دانشگاه تهران
پردیس دانشکده‌های فنی

مخابرات وایرلس

گزارش مقاله درس

عنوان مقاله: Federated Learning via Over-the-Air Computation

سید علیرضا جاوید

۸۱۰۱۹۸۳۷۵

استاد

دکتر صباغیان

۲۵ خرداد ۱۴۰۲

فهرست مطالب

چکیده

نیاز بشر به داشتن ارتباط با تاخیر کم [۱] و حفظ حریم شخصی [۲] و همچنین ظهور دستگاه هایی مانند پهباد ها و خودرو های خود ران که این مسئله در آن ها اهمیت زیادی دارد، استفاده از پردازش ابری [۳] را در این موارد نا ممکن کرده است. در همین سو تحقیقات در زمینه محاسبات در لبه [۴] بسیار محبوب شده است تا آموزش و یادگیری بدون ارسال داده ها به صورت مستقیم، به یک سرور مرکزی انجام پذیرد. این موضوع، یک زمینه نوپا در یادگیری ماشین به یادگیری فدرال[۵] را مطرح می کند که منجر به صرفه جویی در استفاده از انرژی، پهنای باند و حافظه می شود و نیازمند به قدرت پردازشی کمتری است. برای تجمیع [۶] پارامتر های محاسبه شده مدل محلی [۷] در سرور نهایی از الگوریتم میانگین گیری فدرال استفاده می شود که در آن، از میان پارامتر های متفاوت مدل به صورت وزن دار میانگین گرفته خواهد شد و مدل کلی [۸] را تشکیل می دهد. با این حال، پهنای باند ارتباطی محدود، مهم‌ترین محدودیت برای تجمیع به‌روزرسانی‌های محاسباتی محلی است. در این مقاله روش محاسباتی مبتنی بر محاسبه بی سیم [۹] معرفی می شود تا برای تجمیع سریع مدل جهانی که از ویژگی تجمیع همزمان کانال چندرسانه‌ای بی‌سیم در آن بکار گرفته می شود را استفاده کنیم. دستیابی به این مهم نیازمند به انتخاب مطلوب دستگاه های محلی و شکل دهی [۱۰] مناسب سیگنال می باشد. این مسئله می تواند به صورت یک مسئله بهینه سازی تنک [۱۱] و رنک پایین مدل شود. برای حل این مسئله ما یک توصیف به صورت difference-of-convex-functions (DC) برای مسئله بهینه سازی ارائه می دهیم تا حل آن امکان پذیر شود و سپس به کمک الگوریتم DC که در ادامه بیان می کنیم به حل آن می پردازیم.

---

[۱] low-latency
[۲] privacy
[۳] cloud computing
[۴] edge computing
[۵] federated learning
[۶] aggregation
[۷] local
[۸] global
[۹] over-the-air computation
[۱۰] beamforming
[۱۱] sparse

۱ مقدمه

با افزایش روزافزون میزان داده های در دسترس و رشد الگوریتم های یادگیری ماشین، نیاز به قدرت پردازشی بالا برای این اعمال بیش از هر زمان دیگری حس می شود. یک روش متداول، استفاده از پردازش ابری می باشد. این روش نیاز به یک سرور مرکزی و فضای بالای ذخیره سازی و انتقال همه داده می باشد. از طرفی با گسترش پهباد ها و نیاز به انتقال با تاخیر بسیار کم و حفظ حریم شخصی نیاز به روش های جدیدی را برای پردازش الگوریتم های یادگیری ماشین ایجاد می کند. یک روش جدید پیشنهاد شده یادگیری ماشین در لبه [۱۲] می باشد که در آن به جای پردازش مرکزی و فرستادن تمام اطلاعات به سرور، داده ها را به صورت محلی آموزش دهیم. محدودیت اصلی در این زمینه پهنای باند، انرژی و توان پردازشی محدود در لبه می باشد. در سال ها اخیر تحقیقات بالایی برای بهبود انجام محاسبات لبه به کمک طراحی مناسب سخت افزار_ نرم افزار صورت گرفته. که یک روش تازه توسعه یافته به نام یادگیری فدرال به بررسی یادگیری مستقیم در لبه می پردازد تا به صورت بهینه تری از پهنای باند استفاده کرده و حفظ حریم شخصی را بهبود دهد. این روش در جایی که ارسال اطلاعات به سرور مرکزی مطلوب نباشد مورد استفاده است. با این وجود در استفاده از یادگیری فدرال چالش هایی دارد که به آن می پردازیم:

۱. داده های جمع آوری شده که i.i.d نیستند مدلسازی و فیت کردن توزیع بر روی داده های جمع آوری شده را دشوار می کنند.

۲. لود بالای داده های مخابراتی ارسال شده در مقیاس یادگیری فدرال می تواند بهینه بودن سیستم را دچار مشکل کند.

۳. برخی از دستگاه هایی که دارای تاخیر بالا در محاسبات هستند می توانند عملکرد سیستم را بسیار کند کنند.

۴. رفتار خصمانه دستگاه ها می تواند موجب نشتی اطلاعات و نقض حریم شخصی شود.

۵. برخی اشکالات در پیاده سازی سیستم مانند سرعت همگرایی، اتصال و ... در مقایسه با یادگیری مرکزی.

این مقاله به بهبود کارآیی مخابراتی و سریع تر کردن میانگین گیری (الگوریتم FedAvg) در یادگیری فدرال می پردازد. در این مقاله پیشنهاد می شود که محاسباتی مبتنی بر محاسبه بی سیم برای کم کردن لود مخابراتی و افزایش کارایی استفاده شود. این روش با استفاده از خاصیت superposition کانال چند مسیره بی سیم، میانگین وزنی از بروزرسانی های محلی را از طریق انتقال همزمان محاسبه می کند. رویکرد پیشنهادی شامل انتخاب همزمان دستگاه‌ها و طراحی شکل دهی سیگنال گیرنده است تا تعداد حداکثر دستگاه های مورد نیاز را برای رسیدن به مقدار مشخصی خطای حداقل مربعات [۱۳] محاسبه کند. انتخاب دستگاه های بیشتر موجب بهبود سرعت همگرایی می شود اما می تواند خطای تجمیع را افزایش دهد. این یک داد و ستد [۱۴] موجود در این مسئله بهینه سازی می باشد که برای حل مسئله بهینه سازی بکار می رود. این مسئله بهینه سازی به صورت nonconvex quadratic constraints مدل می شود. که در ادامه با جزئیات بیشتری به آن می پردازیم. با این حال، این مسئله به لحاظ محاسباتی پیچیده است و ما رویکردی با مدل‌سازی کم‌رتبه [۱۵] و خاصیت تنک ارائه می دهیم و آن را به صورت قید های nonconvex quadratic به همراه قید اضافه، رنک ۱ و استفاده از تکنیک matrix lifting ارائه می دهیم. برای حل این مسئله بهینه سازی از راه (DC) difference-of-convex-functions استفاده می کنیم و نشان می

[۱۲] edge ML
[۱۳] mean squared error
[۱۴] trade off
[۱۵] low-rank

دهیم این الگوریتم از الگوریتم های دیگر در این زمینه مانند semidefinite relaxation (SDR) بهتر عمل می کند. به صورت کلی مشارکت های اصلی این مقاله به صورت زیر است:

۱. ارائه یک رویکرد جدید برای تجمیع مدل یادگیری فدرال به وسیله استفاده از خاصیت superposition سیگنال در کانال چند مسیره بی سیم و استفاده از اصول محاسبه بی‌سیم. این ایده به وسیله انتخاب همزمان دستگاه‌ها و طراحی شکل دهی سیگنال برای بهبود عملکرد یادگیری آماری انجام می‌شود.

۲. ارائه یک مدل کم رتبه و تنک برای حل مسئله بهینه سازی ترکیبی مدل شده با قید های nonconvex quadratic

۳. ارائه یک الگوریتم با رویکرد DC برای حل محدودیت‌های الگوریتم‌های موجود برای بهینه‌سازی یک مسئله کم‌رتبه و تنک. همچنین الگوریتم DC پیشنهاد شده توانایی تشخیص با دقت امکان سازی قید های nonconvex quadratic مسئله را دارد که در این مسئله مهم است.

