دانشگاه تهران
پردیس دانشکده‌های فنی
دانشکدهٔ برق و کامپیوتر

سیگنال ها و سیستم ها

گزارش تمرین کامپیوتری سوم

سید علیرضا جاوید

۸۱۰۱۹۸۳۷۵

استاد

دکتر سعید اخوان

۱۰ خرداد ۱۴۰۰

فهرست مطالب

۱ بخش اول

در این قسمت سعی می شود که نتایج تئوری که در درس گفته شد برای چند سیگنال با نرم افزار متلب[1] مورد آزمون قرار گیرد و منطبق بودن کلی آنها نتیجه شود. همچنین در تمامی قسمت ها از قطعه کد زیر برای فرکانس و زمان و تبدیل فوریه و در نهایت رسم اندازه تبدیل فوریه استفاده شده است .

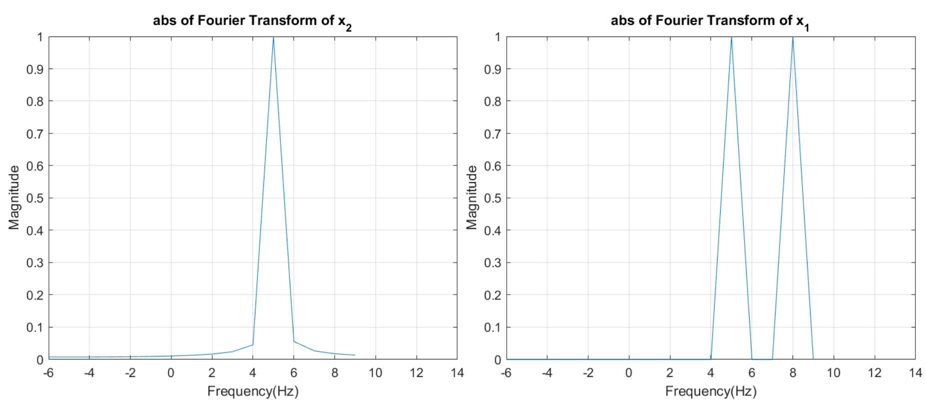
```
Ti = Tendi - Tstarti;
fsi = X;
fi = -fs/2:1/T:fs/2-1/T;
ti = Tstart:1/fs:Tend-1/fs;
yi = fftshift(fft(xi));
plot(f,abs(yi)/max(abs(yi)));
```

۱.۱ تمرین صفر

بررسی رزولوشن فرکانسی قدرت تفکیک پذیری فرکانسی در تبدیل فوریه

داریم که $x_1\left(t\right)=e^{j2\pi 8t}+e^{j2\pi 5t}$ و همچنین $x_2\left(t\right)=e^{j2\pi 5t}+e^{j2\pi 5.1t}$

با مقایسه نتایج در متلب و شکل ۱ و ۲ متوجه می شویم که اگر اختلاف فرکانس تن کمتر از δ_f باشد دیگر توانایی تفکیک این دو سیگنال را در حوزه ی فرکانس نخواهیم داشت و تنها یک قله مشاهده می شود.



(ب) اندازه تبدیل فوریه سیگنال x_2 (آ) اندازه تبدیل فوریه سیگنال x_1

شکل ۱: تبدیل فوریه ۲ سیگنال تمرین ۰

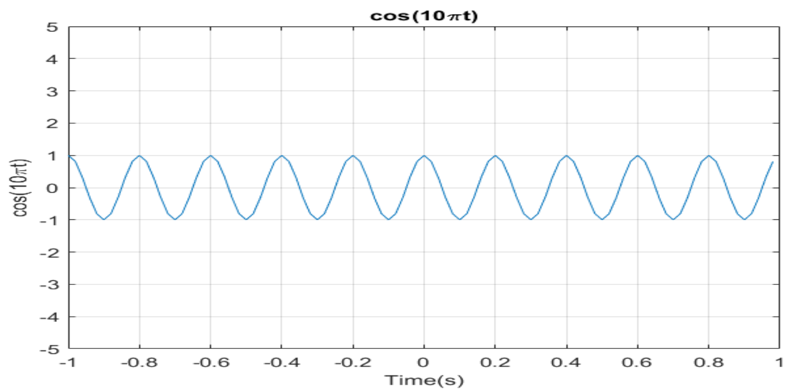
[1] Matlab

```
fs = 20;
f = -fs/2:1:fs/2-1;
t = 0:1/fs:1-1/fs;
x1 = exp(1j*2*pi*5*t) + exp(1j*2*pi*8*t);
y1 = fftshift(fft(x1));
plot(f,abs(y1)/max(abs(y1)));
xlim ([-6 14]);
grid on;
title('abs of Fourier Transform of x_1');
xlabel('Frequency(Hz)');
ylabel('Magnitude');
x2 = exp(1j*2*pi*5*t) + exp(1j*2*pi*5.1*t);
y2 = fftshift(fft(x2));
plot(f,abs(y2)/max(abs(y2)));
xlim ([-6 14]);
grid on;
title('abs of Fourier Transform of x_2');
xlabel('Frequency(Hz)');
ylabel('Magnitude');

