



UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA  
FACULTAD DE INGENIERÍA, CIENCIAS Y ADMINISTRACIÓN  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA



# Mejora de Implementación para cálculos en la generación de dos fotones por encargo con Ruido Térmico

Trabajo para optar al Título de Ingeniero Matemático

Alfredo Jaramillo  
Prof. Guía: Dr. Robert Guzmán  
23 de Marzo 2012

## *Introducción, contexto Físico-Matemático*

# Emisión de fotones desde un átomo atrapado

# Emisión de fotones desde un átomo atrapado

## Contexto de Aplicación

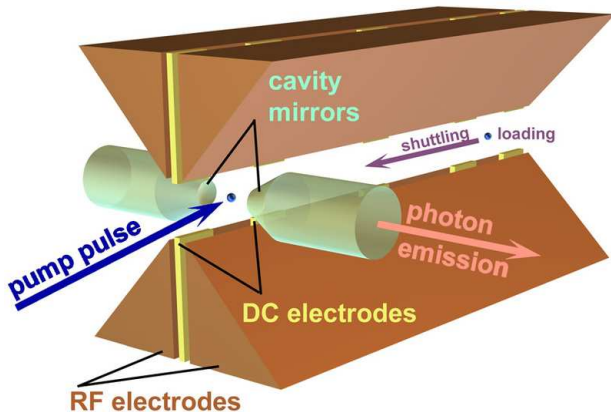
Ramas de punta de la Física, como la Teoría de la Información Cuántica tienen aplicaciones, como Criptografía y Teleportación Cuántica, en las que se utiliza fuentes determinísticas de fotones.

# Disposición Experimental

## Ión de Calcio ( $Ca^+$ ) atrapado en una cavidad.

# Disposición Experimental

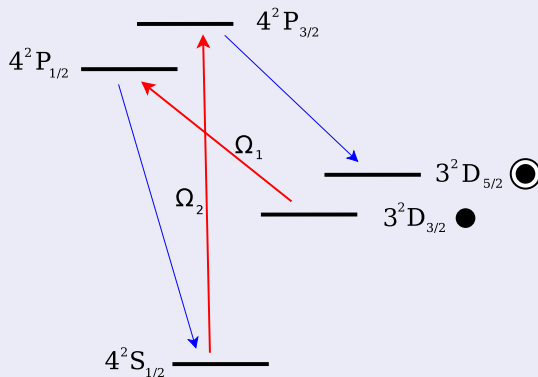
## Ión de Calcio ( $Ca^{+}$ ) atrapado en una cavidad.



# Esquematización Transiciones

# Esquemmatización Transiciones

## Transiciones del $Ca^+$ vía bombeo





# Identificación de niveles energéticos en el Hilbert asociado

# Identificación de niveles energéticos en el Hilbert asociado

En  $\mathcal{H}_{at}$

$$|4\rangle \rightarrow 4^2P_{3/2}$$

$$|3\rangle \rightarrow 4^2P_{1/2}$$

$$|2\rangle \rightarrow 3^2D_{5/2}$$

$$|1\rangle \rightarrow 3^2D_{3/2}$$

$$|0\rangle \rightarrow 4^2S_{1/2}.$$

# Identificación de niveles energéticos en el Hilbert asociado

En  $\mathcal{H}_{at}$

$$|4\rangle \rightarrow 4^2P_{3/2}$$

$$|3\rangle \rightarrow 4^2P_{1/2}$$

$$|2\rangle \rightarrow 3^2D_{5/2}$$

$$|1\rangle \rightarrow 3^2D_{3/2}$$

$$|0\rangle \rightarrow 4^2S_{1/2}.$$

Operador de transiciones

$$|i\rangle\langle j| : \quad |i\rangle\langle j|k\rangle = \delta_{jk}|i\rangle$$

# Identificación número de fotones de un modo en el Hilbert asociado

# Identificación número de fotones de un modo en el Hilbert asociado

En  $\mathcal{H}_a$  y  $\mathcal{H}_b$ : estados de Fock

$|n\rangle \rightarrow n$  fotones en el modo a o b.

# Identificación número de fotones de un modo en el Hilbert asociado

En  $\mathcal{H}_a$  y  $\mathcal{H}_b$ : estados de Fock

$|n\rangle \rightarrow n$  fotones en el modo a o b.

Operador de creación, aniquilación

$$a^\dagger : \quad a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

# Operadores en $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{at} \otimes \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$

# Operadores en $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{at} \otimes \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$

## Transiciones Atómicas

$$\hat{a}_{ij} \equiv |i\rangle\langle j| \otimes I_a \otimes I_b$$



# Operadores en $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{at} \otimes \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$

## Transiciones Atómicas

$$\hat{a}_{ij} \equiv |i\rangle\langle j| \otimes I_a \otimes I_b$$

## Creación, aniquilación

$$\hat{a} \equiv I_{at} \otimes \hat{a} \otimes I_b$$

# Operadores en $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{at} \otimes \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$

## Transiciones Atómicas

$$\hat{a}_{ij} \equiv |i\rangle\langle j| \otimes I_a \otimes I_b$$

## Creación, aniquilación

$$\hat{a} \equiv I_{at} \otimes \hat{a} \otimes I_b$$

## Ejemplo de interacción

$$|1\rangle\langle 0| \hat{a} + \hat{a}^\dagger |0\rangle\langle 1|$$

# Evolución del sistema

# Evolución del sistema

## Ecuación Maestra

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \frac{1}{i\hbar} [H(t), \rho(t)] + \mathcal{L}(\rho)$$

# Evolución del sistema

## Ecuación Maestra

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \frac{1}{i\hbar} [H(t), \rho(t)] + \mathcal{L}(\rho)$$

## Operador densidad

$$\rho \equiv |\psi\rangle\langle\psi|$$

# Evolución del sistema

## Ecuación Maestra

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \frac{1}{i\hbar} [H(t), \rho(t)] + \mathcal{L}(\rho)$$