۴. علاوه بر این، الگوریتم DC را برای برنامه DC غیرمحدب ارائه می‌دهیم که از طریق روش‌های محدب متوالی تقریبی حل می‌شود و نرخ همگرایی جهانی را برای الگوریتم DC بدست می آوریم.

۲ مدلسازی سیستم و فرمول بندی مسئله

در این بخش سیستم یادگیری فدرال معرفی می شود. بر اساس روش محاسبه بی سیم یک ساختار یکپارچه محاسباتی و ارتباطی ارائه می گردد تا تجمیع نهایی مدل های محلی را سریع تر انجام دهد و مدل جهانی را بهبود دهد.

۱.۲ یادگیری فدرال در دستگاه ها

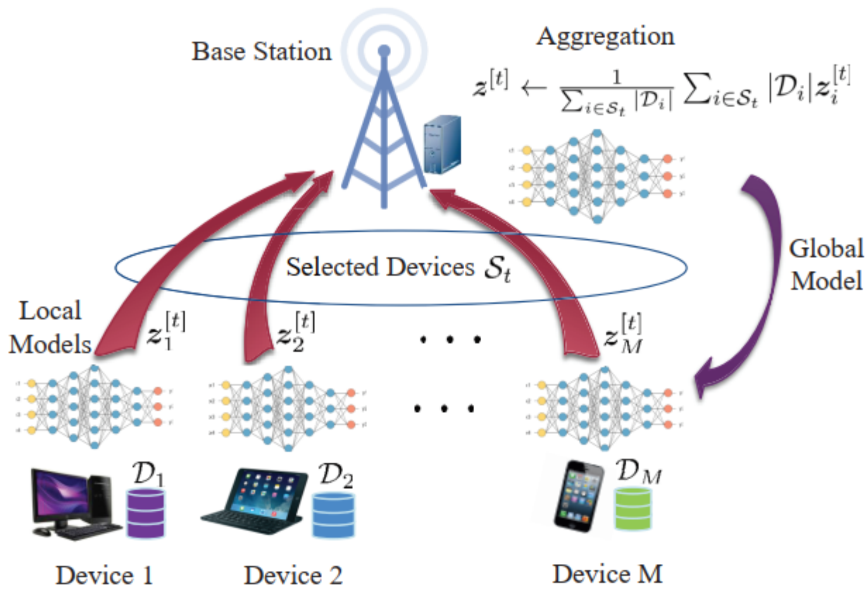
سیستم یادگیری فدرال در دستگاه‌ها، مدل جهانی مشترک داده های محلی را یاد می‌گیرد و داده‌های آموزش را در هر دستگاه نگه‌داری می‌کند. این سیستم مزیت های بسیاری را از جمله زمان پاسخ کم، مصرف کم انرژی و حفظ حریم خصوصی کاربران را دارا می باشد.

شکل ۱ سیستم یادگیری فدرال را با M دستگاه موبایل با یک آنتن و یک ایستگاه پایه (BS) مجهز به N آنتن نمایش می‌دهد تا وظیفه یادگیری ماشین گسترده زیر را پشتیبانی کند:

$$\underset{\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^d}{\text{minimize}} \quad f(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{T} f_j(\boldsymbol{z}),$$

که در آن z بردار پارامتر مدل می باشد که در فضای d بعدی بهینه شود و T تعداد تمام نمونه ها می باشد. این مدل به طور گسترده در رگرسیون خطی[۱۶]، رگرسیون لجستیکی[۱۷]، ماشین بردار پشتیبان[۱۸] و همچنین شبکه‌های عصبی عمیق [۱۹]استفاده می‌شود. به طور معمول، هر تابع f_j توسط $l(z; x_j, y_j)$ پارامتر سازی می شود، که در آن l تابع هزینه با زوج ورودی و خروجی به صورت (x_j, y_j) می باشد.

[۱۶] linear regression
[۱۷] logistic regression
[۱۸] support vector machines
[۱۹] deep neural network



شکل ۱: یادگیری فدرال در دستگاه

در اینجا، $D = (x_j, y_j) : j = 1, ..., T$ مجموعه داده‌های موجود در فرایند آموزش را نشان می‌دهد. مجموعه داده محلی در دستگاه i با نماد $D_i \subseteq D$ نشان داده می‌شود. پهنای باند محدود شبکه مهم ترین گرنه [20] برای تجمیع مدل جهانی در یادگیری فدرال است. برای کم کردن تعداد دور های مخابراتی برای تجمیع مدل نهایی در یادگیری فدرال، الگوریتم میانگین گیری (FedAvg) پیشنهاد شده که به طور خاص در دور t ام:

۱. BS یک زیر مجموعه ای از دستگاه های موبایل $S_t \subseteq \{1, ..., M\}$ را انتخاب می کند.

۲. BS مدل جهانی به روزرسانی شده $z^{[t-1]}$ را به دستگاه مشخص S_t می فرستد.

۳. هر دستگاه انتخاب شده $i \in S_t$ الگوریتم به روزرسانی محلی (برای مثال گرادیان تصادفی کاهشی [21]) را بر اساس داده محلی D_i و مدل جهانی $z^{[t-1]}$ اجرا می کند و خروجی آن مدل محلی به روزرسانی شده $z_i^{[t]}$ است.

۴. BS تمام به روزرسانی های محلی $z_i^{[t]}$ را با $i \in S_t$ را تجمیع می کند، به عبارتی مدل جهانی به روزرسانی شده $z^{[t]}$ را به دست می آورد.

چارچوب میانگین گیری توزیع‌شده در الگوریتم ۱ نشان داده شده است.
در این مقاله، هدف ما ارتقای کارآیی مخابراتی در یادگیری فدرال تحت دستگاه با توسعه رویکردی سریع برای تجمیع سریع مدل برای به‌روزرسانی‌های محاسبه شده محلی در الگوریتم FedAvg است. یک

[20] bottleneck
[21] stochastic gradient algorithm

Algorithm 1: Federated Averaging (FedAvg) Algorith-
m

BS executes:

initialize $\boldsymbol{w}_0$.

for *each round* $t = 1, 2, \cdots$ **do**

  $\mathcal{S}_t \leftarrow$ select a subset of M devices;

  broadcast global model $\boldsymbol{z}^{[t-1]}$ to devices in $\mathcal{S}_t$.

  for *each mobile device* $i \in \mathcal{S}_t$ ***in parallel*** **do**

    $\boldsymbol{z}_i^{[t]} \leftarrow \text{LocalUpdate}(\mathcal{D}_i, \boldsymbol{z}^{[t-1]})$

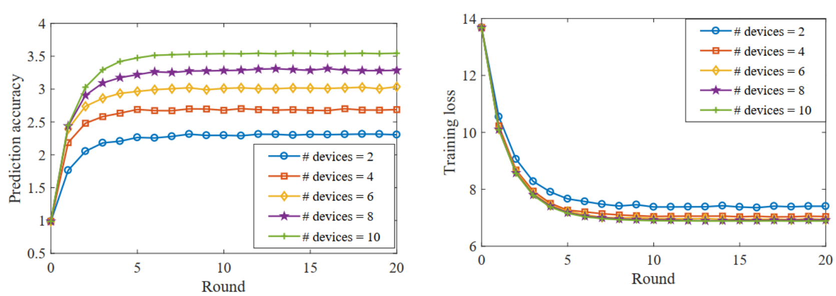
  end

  $\boldsymbol{z}^{[t]} \leftarrow \frac{1}{\sum_{i \in \mathcal{S}_t} |\mathcal{D}_i|} \sum_{i \in \mathcal{S}_t} |\mathcal{D}_i| \boldsymbol{z}_i^{[t]}$ **(aggregation)**

end

شکل ۲: الگوریتم میانگین گیری فدرال

مشاهده کلیدی برای الگوریتم FedAvg این است که عملکرد یادگیری آماری می‌تواند با انتخاب بیشترین تعداد کارگر [۲۲] در هر دور بهبود یابد. در شکل ۲ یک مثال با استفاده از الگوریتم FedAvg بر بروی یک دسته بند SVM روی داده CIFAR-۱۰ آموزش داده شده است را نشان می دهد.



