



دانشگاه تهران  
پردیس دانشکده‌های فنی

---

## مخابرات وایرلس

---

گزارش تمرین کامپیوتری ۲

سید علیرضا جاوید

۸۱۰۱۹۸۳۷۵

استاد

دکتر صباغیان

۱۳ تیر ۱۴۰۲

# فهرست مطالب

فهرست مطالب	
۱	۱
۳	۱
۳	۱.۱
۵	۲.۱
۸	۳.۱
۱۰	۴.۱
۱۱	۵.۱
۱۳	۶.۱
۱۶	۷.۱
۱۷	۲
۱۷	۱.۲
۱۹	۲.۲
۲۰	۳.۲
۲۱	۴.۲
۲۲	۵.۲
۲۴	۶.۲
۲۶	۷.۲

## مقدمه

در این پروژه به بررسی کانال باند باریک و کانال فرکانس گزین و روش های ارسال پیام در آن ها می پردازیم. در بخش اول یک کانال باند باریک داریم و روش ارسال عادی BPSK و باینری و QPSK را بررسی می کنیم. سپس با فرض داشتن اطلاعات کانال در گیرنده، سعی در حذف اثر آن و بهبود تخمین سیگنال می کنیم. در انتهای این بخش به دایورسیستی در زمان و روش الموتی می پردازیم که بهبود چشمگیری در عملکرد سیستم دارد.

در بخش بعد به یک کانال فرکانس گزین می پردازیم. در این کانال برای ارسال داده ها از روش OFDM استفاده می کنیم. ابتدا مدلسازی مسئله را کامل کرده و سپس سیستم را شبیه سازی می کنیم. در این بخش از روش های متفاوتی از جمله MRC Waterfilling و Equalization استفاده می شود و در نهایت برای شبیه سازی سیستم های واقعی clipping را وارد سیستم می کنیم. در نهایت بهترین سیستم و عملکرد آن را مشخص می کنیم.

## ۱ کانال باند باریک

در ابتدا با یک مسئله ساده تخمین در یک کانال با محوشوندگی<sup>۱</sup> شروع می کنیم. برای سادگی می توان فرض کرد که در این بخش کانال می تواند با یک فیلتر با پاسخ ضربه  $h[m]$  مدل شود.

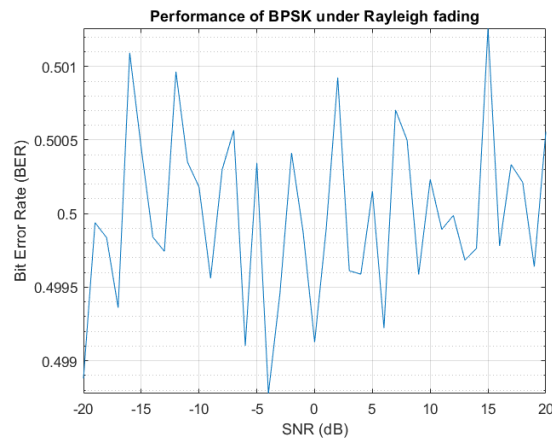
$$y[m] = h[m]x[m] + w[m]$$

که در آن  $w[m] \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$  نویز اضافه شده و کانال را نیز با محوشدگی رایلی مدل کردیم. بنابراین  $h[m] \sim \mathcal{CN}(0, 1)$ . در بخش های بعد به شبیه سازی و بررسی حالت های مختلف این مسئله می پردازیم.

### ۱.۱ استفاده از مدولاسیون BPSK

در این قسمت از مدولاسیون BPSK برای ارسال داده ها استفاده می کنیم به عبارتی برای سیگنال ارسالی داریم  $x[m] = \pm a$  و در شبیه سازی ما بدون از دست رفتن کلیت مسئله  $a = 1$  را در نظر گرفتیم. همچنین پایه تئوری تصمیم گیری در این بخش در انتها ذکر می شود.

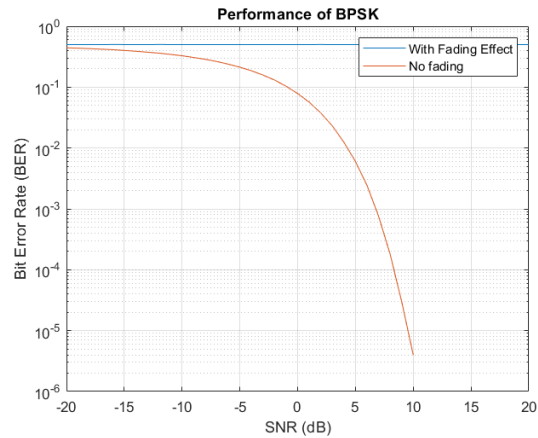
۱. با در نظر گرفتن نکات گفته شده و شبیه سازی برای SNR بین  $-20 \text{ dB}$  تا  $20 \text{ dB}$  شکل زیر را بدست می آوریم. همانطور که مشخص است احتمال خطا نزدیک به  $\frac{1}{2}$  بوده و سیستم به درستی



شکل ۱: نمودار احتمال خطای بهینه با اثر محوشوندگی کانال

نمی تواند سیگنال ارسالی را تخمین بزند.

۲. اگر  $h[m] = 1$  باشد در واقع با یک کانال AWGN کار می کنیم که با شبیه سازی شکل زیر بدست می آید.



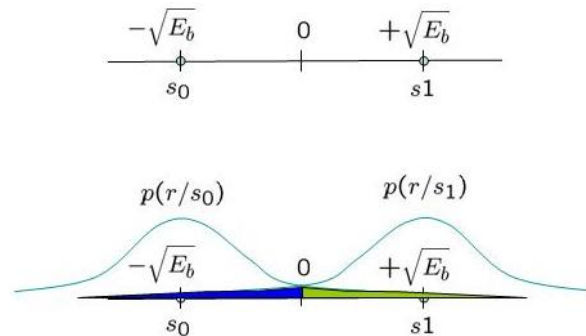
شکل ۲: نمودار احتمال خطای بهینه با و بدون اثر محوشوندگی کانال

می توان مشاهده کرد بد بودن تصمیم گیری در بخش قبل به دلیل وجود کانال محوشونده بوده است که بدون تخمین آن و حذف اثر آن به تخمین سیگنال ارسالی پرداختیم. همانگونه که انتظار می رود با افزایش SNR شاهد کاهش خطا هستیم.

۳. محاسبات تئوری این بخش را ارائه می دهیم. اگر سیگنال دریافتی را با  $r$  و سیگنال های ارسالی را با  $s_0$  و  $s_1$  و نویز را با  $n$  مشخص کنیم و فرض کنیم توان ارسالی برای هر بیت  $\mathcal{E}_b$  باشد، می توان نوشت:

$$r = s_i + n \rightarrow r \sim \mathcal{N}(\pm \mathcal{E}_b, \frac{N_0}{2})$$

که اگر توزیع آنها را رسم کنیم خواهیم داشت: همانگونه که انتظار داشتیم نقطه تصمیم گیری



شکل ۳: توزیع احتمالی سیگنال دریافتی

$r = 0$  خواهد بود که با برابر قرار دادن مقدار ۲ تابع توزیع بدست می آید.

$$f(r | s_1) = f(r | s_0) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{(\pi N_0)}} e^{-\frac{(r - \mathcal{E}_b)^2}{N_0}} = \frac{1}{\sqrt{(\pi N_0)}} e^{-\frac{(r + \mathcal{E}_b)^2}{N_0}}$$

$$(r - \mathcal{E}_b)^2 = (r + \mathcal{E}_b)^2 \rightarrow r = 0$$

$$s_i = \begin{cases} s_1 & f(r | s_1) > f(r | s_0) \\ s_0 & o.w. \end{cases}$$

برای محاسبه احتمال خطا با فرض یکسان بودن احتمال هر سمبل داریم.

$$P_b = \int_{-\infty}^0 P(s_1) f(r | s_1) dr + \int_0^{\infty} P(s_0) f(r | s_0) dr$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right)$$

برای  $P_b = 10^{-6}$  نیز داریم:

$$P_b = 10^{-6} = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right) \rightarrow Q^{-1}(10^{-6}) = 4.7534$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}} = 4.7534 \rightarrow 22.595 = 2 \text{ SNR}$$

$$SNR = 11.2975 = 10.53 \text{ dB}$$

## ۲.۱ ارسال سمبل به صورت باینری در ۲ بازه زمانی

در این بخش برای کاهش خطا از یک رویکرد جدید استفاده خواهیم کرد. این رویکرد که بر مبنای binary pulse-position modulation می باشد که به ازای هر جفت سمبل ارسالی داریم.

$$\mathbf{x}_A := \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_B := \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$$

به عبارت دیگر به ازای هر سمبل  $a$  در یک تایم اسلات  $a$  و در تایم اسلات بعدی 0 ارسال می شود و برای هر سمبل  $-a$  دقیقاً برعکس عمل می کنیم.