## Operador densidad

$$\rho \equiv |\psi\rangle\langle\psi|$$

## Condición inicial

$$|\psi(0)\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$$

# Evolución del sistema

## Hamiltoniano

$$H = H_0 + H_I$$

$$H_0 = \omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \sum_{i=0}^4 \omega_i |i\rangle \langle i|$$

$$H_I = \Omega_1(t) |3\rangle \langle 1| e^{-i v_a t} + \Omega_2(t) |4\rangle \langle 0| e^{-i v_b t} \\ + g_a |3\rangle \langle 0| \hat{a} + g_b |4\rangle \langle 2| \hat{b} + \text{h.c}$$

# Evolución del sistema

## Lindbladiano

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\rho) = & \frac{\Gamma_{04}}{2}(2 a_{04}\rho a_{04}^\dagger - a_{04}^\dagger a_{04}\rho - \rho a_{04}^\dagger a_{04}) \\ & + \frac{\Gamma_{03}}{2}(2 a_{04}\rho a_{03}^\dagger - a_{03}^\dagger a_{03}\rho - \rho a_{03}^\dagger a_{03}) \\ & + \frac{\Gamma_{13}}{2}(2 a_{13}\rho a_{13}^\dagger - a_{13}^\dagger a_{13}\rho - \rho a_{13}^\dagger a_{13}) \\ & + \frac{\Gamma_{24}}{2}(2 a_{24}\rho a_{24}^\dagger - a_{24}^\dagger a_{24}\rho - \rho a_{24}^\dagger a_{24}) \\ & + \frac{\Gamma_{14}}{2}(2 a_{14}\rho a_{14}^\dagger - a_{14}^\dagger a_{14}\rho - \rho a_{14}^\dagger a_{14}) \\ & + \kappa_a(2 \hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a}) \\ & + \kappa_b(2 \hat{b}\rho\hat{b}^\dagger - \hat{b}^\dagger\hat{b}\rho - \rho\hat{b}^\dagger\hat{b}).\end{aligned}$$



# Evolución del sistema

## Lindbladiano

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\rho) = & \frac{\Gamma_{04}}{2}(2 a_{04}\rho a_{04}^\dagger - a_{04}^\dagger a_{04}\rho - \rho a_{04}^\dagger a_{04}) \\ & + \frac{\Gamma_{03}}{2}(2 a_{04}\rho a_{03}^\dagger - a_{03}^\dagger a_{03}\rho - \rho a_{03}^\dagger a_{03}) \\ & + \frac{\Gamma_{13}}{2}(2 a_{13}\rho a_{13}^\dagger - a_{13}^\dagger a_{13}\rho - \rho a_{13}^\dagger a_{13}) \\ & + \frac{\Gamma_{24}}{2}(2 a_{24}\rho a_{24}^\dagger - a_{24}^\dagger a_{24}\rho - \rho a_{24}^\dagger a_{24}) \\ & + \frac{\Gamma_{14}}{2}(2 a_{14}\rho a_{14}^\dagger - a_{14}^\dagger a_{14}\rho - \rho a_{14}^\dagger a_{14}) \\ & + \kappa_a(2 \hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a}) \\ & + \kappa_b(2 \hat{b}\rho\hat{b}^\dagger - \hat{b}^\dagger\hat{b}\rho - \rho\hat{b}^\dagger\hat{b}).\end{aligned}$$

## Ruido Térmico

$$2\kappa\bar{n}(\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\rho\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a}).$$

# Integración Ecuación Maestra

## Método de Heun

**Entrada:**  $f, Y_0, h, n, \{t_i\}_{i=0}^{n-1}, \epsilon$

**Salida:**  $\{Y_i\}_{i=0}^{n-1}$

```
1  Inicio
2      Para  $i = 0$  hasta  $i = n - 1$  Hacer
3           $Y_{i+1}^{(0)} = Y_i + hf(t_i, Y_i);$ 
4           $Y_{i+1}^{(1)} = Y_i + \frac{h}{2} \left\{ f(t_i, Y_i) + f\left(t_{i+1}, Y_{i+1}^{(0)}\right) \right\};$ 
5           $error = errRel\left(Y_{i+1}^{(1)}, Y_{i+1}^{(0)}\right);$ 
6           $k = 2;$ 
7          Mientras  $error > \epsilon$  Hacer
8               $Y_{i+1}^{(k)} = Y_i + \frac{h}{2} \left\{ f\left(t_i, Y_i + f(t_{i+1}, Y_{i+1}^{(k-1)})\right) \right\};$ 
9               $error = errRel\left(Y_{i+1}^{(k)}, Y_{i+1}^{(k-1)}\right);$ 
10              $k = k + 1;$ 
11          Fin
12       $Y_{i+1} = Y_{i+1}^{(k)};$ 
13  Fin
14 Fin
```

*¿Necesidad de mejora?*

## Tiempos Implementación anterior

$N_a = N_b$	2	3	4	5	6	7	8	9
Tiempo	24m	2h18m	8h	1d	3d9h	14d19h	21d	38d
$R_f$ %	90.6	92.4	91.1	91.3	94.0	93.8	94.2	88.9
$R_e$ %	3.9	3.7	3.7	3.8	2.2	2.6	2.1	3.6
$R_c$ %	4.7	4.6	4.6	4.8	3.4	3.6	3.2	7.3

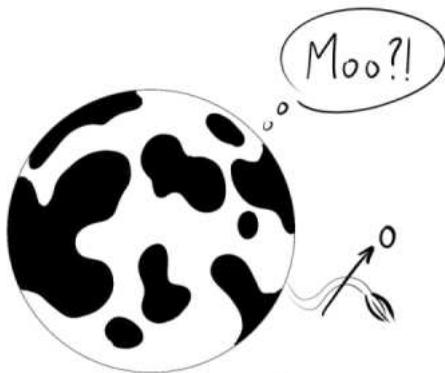
**Cuadro:** Tiempos de ejecución y porcentajes por rutina del trabajo anterior.

# Objetivo General

# Objetivo General

- Mejorar la implementación numérica del modelo de generación de fotones incluyendo ruido térmico.

*¿Cómo obtendremos la mejora?*



Consider a spherical cow  
of radius  $R$  ...  $\square$



# Objetivos específicos

# Objetivos específicos

- *Traducir* de MATLAB a FORTRAN (70 %).

# Objetivos específicos

- *Traducir* de MATLAB a FORTRAN (70 %).
- Obtener códigos mejorados y dinámicos.