```

۲.۱ تمرین ۱-۱

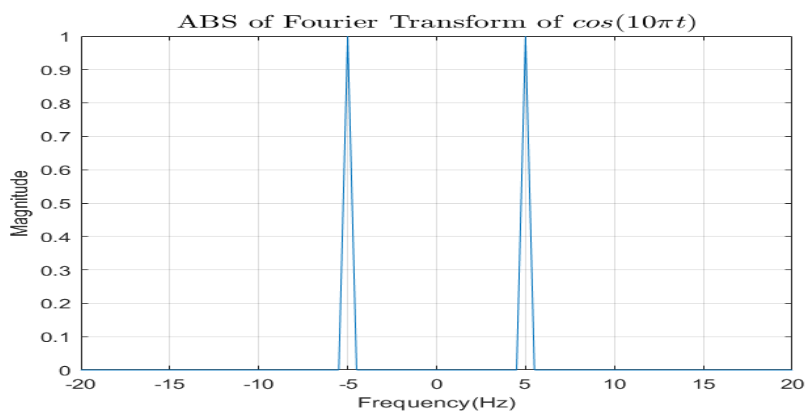
$$x_1(t) = cos(10\pi t)$$

الف)



شکل ۲: سیگنال x_1

ب)



شکل ۳: اندازه تبدیل فوریه سیگنال x_1

ج)

$$x_1(t) = cos(10\pi t) = \frac{1}{2} \times \left(e^{-j10\pi t} + e^{j10\pi t}\right)$$

$$X_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$X_1(j\omega) = \frac{1}{2} \times \int_{-\infty}^{\infty}(e^{-j10\pi t} + e^{j10\pi t}) \times e^{-j\omega t}dt$$

می دانیم که $\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t)$
پس :

$$X_1(j\omega) = \pi\left(\delta(\omega - 10\pi) + \delta(\omega + 10\pi)\right)$$

که با توجه به رابطه $\omega = 2\pi f$ در فرکانس های ۵ و ۵- هرتز انتظار یک ضربه داریم که در شکل ۳ نیز مشخص است .

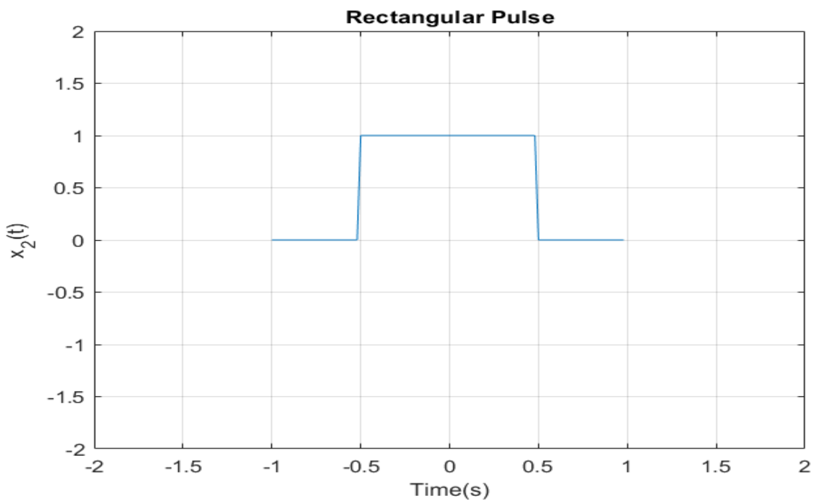
```
fs = 50;
f = -fs/2:0.5:fs/2 - 0.5;
t = -1:1/fs:1-1/fs;
x1 = cos(10*pi*t);
figure
plot(t,x1);
grid on;
title('cos(10\pit)');
xlabel('Time(s)');
ylabel('cos(10\pit)');
ylim ([-5 5]);
grid on;
y1 = fftshift(fft(x1));
figure
plot(f,abs(y1)/max(abs(y1)));
xlim ([-20 20]);
grid on;
title('ABS of Fourier Transform of $ cos(10\pi t)$', ...
'fontsize',14,'interpreter','latex');
xlabel('Frequency(Hz)');
ylabel('Magnitude');

```

- *** فایل متلب مربوط به این بخش با نام part1p1.m پیوست شده است .

