دانشگاه تهران
پردیس دانشکده‌های فنی

پردازش سیگنال های دیجیتال

گزارش فاز ۲ پروژه ۱

سید علیرضا جاوید

۸۱۰۱۹۸۳۷۵

استاد

دکتر بدیعی

۱ دی ۱۴۰۱

فهرست مطالب

مقدمه

در ادامه فاز قبل در این تمرین نیز با تبدیل فوریه و نمایش حوزه فرکانس در مسئله اول تخمین فرکانسی و ارائه روش مناسبی برای تخمین را ارائه می دهیم. سپس به تبدیل فوریه سیگنال های متناوب می پردازیم و در انتها سعی می کنیم سرعت یک خودرو را با استفاده از داده های آنتن بررسی کنیم.

۱ تخمینگر فرکانس

یک سیگنال (بردار) x به طول M سمپل و T ثانیه را در نظر بگیرید، ($t_s = \frac{1}{f_s} = \frac{T}{M-1}$) که در واقع f_s فرکانس نمونه برداری و t_s فاصله زمانی بین دو سمپل را نشان می دهد. این دو پارامتر به ما می گویند که از سیگنال پیوسته اصلی به چه صورت نمونه برداری شده است و سیگنال گسسته فعلی تولید شده است. حالا اگر بخواهیم در متلب از آن تبدیل فوریه بگیریم از دستور $X = fftshift(fft(x, N))$ استفاده می کنیم. که خروجی آن یک بردار مختلط با طول N می باشد.($N\ Points\ \ DFT$) در این صورت فرکانس ها به صورت $f = \frac{-f_s}{2}\ :\ \frac{f_s}{N-1}\ :\ \frac{f_s}{2}$ می باشد و از آن در رسم تبدیل فوریه می توان استفاده کرد. برای درک بهتر توضیحات سوال به نکته زیر توجه کنید.

رزولوشن فرکانسی

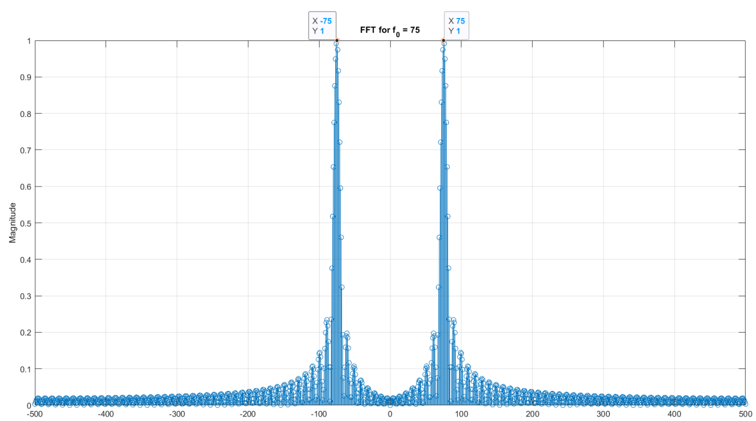
رزولوشن فرکانسی به صورت $\delta_f = \frac{f_s}{N-1}$ تعریف می شود و بیانگر گام های فرکانسی است که می توان در نظر گرفت تا سیگنال گسسته را در فضای فوریه توصیف کرد و به تعداد نقاط تبدیل فوریه گسسته بستگی دارد.

در این سوال سیگنال x به صورت زیر تعریف می شود و ما با استفاده از نمایش حوزه فرکانس آن سعی در تخمین مقدار f_0 خواهیم داشت.

$$x(t) = cos(2\pi f_0 t)$$

۱.۱ تبدیل فوریه با $f_0 = 75\ Hz$

با توجه به نکات گفته شده تبدیل فوریه سیگنال را رسم کرده و شکل زیر را به دست می آوریم:



شکل ۱: تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ به ازای $f_0 = 75\ Hz$

