به نام خدا

دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

محاسبات عددی

گزارش تمرین متلب 4

نام و نام خانوادگی : سید علیرضا جاوید

شماره دانشجویی : 810198375

سوال 1

الف) از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می کنیم. مطابق جزوه داریم:

$$l_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}$$

$j = 0, 1, \dots, n$

$P(x) = L_0(x)\, f_0 + L_1(x)\, f_1 + \dots + Ln(x) \qquad f_n = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) lj(x)$

برای راحت تر شدن محاسبات تابع زیر را مطابق الگوریتم بالا در متلب تعریف می کنیم:

```
function output = lagrangian_interp(n,x_array)
syms x;
j=1;
i=1;
L = sym('x',[1 4]);
for k=1:n
    L(k)=1;
end
while j<=n
    while i<=n
        if(i~=j)
            L(j)=L(j).*(x-x_array(i))/(x_array(j)-x_array(i));
        end
        i=i+1;
    end
    j=j+1;
    i=i-n;
end
output = L;
end
```

سپس با خروجی تابع P را محاسبه می کنیم:

```
L = lagrangian_interp(n,Xi);
v = 0;
for i=1:n
    v = v+ Fi(i)*L(i);
end
P(x)=vpa(v);
```

خروجی این بخش مطابق زیر است.

```
The polynomial is:
```

$$3.31666666666666666666666666666667\, x^3 - 19.65\, x^2 + 26.53333333333333333333333333333333\, x + 3.0$$

```
The value of F(1) is:
```

13.2

ب) با افزودن نقطه مورد نظر محاسبات را دوباره انجام داده و خروجی زیر را بدست می آوریم:

```
The polynomial is:
```

$$-0.99270833333333333333333333333333\, x^4 + 14.23645833333333333333333333333333\, x^3 - 57.3729166666666$$

```
The value of F(1) is:
```

25.1125

سوال 2

$$f(x) = (x + \pi)\, sin(x)\, cos(2x)$$

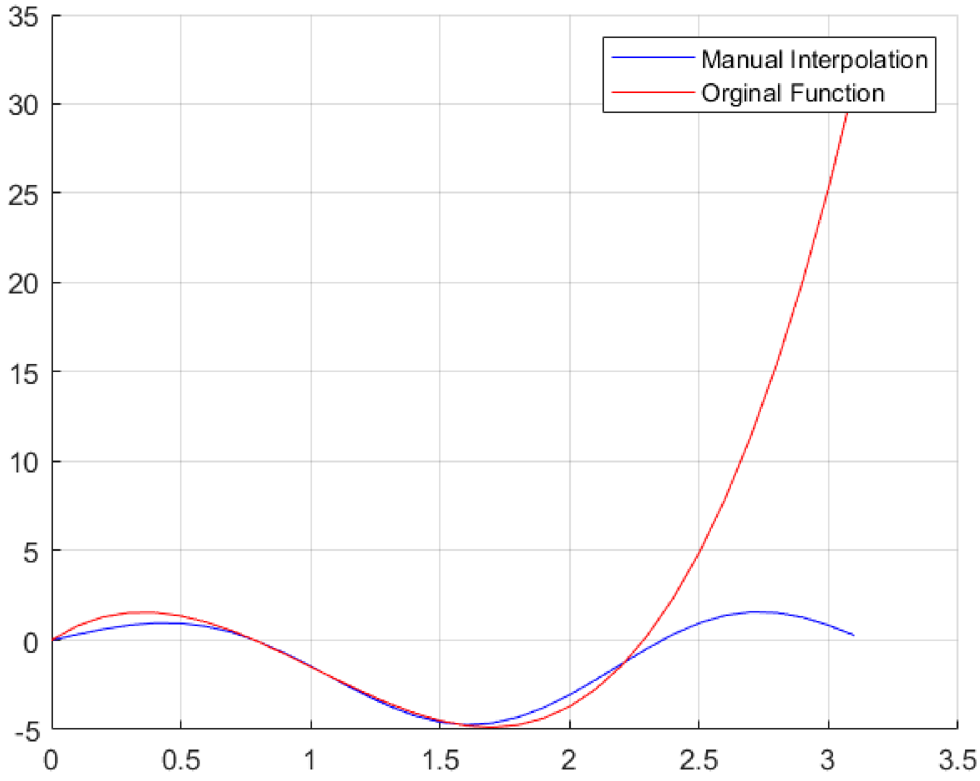
مقادیر f_i را با جایگذاری نقاط داده شده بدست می آوریم و مطابق سوال 1 چند جمله ای لاگرانژ را بدست می آوریم و برای مقایسه دو تابع را رسم می کنیم.

```
The polynomial is:
```

$$-0.9927083333333333333333333333333\, x^4 + 14.236458333$$

```
The value of F(1) is:
```

25.1125



مشخص است که در بازه خواسته شده تقریب خوبی از تابع اصلی می باشد.

سوال 3

معادله زیر را باید مینیمم کنیم:

$$F = (y - ax - b)^2$$

با مشتق گیری برحسب a و b داریم:

$$\frac{dF}{da} = 2x(y - ax - b) = 0$$

$$\frac{dF}{db} = (y - ax - b) = 0$$

مطابق زیر 2 معادله و 2 مجهول را حل می کنیم:

$$\begin{cases} m a_0 + \left(\sum x_i\right) a_1 = \sum y_i \\ \left(\sum x_i\right) a_0 + \left(\sum x_i^2\right) a_1 = \sum x_i y_i \end{cases}$$

