DIKLAT GURU PENGEMBANG MATEMATIKA SMK
JENJANG DASAR TAHUN 2009

Matriks




Oleh: Drs. Markaban, M.Si.

PPPPTK MATEMATIKA
YOGYAKARTA

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK
DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA
2009

Quality System
Quality Endorsed Company
ISO 9001: 2000
Lic no:QEC 23961
SAI Global

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena atas karunia-Nya, bahan ajar ini dapat diselesaikan dengan baik. Bahan ajar ini digunakan pada Diklat Guru Pengembang Matematika SMK Jenjang Dasar Tahun 2009, pola 120 jam yang diselenggarakan oleh PPPPTK Matematika Yogyakarta.

Bahan ajar ini diharapkan dapat menjadi salah satu rujukan dalam usaha peningkatan mutu pengelolaan pembelajaran matematika di sekolah serta dapat dipelajari secara mandiri oleh peserta diklat di dalam maupun di luar kegiatan diklat.

Diharapkan dengan mempelajari bahan ajar ini, peserta diklat dapat menambah wawasan dan pengetahuan sehingga dapat mengadakan refleksi sejauh mana pemahaman terhadap mata diklat yang sedang/telah diikuti.

Kami mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah berpartisipasi dalam proses penyusunan bahan ajar ini. Kepada para pemerhati dan pelaku pendidikan, kami berharap bahan ajar ini dapat dimanfaatkan dengan baik guna peningkatan mutu pembelajaran matematika di negeri ini.

Demi perbaikan bahan ajar ini, kami mengharapkan adanya saran untuk penyempurnaan bahan ajar ini di masa yang akan datang.
Saran dapat disampaikan kepada kami di PPPPTK Matematika dengan alamat: Jl. Kaliurang KM. 6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, DIY, Kotak Pos 31 YK-BS Yogyakarta 55281. Telepon (0274) 881717, 885725, Fax. (0274) 885752. email: p4tkmatematika@yahoo.com

Sleman, 11 Mei 2009
Kepala,

Kasman Sulyono
NIP. 130352806

Daftar Isi

PETA KOMPETENSI DAN BAHAN AJAR

No	Kompetensi / Sub kompetensi	Indikator	Materi Pembelajaran
1.	***<u>Kompetensi :</u>*** Mampu memfasilitasi siswa dalam memecahkan masalah berkaitan dengan konsep matriks ***<u>Subkompetensi:-</u>*** **Mengembangkan keterampilan siswa dalam:** • mendeskripsikan macam-macam matriks • menyelesaikan operasi matriks • menentukan determinan dan invers	• Mampu mengembangkan dari kehidupan nyata sehari-hari, menjelaskan dan memberikan contoh mengenai konsep dan operasi pada matriks. • Mampu menyelesaikan dan memberikan contoh mengenai determinan. • Mampu menyelesaikan dan memberikan contoh mengenai invers matriks. • Mampu mengembangkan dari kehidupan nyata sehari-hari, menjelaskan dan memberikan contoh mengenai penggunaan matriks..	• Pengertian matriks • Jenis-jenis matriks • Operasi pada matriks • Determinan • Invers matriks • Penerapan matriks

SKENARIO PEMBELAJARAN

1. Pada awal pertemuan di lakukan kegiatan identifikasi permasalahan pembelajaran pada materi matriks yang dihadapi oleh guru selama di kelas.

2. Dari identifikasi permasalahan pembelajaran tersebut dijelaskan dengan ceramah, tanya jawab dan curah pendapat sehingga permasalahan matriks dapat dipecahkan

3. Peserta bekerja dalam kelompok program keahlian yang terdiri dari 5-6 orang dan mendiskusikan dan menganalisis materi dan latihan pada modul serta memberikan contoh penerapan sesuai program keahliannya.

Bab I
Pendahuluan

A. Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari sering kita jumpai susunan bilangan-bilangan dalam baris dan kolom yang berbentuk persegi panjang. Susunan bilangan-bilangan ini dikenal dengan nama matriks. Ide matriks pertama kali dikemukakan oleh Arthur Cayley (1821-1895) seorang matematikawan Inggris. Matriks merupakan penemuan dalam matematika untuk memudahkan mengolah data, perhitungan melalui operasi-operasi matriks hingga diperoleh suatu penyelesaian.

Materi tentang matriks merupakan hal yang baru di sekolah menengah, sehingga siswa masih kurang memahami konsep-konsep dasar matriks dan aljabar matriks serta kurangnya ketelitian dalam operasi hitung matriks. Padahal matriks bisa dipahami dengan daya nalar dan cukup realistis, meskipun dapat dikembangkan menjadi konsep yang sangat abstrak seperti matriks yang elemen-elemennya suku banyak.

Untuk membangkitkan minat siswa, perlu dikembangkan suatu teknik pembelajaran tentang matriks yang menarik, agar siswa dapat mempelajarinya dan memahaminya dengan mudah. Sebagai contoh, siswa perlu mendapat penjelasan tentang manfaat mempelajari matriks, juga perlu dikembangkan tema-tema pembelajaran matematika yang kontekstual, aplikatif pada bidang keahliannya dan memberi kesempatan pada siswa untuk mengembangkan daya nalar dan kreatifitasnya.

B. Tujuan

Bahan ajar ini disusun sebagai materi diklat yang berisi konsep-konsep dasar tentang matriks dan masih dapat dikembangkan sesuai keadaan di lapangan. Diharapkan dapat semakin memantapkan penguasaan materi sehingga guru mampu mengembangkan keterampilan siswa dalam melakukan, menerapkan dalam kehidupan sehari-hari, dan memecahkan masalah yang berkaitan dengan matriks khususnya di bidang keahlian masing-masing.