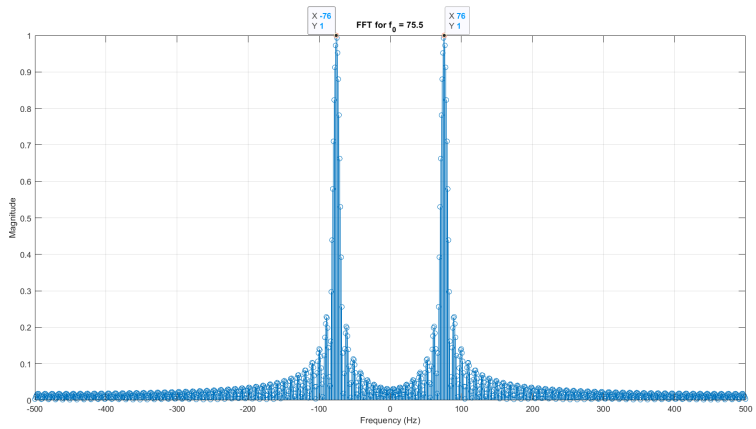
همانطور که در شکل ۱ مشخص است نقاط 75 و -75 هرتز نقاط ماکسیمم و برآیند تخمین فرکانسی است.

۲.۱ بررسی نتایج تبدیل فوریه با $f_0 = 75\ Hz$

همانطور که مشاهده می شود در این قسمت، تخمین بدست آمده با سیگنال اصلی منطبق است و بیشترین مقادیر در $\pm 75\ Hz$ رخ می دهد و تخمین بدست آمده صحیح است.

۳.۱ تبدیل فوریه با $f_0 = 75.5\ Hz$

حالا قسمت اول را با فرکانس $f_0 = 75.5\ Hz$ تکرار می کنیم.



شکل ۲: تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ به ازای $f_0 = 75\ Hz$

مطابق شکل ۲، در این قسمت بیشترین مقادیر در $\pm 76\ Hz$ رخ می دهد و نقاط تخمین زده شده برابر با فرکانس اصلی نمی باشند و پاسخ بدست آمده صحیح نیست.

۴.۱ بررسی و مقایسه نتایج تبدیل فوریه با $f_0 = 75\ Hz$ و $f_0 = 75.5\ Hz$

در صورتی که به نکات ابتدایی این بخش توجه کنید رزولوشن فرکانسی در این سوال برابر یک هرتز می باشد و مقادیر کوچکتر قابل تشخیص نیستند. به صورت تئوری توجه کنید که:

$$X[K] = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2k\pi}{N}}$$

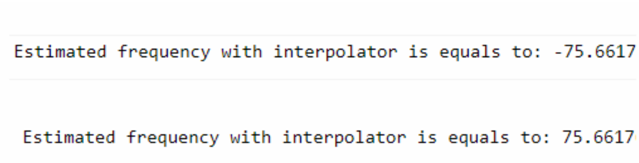
یعنی در FFT که الگوریتمی برای محاسبه DFT می باشد مطابق بالا، نمونه برداری از $DTFT$ به صورتی انجام می شود که بین هر سمبل فاصله ای برابر $\frac{f_s}{N-1}$ وجود دارد که به صورت رزولوشن فرکانسی معرفی شد. در این سوال این مقدار برابر یک هرتز می باشد و یعنی نقاط ماکسیمم در $DTFT$ سیگنال که در $\pm 75.5\ Hz$ رخ می دهد نمونه برداری نشده اند و تنها تقریبی از نقاط ماکسیمم در $\pm 76\ Hz$ زده شده است. به صورت کلی می توان گفت که چون دقت $f_0 = 75.5\ Hz$ از رزولوشن فرکانسی بیشتر است، با تبدیل فوریه N نقطه ای بالا نمی توان این فرکانس را تشخیص داد اما برای $f_0 = 75\ Hz$ این تخمین امکان پذیر بود.

