Naključne matrike

Poročilo projektne naloge pri predmetu
Matematika z računalnikom

Ajda Lemut

14. maj 2022

Kazalo

1 Uvod

Naključne matrike so matrike, v katerih so vsi elementi naključne spremenljivke. Cilj projektne naloge je eksperimentalno analizirati lastnosti naključnih matrik in ustvariti kodo, kjer bo enostavno generirati poljubno število naključnih matrik poljubne velikosti ter poljubne porazdelitve. Posamezne elemente matrike sem generirala naključno s pomočjo različnih porazdelitev in sicer z

(a) enakomerno porazdelitvijo na intervalu $[0, 1]$,

(b) enakomerno porazdelitvijo na intervalu $[-5, 5]$,

(c) standardizirano normalno porazdelitvijo (Gaussova porazdelitev) in

(d) diskretno porazdelitvijo z vrednostima iz dane dvoelementne množice $\{a, b\}$.

Za konstrukcijo teh matrik sem uporabila program MATLAB, saj je dobro prilagojen delu z matrikami. Tako lahko željene matrike generiramo s pomočjo vgrajenih funkcij in sicer

(a) $A = \text{rand}(n)$,

(b) $A = \text{randi}([-5, 5], n)$,

(c) $A = \text{randn}(n)$ in

(d) $A = a + (b - a) * \text{randi}([0, 1], n)$.

Ogledala sem si različne lastnosti, kot so lastne vrednosti, sled in determinanta matrike. Po prvotni obravnavi prej omenjenih naključnih matrik sem vse že prej omenjeno prenesla še na naključne simetrične matrike, za konec pa sem si ogledala še tri v fiziki zelo pomembne tipe naključnih matrik GOE (ang. Gaussian orthogonal ensemble), GUE (ang. Gaussian unitary ensemble) in GSE (ang. Gaussian symplectic ensemble). Gre za matrike generirane s pomočjo Gaussove porazdelitve (realne in kompleksne), ki jim določimo dodatne simetrije.

2 Vsebina repozitorija

- **fanaliza**: Ta datoteka, napisana v MATLAB-u, vsebuje funkcijo s tremi argumenti (n = velikost matrike, st_ponovitev = število ponovitev, d = porazdelitev). Njen namen je generirati "st_ponovitev" matrik velikosti n z dano porazdelitvijo in izračunati njene lastne vrednosti, sledi in determinante. Funkcija nam vrne v tem vrstnem redu stevilo_realnih_lastnih = število realnih lastnih vrednosti, vse_lastne = matrika vseh lastnih vrednosti, normvse_lastne = matrika vseh normaliziranih lastnih vrednosti (lastne vrednosti deljene s $\sqrt{n}$), vse_sledi = vsi sledi in vse_det = vse determinante.

- **analiza**: Ta datoteka, napisana v MATLAB-u, vsebuje nadaljnjo analizo naključnih matrik z uporabo funkcije v datoteki fanaliza. Na začetku te datoteke lahko nastavimo želeno velikost matrike, število ponovitev in porazdelitev. Ko naložimo datoteko, dobimo želeno analizo z vsemi pripadajočimi grafi.

- **parametri**: Ta datoteka, napisana v MATLAB-u, vsebuje analizo parametrov asimptotsko normalne porazdelitve sledi in logaritmov determinant v odvisnosti od velikosti matrike.

- **Pričakovano število realnih lastnih**: Ta datoteka, napisana v Mathematici, vsebuje teoretično formulo za izračun pričakovanega števila realnih lastnih vrednosti matrike velikosti $n \times n$.

- **Nakljucne simetricne matrike**: V tej mapi so nadaljna opazovanja na naključnih simetričnih matrikah. Vsebuje podobni datoteki fanaliza_sim in analiza_sim kot prej in dodatno datoteko eigenvalues_density, ki naredi graf gostot lastnih vrednosti vseh porazdelitev.

- **GOE & GUE & GSE**: V tej mapi so nadaljna opazovanja na naključnih GOE, GUE in GSE matrikah. Vsebuje podobni datoteki fanaliza_G in analiza_G kot prej in dodatno datoteko eigenvalues_analiza_G za nadaljno analizo lasnih vrednosti.

3 Lastne vrednosti naključnih matrik

Najprej nam morda pride na misel vprašenje, kakšne sploh bodo lastne vrednosti naključnih matrik. Bodo morda poljubno velike, ali bodo porazdeljene s kakšno znano porazdelitvijo. V ta namen lahko izrišemo grafe, na katerem nam točke v kompleksni ravnini predstavljajo lastne vrednosti naključnih matrik. Na sliki 1 lahko vidimo grafe lastnih vrednosti 400 matrik velikosti 50×50 za prej naštete porazdelitve.

Takoj opazimo podobnost med grafoma (a) in (c) ter (b) in (d). Pri enakomerni in diskretni porazdelitvi smo namreč imeli vnose le pozitivnih vrednosti in smo tako dobili nekaj ekstremnih lastnih vrednosti v okolici $n/2$, pri enakomerni porazdelitvi celih števil in pri normalni, pa so vnosi enakomerno porazdeljeni med pozitivnimi in negativnimi vrednostmi. V vseh primerih pa opazimo porazdelitev podobno enakomerni na disku s središčem v izhodišču. Ob pregledu literature lahko ugotovimo, da so v primeru normalne porazdelitve normalizirane lastne vrednosti ($\lambda/\sqrt{n}$, kjer je n velikost matrike) res enakomerno porazdeljene na enotskem disku (Girko's Circular law [2]), kar prikazuje slika 2.

Opazimo tudi veliko zgostitev na realni osi. Ali so morda tudi realne lastne vrednosti porazdeljene enakomerno? V literaturi [1] res najdemo, da so vse normalizirane realne lastne vrednosti asimptotsko (ko gre $n \to \infty$) enakomerno porazdeljene na intervalu $[-1, 1]$, kar pa lahko opazujemo na sliki 3.

