دانشگاه تهران
پردیس دانشکده‌های فنی
دانشکدهٔ برق و کامپیوتر

سیگنال ها و سیستم ها

گزارش تمرین کامپیوتری چهارم

سید علیرضا جاوید

۸۱۰۱۹۸۳۷۵

استاد

دکتر سعید اخوان

۱ تیر ۱۴۰۰

فهرست مطالب

فهرست مطالب **۱**
۱ سوال ۱ : مدار RLC ۲
۲ سوال ۲ : سیستم تعلیق اتومبیل ۴
۳ سوال ۳ : حل معادله دیفرانسیل ۷

۱ سوال ۱ : مدار RLC

الف) جایگذاری می کنیم و سپس مشتق میگیریم :

$$Ri(t) + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = v_{in}(t)$$

$$\implies \quad R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C}i(t) = \frac{dv_{in}(t)}{dt} \qquad (1)$$

ب) از رابطه ۱ تبدیل لاپلاس میگیریم :

$$R \times sI(s) + L \times s^2 I(s) + \frac{1}{C}I(s) = sV_{in}(s)$$

$$\implies \quad I(s) = \frac{sV_{in}(s)}{L\times s^2 + R\times s + \frac{1}{C}} \qquad (2)$$

ج)

$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau \quad \implies \quad Y(s) = V_c(s) = \frac{I(s)}{C\times s}$$

به کمک رابطه ۲ :

$$V_c(s) = \frac{V_{in}(s)}{LC\times s^2 + RC\times s + 1}$$

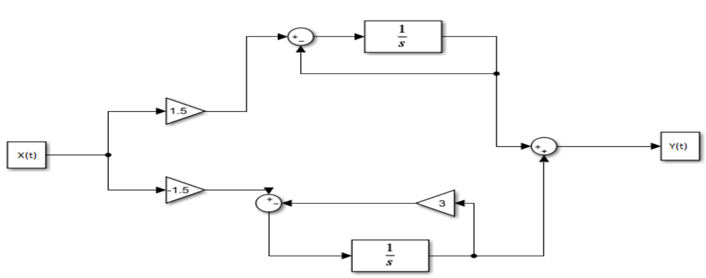
$$\implies \quad Y(s) = \frac{X(s)}{LC\times s^2 + RC\times s + 1} \qquad (3)$$

د) با جایگذاری $R = 1, L = 0.25, C = \frac{4}{3}$:

$$Y(s) = \frac{X(s)}{\frac{1}{3}\times s^2 + \frac{4}{3}\times s + 1}$$

$$\implies \quad Y(s) = \frac{1.5X(s)}{s+1} - \frac{1.5X(s)}{s+3} \qquad (4)$$

به سادگی رابطه ۴ را به کمک بلاک دیاگرام نشان می دهیم :



شکل ۱: بلاک دیاگرام

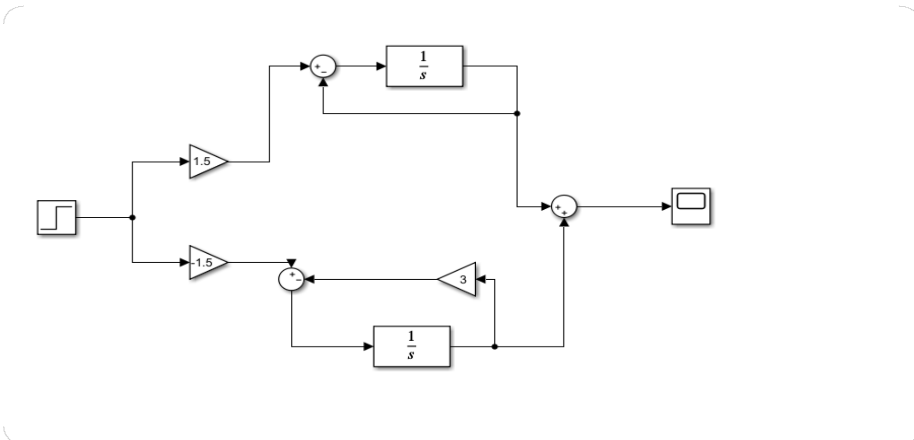
و) با جایگذاری $X(s) = \frac{1}{s}$ در رابطه ۴ داریم :