C. Ruang Lingkup

Materi tentang matriks ini meliputi :

1. Pengertian matriks dan jenis-jenis matriks
2. Operasi matriks
3. Determinan dan Invers matriks, serta
4. Contoh-contoh penerapannya dalam kehidupan sehari-hari dan dalam bidang keahlian

Bab II
Matriks

A. Pengertian Matriks

1. Pengertian Matriks dan Ordo Matriks

Dalam menjelaskan pengertian matriks, sebaiknya mengangkat peristiwa kehidupan sehari-hari agar lebih mudah dipahami oleh siswa. Matriks yang kita jumpai dalam kehidupan sehari-hari misalnya: tabel matrikulasi di sekolah atau kantor, penyajian data pada suatu media cetak yang disajikan dalam bentuk matriks, dan sebagainya.

Contoh :

Tabel matrikulasi yang memuat data jumlah siswa di suatu sekolah

Tabel Jumlah Siswa

Kelas	Laki-laki	Wanita
I	240	180
II	220	210
III	205	205

Dari tabel di atas, bila diambil angka-angkanya saja dan ditulis dalam tanda siku, bentuknya menjadi $\begin{bmatrix} 240 & 180 \\ 220 & 210 \\ 205 & 205 \end{bmatrix}$. Bentuk sederhana inilah yang kita sebut sebagai matriks.

Pengertian Matriks : Susunan bilangan berbentuk persegi panjang yang diatur dalam baris dan kolom yang diletakkan dalam kurung biasa atau kurung siku. (Herry Sukarman, 2002 : hal 270)

Matriks dinotasikan dengan huruf kapital A, B, K, dan sebagainya.

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 14 & 26 \\ 13 & 30 \\ 15 & 25 \end{bmatrix}$

Bilangan–bilangan yang tersusun dalam baris-baris dan kolom-kolom tersebut disebut elemen/unsur. Elemen matriks A yang terletak di baris ke-2 dan kolom ke-1 dinotasikan sebagai $a_{21}=13$.

Contoh: Berapakah nilai a_{31} dan a_{32} untuk matriks A di atas?

Jawab: $a_{31}=15$, $a_{32}=25$

Matriks A di atas mempunyai 3 baris dan 2 kolom. Banyaknya baris dan banyaknya kolom suatu matriks menentukan ukuran dari matriks tersebut.

Ordo adalah ukuran suatu matriks yang dinyatakan dalam banyaknya baris kali banyaknya kolom

Jadi matriks A berordo 3 X 2 dan ditulis A_{3x2}

2. Jenis-jenis Matriks

Setelah memahami pengertian matriks dan ordo suatu matriks, siswa dapat diperkenalkan dengan jenis-jenis matriks. Berdasarkan ordonya terdapat jenis matriks, sebagai berikut :

a. Matriks bujursangkar/persegi yaitu matriks berordo n x n atau banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom disebut juga sebagai matriks kuadrat berordo n.

   Contoh: $B_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$, maka 1 dan 12 dikatakan berada pada diagonal utama B.

b. Matriks baris yaitu matriks berordo 1x n atau hanya memiliki satu baris.

   Contoh: $C_{1x3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

c. Matriks kolom yaitu matriks berordo nx1 atau hanya memiliki satu kolom

   Contoh: $E_{2x1} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$

d. Matriks tegak yaitu matriks berordo m x n dengan m > n

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$, A berordo 3x2 dan 3 > 2 sehingga matriks A tampak tegak

e. Matriks datar yaitu matriks berordo m x n dengan m<n

Contoh: $F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix}$, F berordo 2x3 dan 2 < 3 sehingga matriks F tampak datar

Sedangkan berdasarkan elemen-elemen penyusunnya terdapat jenis-jenis matriks yaitu:

a. Matriks nol yaitu matriks yang semua elemen penyusunnya adalah 0 dan dinotasikan sebagai O.

Contoh: $O_{1x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $O_{2x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b. Matriks diagonal yaitu matriks persegi yang semua elemen diatas dan dibawah diagonalnya adalah 0 dan dinotasikan sebagai D.

Contoh: $D_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

c. Matriks skalar yaitu matriks diagonal yang semua elemen pada diagonalnya sama.

Contoh: $D_{4x4} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

d. Matriks simetri yaitu matriks persegi yang setiap elemennya, selain elemen diagonal, adalah simetri terhadap diagonal utama.

Contoh: $F_{2x2} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

e. Matriks simetri miring yaitu matriks simetri yang elemen-elemennya, selain elemen diagonal, saling berlawanan.

Contoh: $G_{3x3} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -7 \\ -5 & 0 & -2 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

f. Matriks Identitas/satuan yaitu matriks diagonal yang semua elemen pada diagonal utamanya adalah 1 dan dinotasikan sebagai I.

Contoh: $I_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

g. Matriks segitiga atas yaitu matriks persegi yang elemen-elemen di bawah diagonal utamanya adalah 0.

Contoh: $G_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

h. Matriks segitiga bawah yaitu matriks persegi yang elemen-elemen di atas diagonal utamanya adalah 0.

Contoh: $H_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & 9 & 6 \end{bmatrix}$

i. Matriks transpose yaitu matriks yang diperoleh dari memindahkan elemen-elemen baris menjadi elemen pada kolom dan elemen-elemen kolom menjadi elemen pada baris. Sebagai pengingat adalah trans=perpindahan dan pose=letak. Transpose matriks A dilambangkan dengan A^T

Contoh: $A_{3x2} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$, maka $A^T = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, perhatikan bahwa ordo dari A^T adalah 2 x 3.

3. Kesamaan Matriks

Dua buah matriks atau lebih dikatakan sama bila dan hanya bila mempunyai ordo yang sama dan elemen-elemen penyusun yang seletak juga sama.

Contoh: $A_{2x3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$, $B_{2x3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ maka A = B

Perhatikan bahwa $C_{2x3} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ dan $C_{2x3} \neq A_{2x3}$ karena ada elemennya yang seletak dan nilainya tidak sama.