(ب) دقت به صورت نسبی

(آ) تابع هزینه داده آموزش

شکل ۳: تابع هزینه و دقت با استفاده از الگوریتم FedAvg بر بروی یک دسته بند SVM روی داده آموزش CIFAR-۱۰

توجه کنید که روش تجمیع مدل نیاز به محاسبه میانگین وزن‌دار به‌روزرسانی‌های محاسبه شده محلی و ارتباط از دستگاه‌های موبایل انتخاب شده به BS دارد. بنابراین، در این مقاله ما یک رویکرد نوین برای طراحی همزمان مخابراتی و محاسبه برای تجمیع سریع مدل توسعه می‌دهیم. رویکرد ما بر اصول محاسبه

[۲۲] worker

بی سیم و استفاده از خاصیت superposition سیگنال در کانال چند مسیره بی سیم است. مزیت استفاده از این روش را به صورت خلاصه در زیر می توان بیان کرد.

- ماکسیمم کردن تعداد دستگاه های هر دور برای سریع تر کردن سرعت همگرایی در فرآیند یادگیری توزیع شده در فرآیند آموزش.
- کمینه کردن خطای تجمیع مدل برای بهتر کردن دقت مدل در عملکرد سیستم در فرآیند استنباط

۲.۲ محاسبات بی سیم برای تجمیع

اخیرا روش محاسبه بی سیم یک رویکرد برای تجمیع سریع داده های بی سیم از طریق محاسبه یک تابع نمایش دهنده [۲۳] داده (مانند میانگین) از داده های توزیع شده که از چند فرستنده دریافت شده، رایج شده است. با یکپارچه کردن محاسبات و مخابرات با استفاده از خاصیت superposition سیگنال در کانال چند مسیره بی سیم، محاسبه بی سیم می‌تواند با انتقال همزمان، محاسبه تابع هدف را انجام دهد و در نتیجه کارایی ارتباطی را نسبت به انتقال متعامد به طور قابل ملاحظه‌ای بهبود بخشد. مشاهده کلیدی در الگوریتم FedAvg این است که مدل جهانی از طریق محاسبه میانگین وزن‌دار به‌روزرسانی‌های محاسبه شده به صورت محلی در هر دستگاه انتخاب شده به‌روزرسانی می‌شود، که در دسته‌بندی محاسبه تابع نمایش دهنده از داده‌های توزیع‌شده قرار می‌گیرد. در این مقاله، رویکرد محاسبه بیسیم را برای تجمیع کارآمد ارتباطی در سیستم یادگیری فدرال ارائه خواهیم داد.
بردار هدف که برای تجمیع به روزرسانی مدل های محلی به کار می رود به صورت زیر ارئه می شود.

$$\boldsymbol{z}=\psi\left(\sum_{i \in \mathcal{S}} \phi_i\left(\boldsymbol{z}_i\right)\right)$$

که در آن $\boldsymbol{z}_i$ مدل به روزرسانی شده i ام، $\phi_i=|\mathcal{D}_i|$ متغیر اسکالر پیش پردازش در دستگاه i، $\psi=\frac{1}{\sum_{k\in\mathcal{S}}|\mathcal{D}_k|}$ متغیر اسکالر پس از پردازش در BS و $\mathcal{S}$ مجموعه دستگاه های انتخاب شده است. سمبل هر بردار قبل از پردازش به صورت $\boldsymbol{s}_i:=\boldsymbol{z}_i \in \mathbb{C}^d$ بیان می شود که به صورت نرمالایز با واریانس ۱ است. به بیان دیگر $\mathbb{E}(\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^H)=\boldsymbol{I}$. در هر بازه زمان $j \in \{1,...,d\}$، هر دستگاه سیگنال $s_i^{(j)} \in \mathbb{C}$ را به BS می فرستد. ما تابع هدف

$$g^{(j)}=\sum_{i \in \mathcal{S}} \phi_i\left(s_i^{(j)}\right)$$

را به صورتی تعریف می کنیم که از طریق محاسبات بی سیم در بازه زمانی j ام تخمین زده شود.
برای ساده سازی نوشتاری ما اندیس j را برداشته و سیگنال دریافتی در BS را به صورت زیر می نویسیم.

$$\boldsymbol{y}=\sum_{i \in \mathcal{S}} \boldsymbol{h}_i b_i s_i+\boldsymbol{n}$$

که در آن $b_i \in \mathbb{C}$ اسکالر ارسال شده، $\boldsymbol{h}_i \in \mathbb{C}^N$ بردار کانال بین دستگاه i ام و BS و $\boldsymbol{n} \sim \mathcal{CN}\left(\mathbf{0},\sigma^2\boldsymbol{I}\right)$ بردار نویز می باشد. توان ارسالی در دستگاه i به صورت زیر داده می شود.

$$\mathbb{E}\left(|b_i s_i|^2\right)=|b_i|^2 \leq P_0$$

[۲۳] nomographic function

که در آن $P_0 > 0$ که بیشترین مقدار توان ارسالی است. مقدار تخمین زده شده قبل از ارسال پس‐ پردازش در BS به صورت زیر داده می شود.

$$\hat{g} = \frac{1}{\sqrt{\eta}}\boldsymbol{m}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y} = \frac{1}{\sqrt{\eta}}\boldsymbol{m}^{\mathrm{H}}\sum_{i\in\mathcal{S}}\boldsymbol{h}_i b_i s_i + \frac{\boldsymbol{m}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{n}}{\sqrt{\eta}}$$

که در آن $\boldsymbol{m} \in \mathbb{C}^N$ بردار شکل دهی سیگنال دریافتی و η پارامتر نرمالیزه است. بنابراین هر عنصر بردار هدف می تواند به صورت $\hat{z} = \psi(\hat{g})$ در BS نمایش داده شود.

پرفورمنس روش محاسبات بی سیم را به کمک الگوریتم FedAvg در تجمیع را با خطای میانگین مربعات به صورت زیر می توان بیان کرد.

$$\mathrm{MSE}(\hat{g}, g) = \mathbb{E}\left(|\hat{g} - g|^2\right) = \sum_{i\in\mathcal{S}}\left|\frac{\boldsymbol{m}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{h}_i b_i}{\sqrt{\eta}} - \phi_i\right|^2 + \sigma^2\frac{\|\boldsymbol{m}\|^2}{\eta}.$$

می توان گفت که با داشتن فرم دهی دلخواه سیگنال به صورت $\boldsymbol{m}$ در گیرنده انتخاب شده با انتخاب زیر کمترین مقدار خطا با فرستنده zero-forcing خواهیم داشت:

$$b_i = \sqrt{\eta}\phi_i\frac{\left(\boldsymbol{m}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{h}_i\right)^{\mathrm{H}}}{\|\boldsymbol{m}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{h}_i\|^2}$$

بنابراین برای پارامتر نرمالیزه نیز داریم:

$$\eta = \min_{i\in\mathcal{S}}\frac{P_0\left\|\boldsymbol{m}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{h}_i\right\|^2}{\phi_i^2}$$

که بر این اساس خطای MSE را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\mathrm{MSE}(\hat{g}, g; \mathcal{S}, \boldsymbol{m}) = \frac{\|\boldsymbol{m}\|^2\sigma^2}{\eta} = \frac{\sigma^2}{P_0}\max_{i\in\mathcal{S}}\phi_i^2\frac{\|\boldsymbol{m}\|^2}{\|\boldsymbol{m}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{h}_i\|^2}$$

توجه شود که ما از یک بردار شکل دهی بجای M بردار استفاده کردیم اما می توان اثبات کرد اگر از M بردار نیز استفاده کنیم به رابطه یکسانی خواهیم رسید.