$$Y(s) = \frac{1.5}{s\times(s+1)} - \frac{1.5}{s\times(s+3)}$$

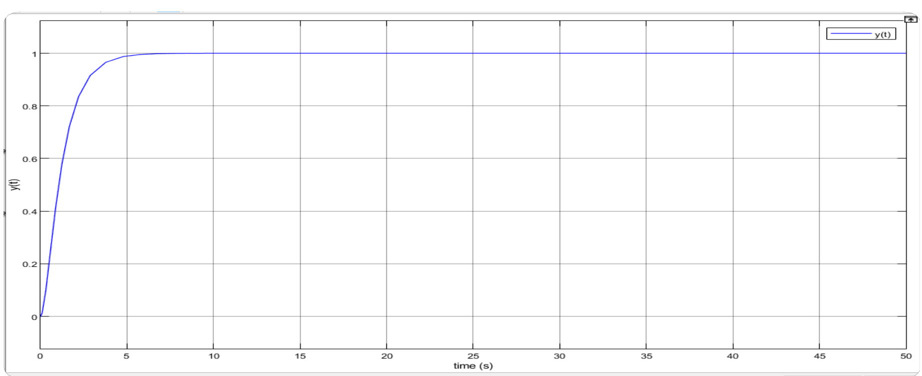
$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1.5}{s+1} + \frac{0.5}{s+3}$$

$$\Longrightarrow \quad y(t) = u(t) - 1.5\times e^{-t}u(t) + 0.5\times e^{-3t}u(t) \qquad (5)$$

ه) با طراحی بلاک دیاگرام زیر نتیجه شکل ۳ را در متلب مشاهده می کنیم که با رابطه ۵ همخوانی دارد .



شکل ۲: بلاک دیاگرام طراحی شده در Simulink



شکل ۳: سیگنال خروجی y(t)

۲ سوال ۲ : سیستم تعلیق اتومبیل

الف) با جایگذاری $M = K = 1$ در رابطه داده شده :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + B\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = B\frac{dx(t)}{dt} + x(t) \qquad (6)$$

ب) با گرفتن تبدیل لاپلاس از رابطه ۶ و ساده سازی :

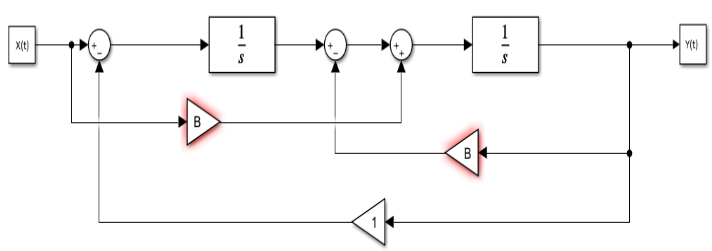
$$s^2Y(s) + B \times s^2Y(s) + Y(s) = B \times sX(s) + X(s)$$

$$\Longrightarrow \quad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Bs+1}{s^2+Bs+1} \qquad (7)$$

همچنین برای ساده تر شدن طراحی بلاک دیاگرام رابطه ۷ را بصورت زیر نیز می نویسیم :

$$\frac{1}{s\times s}(X(s) - Y(s)) + \frac{B}{s}(X(s) - Y(s))$$

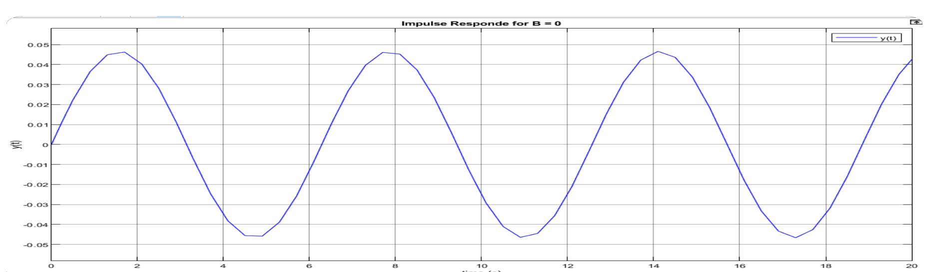
در نتیجه :



شکل ۴: بلاک دیاگرام سیستم

ج) با اعمال $B = 0$ و $x(t) = \delta(t)$ داریم :

$$Y(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2+1} \quad \Longrightarrow \quad y(t) = \frac{1}{2} \times \sin(t)u(t)$$



شکل ۵: پاسخ ضربه سیستم برای $B = 0$

مشاهده می شود که به ازای $B = 0$ سیستم در برابر پاسخ ضربه دارای حرکات نوسانی دائم در کابین خواهد بود و با نبود سیستم تعلیق سیستم پایدار نخواهد شد .