۳.۱ تمرین ۱-۲

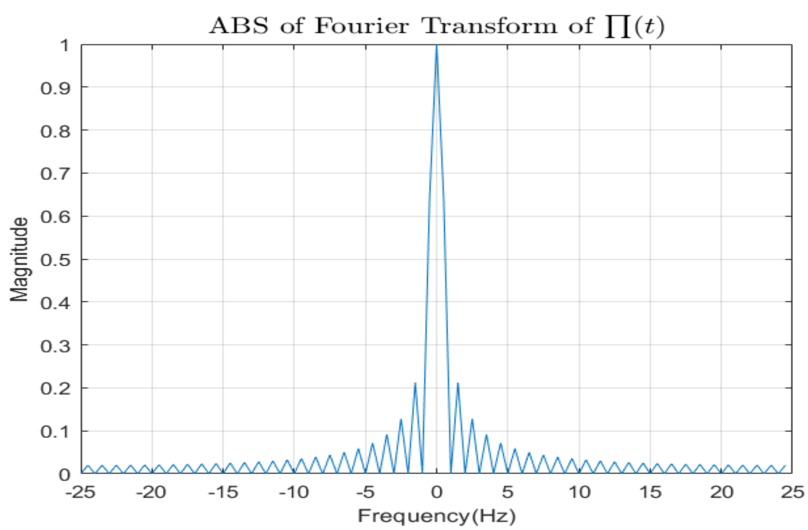
$x_2(t) = \Pi\left(t\right)$

الف)



شکل ۴: سیگنال x_2

ب)



شکل ۵: اندازه تبدیل فوریه سیگنال x_2

ج)

$$x_2(t) = \prod(t)$$

$$X_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$X_2(j\omega) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j\omega t} = 2 \times \int_{0}^{\frac{1}{2}} cos(\omega t)dt$$

$$X_2(j\omega) = \frac{sin(\omega/2)}{\omega/2} = sinc(\frac{\omega}{2\pi})$$

با مقایسه حاصل تبدیل فوریه در بخش ج و شکل ۵ می توان به تطابق آنها پی برد .

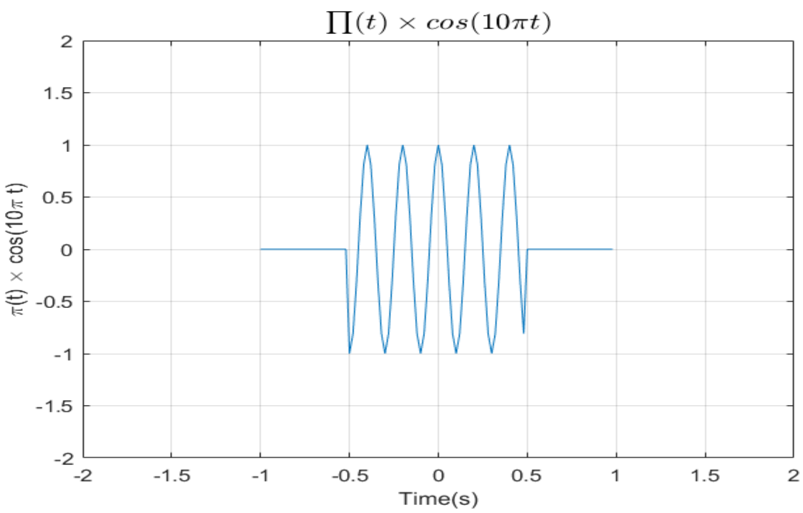
```
fs = 50;
f = -fs/2:0.5:fs/2 - 0.5;
t = -1:1/fs:1-1/fs;
x2=rectpuls(t,1);
figure
plot(t,x2)
grid on;
title('Rectangular Pulse');
xlabel('Time(s)');
ylabel('x_2(t)');
ylim ([-2 2]);
xlim ([-2 2]);
y2 = fftshift(fft(x2));
figure
plot(f,abs(y2)/max(abs(y2)));
title('ABS of Fourier Transform of $\prod(t)$','fontsize',14,'...
interpreter','latex');
xlabel('Frequency(Hz)');
ylabel('Magnitude');
grid on;

```

- *** فایل متلب مربوط به این بخش با نام part1p2.m پیوست شده است .