۵.۱ تخمین نقاط نمونه برداری با درونیاب

مطابق رابطه داده شده تابع زیر را تعریف می کنیم.

```
function y = sample_interpolator(X, f_I, f_hat)
    y = f_hat + 1.25*(3*X(f_I+3)+2*X(f_I+2)+ ...
    X(f_I+1)-X(f_I-1)-2*X(f_I-2)-3*X(f_I-3));
end
```

با استفاده از این تابع تخمین درونیاب بدست آمده برابر است با:



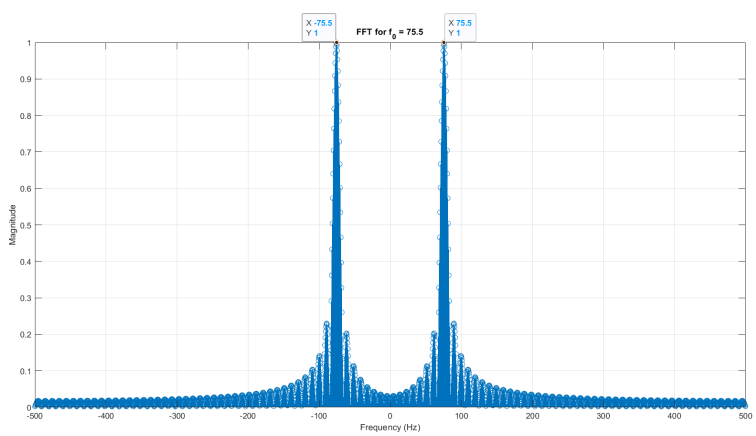
```
Estimated frequency with interpolator is equals to: -75.6617

Estimated frequency with interpolator is equals to: 75.6617
```

شکل ۳: تخمین فرکانسی با درونیاب

همانطور که در شکل ۳ مشخص است، مقدار تخمین زده شده تفاوت کرد و به مقدار اصلی نزدیک تر شد. خطای تخمین نیز از 0.5 هرتز به تقریبا 0.1 هرتز کاهش یافته است که تقریب خوبی به شمار می رود.

۶.۱ افزایش دقت نمونه برداری با افزایش N

اگر قسمت سوم را با $N = 2f_s$ تکرار کنیم، خواهیم داشت:



شکل ۴: تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ به ازای $f_0 = 75.5\ Hz$ و $N = 2f_s$

همانطور که مشخص است در این بخش رزولوشن فرکانسی 0.5 هرتز می باشد و قابلیت تفکیک به خوبی وجود دارد و مقدار تخمین شده عدد درستی را نشان می دهد.

در حالت کلی اگر مقدار N را به بینهایت میل دهیم تبدیل $N\ Points\ \ DFT$ با تبدیل $DTFT$ یکسان می شود و می توان فرکانس را به درستی تخمین زد. البته باید در نظر گرفت افزایش N هزینه محاسباتی را زیاد می کند و می تواند در عمل ممکن نباشد.

از طرفی استفاده از درونیاب به طور کلی نمی تواند خطا را صفر کند، زیرا همانطور که در فاز قبل مشاهده کردیم اگر نمونه برداری به درستی انجام نشود و از مقدار N مناسبی استفاده نشود امکان بازیابی سیگنال به درستی، می تواند ممکن نباشد و تخمین صحیح به دست نیاید.

۲ بررسی تبدیل فوریه سیگنال متناوب

مطابق سوال سیگنال $x(t)$ را به صورت زیر داریم:

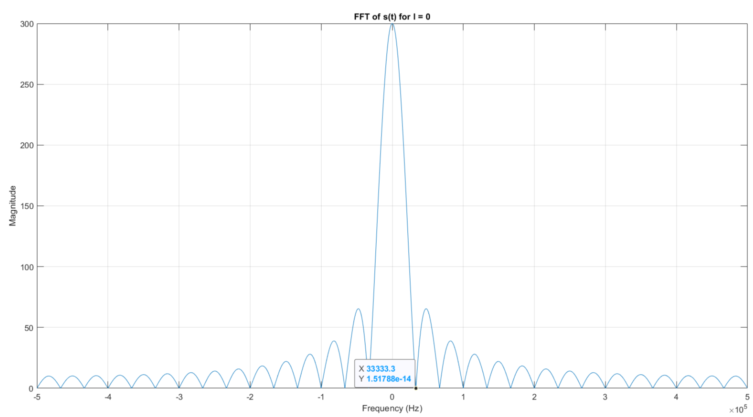
$$x\left(t\right)=\begin{cases}10 & ,0\leq t\leq 30\mu s\\ 0 & ,30\mu s<t\leq 3\text{ms}\end{cases}$$

و سیگنال $s(t)$ نیز به صورت زیر تعریف می شود.

$$s(t)=\sum_{i=0}^{I}x(t-iT)$$

۱.۲ تبدیل فوریه $x(t)$ ($I=0$)

در ابتدا از سیگنال $x(t)$ با فرکانس $1\ MHz$ نمونه برداری می کنیم. سپس با گرفتن تبدیل فوریه $N=3000$ نقطه ای از آن داریم:



شکل ۵: تبدیل فوریه سیگنال $s(t)$ به ازای $I=0$

۲.۲ بدست آوردن δ_I برای $I=0$

برای بدست آوردن اولین نال یا ریشه از کد زیر در متلب استفاده می کنیم:

```
function y = find_first_root(X, f)
  epsilon = 10^-13;
  ix = find(abs(X) < epsilon);
  [¬,c] = find(f(ix) > 0,1);
  y = f(ix(c));
end
```

که با اجرای آن در این مسئله بدست می آوریم

$$\delta_I = 3333.33\ Hz$$

توجه کنید به دلیل رزولوشن فرکانسی نسبتا زیاد، فرکانس گفته شده با تقریب همراه خواهد بود. در صورتی که δ_I را برحسب k در تبدیل DFT متقارن شده بیان کنیم در این بخش $k = 100$ خواهد بود.

$$\delta_I = 100$$

۳.۲ بدست آوردن پهنای باند با معیار $3 - dB$ برای $I = 0$

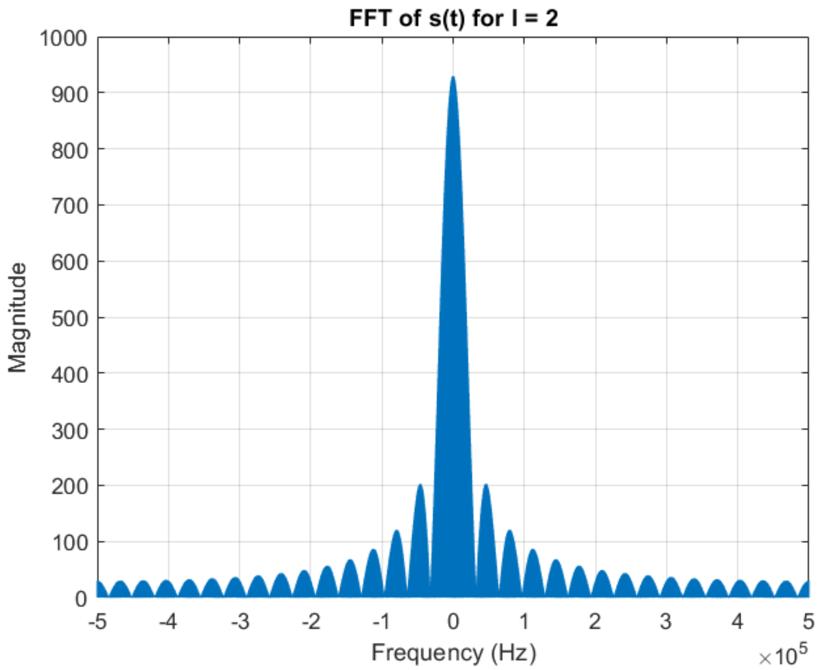
به کمک تعریف گفته شده در پاورقی سوال، از تابع زیر در متلب برای محاسبه پهنای باند استفاده می کنیم.

```
function y = BW3db(x)
  N = length(x);
  M = max(abs(x));
  counter = 0;
  for n = 1:N
    if abs(x(n)) > sqrt(2)/2*M
      counter = counter +1;
    end
  end
  y = counter/n *2*pi;
end
```

