Naključne matrike

Kratko poročilo projektne naloge pri predmetu Matematika z računalnikom

Ajda Lemut

5. april 2022

1 Uvod

Naključne matrike so matrike, v katerih so vsi elementi naključne spremenljivke. V naravi te spremenljivke navadno predstavljajo šum, ki je za nas nedostopen, zato imajo lahko velik vpliv na obnašanje naravnega pojava in vplivajo na naše meritve. Po drugi strani pa lahko veliko izvemo o obnašanju določenih naravnih pojavov z meritvami, ki so odvisne le od simetrij ne glede na vrednost naključnih spremenljivk. Na primer v kvantni mehaniki so številne lastnosti sistemov vezane na lastne vrednosti hermitskih matrik. Zaradi narave kvantne mehanike, kjer so obravnavani sistemi zelo majhni, so eksperimenti in realizacije kvantnih sistemov izrazito podvržene naključnim fluktuacijam. Tako je teorija naključnih matrik na tem področju zelo uporabna, saj omogoča najti lastnosti sistemov, ki so neodvisne od šuma.

2 Projektna naloga

Cilj projektne naloge je eksperimentalno analizirati lastnosti naključnih matrik. Za njihovo konstrukcijo bom uporabila programsko okolje MATLAB, saj je dobro prilagojeno delu z matrikami. Posamezne elemente matrike bom generirala naključno s pomočjo različnih porazdelitev in sicer z

1. enakomerno porazdelitvijo na intervalu $[0, 1]$,
2. enakomerno porazdelitvijo na intervalu $[-r, r]$,
3. standardizirano normalno porazdelitvijo (Gaussova porazdelitev) in
4. diskretno porazdelitvijo z vrednostima iz dane dvoelementne množice $\{a, b\}$.

Nato si bom ogledala različne lastnosti teh matrik, kot so lastne vrednosti, sled in determinanta matrike. Pri lastnih vrednostih nas predvsem zanima pričakovano število realnih lastnih vrednosti v odvisnosti od velikosti matrike, verjetnost, da je vsaj ena lastna vrednost realna in verjetnost, da so vse lastne vrednosti realne. Ogledala pa si bom tudi porazdelitev vseh lastnih vrednosti v kompleksni ravnini. Vse te lastnosti bom opazovala s pomočjo izrisa ustreznih grafov v MATLAB-u. Dane grafe bom nato primerjala z znanimi porazdelitvami in z ustreznimi znanimi teoretičnimi rezultati.

V ta namen bo cilj ustvariti kodo, kjer bo enostavno generirati poljubno število naključnih matrik poljubne velikosti ter poljubne porazdelitve. Znotraj te kode bom spravila vse lastne vrednosti, sledi in determinante ter ostale potrebne lastnosti prej generiranih matrik, do katerih bom lahko dostopala pri njihovi analizi. Ločeno pa bo še ena koda namenjena sami analizi dobljenih naključnih matrik, kjer bo enostavno sprožiti analizo glede na dano število ponovitev, velikost in porazdelitev matrik.

Po prvotni obravnavi prej omenjenih naključnih matrik bom vse že prej omenjeno prenesla še na naključne simetrične matrike. Tu bodo elementi spet generirani s pomočjo prej naštetih porazdelitev. Seveda bo primer realnih lastnih vrednosti tu trivialen, vendar bom vseeno potrdila dobro znano dejstvo, da so vse lastne vrednosti realne simetrične matrike realne.

Za konec pa si bom ogledala še tri v fiziki zelo pomembne tipe naključnih matrik, ki sem jih opazila ob pregledu literature o teoriji naključnih matrik. In sicer so to GOE (ang. Gaussian orthogonal ensemble), GUE (ang. Gaussian unitary ensemble) in GSE (ang. Gaussian symplectic ensemble). Gre za matrike generirane s pomočjo Gaussove porazdelitve (realne in kompleksne), ki jim določimo dodatne simetrije. Tu je spet cilj ustvariti funkcije, ki bodo generirale takšne matrike, nato pa analizirati lastne vrednosti prej generiranih matrik. Predvsem zanimiva je porazdelitev nivojev lasnih vrednosti (ang. distribution of level spacings), kjer opazujemo razlike (normaliziranih) sosednjih lastnih vrednosti.

Literatura

[1] A. Edelman, E. Kostlan in M. Shub, *How Many Eigenvalues of a Random Matrix Are Real?*, Journal of the American Mathematical Society **7**(1) (1994), 247–267.

[2] S. Hameed, K. Jain in A. Lakshminarayan, *Real eigenvalues of non-Gaussian random matrices and their products*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **48**(38) (2015), 385204.

[3] G. Livan, M. Novaes in P. Vivo, *Introduction to random matrices* , Theory and practice **26**, Springer, 2018.