Koliko realnih lastnih vrednosti pa sploh ima naključna matrika? Poglejmo si sliko 4, ki prikazuje število realnih lastnih vrednosti v odvisnosti od velikosti matrike. Opazimo, da v vseh treh primerih število realnih lastnih vrednosti narašča s potenčno funkcijo v odvisnosti od velikosti matrike. Za normalno porazdelitev je funkcija, dobljena v literaturi, ravno $f(n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{n}$ [3]. Z izpisom parametrov ostalih potenčnih fukcij, pa opazimo, da so tudi ostale zelo blizu korenski funkciji. Lahko si ogledamo tudi grafe deležev realnih lastnih vrednosti, ki ga prikazujeje slika 5. Spet lahko na grafe izrišemo teoretično funkcijo za normalno porazdelitev, ki je tokrat ravno $f(n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$. V primeru normalne porazdelitve lahko v literaturi [1] najdemo točne pričakovane vrednosti števila realnih lastnih vrednosti, zato jih lahko primerjamo z eksperimentalno dobljenimi. To nam prikazuje naslednja tabela.

Teoreticna pricakovana vrednost	Eksperimentalna pricakovana vrednost
1	1
1.41	1.46
1.71	1.71
1.94	1.91
2.15	2.18
2.33	2.29
2.5	2.52
2.65	2.6
2.79	2.83
2.93	2.93

S pomočjo datoteke analiza.m lahko določimo verjetnosti, da ima naključna matrika vsaj eno realno lastno vrednost ali verjetnost, da so vse lastne vrednosti realne ter povprečno število realnih lastnih vrednosti. Eksperimentalne vrednosti, ki se izpišejo v ukaznem okencu, pa si lahko ogledamo v naslednji tabeli.

	Vsaj ena realna	Vse realne	Povprecno stevilo realnih
Uni	1	0	6.74
Int	1	0	6.2
Norm	1	0	5.99
Discr	1	0	7.08

V primeru normalne porazdelitve najdemo v literaturi [3], da je verjetnost, da so vse lastne vrednosti realne ravno

$$p_{n,n} = \frac{1}{2^{n(n-1)/4}}.$$

V našem primeru za $n = 50$ dobimo $4,16033 \cdot 10^{-185}$, kar pojasni, da je naša eksperimentalna verjetnost izračunana na dve decimalki $0,00$.

4 Sledi naključnih matrik

Porazdelitev sledi naključnih matrik ni težko najti, saj je sled definirana kot vsota diagonalnih elementov matrike. Torej je željena porazdelitev ravno porazdelitev vsote n spremenljivk z dano začetno porazdelitvijo. Po centralnem limitnem izreku je sled asimptotsko (ko gre $n \to \infty$) porazdeljena normalno, kar si lahko ogledamo na sliki 6. V primeru standardizirane normalne porazdelitve, kjer so $x_1, \ldots, x_n \sim N(0,1)$, je torej $tr(A) = x_1 + \cdots + x_n \sim N(0,n)$. Za vsoto enakomernih porazdelitev dobimo znano Irwin Hallovo porazdelitev, ki je definirana ravno kot vsota enakomernih porazdelitev. Ta je v primeru velikih n-jev zelo podobna normalni porazdelitvi s pričakovano vrednostjo $nE(x_i) = n\frac{b-a}{2}$ in varianco $\frac{n}{12}(b-a)$. Ker so elementi na diagonali pravzaprav neodvisne slučajne spremenljivke, lahko pričakovano vrednost sledi enostavno izračunamo kot $E(tr) = n \cdot E(x_i)$, za variance, pa si lahko izrišemo graf varianc v odvisnosti od velikosti matrike, kar lahko vidimo na sliki 7. Opazimo, da so vse štiri variance pravzaprav linearno odvisne od velikosti matrike z različnimi nakloni.

5 Determinante naključnih matrik

Ne da bi preveč razmišljali, si lahko izrišemo histograme determinant, kar si lahko ogledamo na sliki 8. Opazimo, da je velika večina determinant zgoščena okoli nič, kar ne preseneča, saj opazujemo matrike z majhnimi vrednostimi posameznih elementov. Determinanto najlažje dobimo kot produkt lastnih vrednosti. Kot smo prej opazovali so lastne vrednosti asimptotsko porazdeljene enakomerno na enotskih diskih. Če torej determinanto logaritmiramo (absolutno vrednost determinante), dobimo vsoto slučajnh spremenljivk, ki bodo spet po centralnem limitnem izreku asimptotsko normalno porazdeljene. To si lahko ogledamo na sliki 9. Ker imamo torej asimptotsko normalno porazdelitev, se lahko vprašamo še kakšni parametri jo definirajo. V ta namen, si lahko izrišemo naslednja dva grafa (slika 10, slika 11), ki prikazujeta pričakovano vrednost in varianco logaritmirane determinante v odvisnosti od velikosti matrike.

6 Naključne simetrične matrike

Naključne simetrične matrike so generirane na podoben način kot že prej obravnavane naključne matrike, le da so tu ključne samo vrednosti na diagonali ter pod njo. Dobimo jih tako, da spodnje trikotni naključni matriki prištejemo njeno transponirano matriko brez diagonale (v MATLAB-u $A = tril(A) + triu(A', 1)$). Na sliki 12 spet opazimo podobnosti grafov (a) in (c) ter (b) in (d). Potrdili smo znano dejstvo, da so lastne vrednosti realnih simetričnih matrik realne, poleg tega pa spet opazimo, da pri vnosih le pozitivnih vrednosti dobimo nekaj ekstremnih lastnih vrednosti v okolici $n/2$. Ker imamo le realne lastne vrednosti, si lahko ogledamo graf na sliki 13, ki prikazuje gostoto lastnih vrednosti.

Očitno bojo sledi naključnih simetričnih matrik popolnoma enake že prej obravnavanim sledem, saj smo diagonalne elemente generirali na enak način.

Da to še preverimo, si lahko ogledamo izrisane grafe na sliki 14. Na sliki 15 in sliki 16 si lahko ogledamo histograme determinant in logaritmov determinant. Spet podobno kot prej opazimo asimptotsko normalno porazdelitev logaritmov determinant.