# Objetivos específicos

- *Traducir* de MATLAB a FORTRAN (70 %).
- Obtener códigos mejorados y dinámicos.
- **Mejorar algoritmos específicos, Hamiltoniano, Lindbladiano (98 %).**

# Objetivos específicos

- *Traducir* de MATLAB a FORTRAN (70 %).
- Obtener códigos mejorados y dinámicos.
- **Mejorar algoritmos específicos, Hamiltoniano, Lindbladiano (98 %).**
- Determinar el comportamiento de la implementación numérica para mayores dimensiones y ruido térmico.

# Objetivos específicos

- *Traducir* de MATLAB a FORTRAN (70 %).
- Obtener códigos mejorados y dinámicos.
- **Mejorar algoritmos específicos, Hamiltoniano, Lindbladiano (98 %).**
- Determinar el comportamiento de la implementación numérica para mayores dimensiones y ruido térmico.
- Estudiar posibilidades de paralelización.

## *Estudio de algoritmos, operadores*

# Algoritmos Generales

## Algoritmo Principal

**Entrada:** Parámetros

**Salida:** Datos de Cálculos

**1 Inicio**

**2** | Carga de parámetros y definición de variables;

**3** | Inicialización de  $\rho(0)$ ;

**4** | Integración y registro;

**5 Fin**



# Algoritmos Generales

## Integración y registro: $\text{Calculos}(\rho)$

**Entrada:**  $\rho$

**Salida:**  $\{\eta_i\}_{i=1}^{N_{at}+N_{mod}}$

1 **Inicio**

2     **Para**  $i = 0$  *hasta*  $N_{at} - 1$  **Hacer**

3          $\eta_{i+1} = \text{tr}(|i\rangle\langle i|\rho);$

4     **Fin**

5     **Para**  $i = 1$  *hasta*  $N_{mod}$  **Hacer**

6          $\eta_{i+N_{at}} = \text{tr}(a_i^\dagger a_i \rho);$

7     **Fin**

8 **Fin**

# Algoritmos Generales

## Integración y registro: *errRel*

**Entrada:**  $\rho, \rho'$

**Salida:** *error*

1 **Inicio**

2      $error = \frac{\|\rho - \rho'\|}{\|\rho\|};$

3 **Fin**

# Algoritmos Generales

## Integración y registro: *errRel*

**Entrada:**  $\rho, \rho'$

**Salida:** *error*

1 **Inicio**

2      $error = \frac{\|\rho - \rho'\|}{\|\rho\|};$

3 **Fin**

## Integración y registro: *f*

**Entrada:**  $t, \rho$

**Salida:**  $z = f(t, \rho)$

1 **Inicio**

2      $h = H(t);$

3      $c = -i [h, \rho];$

4      $l = lindbladiano(\rho);$

5      $z = c + l;$

6 **Fin**

# Algoritmos Generales

## Principal: Integración y registro

**Entrada:**  $f, \rho_0, h, n, \{t_i\}_{i=0}^{n-1}, \epsilon$

**Salida:**  $\{\text{Calculos}(\rho_i)\}_{i=1}^{n-1}$

```
1  Inicio
2  |   Para  $i = 0$  hasta  $i = n - 1$  Hacer
3  |   |    $\text{Calculos}(\rho_i)$  y registro;
4  |   |    $\rho_{i+1}^{(0)} = \rho_i + hf(t_i, \rho_i);$ 
5  |   |    $\rho_{i+1}^{(1)} = \rho_i + \frac{h}{2} \left\{ f(t_i, \rho_i) + f\left(t_{i+1}, \rho_{i+1}^{(0)}\right) \right\};$ 
6  |   |    $\text{error} = \text{errRel}\left(\rho_{i+1}^{(1)}, \rho_{i+1}^{(0)}\right);$ 
7  |   |    $k = 2;$ 
8  |   |   Mientras  $\text{error} > \epsilon$  Hacer
9  |   |   |    $\rho_{i+1}^{(k)} = \rho_i + \frac{h}{2} \left\{ f\left(t_i, \rho_i + f(t_{i+1}, \rho_{i+1}^{(k-1)})\right) \right\};$ 
10 |   |   |    $\text{error} = \text{errRel}\left(\rho_{i+1}^{(k)}, \rho_{i+1}^{(k-1)}\right);$ 
11 |   |   |    $k = k + 1;$ 
12 |   |   Fin
13 |   |    $\rho_{i+1} = \rho_{i+1}^{(k)};$ 
14 |   Fin
15 Fin
```

# Estructura de los operadores

# Estructura de los operadores

## Operador de transiciones $\hat{a}_{ij}$

$$\hat{a}_{ij} \equiv |i\rangle\langle j| \otimes I_a \otimes I_b = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{11}^m & \mathbb{O}_{12}^m & \cdots & \mathbb{O}_{1n}^m \\ \mathbb{O}_{21}^m & \mathbb{O}_{22}^m & \cdots & \mathbb{O}_{2n}^m \\ \vdots & \vdots & I_{j+1}^m & \vdots \\ \mathbb{O}_{n1}^m & \mathbb{O}_{n2}^m & \cdots & \mathbb{O}_{nn}^m \end{pmatrix}$$

con  $m = N_a \cdot N_b$  y  $n = N_{at}$

# Estructura de los operadores

## Operador de transiciones $\hat{a}_{ij}$

$$\hat{a}_{ij} \equiv |i\rangle\langle j| \otimes I_a \otimes I_b = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{11}^m & \mathbb{O}_{12}^m & \cdots & \mathbb{O}_{1n}^m \\ \mathbb{O}_{21}^m & \mathbb{O}_{22}^m & \cdots & \mathbb{O}_{2n}^m \\ \vdots & \vdots & I_{j+1, i+1}^m & \vdots \\ \mathbb{O}_{n1}^m & \mathbb{O}_{n2}^m & \cdots & \mathbb{O}_{nn}^m \end{pmatrix}$$

con  $m = N_a \cdot N_b$  y  $n = N_{at}$

## Operador de transiciones generalizado

$$\hat{a}_{ij} := |i\rangle\langle j| \otimes I^{n_1} \otimes I^{n_2} \otimes \dots \otimes I^{n_d}.$$