با اجرای این کد 0.1864 را خروجی می گیریم که بیانگر آن است که 18.64% سیگنال بیش از $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ماکسیمم سیگنال می باشد.

۴.۲ تبدیل فوریه $s(t)$ به ازای $I = 2$

پس از نمونه برداری از سیگنال با فرکانس $1\ MHz$ با گرفتن تبدیل فوریه $N = 9000$ نقطه ای از آن داریم:



شکل ۶: تبدیل فوریه سیگنال $s(t)$ به ازای $I = 2$

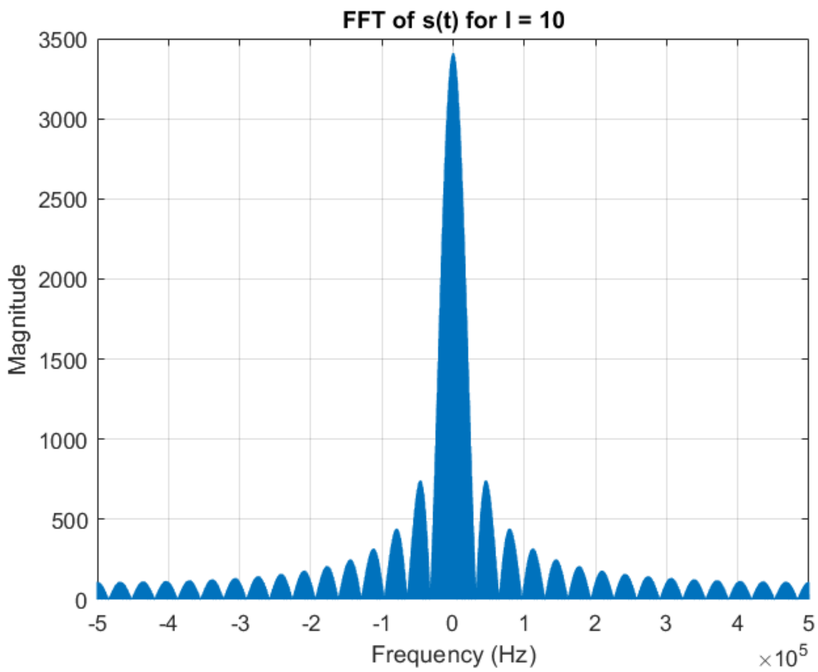
با کمک توابع نوشته شده قسمت قبل داریم:

$$BW_{3dB} = 0.059 \quad , \quad \delta_I = 111.11\,Hz \quad or, \quad \delta_I = 1$$

همانطور که در بخش قبل گفته شد در این بخش نیز برای δ_I برحسب k در تبدیل DFT متقارن شده، برابر $k = 1$ خواهد بود.

۵.۲ تبدیل فوریه $s(t)$ به ازای $I = 10$

پس از نمونه برداری از سیگنال با فرکانس $1\ MHz$ با گرفتن تبدیل فوریه $N = 33000$ نقطه ای از آن داریم:



شکل ۷: تبدیل فوریه سیگنال $s(t)$ به ازای $I = 10$

با کمک توابع نوشته شده قسمت قبل داریم:

$$BW_{3dB} = 0.016 \quad , \quad \delta_I = 30.30\,Hz \quad or, \quad \delta_I = 1$$

برای δ_I برحسب k در تبدیل DFT متقارن شده، برابر $k = 1$ خواهد بود.