7 GOE, GUE in GSE

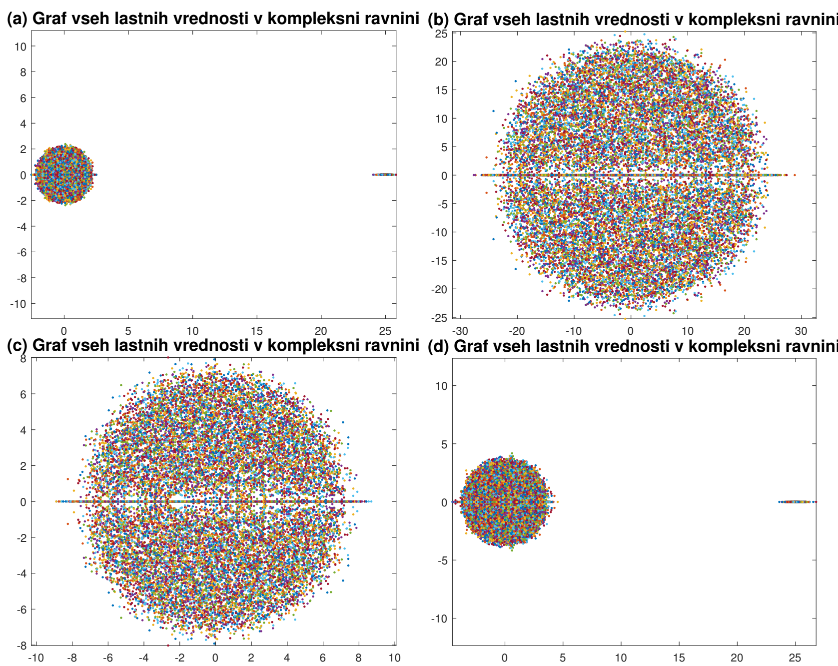
V naravi naključne matrike navadno predstavljajo šum, ki je za nas nedostopen, zato imajo lahko velik vpliv na obnašanje naravnega pojava in vplivajo na naše meritve. Po drugi strani pa lahko veliko izvemo o obnašanju določenih naravnih pojavov z meritvami, ki so odvisne le od simetrij ne glede na vrednost naključnih spremenljivk. Na primer v kvantni mehaniki so številne lastnosti sistemov vezane na lastne vrednosti hermitskih matrik. Zaradi narave kvantne mehanike, kjer so obravnavani sistemi zelo majhni, so eksperimenti in realizacije kvantnih sistemov izrazito podvržene naključnim fluktuacijam. Tako je teorija naključnih matrik na tem področju zelo uporabna, saj omogoča najti lastnosti sistemov, ki so neodvisne od šuma. Ob pregledu literature o teoriji naključnih matrik v pomoč fiziki tako hitro naletimo na tri različne tipe generirane s pomočjo normalne porazdelitve. To so GOE (ang. Gaussian orthogonal ensemble), GUE (ang. Gaussian unitary ensemble) in GSE (ang. Gaussian symplectic ensemble). GOE je simetrična matrika, dobljena z ortogonalizacijo naključne matrike z vrednostmi generiranimi z normalno porazdelitvijo (v MATLAB-u $A = randn(n); A = (A + A')/2;$). GUE dobimo na enak način, le da so tu vnosi začetnih vrednosti matrike kompleksne vrednosti z realnim in imaginarnim delom porazdeljenim z normalno porazdelitvijo (v MATLAB-u $A = randn(n) + 1i * randn(n); A = (A + A')/2;$). Konstrukcija GSE pa je nekoliko bols zakomplicirana. V MATLAB-u jo generiramo na sledeč način.

$$
\begin{aligned}
&A1 = \mathrm{randn}(n) + 1i * \mathrm{randn}(n);\\
&B1 = \mathrm{randn}(n) + 1i * \mathrm{randn}(n);\\
&M = [A1, B1; -\mathrm{conj}(B1), \mathrm{conj}(A1)];\\
&A = (M + M')/2;
\end{aligned}
$$

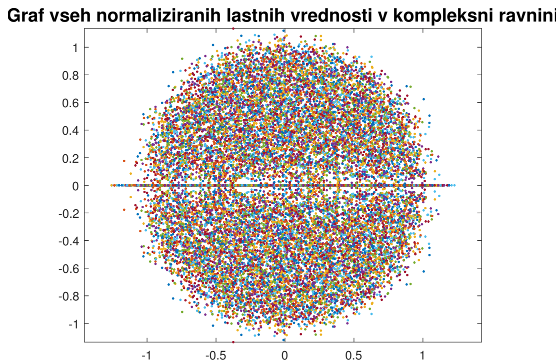
S to konstrukcijo dobimo za izbran n matriko velikosti $2n \times 2n$, z dvojnimi lastnimi vrednostmi. Ker pa nas v praksi zanimajo le lastne vrednosti teh matrik, nas to ne zmoti, potrebno je le odstraniti kopije teh lastnih vrednosti. Očitno so vse te matrike sebi adjungirane (hermitske) in imajo torej le realne lastne vrednosti. Tako kot pri naključnih simetričnih matrikah si torej lahko ogledamo graf gostote lastnih vrednosti izračunan za matrike velikosti 50×50 pri 50000 ponovitvah, prikazan na sliki 17. Poleg tega se v fiziki pogosto obravnava naslednji dve vrednosti. Porazdelitev nivojnih razmikov (ang. level spacings), kjer najprej lastne vrednosti uredimo po velikosti $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ nato pa opazujemo porazdelitev $s(n) = (\lambda_{n+1} - \lambda_n)/\bar{s}$, kjer je $\bar{s}$ povprečje vseh razmakov lastnih vrednosti $\lambda_{n+1} - \lambda_n$. To porazdelitev si lahko ogledamo na sliki 18. Druga pogosto opazovana vrednost, pa so normalizirane lastne vrednosti, kjer vsako lastno vrednost normaliziramo s povprečnim razmakom lastnih vrednosti ($\bar{s}$ kot prej). To porazdelitev pa si lahko ogledamo na sliki 19. Na enak način kot v prejšnjih poglavjih si lahko izrišemo še grafe sledi, determinant in logaritmov determinant, kar si lahko ogledamo na slikah 20, 21 in 22.