# Estructura de los operadores



# Estructura de los operadores

## Operador de aniquilación del modo a

$$(I^n \otimes \hat{a} \otimes I^l)_{i,j} = \begin{cases} \sqrt{\lceil \frac{i}{l} \rceil} \text{ mód } m & , j = i + l, i = 1 \dots (n \cdot m - 1) \cdot l \\ 0 & , \text{c.o.c.} \end{cases}$$

# Estructura de los operadores

## Operador de aniquilación del modo $a$

$$(I^n \otimes \hat{a} \otimes I^l)_{i,j} = \begin{cases} \sqrt{\lceil \frac{i}{l} \rceil \bmod m} & , j = i + l, i = 1 \dots (n \cdot m - 1) \cdot l \\ 0 & , \text{c.o.c.} \end{cases}$$

## Operador de aniquilación *generalizado*

$$\hat{a}_g^{k,m} := I^{n_1} \otimes I^{n_2} \otimes \dots \otimes I^{n_{g-1}} \otimes \hat{a}^k \otimes I^{n_{g+1}} \otimes \dots \otimes I^{n_m}$$

## *Cómputo Eficiente Operadores*

$$\mathcal{O}(\text{dim}t^3) \rightarrow \mathcal{O}(\text{dim}t^2)$$

# Variables

# Variables

$N :$	Número de espacios componentes del espacio mayor.
$n_i :$	$i = 1 \dots N$ . Dimensión del $i$ -ésimo espacio.
$\Pi_1^g$	$\equiv \prod_{i=1}^{g-1} n_i$ con $g = 2 \dots N$ .
$\Pi_2^g :$	$\equiv \prod_{i=g+1}^N n_i$ .
$T^g :$	$\equiv (n_g - 1)\Pi_2^g$ .
$\Pi_3^g :$	$\equiv T^g + \Pi_2^g$ .
$\Pi :$	$\equiv \prod_{i=2}^N n_i$ .
$ord :$	Arreglo de enteros: dimensión de cada subespacio.

$$N = 3, n_1 = 5$$

# Expresión $\hat{\rho}$

## Expresión $\hat{a}\hat{\rho}$

$$\rho = \begin{pmatrix} \vdots \\ B_1 \\ \vdots \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \\ \vdots \end{pmatrix} \rightarrow a\rho = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{B}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{B}_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$n = \Pi_1$  bloques de  $T^g$  filas y  $dimt$  columnas.

# Expresión $\hat{\rho}$



# Expresión $\hat{a}\hat{\rho}$

Si  $M = \mathcal{B}_i$  y  $S = B_i$ :

$$M_{kl} = \gamma_k S_{kl}$$

$$\gamma_k = \sqrt{\left[ \frac{k}{\Pi_2^g} \right] \bmod n_g}$$

$$k = 1 \dots T^g, l = 1 \dots dimt$$

# Expresión $\hat{\rho}$

# Expresión $\hat{a}\hat{\rho}$

## Algoritmo: arMod

**Entrada:**  $\rho, id$   
**Salida:**  $r = \hat{a}\rho$

```
1  Inicio
2  |    $k = \text{ord}[id];$ 
3  |    $pi1 = \text{producto}(\text{ord}[1 : id - 1]);$ 
4  |    $pi2 = \text{producto}(\text{ord}[id + 1 : \text{dimt}]);$ 
5  |    $T = (k - 1) * pi2;$ 
6  |    $pi3 = T + pi2;$ 
7  |    $r = \text{ceros}(\text{dimt});$ 
8  |   Para  $bi = 0$  hasta  $(pi1 - 1) \cdot pi3; bi += pi3$  Hacer
9  |   |   Para  $ei = 1$  hasta  $T$  Hacer
10 |   |   |   Para  $ej = 1$  hasta  $\text{dimt}$  Hacer
11 |   |   |   |    $\gamma = \sqrt{\left\lceil \frac{ei}{pi2} \right\rceil} \text{ mód } k;$ 
12 |   |   |   |    $r[bi + ei, ej] = \gamma \cdot \rho[pi2 + bi + ei, ej];$ 
13 |   |   |   Fin
14 |   |   Fin
15 |   Fin
16 Fin
```

# Expresión $\hat{\rho}$

# Expresión $\hat{a}\hat{\rho}$

n° operaciones Algoritmo arMod

$$\mathcal{O}\left(\dim t^2 \cdot \left(\frac{n_g - 1}{n_g}\right)\right) = \mathcal{O}(\dim t^2)$$

# Expresión $\hat{a}\hat{\rho}$

n° operaciones Algoritmo arMod

$$\mathcal{O}\left(\dim t^2 \cdot \left(\frac{n_g - 1}{n_g}\right)\right) = \mathcal{O}(\dim t^2)$$

Análogo para  $\hat{\rho}\hat{a}$  y  $\hat{\rho}\hat{a}^\dagger$ .

# Expresión $\hat{a}_{ij}\hat{\rho}$

## Expresión $\hat{a}_{ij}\hat{\rho}$

$$\rho = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_\Pi \end{pmatrix} \rightarrow a_{ij}\rho = i\text{-ésimo} \left\{ \begin{pmatrix} \cdots \\ B_j \\ \cdots \end{pmatrix} \right.$$

$N_{at}$  bloques fila, de  $\Pi$  filas y  $dimt$  columnas.



# Expresión $\hat{a}_{ij}\hat{\rho}$

# Expresión $\hat{a}_{ij}\hat{\rho}$

## Ejemplo

$$\rho = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix},$$

entonces:

$$\hat{a}_{13}\rho = \begin{pmatrix} B_3 \\ \mathbb{O}^\Pi \\ \mathbb{O}^\Pi \end{pmatrix}.$$

# Expresión $\hat{a}_{ij}\hat{\rho}$

# Expresión $\hat{a}_{ij}\hat{\rho}$

## Algoritmo: raAt

**Entrada:**  $\rho, i, j$ .

**Salida:**  $r = \hat{a}_{ij}\rho\hat{a}_{ij}^\dagger$

```
1 Inicio
2    $pi = \text{producto}(\text{ord}[2 : \text{dimt}]);$ 
3    $i1 = i \cdot pi;$ 
4    $j1 = j \cdot pi;$ 
5    $r = \text{ceros}(pi);$ 
6   Para  $ei = 1$  hasta  $\text{dimt}$  Hacer
7     Para  $ej = 1$  hasta  $pi$  Hacer
8        $r[ei, j1 + ej] = \text{rho}[ei, i1 + ej];$ 
9     Fin
10  Fin
11 Fin
```

# Expresión $\hat{a}_{ij}\hat{\rho}$

# Expresión $\hat{a}_{ij}\hat{\rho}$

n° asignaciones Algoritmo raAt

$$\frac{dimt^2}{N_{at}} = \mathcal{O}(dimt^2)$$

# Expresión $\hat{a}_{ij}\hat{\rho}$

n° asignaciones Algoritmo raAt

$$\frac{dimt^2}{N_{at}} = \mathcal{O}(dimt^2)$$

Análogo para  $\hat{\rho}\hat{a}_{ij}^\dagger$ .