Perhatikan juga bahwa $D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ dan $D \neq A$ karena ordo kedua matriks tersebut tidak sama.

B. Operasi Matriks dan Sifat-sifatnya

Dalam menjelaskan operasi hitung pada matriks, kita dapat mengangkat peristiwa sehari-hari, misalnya dengan mengambil contoh di suatu toko kelontong. Untuk menunjukkan operasi penjumlahan dan pengurangan kita dapat mengambil tabel matrikulasi jumlah barang yang terjual.

Tabel Jumlah barang yang terjual pada bulan Mei (Tabel 1)

Jenis Barang	Jumlah
Mie instan	240
Sabun cuci	130
Pasta gigi	80

Tabel Jumlah barang yang terjual pada bulan Juni (Tabel 2)

Jenis Barang	Jumlah
Mie instan	200
Sabun cuci	120
Pasta gigi	70

Jika kita ingin mengetahui berapa jumlah mie instan yang terjual dalam waktu dua bulan tersebut, maka kita harus menjumlahkan baris 1 tabel 1 dengan baris 1 tabel 2. Total mie instan yang terjual adalah 240+200=440. Untuk mengetahui total sabun cuci yang terjual, kita harus menjumlahkan baris 2 tabel 1 dengan baris 2 tabel 2, demikian pula untuk jenis barang berikutnya. Berdasarkan prinsip yang sama, siswa diperkenalkan dengan operasi penjumlahan dan pengurangan pada matriks.

1. Penjumlahan Matriks

Prinsip penjumlahan dua atau lebih matriks yaitu menjumlahkan setiap elemennya yang seletak.

Pengertian penjumlahan matriks: Jika A + B = C, maka elemen-elemen C diperoleh dari penjumlahan elemen-elemen A dan B yang seletak, yaitu $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ untuk elemen C pada baris ke-i dan kolom ke-j.

Akibatnya, matriks A dan B dapat dijumlahkan apabila kedua matriks memiliki ordo yang sama.

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ maka $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} = C$$

Perhatikan bahwa C mempunyai ordo sama dengan A dan B

Sifat-sifat penjumlahan matriks:

a. A+B = B+A (hukum komutatif untuk penjumlahan)

b. A+(B+C) = (A+B)+C (hukum asosiatif untuk penjumlahan)

c. A+O = O+A

d. $(A+B)^T = A^T + B^T$

2. Pengurangan Matriks

Operasi pengurangan pada matriks prinsipnya sama seperti pada operasi penjumlahan. Matriks A dikurangi matriks B dengan cara mengurangi elemen matriks A dengan elemen matriks B yang seletak.

Pengertian pengurangan matriks : Jika A–B = C, maka elemen-elemen C diperoleh dari pengurangan elemen-elemen A dan B yang seletak, yaitu $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ atau pengurangan dua matriks dapat dipandang sebagai penjumlahan matriks lawannya, yaitu A + (-B)

Syarat: Matriks A dan B dapat dikurangkan jika ordo kedua matriks tersebut sama.

<u>Contoh</u>: A = $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 9 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A-B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 9 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{atau } A-B = A+(-B) = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 9 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -5 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

3. Perkalian Matriks

Operasi perkalian pada matriks ada dua macam yaitu perkalian matriks dengan skalar dan perkalian matriks dengan matriks. Sebelum memperkenalkan perkalian matriks dengan matriks, siswa terlebih dahulu diperkenalkan perkalian matriks dengan bilangan/skalar.

a. Perkalian Matriks dengan skalar

Matriks A dikalikan dengan suatu bilangan/skalar k maka kA diperoleh dari hasilkali setiap elemen A dengan k. Dengan demikian, matriks –A dipandang sebagai hasil kali matriks A dengan -1, sehingga – A = (-1)A.

<u>Contoh</u>: Jika P = $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ maka: 4P= 4 $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 32 \\ 20 & 4 \end{bmatrix}$

Sifat-sifat perkalian matriks dengan skalar:

Jika k dan l bilangan real dan A, B dua matriks dengan ordo sedemikian hingga dapat dilakukan operasi hitung berikut, maka berlaku:

1) $k(A+B) = kA+kB$

2) $k(A-B) = kA-kB$

3) $(k+l)A = kA+lA$

4) $(k-l)A = kA-lA$

5) $(kl)A = k(lA)$

6) $(kA)^T = kA^T$

b. Perkalian matriks dengan matriks

Untuk lebih memahami perkalian matriks dengan matriks, kita perhatikan kembali contoh di sebuah toko kelontong. Misalnya daftar harga barang disajikan pada tabel berikut ini,

Tabel harga barang:

Jenis Barang	Mie instan	Sabun cuci	Pasta gigi
Harga (rupiah)	700	1000	2200

Tabel jumlah barang yang terjual:

Jenis Barang	Jumlah
Mie instan	220
Sabun cuci	130
Pasta gigi	80

Untuk mengetahui total pendapatan, kita akan menghitung dengan cara : (700x220) +(1000x130) + (2200x80) = 460000. Perhitungan itu dapat ditunjukkan dalam bentuk perkalian matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 700 & 1000 & 2200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 220 \\ 130 \\ 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (700x220)+(1000x130)+(2200x80) \end{bmatrix}$$

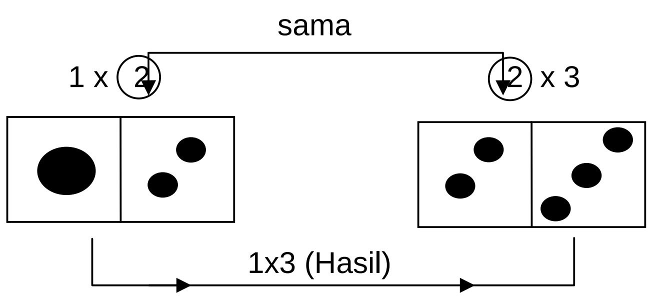
$$= \begin{bmatrix} 460000 \end{bmatrix}$$

Dua matriks A dan B dapat dikalikan (AB) bila dan hanya bila banyaknya kolom matriks A sama dengan banyaknya baris matriks B. Dengan demikian $A_{mxn}B_{nxp}$ dapat dikalikan, tetapi $B_{nxp}A_{mxn}$ tidak dapat dikalikan, untuk lebih jelasnya dapat kita perhatikan ordo dari masing-masing matriks berikut:.

$$\underset{mxn}{A} \qquad \underset{nxp}{B} = \underset{mxp}{AB}$$

Perhatikan bahwa hasil kali matriks AB berordo mxp dan elemen-elemen dari AB diperoleh dari hasil kali setiap baris pada matriks A dengan setiap kolom pada matriks B, kemudian dijumlahkan menjadi satu elemen.