8 Slike

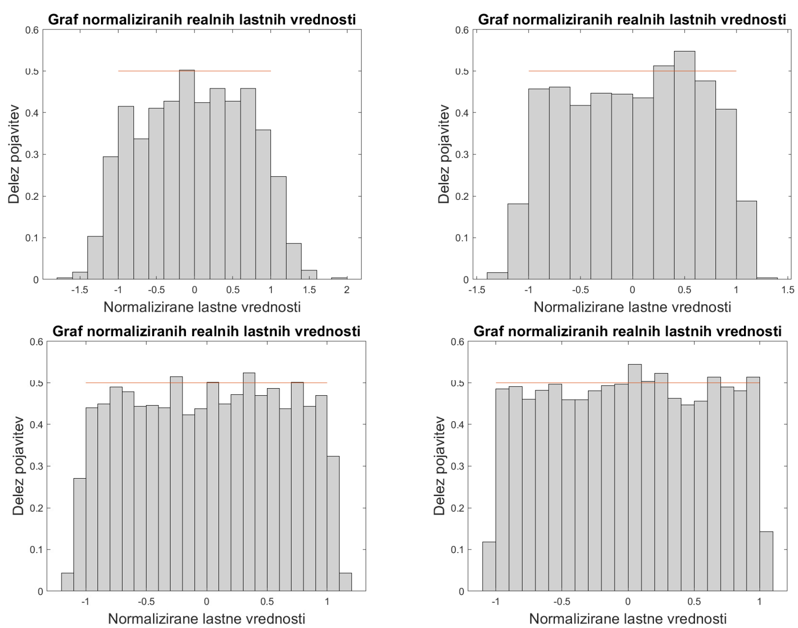
8.1 Lastne vrednosti naključnih matrik



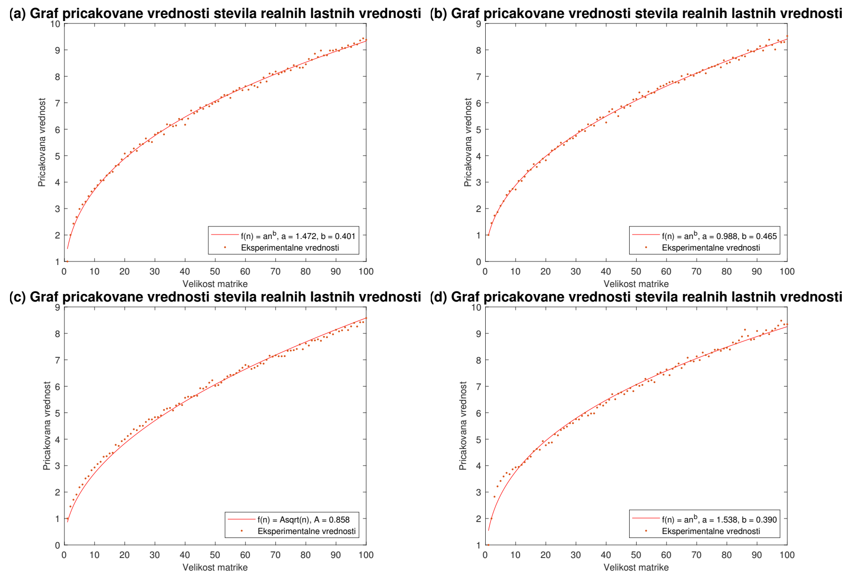
Slika 1: Grafi lastnih vrednosti v kompleksni ravnini 400 matrik velikosti 50×50.
(a) enakomerna porazdelitev na $[0, 1]$
(b) enakomerna porazdelitev celih števil na $[-5, 5]$
(c) standardizirana normalna porazdelitev
(d) diskretna porazdlitev z elementi $0, 1$.



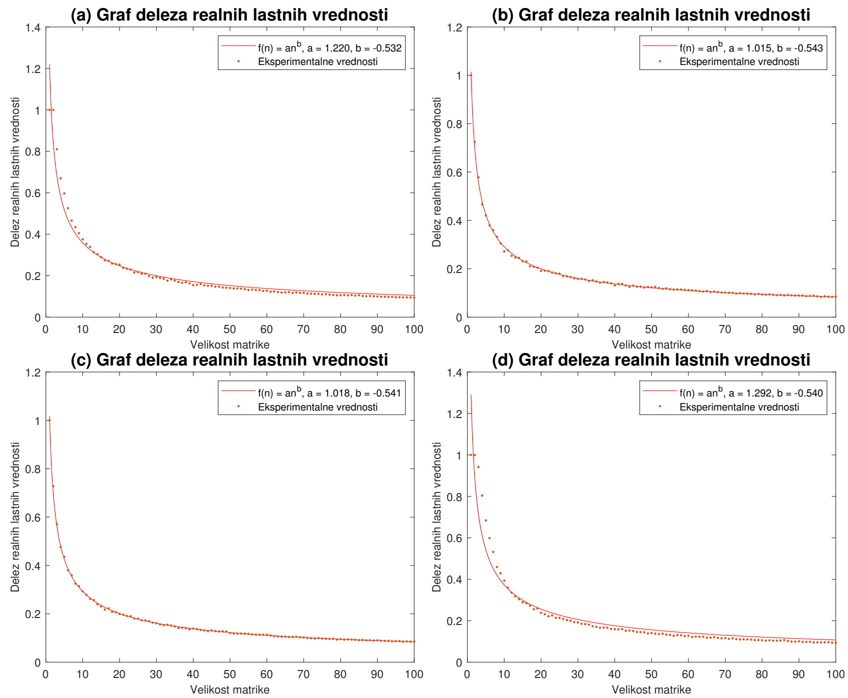
Slika 2: Graf vseh normaliziranih lastnih vrednosti 400 matrik velikosti 50×50 generiranih z normalno porazdelitvijo v kompleksni ravnini.



Slika 3: Grafi normaliziranih realnih lastnih vrednosti 400 matrik velikosti 10×10, 50×50 , 100×100 in 500×500 generiranih z normalno porazdelitvijo.