# Expresión $\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger$



## Expresión $\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger$

$$\rho = \left( \begin{array}{cc|cc|cc|cc} \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & B_{11} & \cdots & B_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & B_{1n} \\ \hline \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \cdots & B_{21} & \cdots & B_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & B_{2n} \\ \hline & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hline \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \cdots & B_{n1} & \cdots & B_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & B_{nn} \end{array} \right),$$

bloques de orden  $T^g$ , con  $n = \Pi_1^g$  y distancia entre bloques  $\Pi_2^g$ .

# Expresión $\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger$

# Expresión $\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger$

$$a\rho a^\dagger = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{11} & \cdots & \mathcal{B}_{12} & \cdots & \cdots & \mathcal{B}_{1n} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots \\ \hline \mathcal{B}_{21} & \cdots & \mathcal{B}_{21} & \cdots & \cdots & \mathcal{B}_{2n} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots \\ \hline & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline \mathcal{B}_{n1} & \cdots & \mathcal{B}_{n2} & \cdots & \cdots & \mathcal{B}_{nn} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

# Expresión $\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger$

## Expresión $\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger$

Si  $M = \mathcal{B}_{ij}$  y  $S = B_{ij}$ :

$$M_{kl} = \gamma_{kl} S_{kl}$$

$$\gamma_{kl} = \sqrt{\left(\left[\frac{k}{\Pi_2^g}\right] \bmod n_g\right) \left(\left[\frac{l}{\Pi_2^g}\right] \bmod n_g\right)}$$

$$k, l = 1 \dots T^g$$

# Expresión $\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger$

## Algoritmo: aratMod

**Entrada:**  $\rho, id$   
**Salida:**  $r = \hat{a}\rho\hat{a}^\dagger$

```

1  Inicio
2  |    $k = \text{ord}[id];$ 
3  |    $pi1 = \text{producto}(\text{ord}[1 : id - 1]);$ 
4  |    $pi2 = \text{producto}(\text{ord}[id + 1 : \text{dimt}]);$ 
5  |    $T = (k - 1) \cdot pi2;$ 
6  |    $pi3 = T + pi2;$ 
7  |    $r = \text{ceros}(\text{dimt});$ 
8  |   Para  $\{bi, bj\} = 0$  hasta  $(pi1 - 1) \cdot pi3; \{bi, bj\} + = pi3$  Hacer
9  |   |   Para  $\{ei, ej\} = 1$  hasta  $T$  Hacer
10 |   |   |    $\gamma = \sqrt{\left(\left\lceil \frac{ei}{pi2} \right\rceil \bmod k\right) \left(\left\lceil \frac{ej}{pi2} \right\rceil \bmod k\right)};$ 
11 |   |   |    $r[bi + ei, bi + ej] = \gamma \cdot \rho[pi2 + bi + ej, pi2 + bj + ej];$ 
12 |   |   Fin
13 |   Fin
14 Fin

```

# Expresión $\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger$



# Expresión $\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger$

n° operaciones Algoritmo aratMod

$$\mathcal{O}\left(\dim t^2 \left(\frac{n_g - 1}{n_g}\right)^2\right) = \mathcal{O}(\dim t^2)$$

## Expresión $\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger$

n° operaciones Algoritmo aratMod

$$\mathcal{O}\left(\dim t^2 \left(\frac{n_g - 1}{n_g}\right)^2\right) = \mathcal{O}(\dim t^2)$$

Similar para  $\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a}$ ,  $\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}$ ,  $\hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}$  y  $\hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^\dagger$ .

Expresión  $\hat{a}_{ij}\hat{\rho}\hat{a}_{ij}^\dagger$

# Expresión $\hat{a}_{ij} \hat{\rho} \hat{a}_{ij}^\dagger$

$$\rho = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \hat{a}_{ij} \hat{\rho} \hat{a}_{ij}^\dagger = i\text{-ésimo} \left\{ \begin{matrix} \overbrace{\vdots}^{i\text{-ésimo}} \\ \cdots & B_{jj} & \cdots \\ \vdots \end{matrix} \right\}.$$

# Expresión $\hat{a}_{ij}\hat{\rho}\hat{a}_{ij}^\dagger$

$$\rho = \left( \begin{array}{c|c|c|c} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ \hline B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nn} \end{array} \right) \rightarrow \hat{a}_{ij}\hat{\rho}\hat{a}_{ij}^\dagger = i\text{-ésimo}\left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\quad\quad\quad}^{i\text{-ésimo}} \\ \vdots \\ \cdots \quad B_{jj} \quad \cdots \\ \vdots \end{array} \right\}.$$

$$\left( \begin{array}{ccc} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc} B_{33} & \mathbb{O}^\Pi & \mathbb{O}^\Pi \\ \mathbb{O}^\Pi & \mathbb{O}^\Pi & \mathbb{O}^\Pi \\ \mathbb{O}^\Pi & \mathbb{O}^\Pi & \mathbb{O}^\Pi \end{array} \right).$$