۶.۲ تحلیل تغییر تبدیل فوریه و پهنای باند با افزایش I

اگر به تصاویر بخش های قبل توجه کنید با افزایش I نقطه اوج تبدیل فوریه نسبت به سایر نقاط رشد بیشتری دارد و به همین خاطر پهنای باند سیگنال کاهش پیدا میکند. با افزایش I پهنای باند آنقدر کم میشود تا به دلتا دیراک تبدیل شود و سیگنال پایین گذر باقی میماند.

۷.۲ تحلیل تغییر δ_I با افزایش I

پس از نمونه برداری از سیگنال پیوسته داریم:

$$x[n] = \begin{cases} 10 & ,0 \leq n \leq 30 \\ 0 & ,\ otherwise \end{cases}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega 30}}{1 - e^{-j\omega}}$$

پس برای تبدیل فوریه $DTFT$ سیگنال $s[n]$ داریم:

$$S(e^{j\omega}) = \sum_{i=0}^{I} e^{-j\omega 3000\times i} X(e^{j\omega})$$

$$S(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j\omega 3000\times I}}{1 - e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j\omega 3000\times I}}{1 - e^{-j\omega}} \times \frac{1 - e^{-j\omega 30}}{1 - e^{-j\omega}}$$

برای ریشه های $X(e^{j\omega})$ می توان نوشت:

$$e^{-j\omega 30} = 1 \rightarrow \ \ \omega = \frac{2\pi}{30} \times k \quad , \quad k = 1, 2, ...$$

در تبدیل DFT متقارن شده نیز اگر $\omega = \frac{2\pi k}{N}$ بنویسیم می توان دید $k = 100$ یک جواب خواهد بود که با قسمت اول همخوانی دارد. برای $S(e^{j\omega})$ نیز بجز ریشه های $X(e^{j\omega})$ داریم:

$$e^{-j\omega 3000\times I} = 1 \rightarrow \ \ \omega = \frac{2\pi}{3000 \times I} \times k \quad , \quad k = 1, 2, ...$$

در تبدیل DFT متقارن شده نیز اگر $\omega = \frac{2\pi k}{N}$ بنویسیم می توان دید $k = 1$ یک جواب خواهد بود و با نتایج قسمت های قبل همخوانی دارد.

۸.۲ تحلیل تغییر $S(j\Omega)$ با افزایش I

در صورتی که I را به بی نهایت میل دهیم در حقیقت یک سیگنال متناوب خواهیم داشت که بر حسب سری فوریه می توان بیان کرد. پس می توان نوشت:

$$S(j\Omega) = \sum_{k=0}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\Omega - \frac{2\pi}{T} k)$$

که در آن a_k ضرایب فوریه سیگنال متناوب می باشد. پس تبدیل فوریه $s(t)$ یک قطار ضربه به صورت کلی با ضرایب متناسب می باشد.

۳ تخمین سرعت اتومبیل

میخواهیم سرعت یک اتومبیل در خیابان را تخمین بزنیم. رابطه سیگنال تابیده شده به آنتن و سیگنال دریافت شده در آن به صورت زیر می باشد.

$$y(t) = \beta e^{j2\pi f_d t} x(t - \frac{2R_0}{c}) + n(t)$$

۱.۳ دلیل تأخیر $\frac{2R_0}{c}$

در رابطه بالا R_0 بیانگر فاصله آنتن تا اتومبیل می باشد. هنگام حل معادله موج، حل دالامپر موجی که در راستای z با سرعت c حرکت می کند را به صورت $F(t - \frac{z}{c})$ نشان داده می شود. حال در معادله گفته شده سیگنال برگشتی برحسب سیگنال تابیده شده از آنتن به صورت $x(t - \frac{2R_0}{c})$ با سیگنال دریافتی در آنتن رابطه دارد که بیانگر آن است که سیگنال مقدار $2R_0$ (رفت و برگشت) را با سرعت c پیموده است.