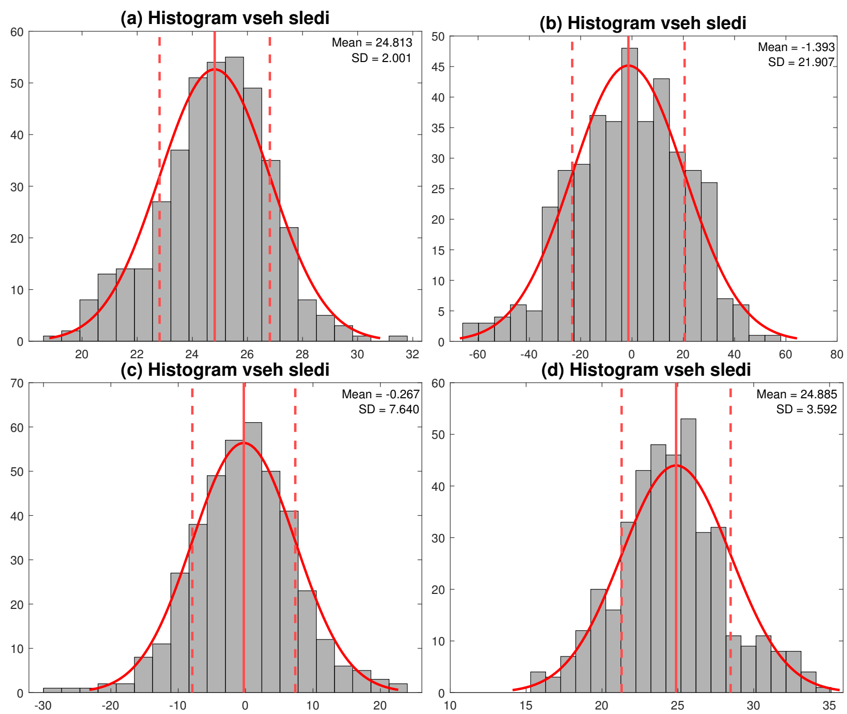


Slika 4: Grafi pričakovanih vrednosti števila realnih lastnih vrednosti 400 matrik velikosti 50×50.
(a) enakomerna porazdelitev na $[0, 1]$
(b) enakomerna porazdelitev celih števil na $[-5, 5]$
(c) standardizirana normalna porazdelitev
(d) diskretna porazdlitev z elementi $0, 1$.

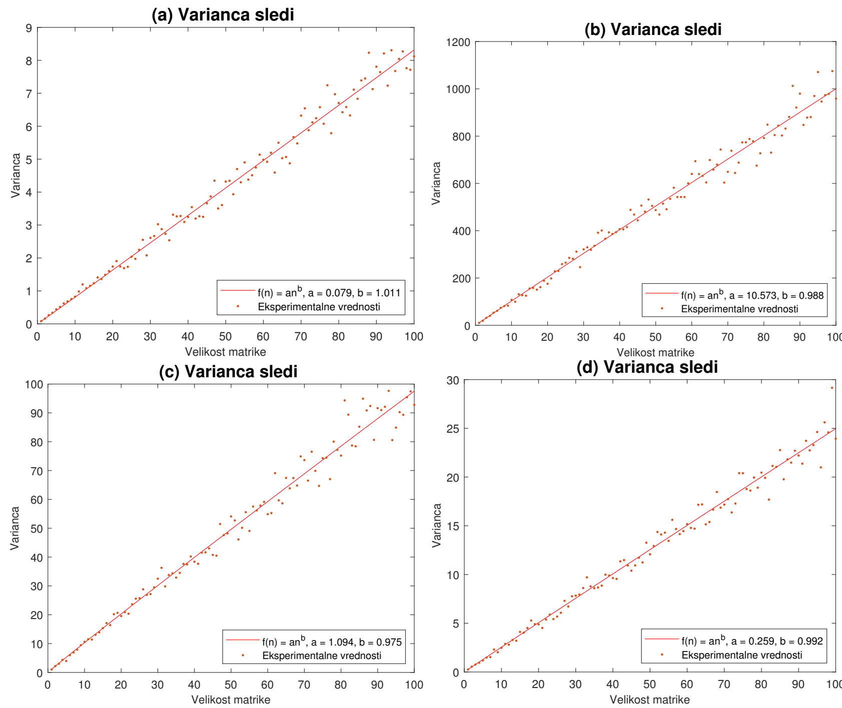


Slika 5: Grafi deležov števila realnih lastnih vrednosti 400 matrik velikosti 50×50.
(a) enakomerna porazdelitev na $[0, 1]$
(b) enakomerna porazdelitev celih števil na $[-5, 5]$
(c) standardizirana normalna porazdelitev
(d) diskretna porazdlitev z elementi $0, 1$.

8.2 Sledi naključnih matrik

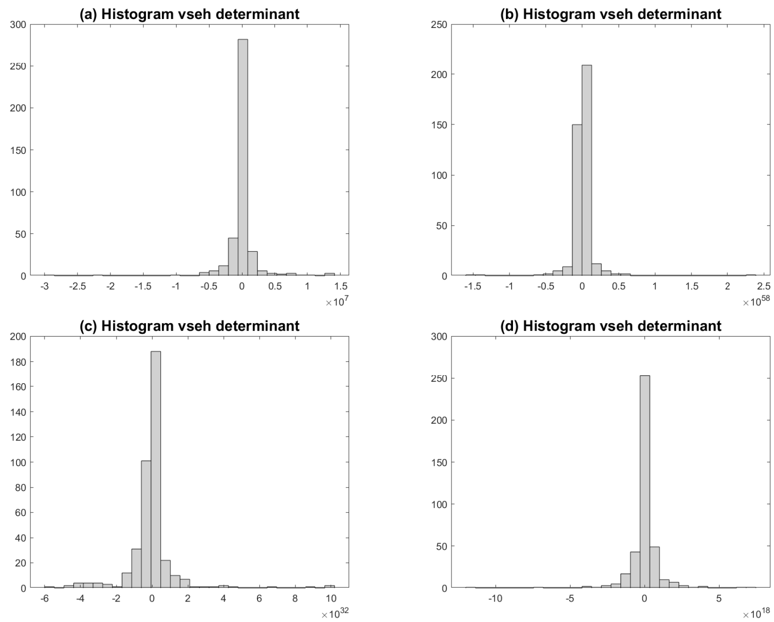


Slika 6: Grafi vseh sledi 400 matrik velikosti 50×50.
(a) enakomerna porazdelitev na $[0, 1]$
(b) enakomerna porazdelitev celih števil na $[-5, 5]$
(c) standardizirana normalna porazdelitev
(d) diskretna porazdlitev z elementi $0, 1$.