۴.۱ تمرین ۱-۳

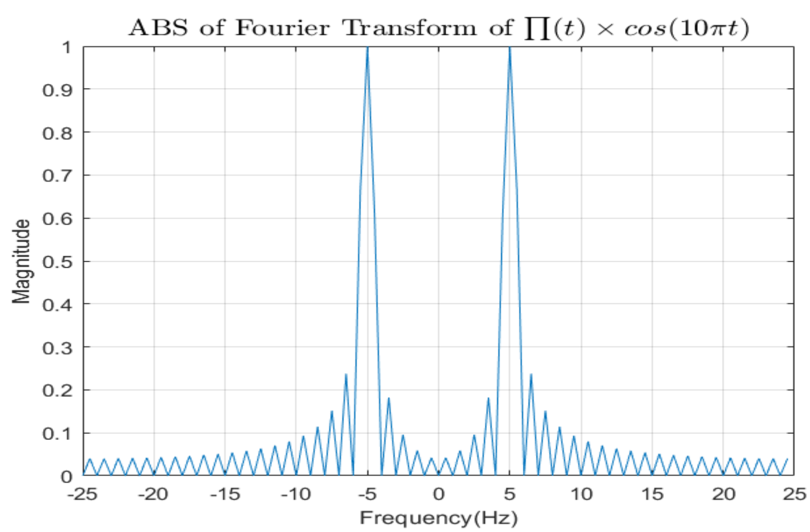
$$x_3(t) = \prod(t) \times cos(10\pi t)$$

الف)



شکل ۶: سیگنال x_3

ب)



شکل ۷: اندازه تبدیل فوریه سیگنال x_3

ج)

$$x_3(t) = x_1(t) \times x_2(t) = \prod(t) \times cos(10\pi t)$$

$$X_3(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \times (X_1(j\omega) * X_2(j\omega))$$

$$X_3(j\omega) = \frac{1}{2} \times \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(\alpha - 10\pi) + \delta(\alpha + 10\pi)) \times sinc(\frac{\omega-\alpha}{2\pi}) d\alpha$$

$$X_3(j\omega) = \frac{1}{2} \times \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha - 10\pi) \times sinc(\frac{\omega-\alpha}{2\pi}) d\alpha + \frac{1}{2} \times \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha + 10\pi) \times sinc(\frac{\omega-\alpha}{2\pi}) d\alpha$$

$$X_3(j\omega) = \frac{1}{2}\left(sinc(\frac{\omega-10\pi}{2\pi}) + sinc(\frac{\omega+10\pi}{2\pi})\right)$$

همانطور که انتظار داشتیم نتایج بخش ج با شکل ۷ تطابق دارد و شاهد مجموع ۲ انتقال یافته تابع $X_2(j\omega)$ با ضریب $\frac{1}{2}$ هستیم این خاصیت به عنوان خاصیت مدولاسیون [2] شناخته می شود . همچنین با افزایش طول تابع $\prod(t)$ در حوزه زمان حاصل $\prod(t) \times cos(10\pi t)$ به $cos(10\pi t)$ میل می کند و در نهایت $X_3(j\omega)$ به $X_1(j\omega)$ شبیه تر شده و بنابراین تنها شاهد دو ضربه در ۵ و ۵- هرتز خواهیم بود.

```
fs = 50;
f = -fs/2:0.5:fs/2 - 0.5;
t = -1:1/fs:1-1/fs;
x1 = cos(10*pi*t);
x2=rectpuls(t,1);
x3=x1.*x2;
figure
plot(t,x3)
grid on;
title('$\prod(t) \times cos(10\pi t)$','fontsize',14,'...
interpreter','latex')
xlabel('Time(s)');
ylabel('\pi(t) \times cos(10\pi t)');
ylim ([-2 2]);
xlim ([-2 2]);
y3 = fftshift(fft(x3));
figure
plot(f,abs(y3)/max(abs(y3)));
title('ABS of Fourier Transform of $\prod(t) \times cos(10\pi ...
t)$', ...
'fontsize',14,'interpreter','latex');
xlabel('Frequency(Hz)');
ylabel('Magnitude');
grid on;


```

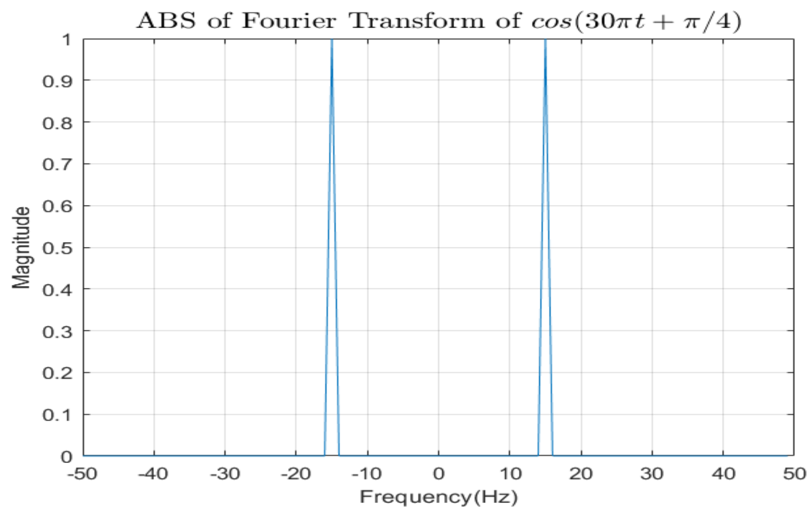
- *** فایل متلب مربوط به این بخش با نام part1p3.m پیوست شده است .