د)

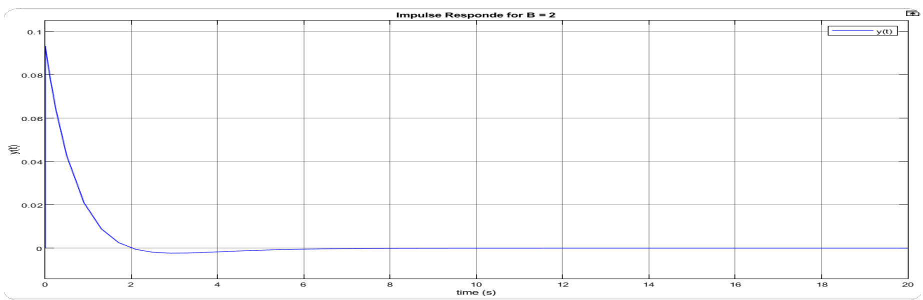
$$s^2 + Bs + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad B^2 - 4 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad B \geq 2$$

پس برای داشتن قطب صحیح کمترین مقدار $B = 2$ است .

$$Y(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+1} = \frac{2s+1}{(s+1)^2} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\Longrightarrow \quad y(t) = 2e^{-t}u(t) - te^{-t}u(t) \qquad (8)$$

و با شبیه سازی در Simulink :



شکل ۶: پاسخ ضربه سیستم برای $B = 2$

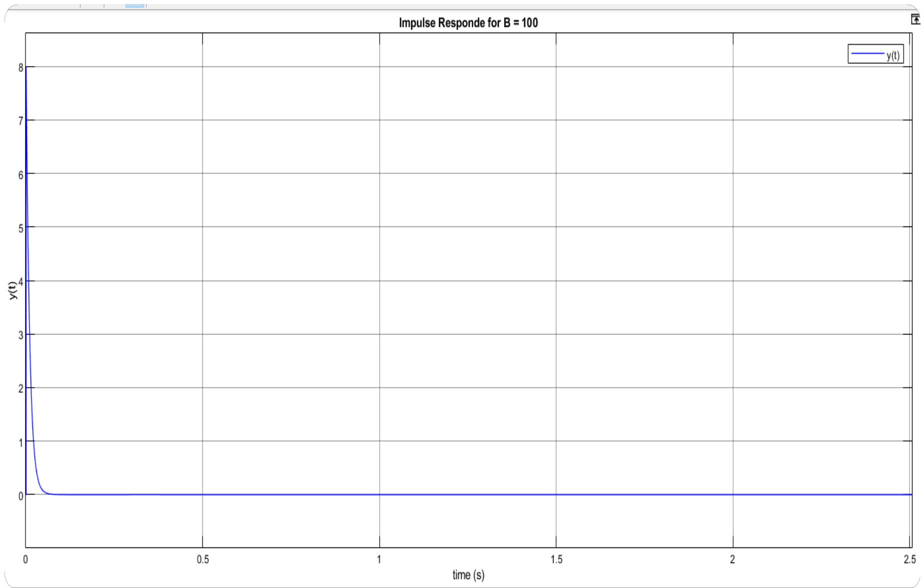
با دقت به رابطه ۸ و شکل ۶ بصورت کلی به نتایج مشابهی رسیدیم .
در این حالت بصورت نمایی ابتدا شاهد کم شدن جابجایی عمودی جرم از نقطه تعادل خواهیم بود و سپس به مقدار منفی میرسیم و پس از مدتی شیب نمودار مثبت شده و در نهایت به ۰ همگرا می شود . پس نوسات کابین پس از مدتی پایدار شده و از بین می رود .

و) با جایگذاری $B = 100$ داریم :

$$Y(s) = \frac{100s+1}{s^2+100s+1} \approx \frac{100s+1}{(s+100)(s+0.01)} = \frac{100}{100s+1}$$

$$\Longrightarrow \quad y(t) = 100 \times e^{-100t}u(t)$$

و با شبیه سازی در Simulink : (برای بهتر نشان داده شدن اسکیل محور زمان با بخش های قبل تفاوت دارد)



شکل ۷: پاسخ ضربه سیستم برای $B = 100$

در این حالت به سرعت بسیار بیشتری شاهد پایدار شدن و همگرا شدن مقدار جابجایی عمودی جرم به ۰ هستیم اما در لحظه آغاز $y(t)$ بسیار بزرگ است و شاهد نوسانات زیادی در کابین اتومبیل خواهیم بود .