Untuk menguji apakah dua matriks dapat dikalikan atau tidak dan menentukan ordo hasil perkaliannya, dapat juga menggunakan aturan memasang kartu domino, misalnya sebagai berikut :



Berikut ini diberikan contoh- contoh perkalian matriks dengan matriks.

<u>Contoh Perkalian Matriks 1xp dengan matriks px1</u> :

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 7 \end{bmatrix} \text{ dan } C = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix},\ B_{1x3}C_{3x1} = \begin{bmatrix}(6x4)+(8x7)+(7x2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}94\end{bmatrix}$$

<u>Contoh perkalian matriks px1 dengan matriks 1xp</u>:

$$A=\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ dan } B=\begin{bmatrix} 6 & 8 & 7 \end{bmatrix},\ A_{3x1}B_{1x3} = \begin{bmatrix} 2x6 & 2x8 & 2x7 \\ 5x6 & 5x8 & 5x7 \\ 4x6 & 4x8 & 4x7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 16 & 14 \\ 30 & 40 & 35 \\ 24 & 32 & 28 \end{bmatrix}$$

Hasilkalinya merupakan suatu matriks berordo 3X3.

Contoh perkalian matriks mxn dengan matriks nxp:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$A_{2x2} B_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} (1x1)+(2x0) & (1x0)+(2x2) & (1x1)+(2x0) \\ (3x1)+(4x0) & (3x0)+(4x2) & (3x1)+(4x0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

Perhatikan hal-hal berikut ini :

1) Pada umumnya $AB \neq BA$ (tidak komutatif)
2) Apabila A suatu matriks persegi maka : $A^2 = A.A$; $A^3 = A^2 .A$; $A^4 = A^3 . A$ dan seterusnya
3) Apabila AB = BC maka tidak dapat disimpulkan bahwa A = C (tidak berlaku sifat penghapusan)
4) Apabila AB = 0 ; tidak dapat disimpulkan bahwa A = 0 atau B = 0

Sedangkan apabila matriks A, B dan C adalah matriks yang terdefinisi pada perkalian, maka sifat-sifat perkalian matriks dengan matriks adalah:

1) A(BC) = (AB)C
2) A(B+C) = AB + AC
3) (B+C)A = BA + CA
4) A(B–C) = AB–AC
5) (B–C)A = BA–CA
6) a(BC) = (aB)C = B(aC)
7) AI = IA = A

C. Determinan Matriks

Untuk setiap matriks persegi terdapat suatu bilangan tertentu yang disebut determinan.

Pengertian Determinan matriks adalah jumlah semua hasil perkalian elementer yang bertanda dari A dan dinyatakan dengan det(A).

(Howard Anton, 1991 : hal 67)

Yang diartikan dengan sebuah hasil perkalian elementer bertanda dari suatu matriks A adalah sebuah hasil perkalian elementer pada suatu kolom dengan +1 atau -1. Untuk lebih jelasnya, berikut ini diuraikan cara mencari determinan matriks berordo 2x2 dan matriks berordo 3x3.

1. Determinan matriks berordo 2 X 2

Jika matriks A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka det (A) = $|A|$ = $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = ad–bc

Sebagai pengingat ketentuan di atas diperoleh dari $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Contoh: P = $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, maka det(P) = $|P|$ = $\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ = (8x4)-(4x3) = 20

2. Determinan matriks berordo 3 X 3

Untuk mencari determinan matriks berordo 3 X 3 dapat digunakan dua metode, sebagai berikut :

a. Metode Sarrus

Jika matriks A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

maka det (A) = $|A|$ = $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ = aei + bfg +cdh – ceg – afh - bdi

Sebagai pengingat ketentuan di atas diperoleh dari $\left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right.$

Perlu diperhatikan bahwa cara demikian **tidak berlaku** bila matriks berordo 4x4 dan yang lebih tinggi lagi.

Contoh: Q = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, maka det(Q) = $|Q|$ adalah

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 7 & 8 \end{matrix}$$

=(2x3x9)+(4x5x7)+(6x1x8)-(6x3x7)-(2x5x8)-(4x1x9)=242-242 = 0

b. Metode Kofaktor

Terlebih dahulu siswa dijelaskan tentang sub matriks atau minor dari suatu matriks. Perhatikan matriks A berordo nxn yaitu A = $\lfloor A_{ij} \rfloor$, dan M_{ij} adalah submatriks dari A dengan ordo (n-1)x(n-1) yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemennya pada baris ke-i dan elemen-elemen pada kolom ke-j.

Minor dari elemen a_{ij} suatu matriks A = $\lfloor A_{ij} \rfloor$ adalah $|M_{ij}|$ dan kofaktor dari elemen a_{ij} adalah $K_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}| = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$ yang merupakan suatu skalar.

Determinan suatu matriks merupakan jumlah perkalian elemen-elemen dari sebuah baris (kolom) dengan kofaktor-kofaktor yang bersesuaian. Dapat dirumuskan:

det(A) = $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} K_{ij}$ dengan i sebarang,diekspansikan menurut baris ke-i.

det(A)= $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} K_{ij}$ dengan j sebarang, diekspansikan menurut kolom ke-j.