۳.۲ فرمول بندی مسئله

همانطور که گفته شد برای استفاده از بیشترین تعداد دستگاه ها به صورتی کمترین خطا را در محاسبات بی سیم داشتم مسئله بهینه سازی زیر را ارائه می دهیم.

$$\mathrm{maximize}_{\mathcal{S},\boldsymbol{m}\in\mathbb{C}^N}\ |\mathcal{S}| \quad \text{to subject}\ \left(\max_{i\in\mathcal{S}}\phi_i^2\frac{\|\boldsymbol{m}\|^2}{\|\boldsymbol{m}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{h}_i\|^2}\right) \leq \gamma$$

که در آن $\gamma > 0$ خطای MSE است و $\mathcal{S}$ اندازه مجموعه S که دستگاه های انتخاب شده برای به روزرسانی مدل می باشد. متأسفانه، این مسئله بهینه‌سازی ترکیبی مختلط به دلیل تابع هدف ترکیبی $\mathcal{S}$ و محدودیت غیرخطی MSE با متغیر ترکیبی مشترک S و متغیر پیوسته $\boldsymbol{m}$ بسیار پیچیده است. با توجه

به این مشاهده، ما نشان خواهیم داد که این مسئله می‌تواند با بیشینه‌سازی تعداد محدودیت‌های غیرخطی ممکن حل شود. به طور خاص، برای طراحی الگوریتم‌های کارآمد، ما رویکرد نمایش تنک را برای یافتن بیشینه تعداد دستگاه‌های مرتبط ارائه خواهیم داد، سپس محدودیت‌های غیرخطی quadratic را با استفاده از تکنیک بالابری ماتریس [۲۴] به محدودیت‌های affine با یک محدودیت رتبه یک تبدیل خواهیم کرد.
توجه کنید در این بررسی CSI کامل در فرستنده و گیرنده وجود دارد. برای صرفه جویی در ارسال بازخورد [۲۵] مقدار اسکالر b_i برای هر دستگاه i فرستاده می شود. همچنین بررسی های بیشتر برای کانال بازخورد را می توان در دیگر منابع به صورت کامل بررسی کرد.

۳ بهینه‌سازی تنک و کم‌رتبه برای یادگیری فدرال توزیع شده در دستگاه

در این بخش ما یک مدل تنک و کم‌رتبه بهینه سازی برای یادگیری توزیع شده فدرال در دستگاه ارائه می دهیم که انتخاب دستگاه در آن اهمیت دارد.

۱.۳ بهینه‌سازی تنک و کم‌رتبه

مسئله بهینه سازی بخش قبل را به صورت زیر می توان بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} &\underset{\mathcal{S},\boldsymbol{m}\in\mathbb{C}^N}{\operatorname{maximize}}|\mathcal{S}| \\ &\text{to subject } \|\boldsymbol{m}\|^2-\gamma_i\left\|\boldsymbol{m}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{h}_i\right\|^2\leq 0, i\in\mathcal{S}, \\ &\qquad\qquad \|\boldsymbol{m}\|^2\geq 1, \end{aligned}$$

که در آن $\gamma_i = \frac{\gamma}{\phi_i^2}$. بنابراین هدف ما بیشترین کردن تعداد ممکن قید های MSE $||\boldsymbol{m}||^2-\gamma_i||\boldsymbol{m}^H\boldsymbol{h}_i||^2 \leq 0$ با شرط $||\boldsymbol{m}||^2 \geq 1$ که از جزئیات اثبات آن صرف نظر می شود.

برای بیشترین کردن تعداد قید های ممکن در مسئله قبل، می توان تعداد x_k های غیر صفر را کمینه کرد. به عبارتی:

$$\begin{aligned} &\underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}_+^M,\boldsymbol{m}\in\mathbb{C}^N}{\operatorname{minimize}}\|\boldsymbol{x}\|_0 \\ &\text{to subject } \|\boldsymbol{m}\|^2-\gamma_i\left\|\boldsymbol{m}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{h}_i\right\|^2\leq x_i, \forall i \\ &\qquad\qquad \|\boldsymbol{m}\|^2\geq 1 \end{aligned}$$

تنک بودن ساختار $\boldsymbol{x}$ دلالت بر دسترسی هر دستگاه موبایل دارد. اگر $x_i = 0$، دستگاه i ام می تواند انتخاب شود که شرط MSE را برآورده کند. هرچند قید MSE و $||\boldsymbol{m}||^2 \geq 1$ عبارت های nonconvex quadratic هستند و برای پرداختن به آنها باید از تکنیک بالابری ماتریس استفاده کرد. به طور به خصوص با بالا بردن ماتریس $\boldsymbol{m}$ به صورت یک ماتریس رتبه یک و مثبت نیمه معین [۲۶] $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m}\boldsymbol{m}^H$ مسئله قبل

[۲۴] lifting matrix
[۲۵] feedback
[۲۶] positive semidefinite(PSD)

را به صورت زیر می توان بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned} \mathscr{P}: \underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}_+^M, \boldsymbol{M}\in\mathbb{C}^{N\times N}}{\text{minimize}} \quad & \|\boldsymbol{x}\|_0 \\ \text{to subject} \quad & \mathrm{Tr}(\boldsymbol{M}) - \gamma_i \boldsymbol{h}_i^{\mathrm{H}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{h}_i \leq x_i, \forall i, \\ & \boldsymbol{M} \succeq \boldsymbol{0}, \mathrm{Tr}(\boldsymbol{M}) \geq 1, \\ & \mathrm{rank}(\boldsymbol{M}) = 1. \end{aligned}$$

هر چند مسئله $\mathscr{P}$ محدب نیست اما در ادامه الگوریتم مناسب برای حل آن را ارائه می دهیم.

۲.۳ آنالیز مسئله

مسئله $\mathscr{P}$ که یک مسئله غیر محدب با قید های تنک و رنک پایین است علاوه بر مخابرات وایرلس در ادبیات یادگیری ماشین، پردازش سیگنال و آمار ابعاد بالا نیز دیده می شود. برخی الگوریتم های توسعه یافته برای این حل این مسئله عبارتند از:

۱. بهینه سازی تنک: $l_1 - norm$ به صورت طبیعی یک تابع محدب می باشد و می توان برای تابع تنک غیر محدب از آن استفاده کرد و نتیجه نهایی یک مسئله آشنا در ادبیات بهینه سازی می شود.

۲. بهینه سازی کم رتبه: به صورت ساده با حذف قید رنک ۱ در مسئله $\mathscr{P}$ و استفاده از تکنیک SDR [۲۷] برای حل آن. این روش به صورت گسترده استفاده می شود اما ممکن است پاسخ نهایی رتبه ۱ نباشد که می توان از تقریب رتبه ۱ برای آن با استفاده از متغیر های گوسی استفاده کرد. هرچند با افزایش تعداد آنتن ها N عملکرد سیستم دچار مشکل می شود و احتمال رتبه ۱ بودن جواب کاهش می یابد.

برای غلبه بر محدودیت های موجود ما الگوریتم DC را معرفی می کنیم که از روش های روز بسیار بهتر بوده و آن ها را ارتقا می دهد. به صورت به خصوص:

- روش DC را به صورت پارامتر آزاد توسعه می دهیم که تنک بودن را گسترش داده و بیشترین تعداد دستگاه را انتخاب کنیم.

- به جای حذف قید رتبه ۱ به صورت مستقیم، یک الگوریتم جدید DC پیشنهاد می دهیم تا رتبه ۱ بودن پاسخ را تضمین کند.

۴ نمایش DC برای تابع های تنک و کم‌رتبه

در این بخش، یک چارچوب DC یکپارچه برای مسئله $\mathscr{P}$ در یادگیری فدرال پیشنهاد می دهیم. به صورت خاص یک نمایش جدید DC برای $l_0 - norm$ تا تنک بودن را برای انتخاب دستگاه ایجاد کند. نمایش جدید DC برای تابع رنک به کار می رود تا به پاسخ های رنک ۱ منجر شود و به صورت دقیقی جواب پذیر بودن مسئله انتخاب دستگاه را نشان دهد.