۱. در ابتدا به صورت تئوری نحوه تصمیم گیری را بدست می آوریم. این مسئله در واقع یک تست فرض ساده است که می توان برای بیت ارسالی گفت به ازای سیگنال دریافتی در تایم اسلات اول و دوم گفت:

$$s_i = \begin{cases} s_1 & f(r_1, r_2 | s_1) > f(r_1, r_2 | s_0) \\ s_0 & o.w. \end{cases}$$

کافی است که توابع توزیع  $f(r_1, r_2 | s_i)$  را بدست آوریم.

$$\begin{cases} x[m] = a \rightarrow r_1 = x + h + n \sim \mathcal{CN}(0, a^2 + N_0), & r_2 = n \sim \mathcal{CN}(0, N_0) \\ x[m] = -a \rightarrow r_2 = n \sim \mathcal{CN}(0, N_0), & r_1 = h + n \sim \mathcal{CN}(0, a^2 + N_0) \end{cases}$$

ار آنجایی که سیگنال های دریافتی در دو بازه متفاوت مستقل هستند می توان توزیع های آن ها را در هم ضرب کرد. همچنین از نسبت  $f(r_1, r_2 | s_1) > f(r_1, r_2 | s_0)$  می توان لگاریتم گرفت تا log likelihood ratio محاسبه شود.

$$\ell(\mathbf{y}) = \log\left(\frac{f(r_1, r_2 | s_1)}{f(r_1, r_2 | s_0)}\right) = \log\left(\frac{\exp(-\frac{|r_1|^2}{a^2+N_0} - \frac{|r_0|^2}{N_0})}{\exp(-\frac{|r_0|^2}{a^2+N_0} - \frac{|r_1|^2}{N_0})}\right)$$

$$\ell(\mathbf{y}) = \frac{(|r_1|^2 - |r_0|^2)a^2}{(a^2 + N_0) N_0}$$

پس می توان تصمیم گیری را به صورت زیر بیان کرد

$$s_i = \begin{cases} s_1 & |r_1|^2 - |r_0|^2 > 0 \\ s_0 & o.w. \end{cases}$$

حالا احتمال خطای این بخش را با توجه به تصمیم گیری بیان شده و احتمال سمبل یکسان بدست می آوریم.

$$P_b = \frac{1}{2}P(|r_1|^2 - |r_0|^2 > 0 | s_0) + \frac{1}{2}P(|r_1|^2 - |r_0|^2 < 0 | s_1)$$

به مشابته آنچه در درس دیدیم  $|r_1|^2$  و  $|r_2|^2$  دارای توزیع نمایی هستند. اگر فرض کنیم سمبل ارسالی  $a$  باشد می توان گفت:

$$|r_1|^2 \sim \text{Exp}(a^2 + N_0) , \quad |r_0|^2 \sim \text{Exp}(N_0)$$

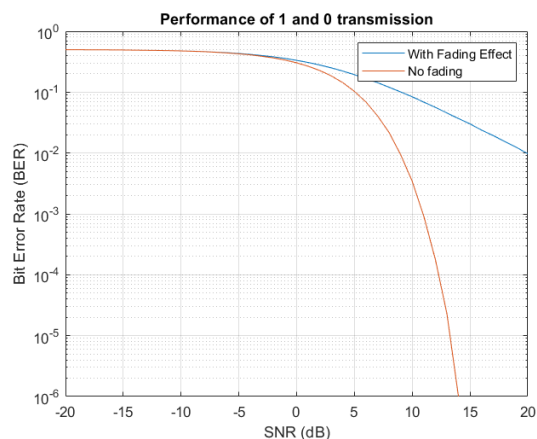
و در نهایت برای احتمال خطا داریم.

$$P_b = \int_0^\infty \int_0^{|r_1|^2} \frac{1}{a^2 + N_0} e^{-\frac{x}{a^2+N_0}} \frac{1}{N_0} e^{-\frac{y}{N_0}} dy dx = \frac{N_0}{a^2 + 2N_0}$$

برای آنکه ما به ازای ارسال هر سمبل در دو تایم اسلات ارسال را انجام دادیم برای fair بودن هر سمبل را با نصف انرژی قسمت های قبل ارسال می کنیم یا به عبارت دیگر  $SNR = \frac{a^2}{2N_0}$  پس در نهایت خطای تئوری این روش بر حسب SNR برابر است با:

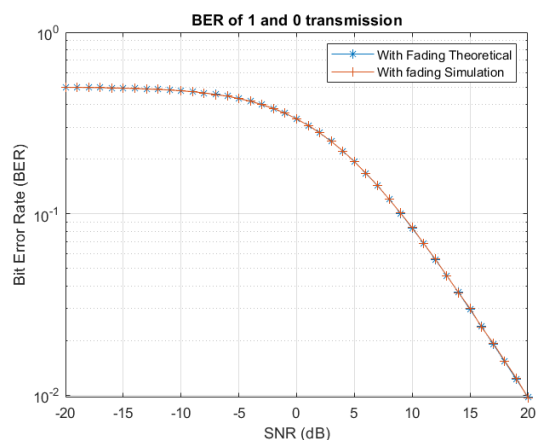
$$P_b = \frac{1}{2(1 + SNR)}$$

حالا در متلب شبیه سازی را انجام می دهیم. می توان دید در این بخش بر خلاف بخش قبل نمودار خطای سیستم با کانال محو شوندگی با افزایش SNR کاهش پیدا می کند.



شکل ۴: نمودار احتمال خطای بهینه روش ارسال باینری

۲. می توان مشاهده کرد مقدار شبیه سازی با تئوری همخوانی بالایی دارد و صحیح است.



شکل ۵: نمودار احتمال خطای بهینه روش ارسال باینری به صورت تئوری و شبیه سازی

۳.

$$P_b = 10^{-6} = \frac{1}{2(1 + SNR)} \rightarrow SNR = 499999 \rightarrow SNR = 56.99dB$$

همانطور که مشاهده می شود حدود 45 dB مقدار SNR بیشتری برای رسیدن به این احتمال خطا نسبت به BPSK دارد که زیاد است اما همانگونه که ذکر شد برای کانال با محو شوندگی بهبود قابل توجهی حاصل شد.