<u>Contoh</u>: Q = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, maka $M_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$

$M_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$, $M_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

M_{11}, M_{12} dan M_{13} merupakan submatriks hasil ekspansi baris ke-1 dari matriks Q.

Untuk mencari det(A) dengan metode kofaktor cukup mengambil satu ekspansi saja misal ekspansi baris ke-1

<u>Contoh</u>: $Q = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, untuk mendapatkan det(Q) dengan metode kofaktor adalah mencari terlebih dahulu determinan-determinan minornya yang diperoleh dari ekspansi baris ke-1 diatas, yaitu $\det(M_{11})=-13$, $\det(M_{12})=-26$ dan $\det(M_{13})=-13$, maka :

$$|Q| = q_{11}.K_{11} + q_{12}.K_{12} + q_{13}.K_{13}$$

$$= q_{11}.(-1)^{1+1}\det(M_{11}) + q_{12}(-1)^{1+2}\det(M_{12}) + q_{13}(-1)^{1+3}\det(M_{13})$$

$$= 2.13 - 4.26 + 6.13 = 0$$

3. Adjoin Matriks

Adjoin matriks A adalah transpose dari kofaktor-kofaktor matriks tersebut, dilambangkan dengan adj A = $(k_{ij})^t$

<u>Contoh</u>: $Q = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ telah diketahui dari hitungan sebelumnya bahwa $k_{11}=13$, $k_{12}=-26$ dan $k_{13}=13$ sekarang kita hanya mencari kofaktor dari ekspansi baris ke-2 dan ekspansi baris ke-3, yaitu :

$k_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}=-12$, $k_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}=24$, $k_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}=-12$

$k_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=2$, $k_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=-4$, $k_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & k_{22} & k_{32} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -12 & 2 \\ -26 & 24 & -4 \\ 13 & -12 & 2 \end{bmatrix}$$

Hal yang menarik dalam mencari adjoin matriks berordo 2x2 ditunjukkan sebagai berikut:

Jika $A_{2x2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka kofaktor-kofaktornya adalah k_{11}=d, k_{12}=-c, k_{21}=-b dan k_{22}=a. Kemudian Adj A = $\begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Hal ini sama artinya dengan menukarkan elemen-elemen pada diagonal utamanya dan mengubah tanda pada elemen-elemen pada diagonal lainnya

D. Invers Matriks

Untuk menjelaskan invers matriks, perhatikan contoh dalam kehidupan sebagai berikut :

Di koperasi sekolah Ana membeli 5 buah buku tulis dan 6 buah pensil, Ani membeli 6 buah buku tulis dan 8 buah pensil. Untuk itu Ana membayar Rp. 8000,- dan Ani membayar sebesar Rp. 10.000,-. Berapakah harga buku tulis per-buah dan pensil per-buah ?

Soal di atas dapat diselesaikan dengan menggunakan sistem persamaan linear, yaitu:

Misalkan x = harga buku tulis per-buah dan y = harga pensil per-buah. Maka sistem persamaan linearnya:

$$\left.\begin{aligned} 5x + 6y &= 8000 \\ 6x + 8y &= 10000 \end{aligned}\right\}$$

Koefisien sistem persamaan di atas jika di tulis dalam bentuk matriks adalah sebagai berikut:

$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8000 \\ 10000 \end{bmatrix}$ atau $A_{2x2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = B_{2x1}$ dengan A = $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ dan B=$\begin{bmatrix} 8000 \\ 10000 \end{bmatrix}$, sehingga untuk mengetahui nilai x dan y kita perlu menjelaskan pada siswa adanya invers matriks.

Pengertian Invers matriks: Apabila perkalian kedua matriks A dan B berlaku AB = BA = I , maka dikatakan B merupakan invers matriks A atau

$B = A^{-1}$, dan A merupakan invers matriks B atau $A = B^{-1}$. Dengan demikian berlaku $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, dimana I adalah matriks identitas..

Invers atau kebalikan suatu matriks A dilambangkan dengan A^{-1}.

Bentuk pada soal diatas : $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = B$, maka $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}.B$ (mengapa!)

Untuk $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$, maka dengan perkalian matriks kita dapat menunjukkan

bahwa $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$ karena $\begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Sehingga diperoleh nilai x dan y, sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}.B = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8000 \\ 10000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 500 \end{bmatrix}$$

Cara mencari invers matriks dapat dirumuskas sebagai berikut:

1. Invers matriks berordo 2x2

Jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}.\mathrm{Adj}(A) = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

<u>Contoh</u>: $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, tentukan A^{-1} !

<u>Jawab</u>: det(A) = (5x2) – (3x3) = 1

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Invers matriks berordo 3x3

Jika B_{3x3}, maka $B^{-1} = \frac{1}{\det(B)}.\mathrm{Adj}(B)$

<u>Contoh</u> : $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$,tentukan invers dari matriks segitiga tersebut!

Jawab : Untuk mencari determinan matriks B, cara paling praktis adalah dengan metode kofaktor dengan mengekspansi baris yang memuat nol terbanyak yaitu baris ke-3, maka det(B)=6(1x4-0x2)= 24

$$\text{Adj } B = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix}4 & 5\\0 & 6\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 3\\0 & 6\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}0 & 5\\0 & 6\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 3\\0 & 6\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\0 & 5\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}0 & 4\\0 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\0 & 4\end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & -12 & -2 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 24 & -12 & -2 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{12}{24} & -\frac{2}{24} \\ 0 & \frac{6}{24} & -\frac{5}{24} \\ 0 & 0 & \frac{4}{24} \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat invers matriks :

1. Jika A dan B adalah matriks yang memenuhi AB = BA = I, maka matriks A dan B dikatakan sebagai matriks yang saling invers karena

   $A = B^{-1}$ dan $B = A^{-1}$
2. Jika matriks A mempunyai invers, maka inversnya tunggal
3. Jika A dan B adalah matriks yang mempunyai invers dan ordonya sama maka :

   a). AB mempunyai invers

   b). $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

   c). $(A^{-1})^{-1} = A$

   d). $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$, $k \neq 0$

Bila suatu matriks A mempunyai determinan nol atau det(A) = 0 maka matriks A tidak mempunyai invers. Suatu matriks yang tidak mempunyai invers disebut matriks singular. Bila det(A) $\neq$ 0, maka matriks A pasti mempunyai invers. Suatu matriks persegi yang mempunyai invers disebut matriks non singular.