Expresión  $\hat{a}_{ij} \hat{\rho} \hat{a}_{ij}^\dagger$

# Expresión $\hat{a}_{ij}\hat{\rho}\hat{a}_{ij}^\dagger$

## Algoritmo: arAtAt

**Entrada:**  $\rho, i, j$ .

**Salida:**  $r = \hat{a}_{ij}\rho\hat{a}_{ij}^\dagger$

1 **Inicio**

2      $pi = \text{producto}(\text{ord}[2 : \text{dimt}]);$

3      $i1 = i \cdot pi;$

4      $j1 = j \cdot pi;$

5      $r = \text{ceros}(pi);$

6     **Para**  $\{ei, ej\} = 1 \text{ hasta } pi$  **Hacer**

7          $r[i1 + ei, i1 + ej] = \text{rho}[j1 + ei, j1 + ej];$

8     **Fin**

9 **Fin**

# Expresión $\hat{a}_{ij}\hat{\rho}\hat{a}_{ij}^\dagger$

## Algoritmo: arAtAt

**Entrada:**  $\rho, i, j$ .

**Salida:**  $r = \hat{a}_{ij}\rho\hat{a}_{ij}^\dagger$

```
1 Inicio
2    $pi = \text{producto}(\text{ord}[2 : \text{dimt}]);$ 
3    $i1 = i \cdot pi;$ 
4    $j1 = j \cdot pi;$ 
5    $r = \text{ceros}(pi);$ 
6   Para  $\{ei, ej\} = 1$  hasta  $pi$  Hacer
7      $r[i1 + ei, i1 + ej] = \text{rho}[j1 + ei, j1 + ej];$ 
8   Fin
9 Fin
```

$\frac{\text{dimt}^2}{N_{at}^2} = \mathcal{O}(\text{dimt}^2)$  asignaciones, también para  $\hat{a}_{ij}^\dagger\hat{a}_{ij}\hat{\rho}$  y  $\hat{\rho}\hat{a}_{ij}^\dagger\hat{a}_{ij}$ .



# Ejemplo de Algoritmo Específico

# Ejemplo de Algoritmo Específico

## Algoritmo: Lindbladiano

# Ejemplo de Algoritmo Específico

## Algoritmo: Lindbladiano

**Entrada:**  $\rho, l$

**Salida:**  $l = l + \text{Lindbladiano}(\rho)$

```
1  Inicio
2      // En este trabajo;
3      //  $\text{exprAt} = \text{'arat'}$ ,  $\text{'atar'}$ ,  $\text{'rata'}$ ;
4      //  $\text{exprMod} = \text{'arat'}$ ,  $\text{'atar'}$ ,  $\text{'rata'}$ ,  $\text{'atra'}$ ,  $\text{'raat'}$ ;
5      Para  $i = 1$  hasta  $n_{\text{iterAt}}$  Hacer
6          |  $l = l + \text{araAt2}(\rho, \text{intAt}(i), \text{gammaAt}(i), \text{exprAt})$ ;
7      Fin
8      Para  $i = 1$  hasta  $n_{\text{mod}}$  Hacer
9          |  $l = l + \text{araMod2}(\rho, \text{mod}(i), \text{gammaMod}(i), \text{exprMod})$ ;
10     Fin
11  Fin
```

## *Resultados*

# Evolución niveles atómicos

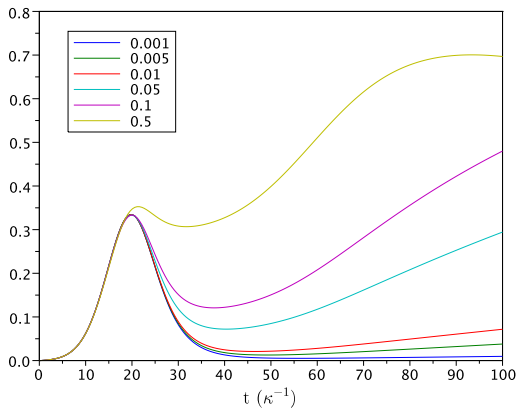


Figura: Evolución del nivel  $|0\rangle$ .

# Evolución niveles atómicos

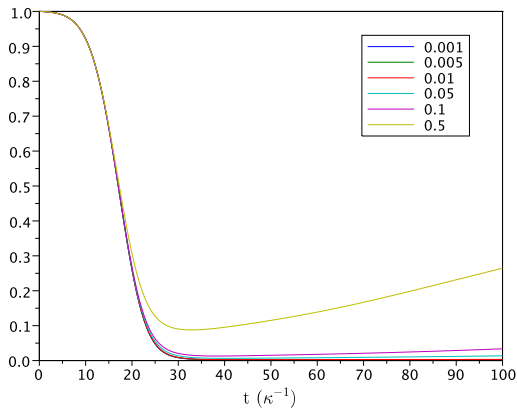


Figura: Evolución del nivel  $|1\rangle$ .

# Evolución niveles atómicos

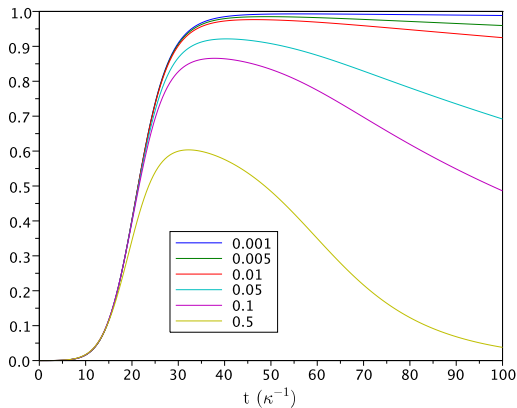


Figura: Evolución del nivel  $|2\rangle$ .

# Evolución modos electromagnéticos

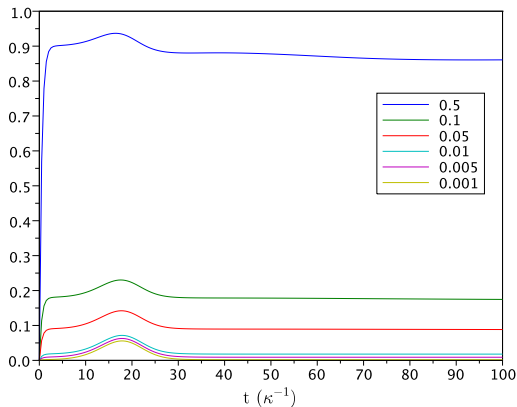


Figura: Evolución población modo  $a$ .