### ۳.۱ استفاده از مدولاسیون BPSK با داشتن CSI

در این بخش برخلاف بخش ۱-۲ فرض می کنیم که اطلاعات کانال ۲ در گیرنده وجود دارد. مطابق آنچه در درس دیدیم برای آنکه از تغییر فاز ناشی شده از کانال جلوگیری کنیم سیگنال دریافتی را در ضربایی ضرب می کنیم. می توان این ضرایب را به صورت زیر تعریف کرد.

$$\alpha = \frac{h^*}{|h|}$$

جلا برای سیگنال دریافتی داریم:

$$z[m] = \frac{h[m]^*}{|h[m]|} y[m] = |h[m]| x[m] + \frac{h[m]^*}{|h[m]|} n[m]$$

۱. برای احتمال خطا می توان نوشت:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{|h|^2 a^2}{N_0/2}}\right) = Q\left(\sqrt{2|h|^2 SNR}\right)$$

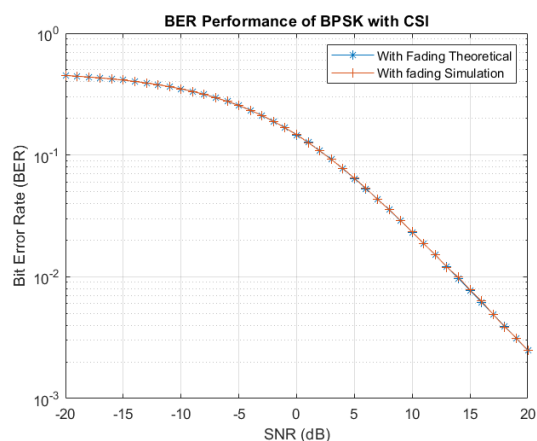
با توجه به اینکه کانال یک متغیر تصادفی می باشد برای احتمال خطای متوسط باید نسبت به  $|h|^2$  امید ریاضی بگیریم.

$$\begin{aligned} P_e &= E_h \left[ Q\left(\sqrt{2|h|^2 SNR}\right) \right] \\ &= \int_0^\infty e^{-x} \int_{\sqrt{2xSNR}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_0^{t^2/(2SNR)} e^{-t^2/2} e^{-x} dx dt, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2/2} \left(1 - e^{-t^2/(2SNR)}\right) dt \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2(1+1/SNR)/2} dt \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{SNR}{1+SNR}}\right), \end{aligned}$$

$$\overline{P_e} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{SNR}{SNR+1}}\right)$$

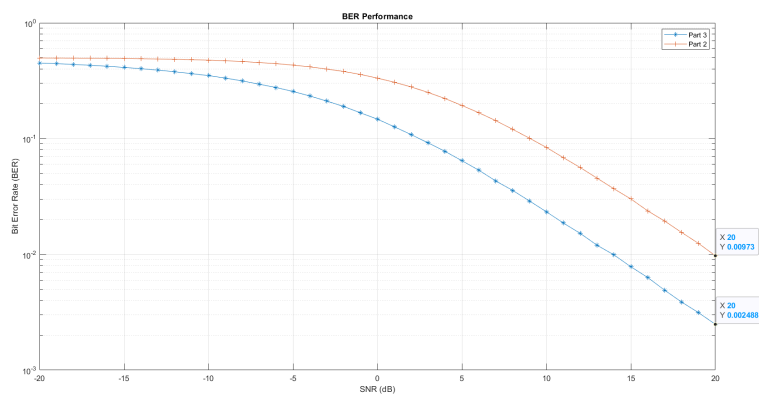
برای احتمال خطای گفته شده نیز داریم:

$$10^{-6} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{SNR}{SNR+1}}\right) \rightarrow SNR = 249999 = 53.98 \text{ dB}$$



شکل ۶: نمودار احتمال خطای بهینه BPSK به همراه CSI به صورت تئوری و شبیه سازی

۲. در این بخش ۲ نمودار شبیه سازی و تئوری رسم شده است که تطابق خوبی دارند. همچنین نمودار زیر به مقایسه بخش دوم و این بخش اشاره دارد که اختلاف آنها به ازای SNR های بالا بیشتر شده و به ازای  $SNR = 20\text{ dB}$  در شکل نشان داده شده است.



شکل ۷: مقایسه احتمال خطای بخش دوم و سوم

۳. با توجه به محاسبات بالا، دانستن اطلاعات کانال در گیرنده نسبت به ندانستن آن، مزیت بسیار قابل توجهی دارد و عملکرد سیستم را افزایش می دهد.

#### ۴.۱ استفاده از مدولاسیون QPSK

در مدولاسیون QPSK سیگنال ارسالی با قسمت های قبل کمی متفاوت است. در این بخش ما ۴ سمبل برای ارسال داریم و باید در مدولاسیون و دمدولاسیون این موضوع را لحاظ کنیم. از آنجایی که اطلاعات ارسالی برای ما اهمیتی ندارد می توانیم بلاک ارسالی را به ۴ بخش تقسیم کرده و در هر بخش سمبل های زیر را در آن قرار دهیم.

$$\{a(1+j); a(1-j); a(-1+j); a(-1-j)\}$$

این روش در تابعی به همین نام در فایل سیمولیشن پیوست شده وجود دارد. برای دمدولاسیون نیز باید با توجه به نواحی تصمیم گیری QPSK دایره واحد را ۴ قسمت کرده و با توجه به فاز سیگنال دریافتی تصمیم گیری کنیم. این بخش نیز در تابعی به همین نام در فایل پیوستی وجود دارد. بقیه قسمت های ارسال و تخمین پیام و اثر سیگنال مانند بخش های قبل خواهد بود.

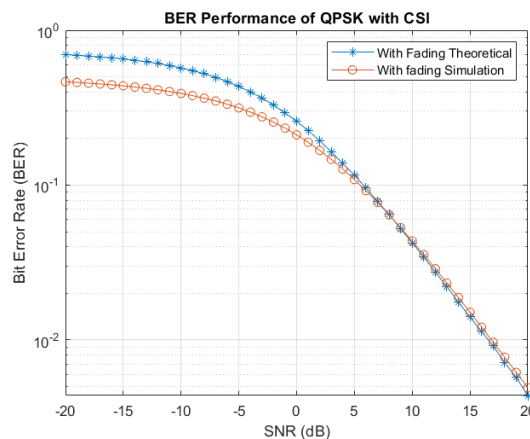
۱. اکنون محاسبات تئوری این بخش را ارائه می دهیم. می دانیم که احتمال خطای QPSK در یک کانال AWGN به صورت

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2a^2}{N_0}}\right) = Q(\sqrt{SNR})$$

ارائه می شود. پس با توجه به بخش قبل می توان  $P_e$  را بدست آورده و با امید ریاضی گرفتن مقدار متوسط آن را محاسبه کرد:

$$\bar{P}_e = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{SNR}{SNR+2}} \right)$$

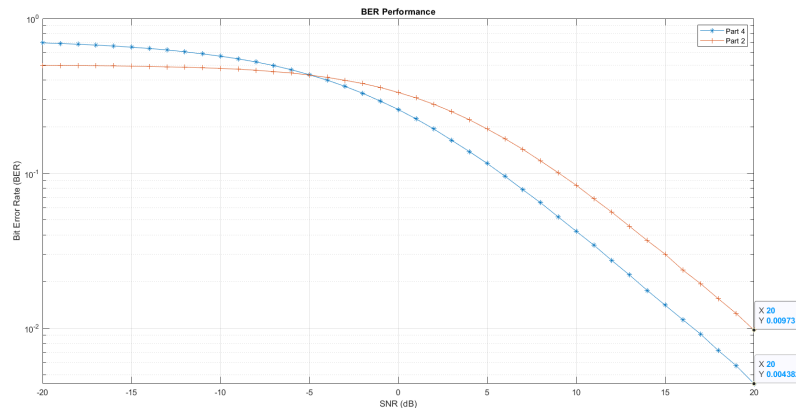
این رابطه را با قرار دادن مقدار  $\frac{SNR}{2}$  در رابطه بخش قبل نیز می توانستیم بدست آوریم. همانگونه



شکل ۸: نمودار احتمال خطای بهینه QPSK به همراه CSI به صورت تئوری و شبیه سازی

که مشاهده می شود تطابق بسیار خوبی بین مقدار تئوری و شبیه سازی وجود دارد که نشان از درستی شبیه سازی می دهد.

۲. بله بهبود یافته است. اگر به شکل زیر توجه کنید می توانید به صورت دقیق تری این تفاوت را مشاهده کنید.