[2] Modulation

۵.۱ تمرین ۱-۴

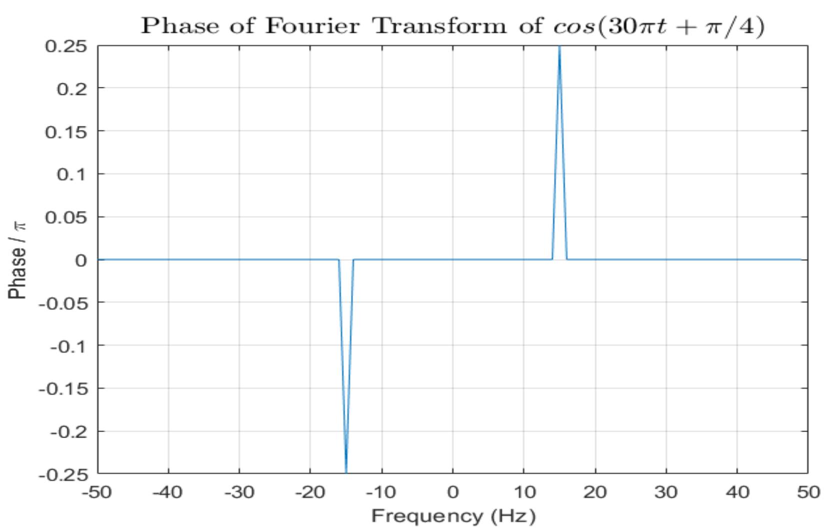
$x_4(t) = cos(30\pi t + \frac{\pi}{4})$

الف)



شکل ۸: اندازه تبدیل فوریه سیگنال x_4

ب)



شکل ۹: فاز تبدیل فوریه سیگنال x_4

ج)

$$x_4(t) = cos(30\pi t + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \times (e^{-j(30\pi t + \frac{\pi}{4})} + e^{j(30\pi t + \frac{\pi}{4})})$$

$$X_4(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_4(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$X_4(j\omega) = \frac{1}{2} \times \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-j(30\pi t + \frac{\pi}{4})} + e^{j(30\pi t + \frac{\pi}{4})}) \times e^{-j\omega t} dt$$

$$X_4(j\omega) = \pi \times \delta(\omega - 30\pi) e^{j\frac{\pi}{4}} + \pi \times \delta(\omega + 30\pi) e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$X_4(j\omega) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} (\delta(\omega - 30\pi) + \delta(\omega + 30\pi)) + j\frac{\pi}{\sqrt{2}} (\delta(\omega - 30\pi) - \delta(\omega + 30\pi))$$

$$|X_4(j\omega)| = \pi \times \sqrt{\delta(\omega + 30\pi)^2 + \delta(\omega - 30\pi)^2}$$

$$\angle X_4(j\omega) = tan^{-1}(\frac{\delta(\omega - 30\pi) + \delta(\omega + 30\pi)}{\delta(\omega - 30\pi) - \delta(\omega + 30\pi)})$$

با مقایسه با شکل های ۸ و ۹ همانگونه که انتظار داشتیم در شکل ۸ دو ضربه در فرکانس های ۱۵ و ۱۵- هرتز وجود دارد و همچنین در شکل ۹ تنها در فرکانس های ۱۵ و ۱۵- هرتز مقدار دارد و فاز تابع $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{-\pi}{4}$ است .

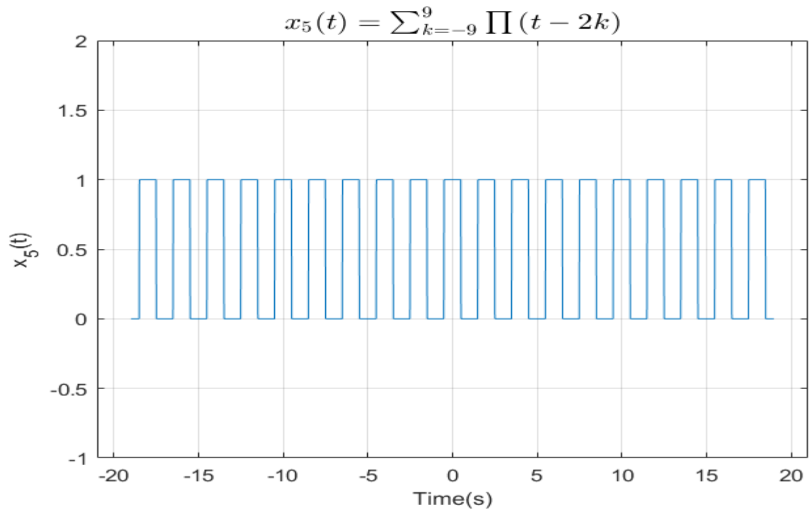
```
fs = 100;
t = 0:1/fs:1-1/fs;
f = -fs/2:1:fs/2 - 1;
t = 0:1/fs:1-1/fs;
x = cos(30*pi*t + pi/4);
y4 = fftshift(fft(x));
figure
plot(f,abs(y4)/max(abs(y4)));
title('ABS of Fourier Transform of $cos(30\pi t + \pi/4)$', ...
...
'fontsize',14,'interpreter','latex');
grid on;
xlabel('Frequency(Hz)');
ylabel('Magnitude');
grid on;
tol = 1e-6;
y4(abs(y4) < tol) = 0;
theta = angle(y4);
figure
plot(f,theta/pi);
title('Phase of Fourier Transform of $cos(30\pi t + \pi/4)$', ...
...
'fontsize',14,'interpreter','latex');
xlabel 'Frequency (Hz)'
ylabel 'Phase / \pi'
grid on;
```