Bab III

Aplikasi Matriks

Umumnya aplikasi matriks yang dapat diajarkan di SMK adalah untuk menyelesaikan soal kehidupan sehari-hari atau yang berkaitan dengan bidang keahlian dengan langkah:

1. Mengubah soal cerita dalam bentuk tabel lalu diselesaikan dengan matriks, atau
2. Menyatakan nilai yang akan di cari dalam variabel, menyusun sistem persamaan linearnya dan menyelesaikannya dengan matriks.

Contoh Soal Aplikasi Matriks

1. Toko 'Sembada Art" Yogyakarta menjual kerajinan tangan pada "Unik Galery" Jakarta yang dituliskan dalam nota penjualan berikut :

S e m b a d a A r t
Yogyakarta
NOTA PENJUALAN

No Transaksi : 13524 Kepada Yth : UNIK GALERY
Tanggal Transaksi : 29-11-2008 Alamat : Jakarta

			(Rp)	(Rp)
1	Patung Lilin	20	100.000	2.000.000
2	Patung keramik	35	150.000	5.250.000
3	Boneka akar wangi	50	20.000	1.000.000
			Jumlah	8.250.000

Pertanyaan:

a. Buatlah dua tabel berdasarkan nota penjualan di atas, yaitu tabel yang memuat jumlah barang dan tabel yang memuat harga barang!

b. Berdasarkan tabel pada jawaban a, ubahlah kedalam bentuk perkalian matriks untuk memperoleh total harga penjualan!

Jawab:

a. Tabel Jumlah Barang

Jenis Barang	Patung Lilin	Patung Keramik	Boneka Akar Wangi
Jumlah	20	35	50

Tabel Harga Barang

Jenis Barang	Harga Satuan (Rp)
Patung Lilin	100000
Patung Keramik	150000
Boneka Akar Wangi	20000

b. Bentuk perkalian matriksnya adalah :

$$\begin{bmatrix} 20 & 35 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100000 \\ 150000 \\ 20000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (20x100000) + (35x150000) + (50x20000) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8250000 \end{bmatrix}$$

2. Perusahaan garmen “Indah” tiap bulannya mengekspor 3 macam model busana ke-4 negara tujuan. Berikut ini adalah tabel daftar barang pesanan pada bulan November 2008 dalam satuan lusin.

Jenis Model	Negara Tujuan			
	Jepang	Korea	Cina	Taiwan
A	0	25	10	0
B	20	30	11	24
C	15	0	12	16

Tabel berikut adalah daftar harga masing-masing model busana dalam satuan US $.

Model	Harga per lusin
A	120
B	144
C	180

Pertanyaan:

a. Berapakah pemasukan yang akan diperoleh perusahaan tersebut dari negara Korea pada bulan Nopember tersebut ?

b. Jika pada bulan Desember 2008 pesanan dari Jepang meningkat 3 kalinya dan pesanan dari Cina meningkat 2 kalinya, sedangkan pesanan dari Korea dan Taiwan tetap, berapakah total pesanan baju masing-masing model pada bulan Desember 2008 tersebut ?

Jawab:

a. Hasil matriks perkalian berikut ini merupakan nilai pemasukan yang akan diperoleh perusahaan"Indah"

$$\begin{bmatrix} 120 & 144 & 180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 25 & 10 & 0 \\ 20 & 30 & 11 & 24 \\ 15 & 0 & 12 & 16 \end{bmatrix}$$

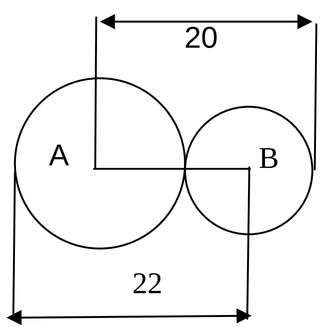
Pemasukan dari negara Korea diperoleh dari hasil kali baris ke-1 matriks harga dengan kolom ke-2 matriks pesanan, yaitu :

(120x25)+(144x30)+0 = 3000+4320 = 7320. Jadi pemasukan yang akan diperolehnya adalah US $ 7320.

b. $$\begin{bmatrix} 0 & 25 & 10 & 0 \\ 20 & 30 & 11 & 24 \\ 15 & 0 & 12 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 136 \\ 85 \end{bmatrix}$$

Jadi daftar pesanan dari 4 negara pada bulan Desember 2008 adalah 45 lusin model A, 136 lusin model B dan 85 lusin model C.

3



Hubungan antara roda gigi A dan roda gigi B seperti pada gambar di samping. Hitunglah jari-jari masing-masing roda dengan menggunakan matriks!