شکل ۹: نمودار احتمال خطای بهینه بخش دوم و چهارم

البته مشخص است که در SNR های پایین عملکرد سیستم بخش دوم بهتر می باشد.

## ۵.۱ دایورسیتی در زمان برای ارسال پیام

یکی از راهکار های که می تواند برای بهبود عملکرد سیستم انجام پذیر دایورسیتی در زمان می باشد. در این روش سیگنال مورد نظر  $L$  بار ارسال می شود و سیگنال دریافتی برابر است با

$$y = hx + w$$

دقت کنید که در این رابطه  $h = [h_1, h_2, \dots, h_L]$  می باشد. با داشتن وزن های کانال در گیرنده می توانیم با جبران فاز کانال و ضرب ضریب مناسب، تخمین مناسبی از سیگنال دریافتی داشته باشیم.

۱. برای اینکه هر ارسال و سیگنال دریافتی مستقل از سیگنال قبلی باشد باید کانال قبل از ارسال بعدی از حالت قبلی خود مستقل شود. در درس مشاهده شد پس از فاصله زمانی هم دوستی  $T_c$  ضرایب محوشوندگی هر ارسال از یکدیگر مستقل می شود.

۲. این مسئله از دید گیرنده مشابه MRC می باشد که در درس مشاهده شد زیرا به نظر که  $L$  مسیر متفاوت برای سیگنال ارسالی داشته باشیم. پس در این بخش ضرایب را به صورت زیر بدست می آوریم.

$$\alpha = \frac{h^*}{\|h\|}$$

که با ضرب در سیگنال دریافتی می شود:

$$\frac{h^*}{\|h\|} y = \|h\| x + \frac{h^*}{\|h\|} w$$

که در اینجا

$$||\mathbf{h}||^2 = \sum_{i=1}^L |h_i|^2$$

می باشد. با فرض محو شونگی رایلی، این مقدار برابر جمع مربعات توزیع های مختلط گوسی می باشد پس  $||\mathbf{h}||^2$  دارای توزیع Chi-square با L2 درجه آزادی است و توزیع آن به شکل زیر ارائه می شود.

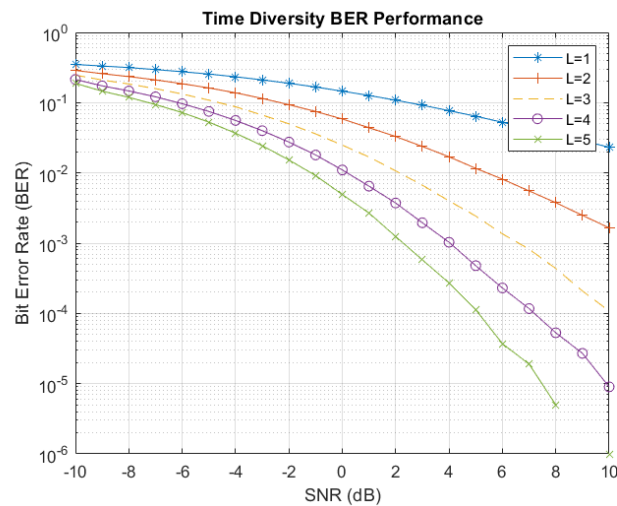
$$f(x) = \frac{1}{(L-1)!} x^{L-1} e^{-x}, \quad x \geq 0$$

برای محاسبه احتمال خطای متوسط باید نسبت به متغیر تصادفی کانال امید بگیریم اما از آنجایی که این انتگرال کمی پیچیده است از جزئیات آن صرف نظر کرده و نتیجه نهایی را می نویسیم.

$$P_e = \int_0^\infty Q(\sqrt{2x\text{SNR}}) f(x) dx$$

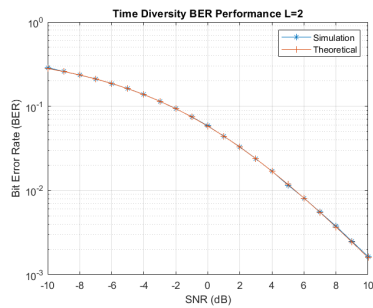
$$= \left( \frac{1-\mu}{2} \right) \sum_{\ell=0}^{L-1} \binom{L-1+\ell}{\ell} \left( \frac{1+\mu}{2} \right)^\ell,$$

حالا مقدار شبیه به ازای L های متفاوت را رسم می کنیم.

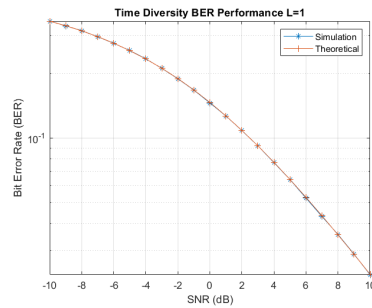


شکل ۱۰: نمودار احتمال خطای بهینه با دایورسیتی زمان به ازای L های متفاوت

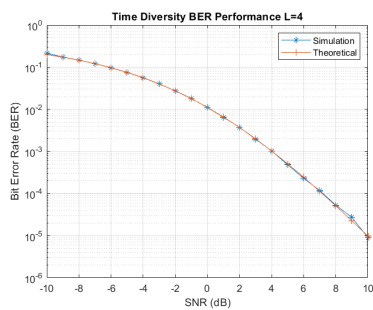
همچنین در شکل زیر به مقایسه با مقادیر تئوری و بررسی عملکرد شبیه سازی به ازای هر L می پردازیم.



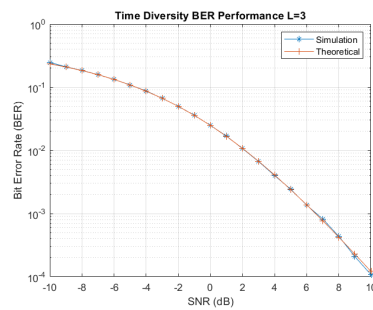
(ب) احتمال خطای بهینه به ازای  $L = 2$



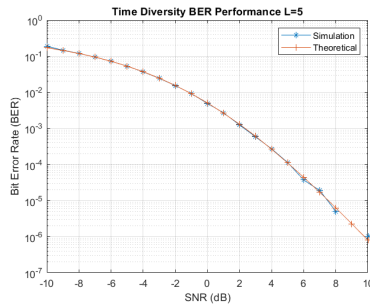
(آ) احتمال خطای بهینه به ازای  $L = 1$



(د) احتمال خطای بهینه به ازای  $L = 4$



(ج) احتمال خطای بهینه به ازای  $L = 3$



(ه) احتمال خطای بهینه به ازای  $L = 5$

شکل ۱۱: مقایسه مقادیر تئوری و عملی احتمال خطای بهینه در دایورسیتی زمانی

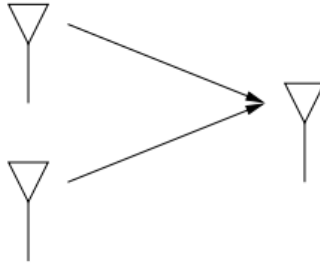
همانطور که مشاهده می شود نتایج تئوری و شبیه سازی بر هم منطبق می باشند و با افزایش  $L$  به خطای کمتری دست پیدا می کنیم.

## ۶.۱ دایورسیتی در مکان برای ارسال پیام

در این بخش از دایورسیتی در مکان برای بهبود سیستم مخابراتی استفاده می کنیم. طبق فرض سوال ما دو آنتن گیرنده و یک آنتن فرستنده داریم. شماتیک کلی به صورت زیر می باشد.