- *** فایل متلب مربوط به این بخش با نام part1p4.m پیوست شده است .

۶.۱ تمرین ۱-۵

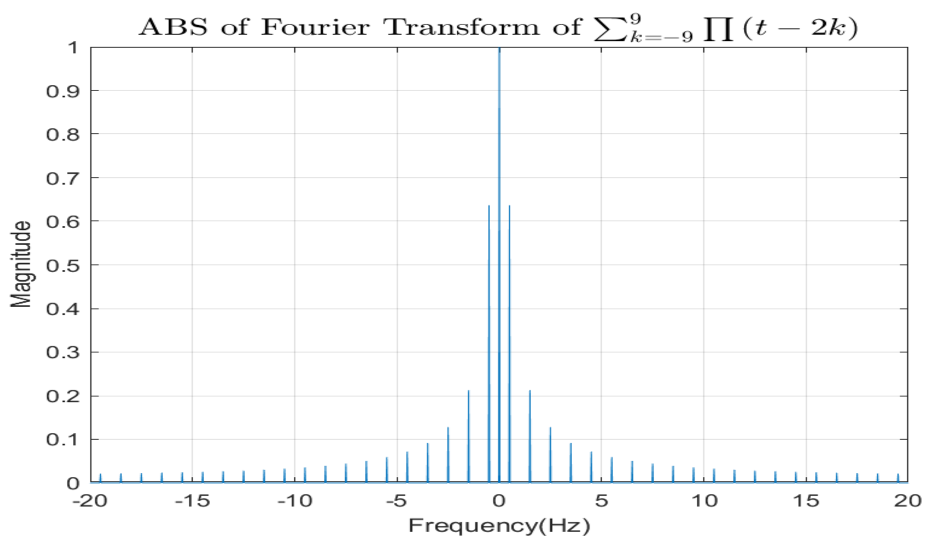
$x_5(t) = \sum_{k=-9}^{9} \Pi\,(t-2k)$

الف)



شکل ۱۰: سیگنال x_5

ب)



شکل ۱۱: اندازه تبدیل فوریه سیگنال x_5

ج)

تبدیل فوریه سیگنال های متناوب

در یک سیگنال متناوب با سری فوریه $x\left(t\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{j\omega_k t}$ دیدیم که تبدیل فوریه آن بصورت زیر است :

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_k a_k e^{j\omega_k t}\times e^{-j\omega t}dt$$

$$X(j\omega)=\sum_k a_k\int_{-\infty}^{\infty}\times e^{-j(\omega-\omega_k)t}dt$$

$$X(j\omega)=\sum_k 2\pi a_k\times\delta(\omega-\omega_k)$$

از رابطه بالا انتظار داریم که تبدیل فوریه یک سیگنال متناوب حاصل جمع تابع های ضربه به ازای k های متفاوت باشید همچنین همانطور که مشخص است فاصله هر یک از این ضربه ها در رابطه بالا ۱ (کوچکترین تغییرات k) است . با دقت به شکل ۱۱ نیز مشاهده می شود که تبدیل فوریه تابع متشکل از چند ضربه است که فاصله هر ضربه ۱ واحد است .

```
fs = 50;
f = -fs/2:1/38:fs/2 -1/38;
t = -19:1/fs:19-1/fs;
x5 = 0;
for i=-9:9
x5=x5+rectpuls(t-2*i,1);
end
figure
plot(t,x5)
grid on;
title('$x_5(t)=\sum_{k = -9}^{9} \prod{(t-2k)}$','fontsize'...
,14,'interpreter','latex');
xlabel('Time(s)');
ylabel('x_5(t)');
ylim ([-1 2]);
xlim ([-21 21]);
y5 = fftshift(fft(x5));
figure
plot(f,abs(y5)/max(abs(y5)));
title('ABS of Fourier Transform of $\sum_{k = -9}^{9} \prod{(t...
-2k)}$','fontsize',14,'interpreter','latex');
xlabel('Frequency(Hz)');
ylabel('Magnitude');
xlim ([-20 20]);
grid on;

```

- *** فایل متلب مربوط به این بخش با نام part1p5.m پیوست شده است .