ه) بطور کلی حالت دوم بررسی شده (بخش د) ، حالت بهتری برای سیستم تعلیق یک اتومبیل بنظر می رسد چون در انتها همگرا می شود (برخلاف حالت اول) و در ابتدا نیز (برخلاف حالت آخر) شاهد نوسانات بزرگی در کابین نخواهیم بود . همچنین زیاد بودن B موجب افزایش اصطکاک خواهد شد و این موضوع می تواند به سیستم ما آسیب برساند . می توان نتیجه گرفت مقدار ایده آل برای B بین حالت دوم و سوم است به نوعی که سرعت همگرایی آن بالا باشد اما در ابتدای آن شاهد نوسانات زیادی نباشیم .

۳ سوال ۳ : حل معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$\Longrightarrow \quad s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 3sY(s) - 3y(0^-) + 2Y(s) = X(s)$$

$$\Longrightarrow \quad Y(s) = \frac{sy(0^-)+y'(0^-)+y(0^-)+X(s)}{s^2+3s+2} = \frac{sy(0^-)+y'(0^-)+3y(0^-)}{s^2+3s+2} + \frac{X(s)}{s^2+3s+2}$$

بخش اول نشان دهنده پاسخ ناشی از شرایط اولیه و بخش دوم آن پاسخ ناشی از ورودی است . با جایگذاری

$$Y(s) = \frac{s+4}{s^2+3s+2} + \frac{\frac{5}{s}}{s^2+3s+2} = \frac{3}{s+1} - \frac{2}{s+2} + \frac{-5}{s+1} + \frac{2.5}{s+1} + \frac{2.5}{s+2}$$

$$y_p(t) = 2.5 \times u(t) - 5 \times e^{-t}u(t) + 2.5 \times e^{-2t}u(t)$$

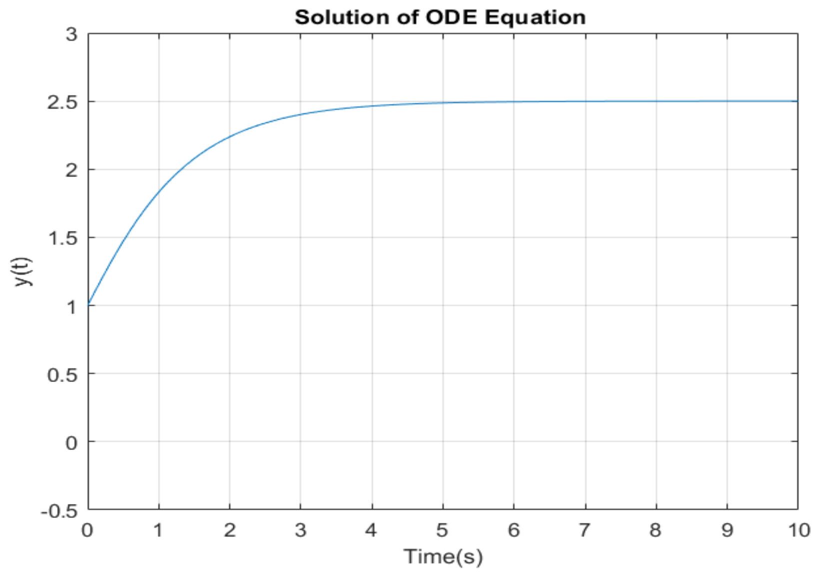
$$y_h(t) = 3 \times e^{-t}u(t) - 2 \times e^{-2t}u(t)$$

$$\Longrightarrow \quad y(t) = y_p(t) + y_h(t) = 2.5 \times u(t) + 0.5 \times e^{-2t}u(t) - 2 \times e^{-t}u(t)$$

ب) از قطعه کد زیر برای حل استفاده می کنیم .

```
syms y(t)
Dy = diff(y);
ode = diff(y,t,2) + 3*diff(y,t) + 2*y == 5*heaviside(t);
cond1 = y(0) == 1;
cond2 = Dy(0) == 1;
conds = [cond1 cond2];
ySol(t) = dsolve(ode,conds);
ySol = simplify(ySol)
time=[0:0.1:10];
Y=subs(ySol,time);
figure
plot(time,Y)
ylim ([-0.5 3]);
grid on;
title('Solution of ODE Equation ');
xlabel('Time(s)');
ylabel('y(t)');

```



شکل ۸: پاسخ معادله ODE در متلب

همچنین میبینیم که به ازای $t > 0$ پاسخ مطابق بخش الف است .