و سیگنال دریافتی به صورت زیر ارائه می شود

$$y[m] = h_1[m]x_1[m] + h_2[m]x_2[m] + w[m]$$



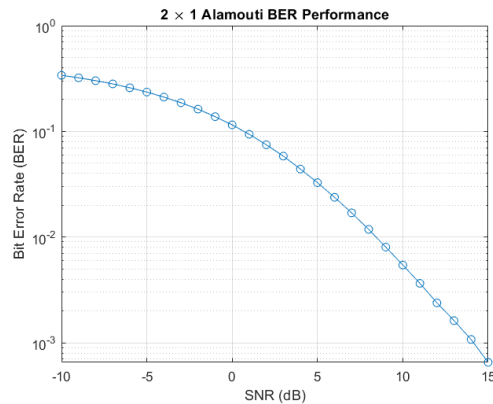
شکل ۱۲: شماتیک کلی آنتن های فرستنده و گیرنده

۱. در بخش قبل از دایورسیتی در زمان استفاده شد و برای آنکه ارسال های مستقل داشته باشیم هر سیگنال را در  $L$  بازه زمانی متفاوت ارسال کردیم. در این بخش به صورت معادل می توانیم هر پیام ارسالی را با  $L$  آنتن گیرنده دریافت کنیم که هر کدام از پیام های دریافتی مستقل خواهند بود.

۲. با توجه به نکات گفته شده برای سیستم الموتی<sup>۳</sup>، در این بخش با استفاده از نکات مطرح شده، یک سیستم الموتی با دو آنتن فرستنده و یک آنتن گیرنده را پیاده سازی می کنیم. متریک های تعریف شده به صورت زیر می باشد.

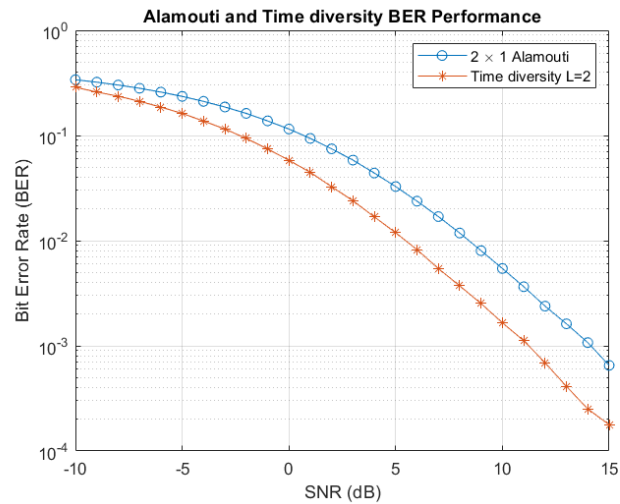
$$\begin{cases} m_1 = h_1^* y_1 + h_2 y_2^* \\ m_2 = h_2^* y_1 - h_1 y_2^* \end{cases}$$

در شکل زیر شبیه سازی این سیستم را مشاهده می کنید.



شکل ۱۳: نمودار احتمال خطای بهینه سیستم الموتی با دو فرستنده و یک گیرنده

۳. به شکل زیر توجه کنید همانگونه که مشخص است احتمال خطای روش قبل از روش الموتی بهتر می باشد. به صورت کلی نیز برای مقایسه این دو روش در نظر داشته باشید برای استفاده از دایورسیتی



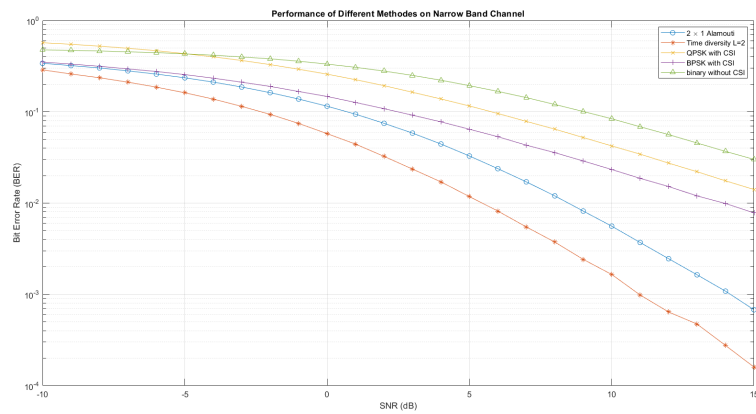
شکل ۱۴: مقایسه نمودار احتمال خطای بهینه بخش ۵ و ۶

در زمان باید زمان هم دوستی کانال  $T_c$  مقدار زیادی نباشد تا نرخ ارسال به شدت افت نکند درحالی که کم بودن مقدار  $T_c$  نیز خود سبب به وجود آمدن مشکلاتی دیگر است. روش الموتی کمی پیچیده تر است اما به دلیل ملاحظات انرژی (ارسال با نصف انرژی در هر تایم اسلات) و سرعت ارسال از روش قبل بهتر می باشد.



## ۷.۱ مقایسه کلی روش های ارائه شده

در انتها روش های ارائه شده برای کانال باریک را با یکدیگر مقایسه کرده و نتیجه گیری می کنیم. نمودار کلی احتمال خطای آن ها به صورت زیر می باشد.



شکل ۱۵: احتمال خطای روش های بکار گرفته شده در کانال باریک

همانگونه که مشخص است روش های دایورسیتی که از بقیه پیچیده تر می باشند، دارای بهترین عملکرد هستند. همچنین همانطور که گفته شد داشتن CSI در فرستنده می تواند عملکرد سیستم را بهبود دهد.

## ۲ کانال فرکانس گزین

در این بخش کانال را فرکانس گزین فرض می کنیم و به صورتی کلی اگر تعداد تپ های کانال برابر  $L$  باشد رابطه زیر را می توانیم برای آن بنویسیم.

$$y[k] = \sum_{i=0}^{L-1} h_i[k] x[k-i] + w[k]$$

که در این رابطه  $h_i[k] \sim \mathcal{CN}(0, 1)$ . برای این سیستم پهن باند همانطور که در درس مشاهده شد ارائه سیستم OFDM می تواند عملکرد را به صورت چشمگیری بهبود دهد. در حقیقت یک سیستم OFDM یک کانال فرکانس گزین را به  $N$  کانال باند باریک تقسیم می کند. در ادامه با شبیه سازی این موضوع را بررسی می کنیم.

### ۱.۲ مدل سازی سیستم OFDM و Waterfilling

اضافه کردن پیشوند گردشی یا cp در سیستم OFDM برای جلوگیری از تداخل بین سیمبل های مجاور در کانال های با تداخل فرکانسی و زمانی استفاده می شود. همچنین اضافه کردن آن کانولوشن خطی را به دایروی تبدیل کرده و استفاده از الگوریتم FFT را ممکن می سازد. طول زمانی cp به اندازه پاسخ ضربه کانال خواهد بود. با توجه به داده های مسئله داریم:

$$T_d = 10 \mu s, \quad W = 20 \text{ MHz}$$

$$L = T_d W = 200$$

توجه کنید که  $L$  یک واحد از طول cp کمتر است. اکنون باید  $N$  یا تعداد نقاط IFFT را تعیین کنیم. از آنجایی که نمی توانیم مقدار یکتایی برای آن تعیین کنیم با توجه به راهنمایی یک حد بالا برای این مقدار انتخاب می کنیم.

$$T_c = 5 \text{ ms}, \quad W = 20 \text{ MHz}$$

$$N \leq T_c W = 100000$$

برای انتخاب مناسب مقدار  $N$  باید چند موضوع را در نظر بگیریم.

- زیاد بودن مقدار  $N$  می تواند به دلیل تغییر کانال باعث مشکلاتی شود. به عبارت دیگر، ممکن است نتیجه مهم OFDM یعنی تشکیل  $N$  کانال باند باریک بدست نیاید.
- کم بودن مقدار  $N$  می تواند بسیار از نرخ ارسالی کم کند. همچنین توجه کنید که بدلیل وجود cp نرخ ارسالی با نسبت  $\frac{L}{N+L}$  کم می شود پس بهتر است که  $N$  به اندازه کافی بزرگ باشد.
- با توجه به بهینه بودن الگوریتم FFT باید تعداد نقاط DFT از توان 2 باشد تا سرعت این بخش افزایش پیدا کند.