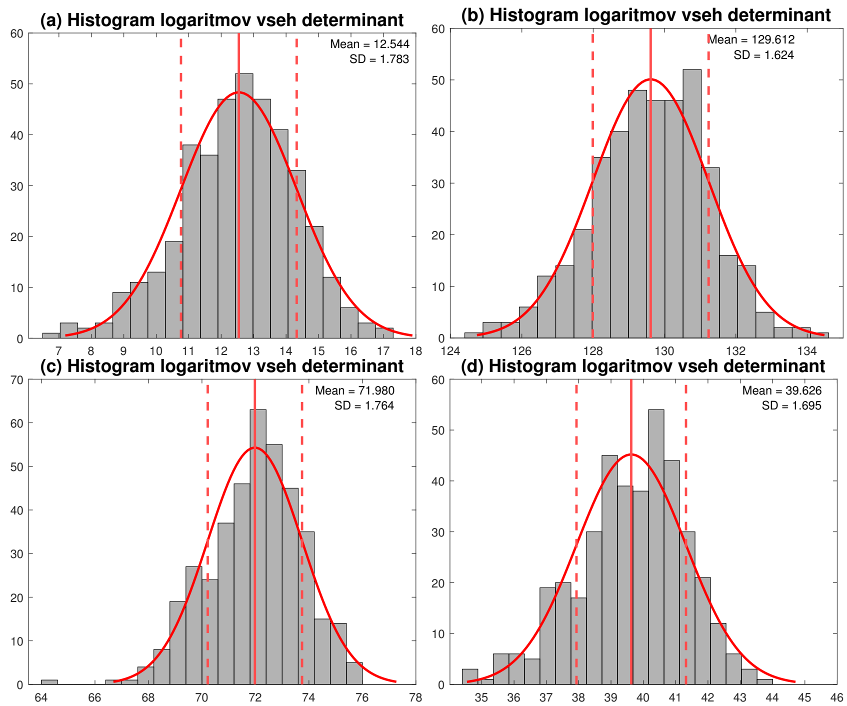


Slika 7: Grafi varianc sledi 400 matrik velikosti 50×50.
(a) enakomerna porazdelitev na $[0, 1]$
(b) enakomerna porazdelitev celih števil na $[-5, 5]$
(c) standardizirana normalna porazdelitev
(d) diskretna porazdlitev z elementi $0, 1$.

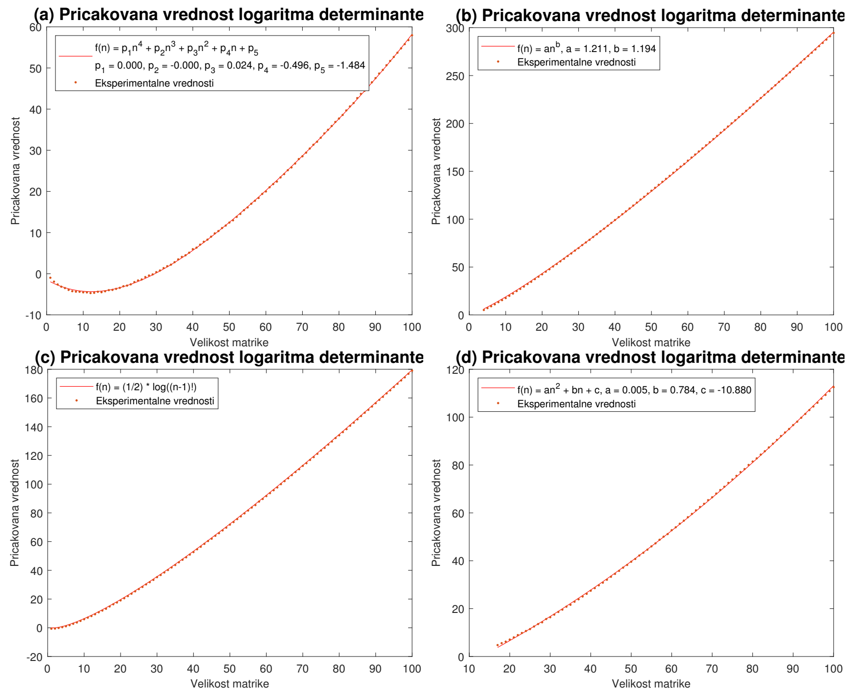
8.3 Determinante naključnih matrik



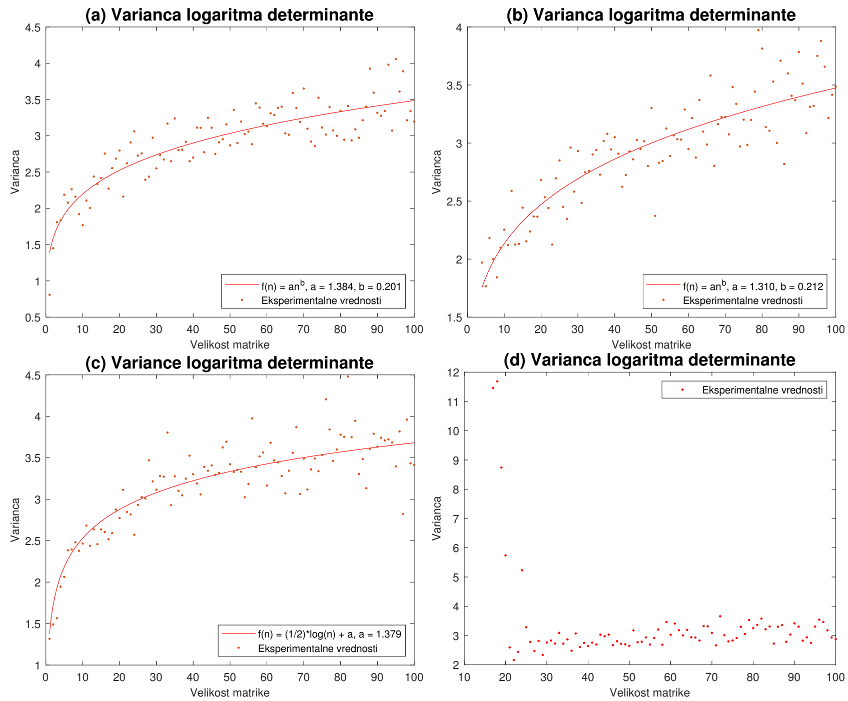
Slika 8: Grafi vseh determinant 400 matrik velikosti 50×50.
(a) enakomerna porazdelitev na $[0, 1]$
(b) enakomerna porazdelitev celih števil na $[-5, 5]$
(c) standardizirana normalna porazdelitev
(d) diskretna porazdlitev z elementi $0, 1$.