Jawab:

Berdasarkan gambar di atas, hubungan roda gigi A dan roda gigi B dinyatakan dalam sistem persamaan linear berikut ini:

$r_A + 2r_B = 20$

$2r_A + r_B = 22$

Dalam bentuk matriks menjadi: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_A \\ r_B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20 \\ 22 \end{bmatrix}$,

Misal Y=$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, maka $Y^{-1}=\frac{1}{1-4}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}= -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} r_A \\ r_B \end{bmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 \\ 22 \end{bmatrix}= -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -24 \\ -18 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$

Jadi, jari-jari roda gigi A = 8 dan jari-jari roda gigi B = 6

4. Sebuah perusahaan roti donat selalu mencatat jumlah tiap jenis donat yang terjual di tiga tokonya, sehingga perusahaan itu dapat terus memantau penyaluran produknya tanpa harus memproduksi ekstra. Berikut adalah data penjualan selama 2 hari :

Senin:

	Coklat	Kacang	Keju	Strawberry
Toko Big Donat	120	97	64	75
TokoCal's Donat	80	59	36	60
Toko Donats Inc	72	84	29	48

Selasa :

	Coklat	Kacang	Keju	Strawberry
Toko Big Donat	112	87	56	74
TokoCal's Donat	84	65	39	70
Toko Donats Inc	88	98	43	60

Pertanyaan:

a. Tulislah dalam bentuk matriks dan beri nama untuk masing-masing hari. Hitunglah total donat yang terjual pada kedua hari itu dalam bentuk matriks !

b. Setiap jenis donat memerlukan kira-kira $\frac{1}{4}$ cawan tepung. Jika ada 4 cawan dalam 1 pon tepung, berapa pon tepung yang diperlukan untuk memproduksi pada dua hari tersebut ?

<u>Jawab</u>:

a. Matriks penjualan pada hari Senin = M = $\begin{bmatrix} 120 & 97 & 64 & 75 \\ 80 & 59 & 36 & 60 \\ 72 & 84 & 29 & 48 \end{bmatrix}$

Matriks penjualan pada hari Selasa = T = $\begin{bmatrix} 112 & 87 & 56 & 74 \\ 84 & 65 & 39 & 70 \\ 88 & 98 & 43 & 60 \end{bmatrix}$

Jumlah total donat yang terjual selama dua hari = M + T

$$\begin{bmatrix} 120 & 97 & 64 & 75 \\ 80 & 59 & 36 & 60 \\ 72 & 84 & 29 & 48 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 112 & 87 & 56 & 74 \\ 84 & 65 & 39 & 70 \\ 88 & 98 & 43 & 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 232 & 184 & 120 & 149 \\ 164 & 124 & 75 & 130 \\ 160 & 182 & 72 & 108 \end{bmatrix}$$

b. Satu pon tepung dapat dipakai untuk membuat 4x4 = 16 donat . Total donat yang terjual pada dua hari untuk masing-masing toko adalah

$$\begin{bmatrix} 232 \\ 164 \\ 160 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 184 \\ 124 \\ 182 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 120 \\ 75 \\ 72 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 149 \\ 130 \\ 108 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 685 \\ 493 \\ 522 \end{bmatrix}$$

Total donat yang terjual dari ketiga toko adalah 685+493+522 = 1700, jadi tepung yang dibutuhkan untuk memproduksi donat sejumlah 1700 adalah 1700 : 16 = 106, 25.

5. Sebuah pabrik tekstil hendak menyusun tabel aktiva mesin dan penyusutan mesin selama 1 tahun yang dinilai sama dengan 10% dari harga perolehan sebagai berikut:

Jenis Aktiva	Harga Perolehan (Rp)	Penyusutan tahun I (Rp)	Harga Baku (Rp)
Mesin A	25.000.000	2.500.000	
Mesin B	65.000.000	6.500.000	
Mesin C	48.000.000	4.800.000	

Untuk melengkapi tabel tersebut, hitunglah harga baku masing-masing mesin dengan menggunakan matriks !

Jawab: Harga baku = harga perolehan-penyusutan tahun I

$$= \begin{bmatrix} 25.000.000 \\ 65.000.000 \\ 48.000.000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.500.000 \\ 6.500.000 \\ 4.800.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.500.000 \\ 58.500.000 \\ 43.200.000 \end{bmatrix}$$

Jadi, tabel Aktiva Mesin secara lengkap adalah:

Jenis Aktiva	Harga Perolehan (Rp)	Penyusutan tahun I (Rp)	Harga Baku (Rp)
Mesin A	25.000.000	2.500.000	22.500.000
Mesin B	65.000.000	6.500.000	58.500.000
Mesin C	48.000.000	4.800.000	43.200.000

Lembar Kerja

1. Jika A = $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 & 6 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & -9 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$, tentukan ordo A dan a_{23} !

2. Sebutkan jenis matriks berikut ini :

   a. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 & 0 \\ 5 & 2 & 6 & 9 \\ 8 & 6 & 3 & 7 \\ 0 & 9 & 7 & 4 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Jika A = $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$, B=$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 7 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ dan A + B = C^T, tentukanlah matriks C !

4. Jika A =$\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ dan $(AB)^{-1}$= $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -12 & 14 \end{bmatrix}$, maka :

   a. Tentukan A^{-1}

   b. Tentukan B^{-1}

5. Jika P = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ dan Q =$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

   a. Tentukanlah PQ

   b. Tentukan $P(\frac{1}{2}Q)$

6. Untuk sembarang nilai a carilah nilai x yang memenuhi bila diketahui det(A)=0 untuk matriks :

   a. A = $\begin{bmatrix} x & a \\ a & 2 \end{bmatrix}$ b. A = $\begin{bmatrix} a & 4 \\ a & x \end{bmatrix}$

7. Jika P = $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ dan Q = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, hitunglah :

   a. Det(P) b. Det(Q) c. Det(PQ)

   Apa kesimpulan anda setelah melakukan perhitungan di atas ?

8. Jika $P_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ carilah det(P) dengan menggunakan :

a. Metode Sarrus

b. Metode Kofaktor

9. Biro travel “Lintas ” mengelola perjalanan antar 3 kota. Berikut adalah catatan perjalanan travel “Lintas” pada tanggal 22 Nopember 2008, sebuah mobil yang berangkat dari kota A tujuan kota B membawa 8 penumpang, dan mobil tujuan kota C membawa 12 penumpang, mobil yang berangkat dari kota B ke kota A membawa 10 penumpang dan mobil tujuan kota C membawa 9 penumpang, dari kota C berangkat sebuah mobil tujuan kota A berpenumpang 11 dan tujuan kota B berpenumpang 7 orang. Bila harga tiket antar kota A ke B Rp.42.000,00 per orang, antar kota B dan kota C Rp. 45.000,00 per orang dan antar kota A ke kota C Rp.40.000, 00 per orang. Ubahlah soal ini dalam bentuk matriks!. Bagaimana cara menghitung pendapatan biro hari itu dengan matriks yang anda buat ?