با توجه به مطالب بیان شده نتیجه می گیریم که مقدار  $N = 65536$  مقدار مناسبی می باشد. برای یافتن تعداد بلاک های ارسالی  $N_b$  باید توجه کنیم که طول پیام ارسالی طبق فرض مسئله  $10^7$  می باشد پس داریم:

$$n_c = \frac{10^8}{65536} \approx 152.588 \rightarrow n_c = 153$$

بلاک OFDM همانطور که در درس بیان شد به صورت زیر قابل بیان است. برای پیاده سازی روش



شکل ۱۶: بلاک دیاگرام OFDM

Waterfilling ابتدا کمی تئوری آن را بیان می کنیم.

همانطور که می دانید در سیستم OFDM ما دارای تعدادی کانال های موازی هستیم که هر کدام به صورت مستقل از دیگری عمل می کنند. در تئوری اطلاعات بیان می شود که بیشترین نرخ ارسال قابل اطمینان  $N$  زیر حامل، در یک کانال مخابراتی از رابطه زیر بدست می آید.

$$\sum_{n=0}^{N-1} \log \left( 1 + \frac{P_n |\tilde{h}_n|^2}{N_0} \right)$$

می توان مقدار توان تخصیص یافته را به صورت مناسب انتخاب کرد تا مقدار بالا ماکزیمم شود. در واقع مسئله بهینه سازی زیر را داریم.

$$C_{N_c} := \max_{P_0, \dots, P_{N_c-1}} \sum_{n=0}^{N_c-1} \log \left( 1 + \frac{P_n |\tilde{h}_n|^2}{N_0} \right),$$

$$\text{subject to } \sum_{n=0}^{N_c-1} P_n = N_c P, \quad P_n \geq 0, \quad n = 0, \dots, N_c - 1.$$

به کمک ضرایب لاگرانژ می توان به مسئله زیر رسید.

$$\mathcal{L}(\lambda, P_0, \dots, P_{N_c-1}) := \sum_{n=0}^{N_c-1} \log \left( 1 + \frac{P_n |\tilde{h}_n|^2}{N_0} \right) - \lambda \sum_{n=0}^{N_c-1} P_n$$

که در آن  $\lambda$  ضرایب لاگرانژ می باشد. برای برقراری شرایط KKT<sup>۴</sup> (برای اطلاعات بیشتر به کتاب های بهینه سازی محدب مراجعه کنید) توان تخصیص داده شده باید در شرط زیر صدق کند.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_n} \begin{cases} = 0 & \text{if } P_n > 0 \\ \leq 0 & \text{if } P_n = 0 \end{cases}$$

پس توان تخصیص داده شده زیر می تواند در مسئله بهینه سازی گفته شده صدق کند.

$$P_n^* = \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{N_0}{|\tilde{h}_n|^2} \right)^+$$

و ضرایب  $\lambda$  باید به گونه ای انتخاب شوند که در رابطه زیر صدق کنند.

$$\frac{1}{N_c} \sum_{n=0}^{N_c-1} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{N_0}{|\tilde{h}_n|^2} \right)^+ = P$$

در حوزه فرکانس نیز رابطه توان بهینه را به صورت زیر می توان بیان کرد.

$$P(f)^* = \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{N_0}{|H(f)|^2} \right)^+$$

به این روش که به صورت خلاصه بیان شد Waterfilling گفته می شود. برای شبیه سازی آن تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(\lambda) = P_{\max} - \max \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{N_0}{|H_0|^2}, 0 \right) - \max \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{N_0}{|H_1|^2}, 0 \right) - \max \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{N_0}{|H_2|^2}, 0 \right) \\ - \max \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{N_0}{|H_3|^2}, 0 \right) - \dots - \max \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{N_0}{|H_{n_c-1}|^2}, 0 \right)$$

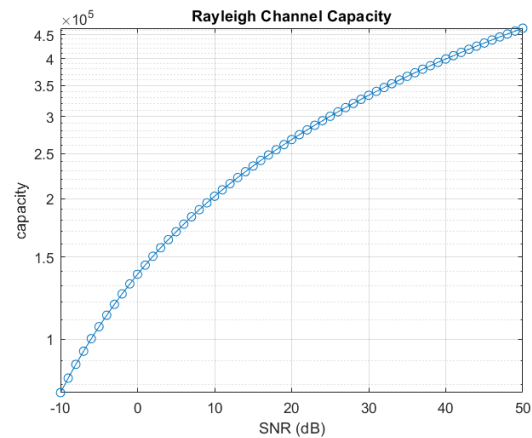
اگر با تابع  $f_{zero}$  در متلب ریشه آن را بیابیم در واقع مقدار صحیح  $\lambda$  را پیدا کرده ایم. برای استفاده از این تابع باید بازه های جواب را مشخص کنیم. توجه کنید که در دو سر بازه داده باید تابع هدف تغییر علامت دهد و با سعی و خطا این مقادیر را پیدا می کنیم.

## ۲.۲ شبیه سازی سیستم OFDM

در ابتدا توجه فرمایید که در این بخش با توجه به فرض  $SNR = \frac{P_{max}}{n_c N_0}$  می باشد. با ایده گرفتن از بخش قبل ما در شبیه سازی مقدار ثابتی برای  $P_{max}$  در نظر گرفته و مقدار واریانس نویز را تغییر می دهیم. در پیاده سازی سیستم OFDM در متلب، ابتدا بردار مورد نظر برای ارسال را به صورت تعدادی بردار موازی تقسیم کرده و در یک ماتریس ذخیره می کند. در مرحله بعد هر بردار سطری از این ماتریس به صورت مستقل ارسال می شود. همچنین در شبیه سازی هر بلاک مشخص شده در شکل ۱۵ را به توابع جداگانه ای در گیرنده یا فرستنده شکسته شده اند. همانطور که می دانیم بلاک cp انتهای پیام ارسالی به اندازه طول کانال برداشته و به ابتدای پیام اضافه می کند. بلاک حذف cp در گیرنده نیز دقیقاً عکس این کار را انجام می دهد. توابع پیاده سازی شده در متلب نیز به صورت برداری این عمل را انجام می دهند. توابع تبدیل فوریه و عکس آن برای انتقال به حوزه فرکانس و برعکس نیز به صورت پیش فرض در متلب تعریف شده اند. برای تاثیر اثر کانال کافی است تا همانند آنچه در سیگنال و سیستم آموختیم، پاسخ ضربه کانال را در سیگنال ارسالی کانالو کنیم. در مورد تابع متناسب با Waterfilling توجه کنید که پس از بدست آوردن مقدار  $\lambda$  طبق رابطه اشاره شده در بخش قبل می توانیم ظرفیت و ضرایب Waterfilling را بدست آوریم تا در بخش های بعد به کار ببریم.

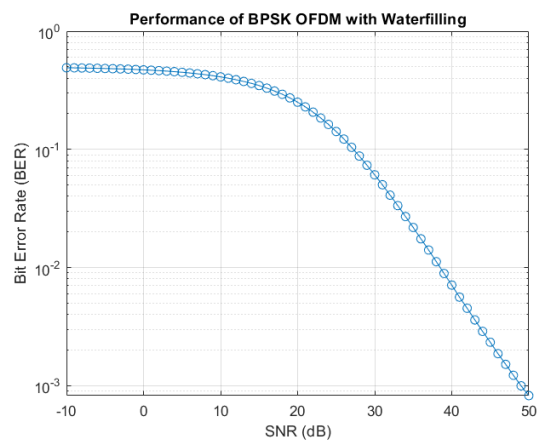
### ۳.۲ ظرفیت کانال و احتمال خطا در سیستم OFDM

پس از این مقدمه طولانی نتایج شبیه سازی به صورت زیر می باشد.