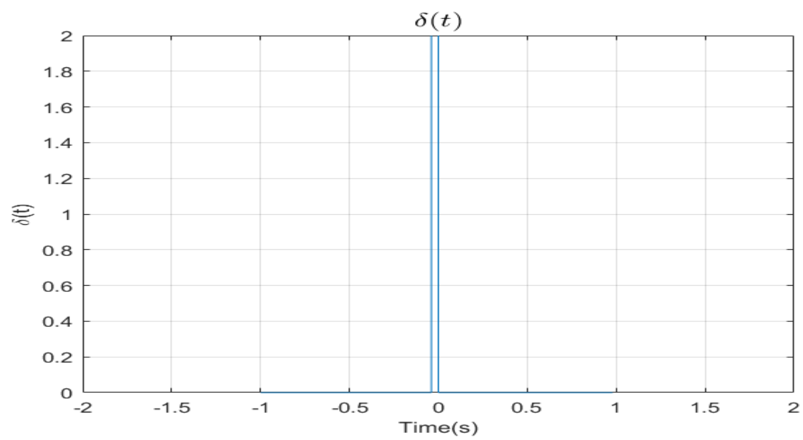
۲ بخش دوم

در این قسمت سعی داریم تغییرات در حوزه زمان و فرکانس را بررسی کنیم و به کمک نرم افزار متلب ارتباط میان آن ها را نشان دهیم .

۱.۲ تمرین ۲-۱

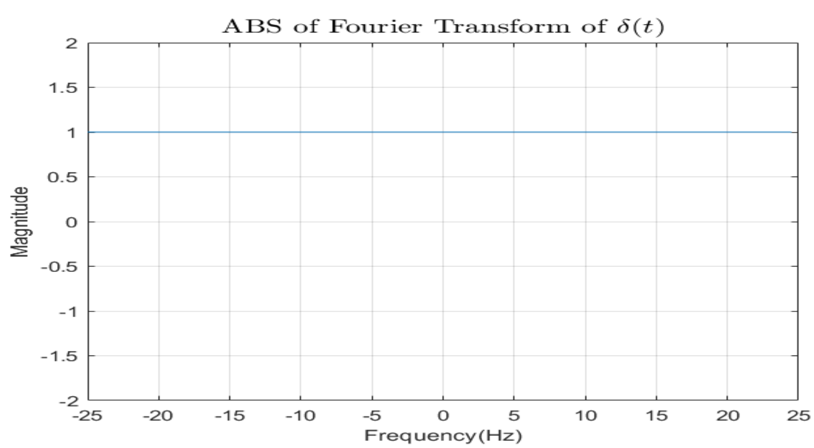
$$x_6(t) = \delta(t)$$

الف)



شکل ۱۲: سیگنال x_6

ب)



شکل ۱۳: اندازه تبدیل فوریه سیگنال x_6

ج)

$$x_6(t) = \delta(t)$$

$$X_6(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$X_6(j\omega) = 1$$

تابع ضربه در حوزه زمان دارای شدید ترین تغییرات ممکن است. این یعنی برای توصیف تبدیل فوریه آن باید دامنه زیادی از فرکانس ها را داشته باشیم . همچنین برای بیان کردن این تغییرات تعداد محدودی فرکانس پاسخ گو نخواهد بود پس تبدیل فوریه آن فقط روی بخش محدودی از محور فرکانس مقدار ندارد و باید از $-\infty$ تا ∞ گسترده باشد. در شکل ۱۳ و همچنین محاسبات بخش ج میبینیم که تبدیل فوریه تابع ضربه تابع ثابت ۱ در تمامی فرکانس ها است .