۲.۳ تبدیل فوریه $y(t)$

با گرفتن تبدیل فوریه نمایش حوزه فرکانسی رابطه اولیه را به صورت زیر داریم:

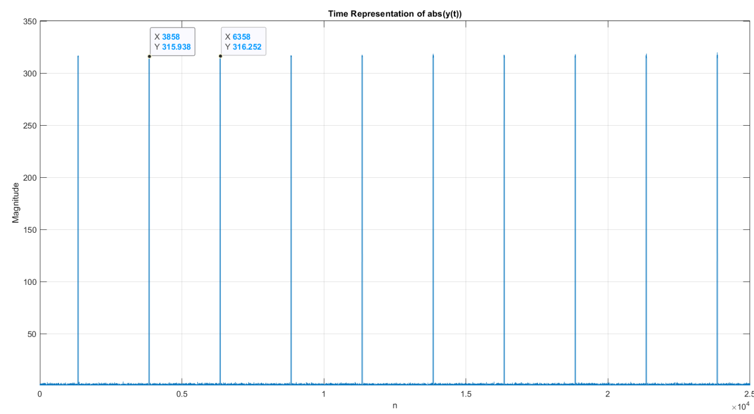
$$Y(f) = \beta e^{-j\frac{2R_0}{c}2\pi f} X(f - f_d) + N(f)$$

۳.۳ تخمین f_d با $Y(f)$

با توجه به رابطه حوزه فرکانس که نشان داده شد و نتیجه سوال دوم که پالس $x(t)$ به صورت یک ضربه می توان نشان داد، برای تخمین f_d می توانیم از روش گفته شده در سوال اول استفاده کنیم و فرکانس ضربه مربوط در $Y(f)$ را پیدا کرده و f_d را تخمین بزنیم. در واقع به f_d شیفت داپلر گفته می شود که برای اندازه گیری آن باید فرکانس مربوط به بیشترین مقدار سیگنال در نمایش فوریه را بدست آوریم.

۴.۳ تحلیل $y(t)$

با رسم سیگنال $y(t)$ داده شده در حوزه زمان داریم:



شکل ۸: نمایش حزوه زمان $y(t)$

با دقت در شکل می توان متوجه شد که ۱۰ ضربه در حوزه زمان داریم که مقدار ماکسیمم سیگنال را دارند. با توجه به سوال دوم و رابطه

$$s(t) = \sum_{i=0}^{I} x(t - iT)$$

می توان گفت که در اینجا $I = 9$ می باشد و در کل 10 پالس مشاهده شده می شود. همچنین با توجه به فرکانس نمونه برداری $1\ MHz$ در این سوال، نقاط مشخص شده در تصویر که فاصله بین دو پالس را 2500 نشان می دهد و مقایسه با نتایج بخش دوم می توان گفت:(البته با توجه به نویز برای اندازه $x(t)$ تقریب زده شده است.)

$$x\left(t\right) = \begin{cases} 316 & , 0 \leq t \leq 25\mu s \\ 0 & , 25\mu s < t \leq 2.5\text{ms} \end{cases} \quad , \quad T = 2.5\ ms$$