شکل ۱۷: نمودار ظرفیت کانال OFDM

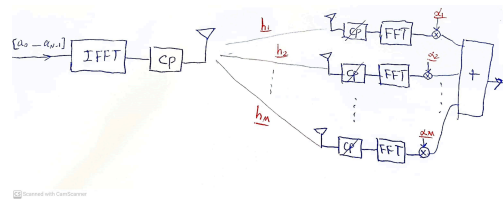
همچنین نمودار احتمال خطا نیز به صورت زیر می باشد که همانگونه که انتظار داشتیم با افزایش SNR احتمال خطا کاهش می یابد.



شکل ۱۸: نمودار احتمال خطای بهینه سیستم OFDM با Waterfilling

## ۴.۲ دایورسیتی در مکان برای سیستم OFDM

بلاک دیاگرام زیر را مطابق آنچه در درس مشاهده شد در نظر بگیرید. همانگونه که مشاهده می شود، با

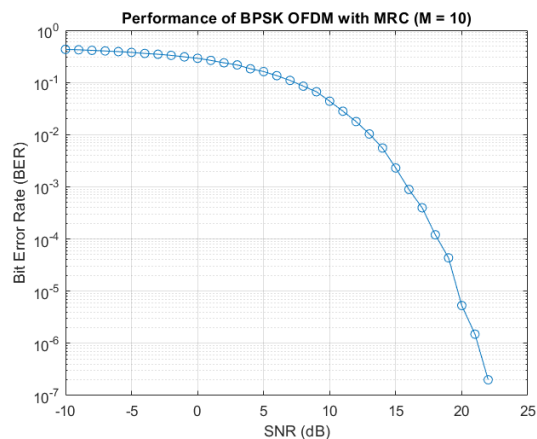


شکل ۱۹: بلاک دیاگرام OFDM با MRC

این روش ارسال ما  $M$  کانال مستقل داریم و هر کدام از بردارهای دریافتی در آنتنهای گیرنده به صورت مستقل خواهد بود. پس از حذف cp و انتقال به حوزه فرکانس برای هر کدام از شاخه ها، باید سیگنالهای دریافتی را با یکدیگر ترکیب کنیم. برای اینکه ترکیب شاخه ها به صورت سازنده باشد ابتدا در ضربایی سیگنال دریافتی را ضرب کرده تا فاز آنها را از بین ببریم. در درس مشاهده شد که این ضرایب به صورت زیر بیان می شود:

$$\alpha_k = \frac{H_K^*}{\sqrt{N_0}}$$

البته می توانستیم این ضریب را نرمالایز نیز کنیم اما با توجه به نتایج تجربی، ضریب نرمالایز نشده نتیجه مناسب تری می دهد. شبیه سازی زیر به ازای  $M = 10$  یعنی 10 آنتن در گیرنده انجام شده است. در شبیه سازی از منطق روش قبل استفاده شده است و تنها یک حلقه به ازای هر SNR اضافه شده است که در آن سیگنالهای دریافتی در 10 آنتن ترکیب می شوند.



شکل ۲۰: نمودار احتمال خطای بهینه سیستم OFDM با MRC

مقایسه شکل ۱۷ و ۱۹ می تواند برتری قابل توجه روش MRC را نشان دهد. البته درمورد پیاده سازی این روش توجه کنید که به 10 آنتن در گیرنده نیاز می باشد و ممکن است هزینه قابل توجهی داشته باشد.

## ۵.۲ همسان سازی با معیار ZF و MMSE در سیستم OFDM

در ابتدا بلاک دیاگرام زیر را در نظر بگیرید. بلاک استفاده شده در انتهای گیرنده بلاک همسان ساز در



شکل ۲۱: بلاک دیاگرام OFDM با Equalization

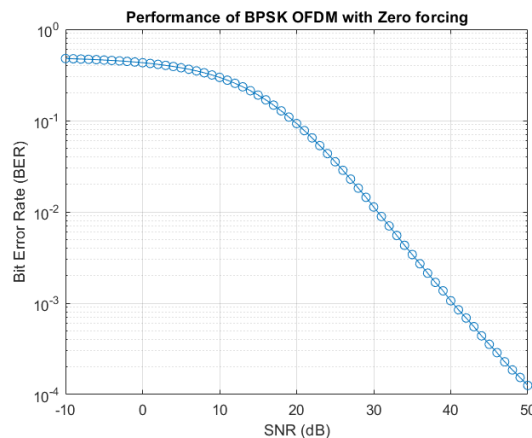
حوزه فرکانس می باشد که در جهت همسان سازی سیستم OFDM به کار می رود. همانطور که در درس مشاهده شد دو روش کلی برای همسان سازی در سیستم OFDM وجود دارد که در ادامه به آن ها می پردازیم و در متلب شبیه سازی می کنیم. توجه کنید منطق کلی شبیه سازی مانند قبل می باشد و بلاک اضافه شده تنها در سیگنال انتهایی گیرنده قبل از تصمیم گیری خودنمایی می کند.

۱. در ابتدا روش Zero Forcing (ZF) را بررسی می کنیم. ضرایب همسان سازی این روش به صورت زیر می باشد.

$$W_k = \frac{1}{H_k}$$

اگر نویز را در نظر نگیریم با ضرب این ضریب در سیگنال گیرنده، اثر کانال حذف شده و به سادگی می توانیم به سیگنال ارسالی برسیم. اشکال اصلی این روش در حضور نویز خودنمایی می کند که در مواقعی که کانال deep fade است و  $H_k$  مقدار کمی دارد، مقدار  $\frac{1}{H_k}$  زیاد شده و باعث تقویت نویز می شود.

با شبیه سازی در متلب نیز شکل زیر بدست می آید.



شکل ۲۲: نمودار احتمال خطای بهینه سیستم OFDM با ZF

همانطور که مشخص است عملکرد روش ZF از Waterfilling بهتر است اما به خوبی MRC نمی باشد.

۲. روش دیگری که برای همسان سازی حوزه فرکانس برای سیستم OFDM استفاده می شود، روش MMSE می باشد. در این روش ضرایب همسان سازی به صورت زیر ارائه می شود.

$$W_k = \frac{H_k^*}{|H_k|^2 + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_s^2}}$$

که در آن  $\sigma_n$  واریانس نویز و  $\sigma_s$  واریانس سیگنال می باشد. برای بدست آوردن واریانس نویز دقت کنید که ما در حوزه فرکانس سیگنال را دریافت می کنیم و مقدار واریانس نویز در حوزه زمان  $N_0$  (سیگنال شامل دو بخش مختلط و حقیقی است که هر کدام واریانس  $\frac{N_0}{2}$  دارد و واریانس کلی  $N_0$  می باشد)، در حوزه فرکانس متفاوت خواهد بود. برای بدست آوردن واریانس نویز داریم:

$$N_k = \sum_{i=0}^{N-1} n_i e^{j \frac{2\pi k}{N} i}, \quad E[n_i n_i^*] = N_0$$

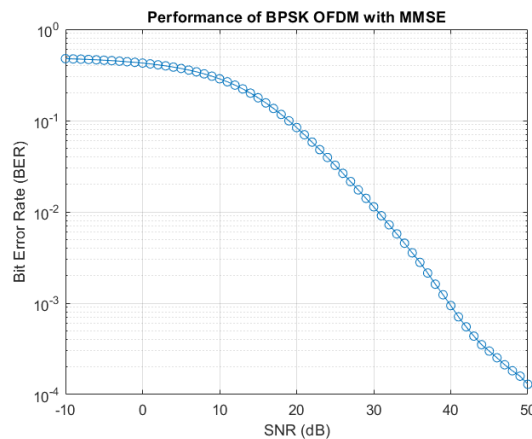
$$E[N_k N_k^*] = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} n_n e^{j \frac{2\pi k}{N} (i-j)} E[n_i n_j^*]$$

$$E[N_k N_k^*] = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} n_n e^{j \frac{2\pi k}{N} (i-j)} N_0 \delta[i-j] = N \times N_0$$

همچنین از آنجایی که ما از روش BPSK برای مدولاسیون استفاده می کنیم می توان نوشت:

$$W_k = \frac{H_k^*}{|H_k|^2 + N \times N_0}$$

که سیگنال انتهایی گیرنده را قبل از تخمین در این ضرایب ضرب می کنیم. با شبیه سازی در متلب داریم:



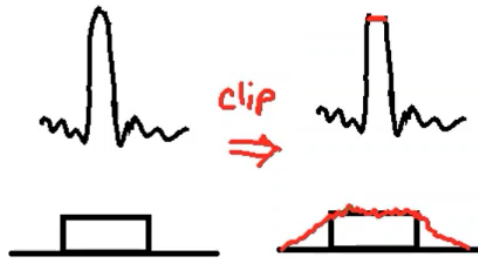
شکل ۲۳: نمودار احتمال خطای بهینه سیستم OFDM با MMSE

مشاهده می شود استفاده از MMSE تنها به صورت جزئی بهتر از ZF می باشد و به عملکرد MRC نمی رسد.