# Tiempos de ejecución

# Tiempos de ejecución

	$N_a = N_b$								
$\bar{n}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.001	17s	1m02s	3m01s	6m54s	15m40s	35m53s	1h31m	2h03m	4h16m
0.005	18s	1m03s	3m04s	6m56s	15m26s	36m16s	1h38m	2h51m	4h34m
0.01	19s	1m10s	3m21s	7m45s	15m31s	38m00s	1h35m	2h54m	5h02m
0.05	20s	1m11s	3m25s	7m41s	15m36s	45m40s	1h59m	3h09m	4h44m
0.1	20s	1m14s	3m32s	8m02s	16m58s	46m09s	1h41m	3h58m	5h55m
0.5	22s	1m20s	3m51s	8m55s	18m42s	50m27s	2h10m	4h06m	6h16m

**Cuadro:** Tiempos de ejecución para diferentes dimensiones de los espacios modales.

# Relación entre ruido térmico y demora de ejecución

# Relación entre ruido térmico y demora de ejecución

	$\bar{n}$						
$n$	0.0	0.001	0.005	0.01	0.05	0.1	0.5
0	3654	0	0	0	0	0	0
1	4513	0	0	0	0	0	0
2	3853	11896	10974	0	0	0	0
3	3627	3743	4630	15560	14910	10906	1492
4	4353	4361	4396	4440	5090	9094	17573
5	0	0	0	0	0	0	935

Cuadro: Número de correcciones  $n$  en la integración,  $N_a = N_b = 7$ .

# Proporciones de demora generales

# Proporciones de demora generales

$N_a = N_b$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Media
$\bar{n} = 0.005$										
$R_f$	90.5	92.7	93.5	93.8	92.3	89.3	90.0	89.6	90.3	91.3
$R_e$	2.7	2.5	2.2	2.1	2.6	3.4	2.8	2.6	2.2	2.6
$R_c$	2.5	1.7	1.7	1.5	1.7	2.4	2.7	3.6	4.1	2.4
$\bar{n} = 0.05$										
$R_f$	90.5	90.8	93.7	94.2	94.3	87.9	89.0	89.8	87.8	90.9
$R_e$	3.0	3.8	2.3	2.1	2.0	4.2	3.4	2.8	2.3	2.9
$R_c$	1.9	1.7	1.4	1.4	1.5	2.1	2.4	3.2	3.2	2.1
$\bar{n} = 0.5$										
$R_f$	90.8	92.8	93.8	94.0	92.7	89.9	89.2	88.9	88.3	91.2
$R_e$	3.0	2.9	2.4	2.2	2.7	3.4	3.4	3.3	2.8	2.9
$R_c$	2.0	1.4	1.3	1.2	1.3	2.0	2.4	2.6	2.8	1.9

**Cuadro:** %'s de tiempos de ejecución para diferentes dimensiones de los espacios modales.

# Proporciones de demora específicos

# Proporciones de demora específicos

		$N_a = N_b$					
Algo.	SubAlgo.	2	4	6	8	10	12

$R_f$	Li	69	75	71	59	55	54
	CH	31	25	29	41	45	46

Li	Md	93	97	97	96	96	95
	At	7	3	3	4	4	5

CH	AtMd	87	89	91	93	93	94
	At	13	11	9	7	7	6

Cuadro: %'s de demora sobre el total (del resp. ámbito).



# Resultados Paralelización, eficiencia

# Resultados Paralelización, eficiencia

P0: Rutina sin paralelizar.

# Resultados Paralelización, eficiencia

P0: Rutina sin paralelizar.

P1: Cálculo paralelo de Lindbladiano y Conmutador.

# Resultados Paralelización, eficiencia

P0: Rutina sin paralelizar.

P1: Cálculo paralelo de Lindbladiano y Conmutador.

P2: Cálculo paralelo de loops presentes en cálculo de operadores.

# Resultados Paralelización, eficiencia

P0: Rutina sin paralelizar.

P1: Cálculo paralelo de Lindbladiano y Conmutador.

P2: Cálculo paralelo de loops presentes en cálculo de operadores.

P3: Combinación de P1 y P2.

# ¿Como medir eficiencia?

$T_s$ : Tiempo serial.

# ¿Como medir eficiencia?

$T_s$ : Tiempo serial.

$T_p$ : Tiempo paralelo real.

# ¿Como medir eficiencia?

- $T_s$ : Tiempo serial.
- $T_p$ : Tiempo paralelo real.
- $T_t$ : Tiempo paralelo de todos los hilos de procesamiento.



# ¿Como medir eficiencia?

$T_s$ : Tiempo serial.

$T_p$ : Tiempo paralelo real.

$T_t$ : Tiempo paralelo de todos los hilos de procesamiento.

$\alpha$ :  $\equiv \frac{T_s}{T_p}$ , *Speedup* o “factor de mejora”.

# ¿Como medir eficiencia?

$T_s$ : Tiempo serial.

$T_p$ : Tiempo paralelo real.

$T_t$ : Tiempo paralelo de todos los hilos de procesamiento.

$\alpha$ :  $\equiv \frac{T_s}{T_p}$ , *Speedup* o “factor de mejora”.

$E_A$ :  $\equiv 100 \cdot \frac{T_s}{T_t}$  %, “eficiencia”.

# Resultados Paralelización, eficiencia

# Resultados Paralelización, eficiencia

$N_a = N_b$	2		4		6	
Rutina	$\alpha$	$E_A$ %	$\alpha$	$E_A$ %	$\alpha$	$E_A$ %
P1	1.16	59	1.11	57	1.04	54
P2	0.98	50	1.25	63	1.25	64
P3	1.32	45	1.68	57	1.63	57

$N_a = N_b$	8		10		12	
Rutina	$\alpha$	$E_A$ %	$\alpha$	$E_A$ %	$\alpha$	$E_A$ %
P1	1.29	68	1.30	69	1.27	69
P2	1.21	64	1.2	67	1.23	69
P3	1.85	64	1.84	65	1.73	61

Cuadro: Rendimiento paralelizaciones.  $\bar{n} = 0.001$

# Resultados Paralelización, tiempos

# Resultados Paralelización, tiempos

	$N_a = N_b$					
Rutina	2	4	6	8	10	12
P0	24s	4m03s	18m49s	1h19m	3h59m	8h13m
P1	20s	3m38s	18m09s	1h01m	3h04m	6h29m
P2	24s	3m14s	15m03s	1h05m	3h16m	6h41m
P3	18s	2m24s	11m31s	42m58s	2h10m	4h45m

Cuadro: Tiempos de demora rutinas paralelizadas.  $\bar{n} = 0.001$

## *Conclusiones*

# Resumen logros



# Resumen logros

- Mejoraron notablemente los tiempos de cálculo.

