	8	1	11	7	11	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	9	2	1	8	4	4

	1	2	3	4	5	6
1	4	1	2	1	4	3
2	4	1	2	2	4	3
3	4	3	2	2	4	3
4	4	1	2	1	4	3
5						
6	4	3	6	2	6	3

(m=7)

	1	2	3	4	5	6
1	3	3	13	2	6	16
2	7	10	10	6	10	13
3	8	1	[4]	7	[7]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	9	2	1	8	4	4

	1	2	3	4	5	6
1	4	1	2	1	4	3
2	4	1	2	2	4	3
3	4	3	[6]	2	[6]	3
4	4	1	2	1	4	3
5						
6	4	3	6	2	6	3