۵.۳ تخمین R_0

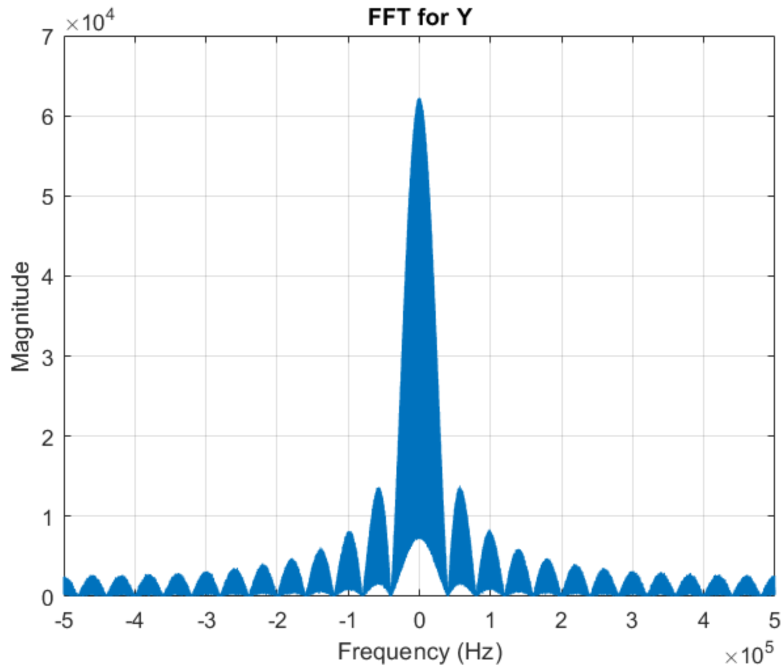
همانطور که گفته شد برای تخمین R_0 با محاسبه همبستگی 2 سیگنال، مقدار ماکزیمم را بدست می آوریم که بیانگر $\frac{2R_0}{c}$ می باشد و سپس می توان R_0 را با توجه به فرکانس نمونه برداری و سرعت نور محاسبه کرد. از کد زیر در متلب برای تخمین استفاده می کنیم.

```
ro = xcorr(s,y);
nx = find(ro==max(ro))
R0 = 0.5*3*10^8*nx*10^-6
```

و در نهایت مقدار $R_0 = 3550050$ بدست می آید.

۶.۳ تخمین f_d

همانطور که گفته شد برای بدست آوردن فرکانس داپلر یا شیفت داپلر کافی است که فاصله نقطه ماکزیمم در حوزه فرکانس را با مبدا بدست آوریم. با رسم تبدیل فوریه $y(t)$ داریم:



شکل ۹: نمایش حزوه فرکانس $y(t)$

همانطور که در شکل ۹ مشخص است فرکانس مربوط به نقطه ماکزیمم تبدیل فوریه 0 است. در نتیجه با توجه به رابطه

$$f_d = \frac{2v}{f_c}$$

سرعت جسم v برابر 0 می باشد و در واقع جسم در حالت سکون قرار گرفته است.

۷.۳ بازه اطمینان تخمین f_d و R_0

ابتدا به مفهوم رزولوشن فرکانسی که در بخش اول به آن اشاره کردیم توجه کنید. با توجه به نمونه برداری از سیگنال پیوسته و تبدیل فوریه N نقطه ای مقادیر بدست آمده شامل تقریب می باشند. برای نمایش حوزه فرکانس $y(t)$، رزولوشن فرکانسی برابر

$$\frac{f_s}{N} = \frac{10^6}{25 \times 10^3} = 40$$

می باشد. پس در حقیقت تخمین $f_d = 0$ که در بخش قبل بدست آمد را به صورت دقیق تر مطابق زیر می توان نوشت:

$$-20 \leq f_d \leq 20$$

که این رابطه بازه اطمینان تقریب بدست آمده برای فرکانس داپلر را نشان می دهد.

برای تخمین R_0 نیز نمونه برداری از سیگنال با نرخ $1\ MHz$ انجام شد و در واقع زمان های کمتر از این مقدار نادیده گرفته شد. پس تقریب بدست آمده 23667 که برای $\frac{2R_0}{c}$ با روش همبستگی خطی بدست آمد، دقتی از جنس میکرو ثانیه دارد. می توان نوشت:

$$23666.5 \times 10^{-6} \leq \frac{2R_0}{c} \leq 23667.5 \times 10^{-6}$$

$$23666.5 \times 10^{-6} \times 0.5c \leq R_0 \leq 23667.5 \times 10^{-6} \times 0.5c$$

$$3549975 \leq R_0 \leq 3550125$$

که رابطه اخیر بازه اطمینان برای R_0 را نشان می دهد.