[۲۷] semidefinite relaxation

۱.۴ نمایش DC برای تابع تنک

در ابتدا Ky Fan k-norm را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\|\boldsymbol{x}\|_k = \sum_{i=1}^{k} |x_{\pi(i)}|$$

که در آن π جایگشتی از $\{1, 2, ..., M\}$ می باشد که $x_{\pi(1)} \geq ... \geq x_{\pi(M)}$ در واقع این نرم جمع بزرگترین k تای x است.
اگر $l_0 - norm$ بزرگتر از k نباشد، $l_1 - norm$ آن برابر با Ky Fan k-norm می شود. پس بنابراین $l_0 - norm$ را می توان نوشت:

$$||x||_0 = \min\{k : ||x||_1 - \|\boldsymbol{x}\|_k = 0, 0 \leq k \leq M\}$$

۲.۴ نمایش DC برای قید کم‌رتبه

برای یک ماتریس PSD $\boldsymbol{M} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ قید رنک ۱ به صورت معادل می توان به شکل زیر نوشته شود.

$$\sigma_i(\boldsymbol{M}) = 0, \forall i = 2, ..., N$$

که در آن $\sigma_i(\boldsymbol{M})$ برابر i مین مقدار بزرگ تکین [۲۸] برای ماتریس $\boldsymbol{M}$ می باشد. همچنین توجه کنید که:

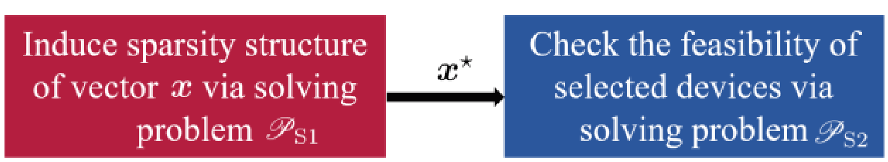
$$Tr(\boldsymbol{M}) = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i(\boldsymbol{M}) \quad ||\boldsymbol{M}||^2 = \sigma_1(\boldsymbol{M})$$

پس برای ماتریس PSD $\boldsymbol{M}$ که $Tr(\boldsymbol{M}) \geq 1$ می توان نوشت:

$$rank(\boldsymbol{M}) = 1 \Leftrightarrow Tr(\boldsymbol{M}) - ||\boldsymbol{M}||_2 = 0$$

۳.۴ نمایش یکپارچه DC

ایده اصلی نمایش یکپارچه DC پیشنهاد شده این است که در مرحله اول از خاصیت تنک بودن x استفاده شود که در این صورت به الویت انتخاب دستگاه ها کمک می کند. سپس باید یک مجموعه از پاسخ های ممکن را حل کنیم تا بیشترین مقدار دستگاه های انتخاب شده برای اینکه شرط MSE را ایجاب کنند را انتخاب کنیم. به صورت کلی این ساختاری دو مرحله ای را در شکل ۴ می توان مشاهده کرد.



شکل ۴: ساختار ۲ مرحله ای برای انتخاب دستگاه

[۲۸] singular

جزئیات این ساختار دو مرحله ای به صورت زیر است:

۱. مرحله اول *Sparsity Inducing* : در مرحله اول برنامه DC زیر را برای مسئله $\mathscr{P}$ حل می کنیم.

$$\mathscr{P}_{\mathrm{S1}} : \underset{\boldsymbol{x},\boldsymbol{M}}{\operatorname{minimize}} \|\boldsymbol{x}\|_1 - \|\boldsymbol{x}\|_k + \operatorname{Tr}(\boldsymbol{M}) - \|\boldsymbol{M}\|_2$$
$$\text{to subject } \operatorname{Tr}(\boldsymbol{M}) - \gamma_i \boldsymbol{h}_i^{\mathrm{H}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{h}_i \le x_i, \forall i = 1, \cdots, M$$
$$\boldsymbol{M} \succeq \boldsymbol{0}, \quad \operatorname{Tr}(\boldsymbol{M}) \ge 1, \boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{0}.$$

با حل دنباله ای مسئله $\mathscr{P}_{\mathrm{S1}}$ ما می توانیم بردار تنک $\boldsymbol{x}^*$ بدست آوریم به صورتی که مقدار هدف، با افزایش k از 0 تا M به 0 برسد. توجه کنید که قید رتبه ۱ بودن ماتریس $\boldsymbol{M}$ هنگامی که مقدار هدف برابر 0 است با 0 برابر است مطابق $Tr(\boldsymbol{M}) - ||\boldsymbol{M}||_2 = 0$

۲. مرحله دوم *Feasibility Detection* : پاسخ یافت شده $\boldsymbol{x}$ در مرحله قبل را شکاف بین مقدار مورد نیاز MSE و MSE قابل دستیابی برای هر دستگاه را توصیف می کند. بنابراین در مرحله دوم، پیشنهاد می شود اگر x_k مقدار کوچکی بود، دستگاه k را با اولویت بیشتری انتخاب می کنیم. عناصر $\boldsymbol{x}$ را می توان به صورت نزولی با ترتیب $x_{\pi(1)\ge \ldots \ge x_{\pi(M)}}$ نوشت. ما کمترین مقدار k را با افزایش این مقدار از 1 تا M به صورتی که امکان انتخاب تمامی دستگاه ها در $S^{[k]}$ ممکن باشد که در آن مجموعه $S^{[k]}$ به صورت $\{\pi(k), \pi(k+1), ..., \pi(M)\}$ انتخاب می شود.
با جزئیات بیشتر، اگر تمام دستگاه های $S^{[k]}$ بتوانند انتخاب شوند مسئله بهینه سازی

$$\text{find } \boldsymbol{m}$$
$$\text{to subject } \|\boldsymbol{m}\|^2 - \gamma_i \left\|\boldsymbol{m}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{h}_i\right\|^2 \le 0, \forall i \in \mathcal{S}^{[k]}$$
$$\|\boldsymbol{m}\|^2 \ge 1$$

قابل حل شده و با استفاده از روش بالا بردن ماتریس به صورت معادل به شکل زیر قابل نوشتن است.

$$\text{find } \boldsymbol{M}$$
$$\text{to subject } \operatorname{Tr}(\boldsymbol{M}) - \gamma_i \boldsymbol{h}_i^{\mathrm{H}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{h}_i \le 0, \forall i \in \mathcal{S}^{[k]}$$
$$\boldsymbol{M} \succeq \boldsymbol{0}, \operatorname{Tr}(\boldsymbol{M}) \ge 1, \operatorname{rank}(\boldsymbol{M}) = 1$$

برای تضمین کردن ممکن بودن قید رتبه ثابت تا به توان به صورت دقیق قید MSE را ممکن کرد ما روش DC زیر را با کمینه کردن اختلاف بین اثر ماتریس و نرم ۲ ماتریس پیشنهاد می‌دهیم:

$$\mathscr{P}_{\mathrm{S2}} : \underset{\boldsymbol{M}}{\operatorname{minimize}} \operatorname{Tr}(\boldsymbol{M}) - \|\boldsymbol{M}\|_2$$
$$\text{to subject } \operatorname{Tr}(\boldsymbol{M}) - \gamma_i \boldsymbol{h}_i^{\mathrm{H}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{h}_i \le 0, \forall i \in \mathcal{S}^{[k]}$$
$$\boldsymbol{M} \succeq \boldsymbol{0}, \quad \operatorname{Tr}(\boldsymbol{M}) \ge 1.$$

به عبارت دیگر، وقتی که مقدار هدف تابع $\mathscr{P}_{\mathrm{S2}}$ با مجموعه داده شده $S^{[k]}$ برابر 0 می شود، می توان نتیجه گرفت که تمام دستگاه های در $S^{[k]}$ شرط MSE را برآورده می کنند و به عبارت دیگر مسئله گفته شده در ابتدای این بخش برای آن قابل حل است. توجه کنید که پاسخ $\boldsymbol{M}^*$ باید یک ماتریس با رتبه دقیقا ۱ باشد و بردار شکل دهی گیرنده از طریق تجزیه کولسکی [۲۹] به صورت $\boldsymbol{M}^* = \boldsymbol{m}\boldsymbol{m}^H$ قابل دستیابی است.

چارچوب پیشنهادی DC برای حل مسئله بهینه‌سازی تنک و کم رتبه یادگیری فدرال به صورت خلاصه در الگوریتم ۲ ارائه شده است.

[۲۹] Cholesky decomposition

Algorithm 2: DC Representation Framework for Solving Problem $\mathscr{P}$ in Federated Learning with Device Selection

Step 1: sparsity inducing
$k \leftarrow 0$
while *objective value of* $\mathscr{P}_{S1}$ *is not zero* **do**
  Obtain solution $\boldsymbol{x}$ by solving the DC program $\mathscr{P}_{\mathrm{S1}}$
  $k \leftarrow k+1$
end

Step 2: feasibility detection
Order $\boldsymbol{x}$ in descending order as $x_{\pi(1)} \geq \cdots \geq x_{\pi(M)}$
$k \leftarrow 1$
while *objective value of* $\mathscr{P}_{S2}$ *is not zero* **do**
  $\mathcal{S}^{[k]} \leftarrow \{\pi(k), \pi(k+1), \cdots, \pi(M)\}$
  Obtain solution $\boldsymbol{M}$ by solving the DC program $\mathscr{P}_{\mathrm{S2}}$
  $k \leftarrow k+1$
end
Output: $\boldsymbol{m}$ through Cholesky decomposition $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m}\boldsymbol{m}^{\mathsf{H}}$, and the set of selected devices $\mathcal{S}^{[k]} = \{\pi(k), \pi(k+1), \cdots, \pi(M)\}$

شکل ۵: الگوریتم DC ارائه شده برای حل مسئله بهینه سازی

۵ الگوریتم DC برای برنامه DC با تضمین همگرایی

در این بخش، الگوریتم DC با حل مسئله اصلی DC و دوگان [۳۰] مسئله DC که به صورت محدب تسهیل شده اند، توسعه می یابد. برای برقراری همگرایی به صورت قوی تر ما ترم های quadratic را به مسئله محدب اضافه می کنیم، به صورتی که اختلاف آن ها (مقدار هدف) یکسان باقی بماند. با این رویکرد، تابع هدف DC را به صورت اختلاف تابع های قویا محدب نمایش می دهیم که به موجب آن نرخ همگرایی الگوریتم DC را برقرار می کنیم.