Slika 9: Grafi logaritmov vseh determinant 400 matrik velikosti 50×50.
(a) enakomerna porazdelitev na $[0, 1]$
(b) enakomerna porazdelitev celih števil na $[-5, 5]$
(c) standardizirana normalna porazdelitev
(d) diskretna porazdlitev z elementi $0, 1$.

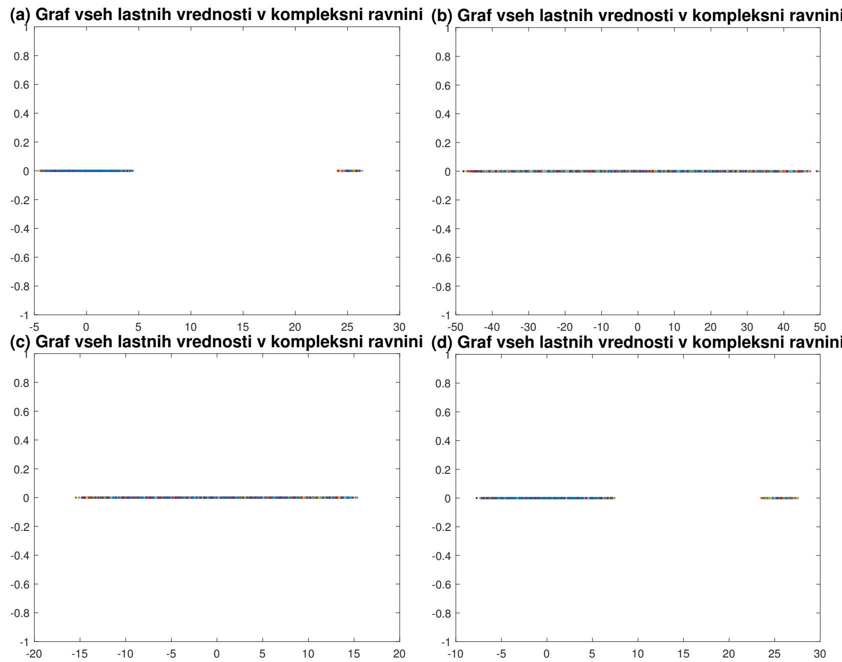


Slika 10: Grafi vseh pričakovanih vrednosti logaritmov determinant 400 matrik velikosti 50×50.
(a) enakomerna porazdelitev na $[0, 1]$ (b) enakomerna porazdelitev celih števil na $[-5, 5]$ (c) standardizirana normalna porazdelitev (d) diskretna porazdlitev z elementi $0, 1$.

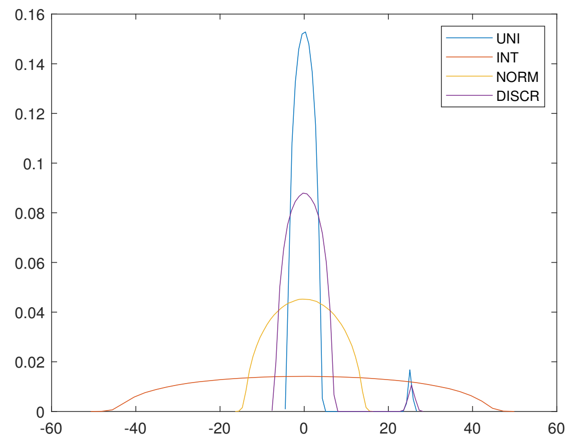


Slika 11: Grafi vseh varianc logaritmov determinant 400 matrik velikosti 50×50.
(a) enakomerna porazdelitev na $[0, 1]$
(b) enakomerna porazdelitev celih števil na $[-5, 5]$
(c) standardizirana normalna porazdelitev
(d) diskretna porazdlitev z elementi $0, 1$.