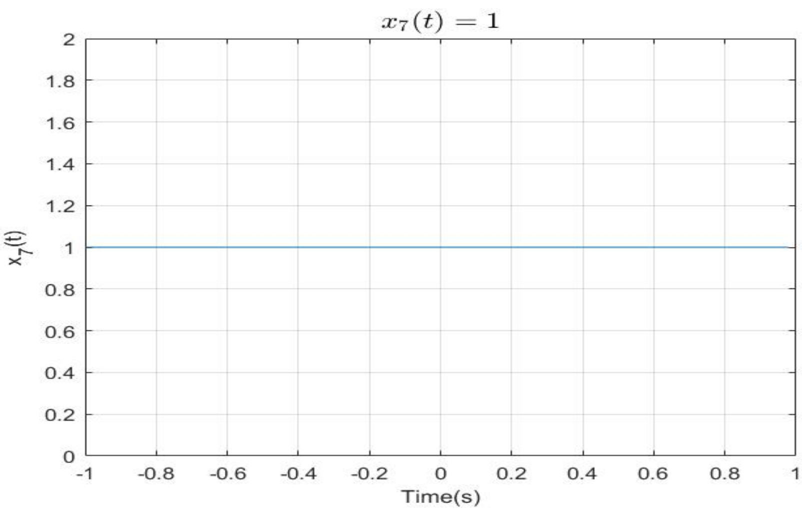
```
fs = 50;
f = -fs/2:0.5:fs/2 - 0.5;
t = -1:1/fs:1-1/fs;
x6=zeros(size(t));
n = size(t,2)/2;
x6(n)=1e7;
figure
plot(t,x6)
grid on;
title('$\△(t)$','fontsize',14,'interpreter','latex')
xlabel('Time(s)');
ylabel('\△(t)');
ylim ([0 2]);
xlim ([-2 2]);
y6 = fftshift(fft(x6));
figure
plot(f,abs(y6)/max(abs(y6)));
title('ABS of Fourier Transform of $\△(t)$', ...
'fontsize',14,'interpreter','latex');
xlabel('Frequency(Hz)');
ylabel('Magnitude');
ylim ([-2 2]);
grid on;

```

- *** فایل متلب مربوط به این بخش با نام part2p1.m پیوست شده است .

۲.۲ تمرین ۲-۲

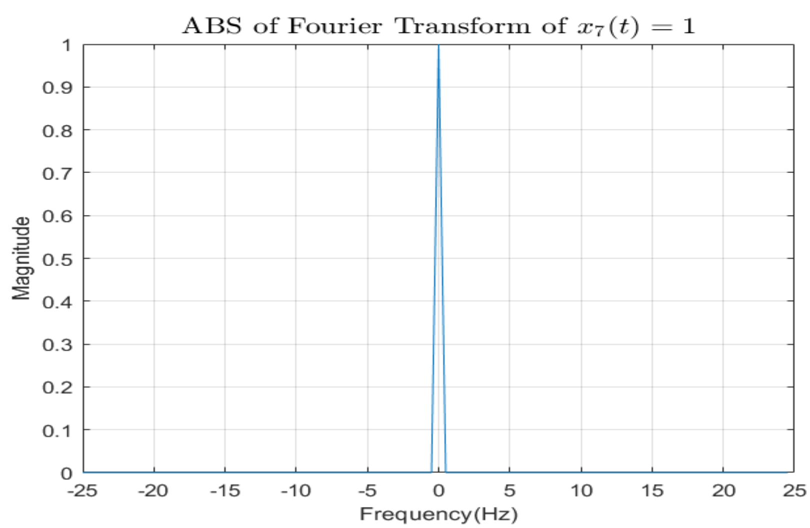
$x_7(t) = 1$

الف)



شکل ۱۴: سیگنال x_7

ب)



شکل ۱۵: اندازه تبدیل فوریه سیگنال x_7

ج)

$$x_7(t) = 1$$

$$X_7(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt$$

با نتایج تمرین قبل می دانیم که

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t)$$

و با استفاده از خاصیت duality

$$X_7(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

تابع ثابت هیچ تغییری در حوزه ی زمان ندارد و تبدیل فوریه ی آن فقط یک ضربه در فرکانس صفر می شود. بنابراین اگر یک تابع در حوزه زمان تغییرات زیادی نداشته باشد و ناپیوستگی هم نداشته باشد دارای فرکانس های بالایی نیست و با فرکانس های پایین تغییرات آن قابل بیان است. همانگونه که در شکل ۱۳ نیز مشاهده می شود این نتایج با بررسی در متلب نیز تصدیق می گردد.

```matlab
fs = 50;
f = -fs/2:0.5:fs/2 - 0.5;
t = -1:1/fs:1-1/fs;
x6=ones(size(t));
figure
plot(t,x6)
grid on;
title('$x_7(t) = 1$','fontsize',14,'interpreter','latex')
xlabel('Time(s)');
ylabel('x_7(t)');
y6 = fftshift(fft(x6));
figure
plot(f,abs(y6)/max(abs(y6)));
title('ABS of Fourier Transform of $x_7(t) = 1$', ...
'fontsize',14,'interpreter','latex');
xlabel('Frequency(Hz)');
ylabel('Magnitude');
grid on;
```

- *** فایل متلب مربوط به این بخش با نام part2p2.m پیوست شده است .