[۳۰] dual

۱.۵ نمایش به صورت اختلاف تابع های قویا محدب

فرمول بندی برنامه های $\mathscr{P}_{\mathrm{S1}}$ و $\mathscr{P}_{\mathrm{S2}}$ به صورت تنک و کم رتبه غیر محدب با قید های محدب هستند. با وجود غیر محدب بودن توابع، DC ساختار خوب آنها باعث می شود که الگوریتم DC بر اساس اصول ارائه شده بتواند توسعه یابد. به منظور برقراری نتیجه همگرایی الگوریتم، DC تابع هدف DC را به عنوان تفاضل توابع قویا محدب نشان می‌دهیم. به صورت خاص می توانیم مسئله $\mathscr{P}_{\mathrm{S1}}$ را به صورت زیر:

$$\underset{\boldsymbol{x},\boldsymbol{M}}{\operatorname{minimize}} f_1 = \|\boldsymbol{x}\|_1 - \|\boldsymbol{x}\|_k + \operatorname{Tr}(\boldsymbol{M}) - \|\boldsymbol{M}\|_2 + I_{\mathcal{C}_1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{M})$$

و مسئله $\mathscr{P}_{\mathrm{S2}}$ را به صورت زیر:

$$\underset{\boldsymbol{M}}{\operatorname{minimize}} f_2 = \operatorname{Tr}(\boldsymbol{M}) - \|\boldsymbol{M}\|_2 + I_{\mathcal{C}_2}(\boldsymbol{M})$$

بازنویسی کنیم که در آن C_1 و C_2 مخروطی شکل های نیمه_ معین مثبت (به صورت معادل مجموعه ای که شامل تمام ماتریس‌های نیمه_ معین مثبت) هستند که قیدهای مسئله $\mathscr{P}_{\mathrm{S1}}$ و مسئله $\mathscr{P}_{\mathrm{S2}}$ را ترکیب می‌کنند و تابع نشانگر[۳۱] به صورت زیر تعریف شده است:

$$I_{\mathcal{C}_1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{M}) = \begin{cases} 0, & (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{M}) \in \mathcal{C}_1 \\ +\infty, & \text{otherwise} \end{cases}$$

برای نشان دادن همگرایی نتایج الگوریتم DC ما توابع f_1 و f_2 را به صورت اختلاف توابع قویا محدب به صورت $f_1 = g_1 - h_1$ و $f_2 = g_2 - h_2$ که در آن:

$$\begin{aligned}
g_1 &= \|\boldsymbol{x}\|_1 + \operatorname{Tr}(\boldsymbol{M}) + I_{\mathcal{C}_1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{M}) + \frac{\alpha}{2}\left(\|\boldsymbol{x}\|_F^2 + \|\boldsymbol{M}\|_F^2\right), \\
h_1 &= \|\boldsymbol{x}\|_k + \|\boldsymbol{M}\|_2 + \frac{\alpha}{2}\left(\|\boldsymbol{x}\|_F^2 + \|\boldsymbol{M}\|_F^2\right), \\
g_2 &= \operatorname{Tr}(\boldsymbol{M}) + I_{\mathcal{C}_2}(\boldsymbol{M}) + \frac{\alpha}{2}\|\boldsymbol{M}\|_F^2, \\
h_2 &= \|\boldsymbol{M}\|_2 + \frac{\alpha}{2}\|\boldsymbol{M}\|_F^2.
\end{aligned}$$

با افزودن ترم های quadratic توابع g_1، g_2، h_1 وh_2 همگی α- قویا محدب هستند. اکنون توابع f_i را به صورت زیر می توان نوشت:

$$\underset{\boldsymbol{X} \in \mathbb{C}^{m \times n}}{\operatorname{minimize}} f(\boldsymbol{X}) = g(\boldsymbol{X}) - h(\boldsymbol{X})$$

در حوزه مختلط $\boldsymbol{X}$، ما از محاسبات ویرتینگر[۳۲] برای طراحی الگوریتم استفاده می کنیم. الگوریتم DC از طریق ساخت دنباله‌هایی از کاندیدهای حل‌های مسئله اصلی و حل‌های مسئله دوگان ارائه می‌شود. از آنجایی که مسئله اصلی و مسئله دوگانی آن هنوز غیرمحدب هستند، نیاز به تسهیل محدب است.

۲.۵ الگوریتم DC برای ماتریس های تنک و کم‌رتبه

بر اساس اصل فنچل [۳۳] دوگان مسئله قبل به صورت زیر ارائه می شود.

$$\underset{\boldsymbol{Y} \in \mathbb{C}^{m \times n}}{\operatorname{minimize}}\, h^*(\boldsymbol{Y}) - g^*(\boldsymbol{Y})$$

---

[۳۱] indicator
[۳۲] Wirtinger
[۳۳] Fenchel

که در آن f^* و g^* مزدوج مختلط f و g هستند. تابع مزدوج به صورت زیر تعریف می شود:

$$g^*(\boldsymbol{Y}) = \sup_{\boldsymbol{X}\in\mathbb{C}^{m\times n}} \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} - g(\boldsymbol{X})$$

که در آن $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} - g(\boldsymbol{X}) = Real(Tr(X^H Y))$ ضرب داخلی دو ماتریس را بیان می کند. در دور t ام، الگوریتم DC ساده شده به حل تقریب محدب مسئله اصلی و مسئله دوگان با خطی کردن بخش مقعر می پردازد.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Y}^{[t]} &= \arg\inf_{\boldsymbol{Y}\in\mathcal{Y}} h^*(\boldsymbol{Y}) - \left[g^*\left(\boldsymbol{Y}^{[t-1]}\right) + \left\langle \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Y}^{[t-1]}, \boldsymbol{X}^{[t]} \right\rangle\right], \\
\boldsymbol{X}^{[t+1]} &= \arg\inf_{\boldsymbol{X}\in\mathcal{X}} g(\boldsymbol{X}) - \left[h\left(\boldsymbol{X}^{[t]}\right) + \left\langle \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^{[t]}, \boldsymbol{Y}^{[t]} \right\rangle\right].
\end{aligned}$$

بر اساس Fenchel biconjugation theorem این مسئله قابل نوشتن به صورت زیر است.

$$\boldsymbol{Y}^{[t]} = \partial_{\boldsymbol{X}^{[t]}} h$$

که در آن $\partial_{\boldsymbol{X}^{[t]}} h$ زیر گرادیان h نسبت به $\boldsymbol{X}$ در $\boldsymbol{X}^{[t]}$ است.