10. Perusahaan roti “ Harum” mempunyai tiga pabrik yang masing-masing memproduksi jenis roti yang berbeda. Tiap harinya perusahaan itu memasarkan produknya antar tiga cabang pabrik sejumlah 50 kotak (tiap kotak berisi 500 bungkus roti) dan mengembalikan roti yang sudah rusak ke pabrik pembuatnya. Berikut ini adalah daftar pengembalian roti per kotak :

Tujuan / Pengirim	Cabang I	Cabang II	Cabang III
Cabang I	0	2	3
Cabang II	4	0	2
Cabang III	1	3	0

Hitunglah jumlah roti yang diterima masing-masing cabang setelah dikurangi roti yang rusak!

Bab IV
Penutup

Matriks merupakan salah satu metode dalam matematika untuk menyelesaikan soal-soal yang berkaitan dengan beberapa data atau beberapa variabel. Data-data yang tersajikan dalam bentuk tabel dapat dianalisa dengan menggunakan matriks. Variabel-variabel dalam masalah persamaan linier juga dapat diselesaikan dengan matriks.

Pada bahan ajar matriks ini contoh-contoh penerapan dalam kehidupan sehari-hari belum semua diberikan pada semua program keahlian di SMK tetapi hanya diberikan sebagian saja dan diharapkan peserta diklat dapat memberikan contoh sesuai program keahlian yang diajarkan.

Dalam pembelajaran matriks hendaknya:

1. Dikaitkan dengan realitas kehidupan, dekat dengan alam pikiran siswa dan relevan dengan masyarakat serta sesuai program keahlian . Hal tersebut diangkat sebagai masalah yang dapat diselesaikan dengan matriks.
2. Memberi kesempatan pada siswa secara bersama-sama untuk aktif mencari dan menemukan konsep dasar matriks.
3. Dapat memberikan keterampilan yang menunjang kecakapan hidup bagi siswa, membantu berkembangnya kecakapan personal dalam diri siswa dan dapat meningkatkan kemampuan siswa untuk berfikir rasional dan kreatif untuk mencari pemecahan masalah.

Semoga bahan ajar ini bermanfaat dan menjadi salah satu sumber bacaan bagi para guru dalam pembelajaran matematika di SMK. Penulis menyadari adanya keterbatasan dan kekurangan dalam penyusunan bahan ajar ini, sehingga kritik dan saran sangat diharapkan dari pembaca.

Daftar Pustaka

Alan G. Foster and friends. 1995. *Merrill Algebra 2 with Trigonometry Aplication and Connection*. Ohio. MacMillan/McGraw Hill Publishing

Anton, H ; 1994 ; *Elementary Linear Algebra ;* John Willey & Sons, N.Y

Howard Anton ; alih bahasa oleh Pantur Silaban. 1991. *Aljabar Linier Elementer*. Jakarta: Erlangga

Kreyzig,E ; 1988 ; *Advanced Engineering Mathematics* ; Singapore ; John Willey & Sons

Klimartha *Eka* Putri M, Herry Sukarman. 2002. *Bahan Ajar Matematika SMK Kelompok Bidang Keahlian Non Teknik*. Yogyakarta: PPPG Matematika

Maman Abdurrahman. 2000. *Matematika SMK Bisnis dan Manajemen Tingkat I*. Bandung: Armico

M. Nababan , 1993 ; *Pengantar Matematika untuk Ilmu Ekonomi dan Bisnis,* Jakarta , Penerbit Erlangga

.

Lampiran Kunci Jawaban

1. Ordo A adalah 3x5 dan $a_{23}=0$.

2. a. Matriks segitiga bawah, matriks persegi berordo 3

   b. Matriks simetri, matriks persegi berordo berordo 4

   c. Matriks persegi berordo 3

3. $C = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

4. a. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{6}{30} & -\frac{2}{30} \\ -\frac{9}{30} & \frac{8}{30} \end{bmatrix}$

   b. $B^{-1} = \begin{bmatrix} 60 & 30 \\ 30 & 60 \end{bmatrix}$

5. a. $P_{4x2}Q_{2x3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 14 & 16 & 18 \\ 6 & 3 & 3 \\ 28 & 32 & 36 \end{bmatrix}$

   b. $P(\frac{1}{2}Q) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 7 & 8 & 9 \\ 3 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix}$

6. a. $x = \frac{1}{2}a^2$

   b. x=4 untuk sembarang nilai a.

7. a. Det(P) = 7

   b. Det(Q) = 4

   c. det(PQ) = 28

   Kesimpulan : det(PQ) = det(P). det(Q)

8. a. Metode Sarrus

   det(P) =9

b. Metode Kofaktor

det(P) = 9

9. P = matriks penumpang = $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 12 \\ 10 & 9 & 0 \\ 0 & 7 & 11 \end{bmatrix}$,

H=matriks harga = $\begin{bmatrix} 42000 \\ 45000 \\ 40000 \end{bmatrix}$

Cara menghitung pendapatan pada hari itu adalah P kali H, apabila ingin mengetahui total pendapatan dari ke-3 cabang kita tinggal menjumlahkan elemen-elemen matriks PH.

10. $\begin{bmatrix} 0 & 46 & 49 \\ 48 & 0 & 47 \\ 47 & 48 & 0 \end{bmatrix}$, elemen ij menyatakan jumlah kotak roti yang dikirim pabrik i ke j setelah dikurangi yang rusak.