## ۶.۲ Clipping در سیستم OFDM

یکی از اشکالات سیستم OFDM ایجاد شدن PAPR پس از عبور سیگنال از بلاک IFFT می باشد. یکی از راه های ارزان قیمت برای مقابله با PAPR در سیستم OFDM روش clipping است. به زبان ساده منظور از clipping آن است که به دلیل محدودیت های فرستنده، سیگنال را قبل از ارسال ببریم؛ یعنی قسمت هایی از سیگنال که از یک مقدار آستانه ای بیشتر است، با مقدار آستانه جایگزین کنیم. برای فهم بیشتر به شکل زیر دقت نمایید.



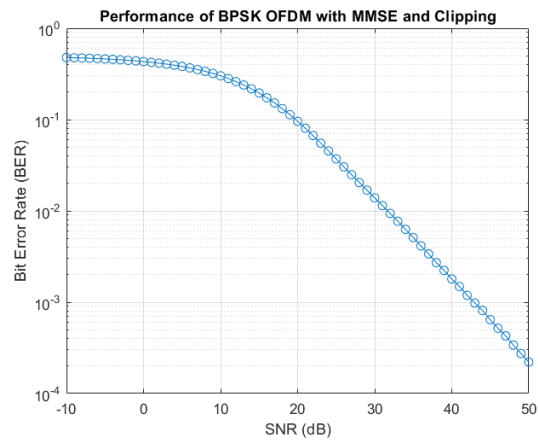
شکل ۲۴: اثر clipping بر روی سیگنال

همانطور که مشاهده می شود این کار در حوزه فرکانس به سیگنال ارسالی صدمه میزند. به طور کلی روش clipping دارای سادگی می باشد و نیاز به فرستادن اطلاعات اضافی برای آن وجود ندارد. اما از طرف دیگر، این روش باعث بوجود آمدن in-band distortion می شود که به احتمال خطای آن اضافه می کند. از معایب دیگر این روش می توان به out-of-band radiation و به هم خوردن تعامد زیرحامل ها اشاره کرد.

برای پیاده سازی این روش در متلب از روش زیر استفاده می کنیم که  $\hat{X}_k$  سیگنال ارسالی می باشد.

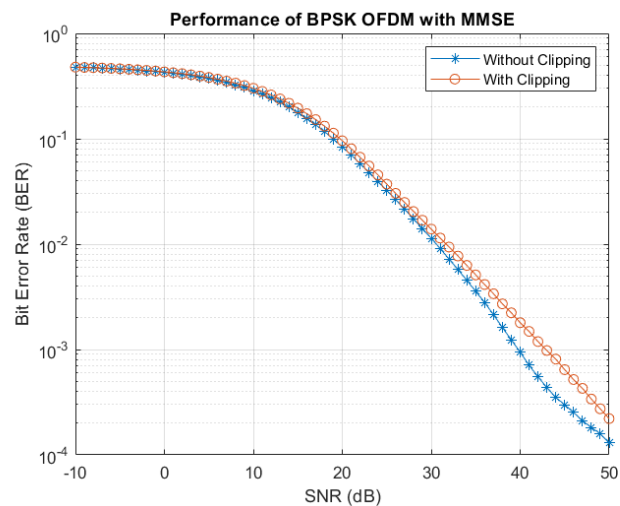
$$\hat{X}_k = \begin{cases} 0.8 \times \max(|X_k|) e^{j\angle X_k} & |X_k| > 0.8 \times \max(|X_k|) \\ X_k & o.w. \end{cases}$$

شبیه سازی این روش در متلب با همسان سازی MMSE در گیرنده، نمودار احتمال خطا را به صورت زیر نشان می دهد.



شکل ۲۵: نمودار احتمال خطای بهینه سیستم OFDM با MMSE و clipping

اگر این روش را با MMSE بدون clipping مقایسه کنیم داریم:

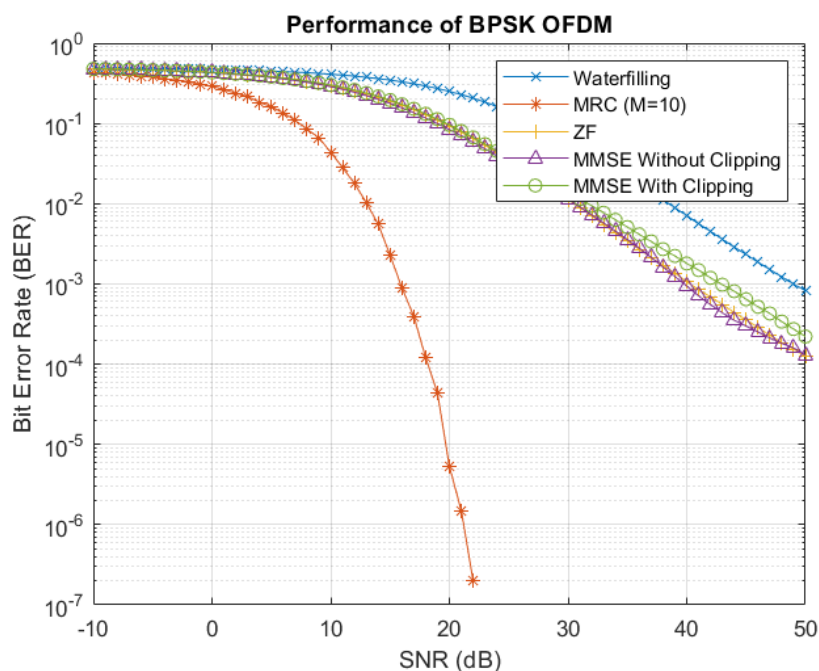


شکل ۲۶: مقایسه اثر clipping در احتمال خطای سیستم OFDM

مشاهده می شود همانگونه که انتظار داشتیم، احتمال خطای سیستم با clipping افزایش می یابد. البته این افزایش احتمال خطا بسیار خفیف و کم است.

## ۷.۲ مقایسه کلی روش های ارائه شده

در انتها روش های ارائه شده برای OFDM در بخش دوم را با یکدیگر مقایسه کرده و نتیجه گیری می کنیم. نمودار کلی احتمال خطای آن ها به صورت زیر می باشد.



شکل ۲۷: احتمال خطای روش های بکار گرفته شده در سیستم OFDM

اولین موضوعی که در شکل ۲۶ خودنمایی می کند عملکرد عالی روش MRC با 10 آنتن گیرنده است. همانطور که پیش تر نیز اشاره شد این روش از نظر ملاحظات عملی می تواند هزینه بر باشد. پس از آن همسان سازی با روش ZF و MMSE بدون clipping به صورت نزدیکی روش بهتر می باشند. پس از آن مشاهده می شود که روش clipping که یک روش عملی پر کاربرد می باشد عملکرد سیستم را کمی بد می کند. در این روش ها روش Waterfilling به صورت چشمگیری عملکرد ضعیف تری دارد که در شکل ۲۶ مشخص است.