با پیاده سازی این مراحل در متلب داریم:

```
Differentiating:
```

$$2\,x\,(b - y + a\,x)$$

$$2\,b - 2\,y + 2\,a\,x$$

```
The System of equations:
```

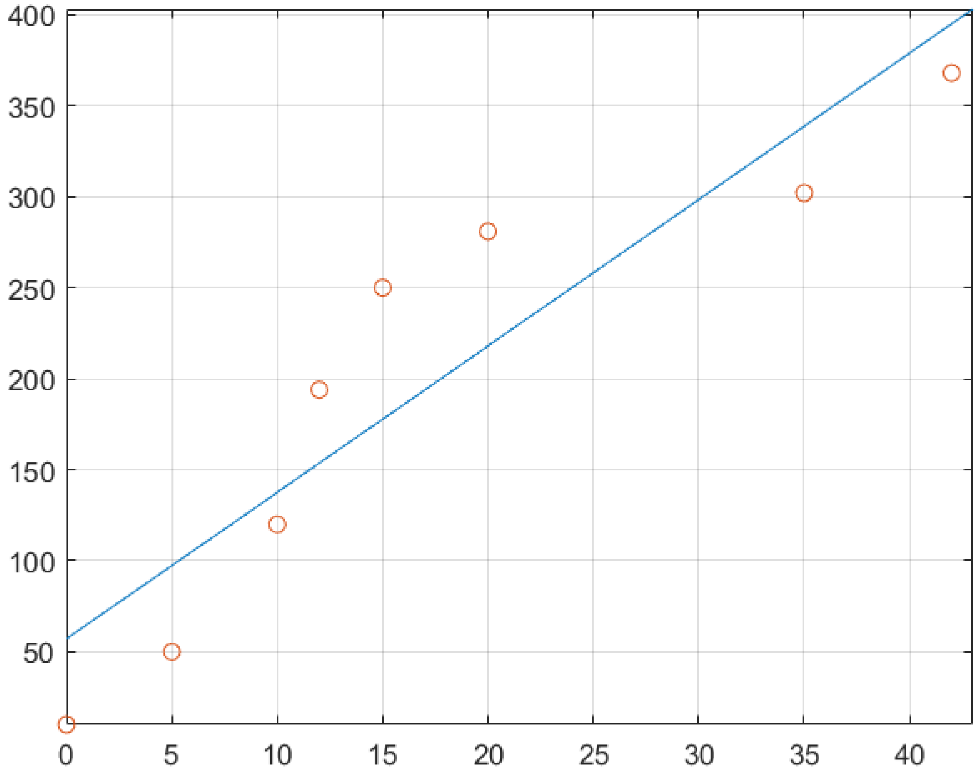
$$3883\,a + 139\,b = 39174$$

$$139\,a + 8\,b = 1575$$

و در نهایت :

$$8.0445371710806437877884697266457\,x + 57.101166652473814187175338499532$$

و با رسم آن داریم:



که تقریب خوبی به شمار می رود. کد این بخش:

```
syms x a b y;
P=(y-a*x-b)^2;
xi = [0 5 10 12 15 20 35 42];
yi=[10 50 120 194 250 281 302 368];
num = 8;
disp('Differentiating:')
disp(diff(P,a))
disp(diff(P,b))
Equation1=sum(xi.^2)*a+sum(xi)*b==sum(xi.*yi);
Equation2=sum(xi)*a+num*b==sum(yi);
disp('The System of equations:')
disp(Equation1)
disp(Equation2)
Ans = solve([Equation1, Equation2], [a, b]);
a_Ans = Ans.a;
b_Ans = Ans.b;
Ans_Pol=vpa(a_Ans*x+b_Ans);
disp(simplify(Ans_Pol))
fplot(Ans_Pol,[0 43])
hold on
scatter(xi,yi)
grid on
hold off
```

سوال 4

الف) از فرمول خطا روش ذوزنقه ای مطابق زیر استفاده می کنیم:

$$\boxed{ET(h) \leq \frac{b-a}{۱۲} h^{۲} M_{۲}}$$

با اجرای کد زیر

```
syms x
e = 0.3;
b = 1;
a = 0;
f = 1/(x^2 + 1);
M2 = abs(eval(subs(diff(f,x,2),x,0)));
h = sqrt(e * 12 * 1/(M2*(b-a)))
```

```
h = 1.3416
```

که چون h حداکثر می تواند 1 باشد مقدار آن را 1 در نظر می گیریم.

ب) فرمول خطا روش سیمپسون مطابق زیر استفاده می کنیم:

$$|Es(h)| \leq \frac{b-a}{180} h^4 M_4$$

توجه شود که باید $n = \frac{1}{h}$ عددی زوج باشد. پس به صورت زیر کد متلب را می نویسیم:

```
syms x
e = 0.0001;
b = 1;
a = 0;
f = 1/(x^2 + 1);
M4 = abs(eval(subs(diff(f,x,4),x,0)));
h = (e * 180 * 1/(M4*(b-a)^5))^0.25;
n = ceil(1/h);
if rem(n,2) == 1
    n = n + 1;
end
h = 1/n;
I= eval(h/3*(subs(f,x,0)+4*sum(subs(f,x,h:2*h:1-h))+ ...
    2*sum(subs(f,x,2*h:2*h:1-h))+subs(f,x,1)))
```

با اجرای این کد در نهایت

```
I = 0.7854
```

بدست می آید.

ج) ابتدا تغییر متغیر داده تا بازه را به 1 تا 1- تبدیل کنیم:

$$x = \frac{t+1}{2}$$

سپس مطابق درس می دانیم که

$$\int_{-1}^{1} f(t)\, dt = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

و مقدار انتگرال را بدست می آوریم.

با کد متلب زیر

```
x = @(t) (t+1)./2;
f = @(x) 1./(x.^2 + 1);
d = sqrt(3) / 3;
G_I = 0.5 * (f(x(-d)) + f(x(d)))
```

در نهایت خروجی زیر بدست می آید.

```
G_I = 0.7869
```