بنابراین $\boldsymbol{M}^{[t]}$ و $\boldsymbol{x}^{[t]}$ از الگوریتم DC برای مسئله $\mathscr{P}_{\mathrm{S1}}$ به عنوان پاسخ مسئله بهینه سازی محدب زیر ساخته می شود.

$$\begin{array}{ll}
\underset{\boldsymbol{x},\boldsymbol{M}}{\text{minimize}} & g_1 - \langle \partial_{\boldsymbol{x}^{[t-1]}} h_1, \boldsymbol{x}\rangle - \langle \partial_{\boldsymbol{M}^{[t-1]}} h_1, \boldsymbol{M}\rangle \\
\text{to subject} & \mathrm{Tr}(\boldsymbol{M}) - \gamma_i \boldsymbol{h}_i^{\mathrm{H}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{h}_i \le x_i, \forall i = 1, \cdots, M \\
& \boldsymbol{M} \succeq \mathbf{0}, \quad \mathrm{Tr}(\boldsymbol{M}) \ge 1, \boldsymbol{x} \succeq \mathbf{0}
\end{array}$$

همچنین $\boldsymbol{M}^{[t]}$ برای مسئله $\mathscr{P}_{\mathrm{S2}}$ نیز به عنوان پاسخ مسئله بهینه سازی محدب زیر ساخته می شود.

$$\begin{array}{ll}
\underset{\boldsymbol{x},\boldsymbol{M}}{\text{minimize}} & g_2 - \langle \partial_{\boldsymbol{M}^{[t-1]}} h_2, \boldsymbol{M}\rangle \\
\text{to subject} & \mathrm{Tr}(\boldsymbol{M}) - \gamma_i \boldsymbol{h}_i^{\mathrm{H}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{h}_i \le 0, \forall i \in S^{[k]} \\
& \boldsymbol{M} \succeq \mathbf{0}, \quad \mathrm{Tr}(\boldsymbol{M}) \ge 1
\end{array}$$

زیر گرادیان h_1 و h_2 برابر است با:

$$\partial_{\boldsymbol{x}} h_1 = \partial\|\boldsymbol{x}\|_k + \alpha\boldsymbol{x}, \quad \partial_{\boldsymbol{M}} h_1 = \partial_{\boldsymbol{M}} h_2 = \partial\|\boldsymbol{M}\|_2 + \alpha\boldsymbol{M}$$

که در آن زیر گرادیان $\|\boldsymbol{x}\|_k$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$i \text{ of entry -th} \partial\|\boldsymbol{x}\|_k = \begin{cases} \mathrm{sign}\,(x_i)\,, & |x_i| \ge \left|x_{(k)}\right| \\ 0, & |x_i| < \left|x_{(k)}\right| \end{cases}.$$

زیر گرادیان $||\boldsymbol{M}||_2$ می تواند به صورت $v_1 v_1^H$ که در آن $v_1 \in \mathbb{C}^N$ بردار ویژه بزرگترین مقدار ویژه $\sigma_1(\boldsymbol{M})$ است و می توان این موضوع را اثبات کرد.

۳.۵ هزینه محاسباتی و همگرایی

به صورت خلاصه می توان گفت هزینه محاسسباتی در مرحله اول برای حل $\mathscr{P}_{\mathrm{S1}}$ برابر $O((N+M)^3)$ در هر مرتبه است و در مرحله بعدی برای حل $\mathscr{P}_{\mathrm{S2}}$ برابر $O(N^6)$ در هر مرتبه می باشد.

زوج مرتب $\{(M^{[t]}, x^{[t]})\}$ که در الگوریتم گفته شده برای حل $\mathscr{P}_{\mathrm{S1}}$ تولید می شود دارای خواص زیر است:

۱. هر نقطه محدود در دنباله $\{(M^{[t]}, x^{[t]})\}$ یک نقطه مهم برای f_1 با انتخاب یک نقطه شروع دلخواه است و دنباله $\{f_1^{[t]}\}$ به طور یکنوا کاهشی و همگرا است.

۲. به ازای هر $t = 0, 1, ...$ داریم:

$$\mathrm{Avg}\left(\left\|\boldsymbol{M}^{[t]} - \boldsymbol{M}^{[t+1]}\right\|_F^2\right) \leq \frac{f_1^{[0]} - f_1^{\star}}{\alpha(t+1)}$$
$$\mathrm{Avg}\left(\left\|\boldsymbol{x}^{[t]} - \boldsymbol{x}^{[t+1]}\right\|_2^2\right) \leq \frac{f_1^{[0]} - f_1^{\star}}{\alpha(t+1)}$$

که f_1^* مینیمم جهانی f_1 و $\mathrm{Avg}\left(\left\|\boldsymbol{M}^{[t]} - \boldsymbol{M}^{[t+1]}\right\|_F^2\right)$ برابر میانگین $\{\|\boldsymbol{M}^{[t]} - \boldsymbol{M}^{[t+1]}\|_F^2\}_{i=0}^t$

۳. این خواص به صورت مشابه برای حل مسئله $\mathscr{P}_{\mathrm{S2}}$ و تابع f_2 نیز برقرار است.

۶ نتایج شبیه سازی

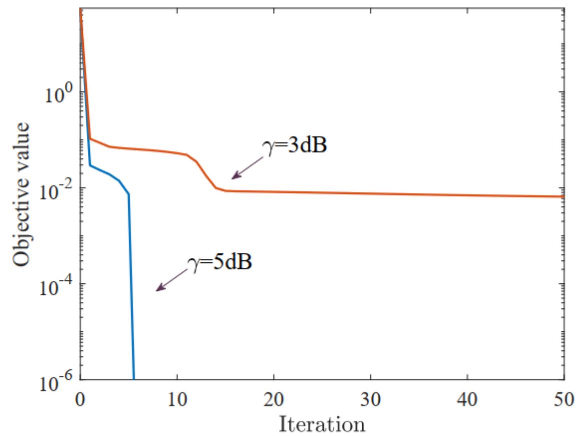
در این بخش، آزمایش‌های عددی را برای مقایسه روش DC پیشنهادی با روش‌های روز در یادگیری فدرال انجام می‌دهیم. بردارهای ضریب کانال $\boldsymbol{h}_i$ بین BS و هر دستگاه موبایل از توزیع نرمال مختلط پیروی می کند به عبارت دیگر $\boldsymbol{h}_i \sim \mathcal{CN}\left(\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{I}\right)$. مقدار متوسط نسبت سیگنال به نویز [۳۴] ارسالی $\frac{P_0}{\sigma^2}$ نیز برابر $20\ dB$ انتخاب می شود. ما فرض می کنیم که تمام دستگاه ها تعداد یکسانی نقطه داده دارند به عبارت دیگر $|D_M| = ... = |D_1|$ زوج پیش پردازش و پس پردازش به صورت $\phi_i = 1$ و $\psi = \frac{1}{|S|}$ انتخاب می شود.

۱.۶ تشخیص انجام پذیری

یک شبکه اینترنت اشیا [۳۵] عادی با $M = 20$ دستگاه موبایل فعال برای یادگیری فدرال در نظر بگیرید. BS با $N = 6$ آنتن مجهز شده است. توجه کنید که احتمالا تعداد زیادی دستگاه از طریق BS به اینترنت متصل هستند درحالی که به دلیل ترافیک نامنظم اینترنت، تعداد کمی از آن ها به صورت همزمان فعال هستند. این خاصیت ترافیک نامنظم دستگاه های IoT می توان برای پشتیبانی از اتصال دستگاه‌های بزرگ به صورت همزمان با تشخیص همزمان دستگاه‌های فعال و تخمین ضرایب کانال بهره‌برداری کرد. عملکرد تشخیص قابلیت اجرا، به عبارتی بررسی قابلیت انتخاب دستگاه‌های انتخاب شده، یک مرحله مهم برای انتخاب دستگاه است. در ابتدا، رفتار همگرایی الگوریتم پیشنهادی DC برای تشخیص قابلیت انتخاب تمام دستگاه‌های موبایل، به عبارتی مسئله $\mathscr{P}_{\mathrm{S2}}$ با $S^{[k]} = \{1, ..., 20\}$، ارزیابی می‌شود. نتایج برای $\gamma = 3\ dB$ و $\gamma = 5\ dB$ در شکل ۶ نشان داده شده است. این نتایج نشان می‌دهند که مقدار هدف برای $\gamma = 5\ dB$ به صفر می‌رسد اما برای $\gamma = 3\ dB$ نمی‌تواند به صفر برسد، که نشان می‌دهد الگوریتم پیشنهادی DC در صورت $\gamma = 5\ dB$ راه‌حل رتبه یک برمی‌گرداند اما در حالت دیگر نمی تواند.