# Resumen logros

- Mejoraron notablemente los tiempos de cálculo.
- Por lo anterior pudieron utilizarse mayores dimensiones.

# Resumen logros

- Mejoraron notablemente los tiempos de cálculo.
- Por lo anterior pudieron utilizarse mayores dimensiones.
- Mejoró el dinamismo en relación a reutilización y trabajo futuro.

# ¿Objetivos?

# ¿Objetivos?

- *Traducir* de MATLAB a FORTRAN (70 %).✓

# ¿Objetivos?

- *Traducir* de MATLAB a FORTRAN (70 %).✓
- Mejorar algoritmos específicos, Hamiltoniano, Lindbladiano (98 %).✓

# ¿Objetivos?

- *Traducir* de MATLAB a FORTRAN (70 %).✓
- *Mejorar algoritmos específicos, Hamiltoniano, Lindbladiano* (98 %).✓
- Obtener códigos mejorados y dinámicos.✓

# ¿Objetivos?

- *Traducir* de MATLAB a FORTRAN (70 %).✓
- **Mejorar algoritmos específicos, Hamiltoniano, Lindbladiano (98 %).**✓
- Obtener códigos mejorados y dinámicos.✓
- Determinar el comportamiento de la implementación numérica para mayores dimensiones y ruido térmico.✓



# ¿Objetivos?

- Traducir de MATLAB a FORTRAN (70 %).✓
- Mejorar algoritmos específicos, Hamiltoniano, Lindbladiano (98 %).✓
- Obtener códigos mejorados y dinámicos.✓
- Determinar el comportamiento de la implementación numérica para mayores dimensiones y ruido térmico.✓
- Estudiar posibilidades de paralelización.✓

# Trabajo Futuro

- Considerar estructura fina atómica, *Spin*.

# Trabajo Futuro

- Considerar estructura fina atómica, *Spin*.
- Estudiar propiedades de los fotones emitidos, *Entrelazamiento*.



# Referencias

# Referencias






Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Frank Laloe. *Quantum Mechanics, Volume 1*. WILEY-VCH, 1991.





# Referencias

-  Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Frank Laloe. *Quantum Mechanics, Volume 1*. WILEY-VCH, 1991.
-  Sergio M. Dutra. *Cavity Quantum Electrodynamics, The Strange Theory of Light in a Box*. WILEY-INTERSCIENCE, 2005.

# Referencias

-  Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Frank Laloe. *Quantum Mechanics, Volume 1*. WILEY-VCH, 1991.
-  Sergio M. Dutra. *Cavity Quantum Electrodynamics, The Strange Theory of Light in a Box*. WILEY-INTERSCIENCE, 2005.
-  Gino Montecinos. *Cálculo de Funciones de Correlación en la generación de dos fotones por encargo*. Trabajo para optar al Título de Ingeniero Matemático. UFRO, 2008.

# Referencias

-  Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Frank Laloe. *Quantum Mechanics, Volume 1*. WILEY-VCH, 1991.
-  Sergio M. Dutra. *Cavity Quantum Electrodynamics, The Strange Theory of Light in a Box*. WILEY-INTERSCIENCE, 2005.
-  Gino Montecinos. *Cálculo de Funciones de Correlación en la generación de dos fotones por encargo. Trabajo para optar al Título de Ingeniero Matemático*. UFRO, 2008.
-  R. Guzmán. *Procesamiento de Información en Sistemas Cuánticos*. Tesis Doctoral. USACH, 2004.





# Referencias

# Referencias






Christian Maurer, Christoph Becker, Carlos Russo, Jürgen Eschner and Rainer Blatt. *A single-photon source based on a single  $\text{Ca}^+$  ion*. New Journal of Physics, 6(2004)94.





# Referencias

-  Christian Maurer, Christoph Becker, Carlos Russo, Jürgen Eschner and Rainer Blatt. *A single-photon source based on a single  $\text{Ca}^+$  ion*. New Journal of Physics, 6(2004)94.
-  M. Keller, B. Lange, K. Hayasaka, W. Lange and H. Walther. *A calcium ion in a cavity as a controlled single-photon source*. New Journal of Physics, 6(2004)95.

# Referencias

-  Christian Maurer, Christoph Becker, Carlos Russo, Jürgen Eschner and Rainer Blatt. *A single-photon source based on a single  $\text{Ca}^+$  ion*. New Journal of Physics, 6(2004)94.
-  M. Keller, B. Lange, K. Hayasaka, W. Lange and H. Walther. *A calcium ion in a cavity as a controlled single-photon source*. New Journal of Physics, 6(2004)95.
-  Howard Carmichael. *An Open Systems Approach to Quantum Optics, Lectures presented at the Université Libre de Bruxelles, October 28 to November 4, 1991*. Springer-Verlag, 1993.

# Referencias

-  Christian Maurer, Christoph Becker, Carlos Russo, Jürgen Eschner and Rainer Blatt. *A single-photon source based on a single  $\text{Ca}^+$  ion*. New Journal of Physics, 6(2004)94.
-  M. Keller, B. Lange, K. Hayasaka, W. Lange and H. Walther. *A calcium ion in a cavity as a controlled single-photon source*. New Journal of Physics, 6(2004)95.
-  Howard Carmichael. *An Open Systems Approach to Quantum Optics, Lectures presented at the Université Libre de Bruxelles, October 28 to November 4, 1991*. Springer-Verlag, 1993.
-  Barbara Chapman, Gabriele Jost and Ruud Van Der Pas. *Using OpenMP, Portable Shared Memory Parallel Programming*. The MIT Press, 2008.

## *Agradecimientos*

A mis padres, Ida y Victor

# A1 CEMCC, UFRO





Center for Optics and Photonics

A mi prof. guía, Dr. Robert Guzmán

*Muchas gracias*