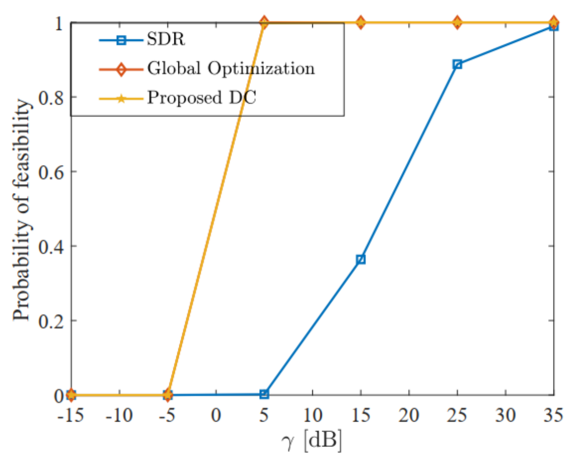
---

[۳۴] signal-to-noise-ratio
[۳۵] (IoT) Things of Internet



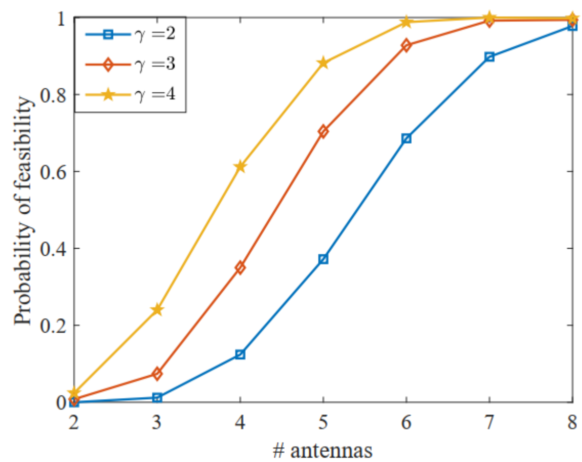
شکل ۶: همگرایی الگوریتم DC پیشنهاد شده

می توانیم عملکرد تشخیص قابلیت اجرا توسط الگوریتم DC را با دیگر روش های موجود برای حل مسئله $\mathscr{P}_{S2}$ بکار بریم. روش SDR تنها قید رنک ۱ بودن را حذف کرده و روش بهینه سازی جهانی با پیچیدگی زمانی نمایی و تحمل خطای $\epsilon = 10^{-5}$ می باشد که در این شبیه سازی به کار رفته و نتیجه آن را در شکل ۷ می توان مشاهده کرد.



شکل ۷: احتمال امکان پذیری با الگوریتم های متفاوت

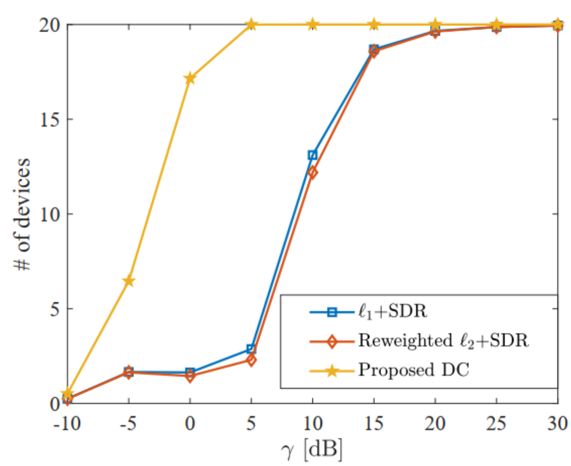
در این آزمایش، نتایج ۵۰۰ بار میانگین گرفته شده و نمایش داده شده اند. همانطور که مشخص است روش DC عملکرد بسیار بهتری دارد.
در شکل ۸ نیز می توان عملکرد الگوریتم DC و الگوریتم های مشابه را با تغییر تعداد آنتن نشان داد. نتایج این بخش ۵۰۰ بار میانگین گرفته شده و نمایش داده شده اند. با افزایش تعداد آنتن ها در BS با قید MSE، سریع تر می توان به همگرایی رسید.



شکل ۸: احتمال امکان پذیری با الگوریتم DC پیشنهاد شده با تعداد آنتن های متفاوت

۲.۶ تعداد دستگاه های انتخاب با MSE مورد نظر

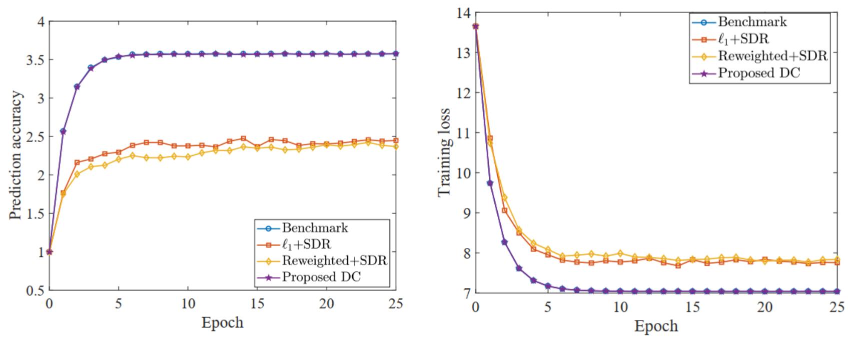
یک شبکه با ۲۰ دستگاه موبایل و یک BS با ۶ آنتن را در نظر بگیرید. با استفاده از چارچوب دو مرحله‌ای و قاعده ترتیب‌دهی در الگوریتم ۲، ما الگوریتم DC پیشنهادی را برای انتخاب دستگاه با روش‌های روز دیگر $l_1 + SDR$ و $Reweighted\ l_2 + SDR$ مقایسه می کنیم. نتایج با ۵۰۰ بار تکرار بازنمایی کانال مخابراتی با روش های متفاوت محاسبه شده و در شکل ۹ قابل مشاهده می باشد و می توان دید الگوریتم DC پیشنهادی می تواند بیشترین دستگاه ها را نسبت به روش های دیگر انتخاب کند.



شکل ۹: میانگین تعداد دستگاه های انتخاب شده با الگوریتم های متفاوت

۳.۶ عملکرد روش DC برای یادگیری فدرال گسترده

برای نشان دادن عملکرد رویکرد DC پیشنهادی برای انتخاب دستگاه در یادگیری توزیع شده فدرال، ما یک ماشین بردار پشتیبان را روی مجموعه داده CIFAR-۱۰ با یک BS شامل ۶ آنتن و ۲۰ دستگاه موبایل آموزش می‌دهیم. CIFAR-۱۰ یک مجموعه داده رایج از تصاویر برای طبقه‌بندی است که شامل ۱۰ کلاس مختلف اشیاء می باشد. برای مقایسه، مورد بنچمارک انتخاب همه دستگاه‌ها و جمع‌آوری همه به‌روزرسانی‌های محلی، بدون خطای تجمیع در نظر گرفته می‌شود. ما بر روی ۱۰ بازنمایی متفاوت کانال میانگین گیری می‌کنیم. عملکرد تمام الگوریتم‌ها با $\gamma = 5\ dB$ در شکل ۱۰ نشان داده شده است. در اینجا اندازه مجموعه آموزش و مجموعه آزمون را به ترتیب ۵۰۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ انتخاب می‌کنیم.



(ب) دقت به صورت نسبی

(آ) تابع هزینه داده آموزش

شکل ۱۰: تابع هزینه و دقت برای یک دسته بند SVM روی داده CIFAR-۱۰ برای الگوریتم های گفته شده

نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که رویکرد DC پیشنهادی عملکرد بهتری با کمترین اتلاف آموزش و دقت پیش‌بینی بالاتری را داراست، همانطور که در شکل ۱۰ نشان داده شده است.

۷ نتیجه گیری

در این مقاله، ما یک رویکرد نوآورانه برای تجمیع سریع مدل کلی در یادگیری توزیعی فدرال بر اساس اصول محاسبات بی سیم ارائه دادیم. برای بهبود عملکرد یادگیری آماری در آموزش توزیع شده روی دستگاه، یک رویکرد نوآورانه برای مدل‌سازی تنک و کم‌رتبه‌ای ارائه دادیم تا تعداد بیشتری از دستگاه‌ها را با نیازمندی‌های MSE برای تجمیع مدل بیابیم. ما یک چارچوب یکپارچه نمایش DC ارائه دادیم تا تنک بودن و کم‌رتبه‌ای را به کار برده و توسط الگوریتم DC با تضمین همگرایی از طریق تسهیل محدب پشتیبانی شود. نتایج شبیه‌سازی عملکرد قابل تحسین رویکرد پیشنهادی را نسبت به الگوریتم‌های روز دنیا نشان می‌دهد.