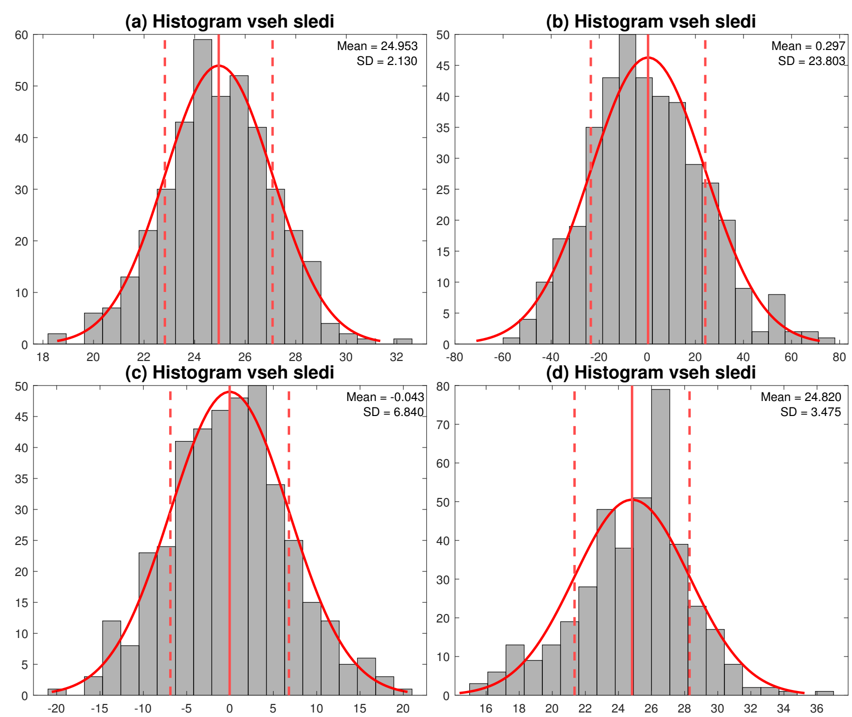
8.4 Simetrične naključne matrike



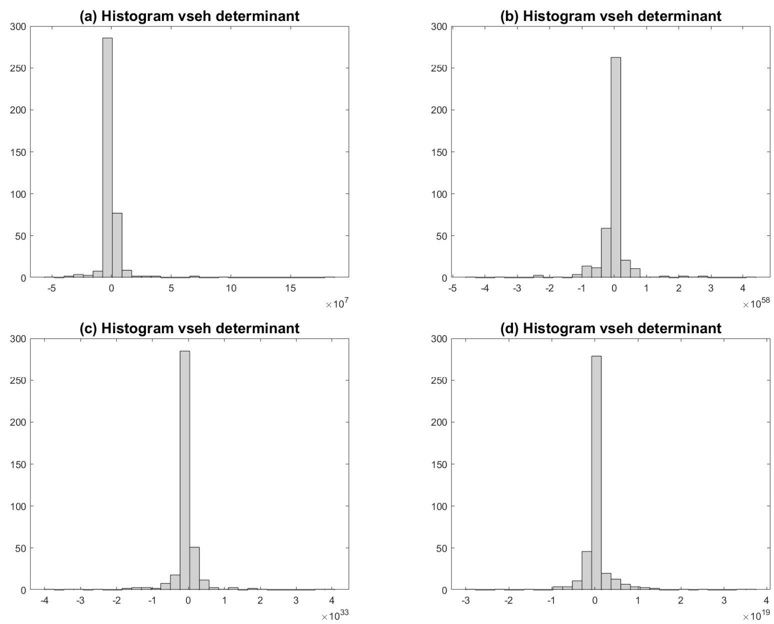
Slika 12: Graf lastnih vrednosti v kompleksni ravnini 400 simetičnih naključnih matrik velikosti 50×50.
(a) enakomerna porazdelitev na $[0, 1]$
(b) enakomerna porazdelitev celih števil na $[-5, 5]$
(c) standardizirana normalna porazdelitev
(d) diskretna porazdlitev z elementi $0, 1$.



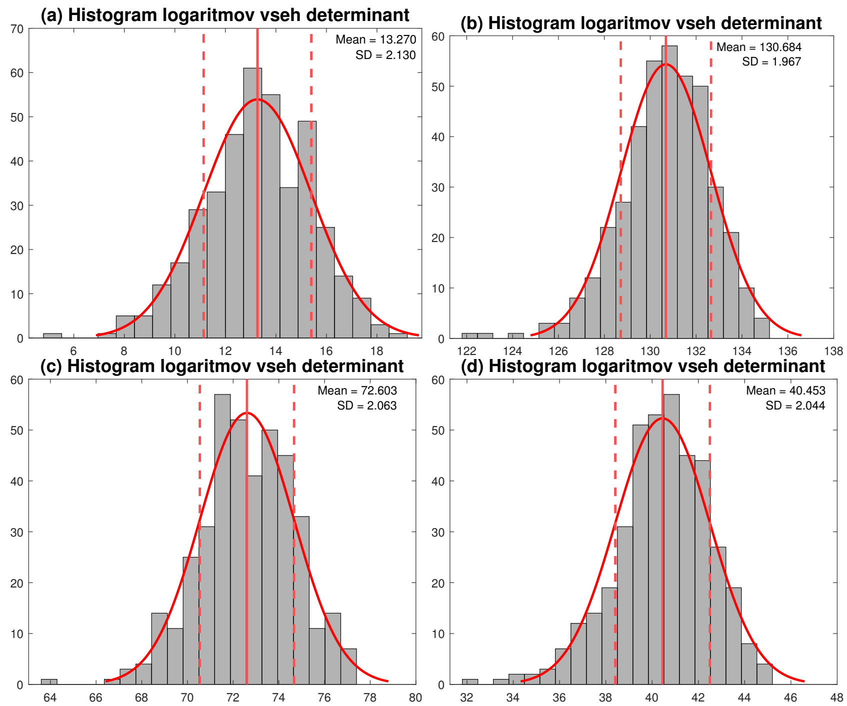
Slika 13: Graf gostote lastnih vrednosti 400 matrik velikosti 50×50.



Slika 14: Graf vseh sledi 400 simetičnih naključnih matrik velikosti 50×50.
(a) enakomerna porazdelitev na $[0, 1]$
(b) enakomerna porazdelitev celih števil na $[-5, 5]$
(c) standardizirana normalna porazdelitev
(d) diskretna porazdlitev z elementi $0, 1$.

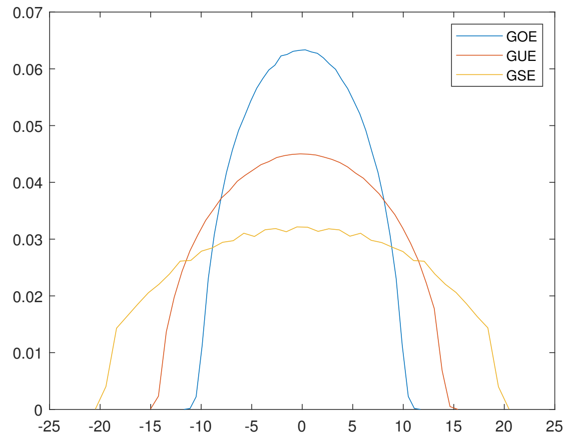


Slika 15: Grafi vseh determinant 400 simetičnih naključnih matrik velikosti 50×50.
(a) enakomerna porazdelitev na $[0, 1]$
(b) enakomerna porazdelitev celih števil na $[-5, 5]$
(c) standardizirana normalna porazdelitev
(d) diskretna porazdlitev z elementi $0, 1$.

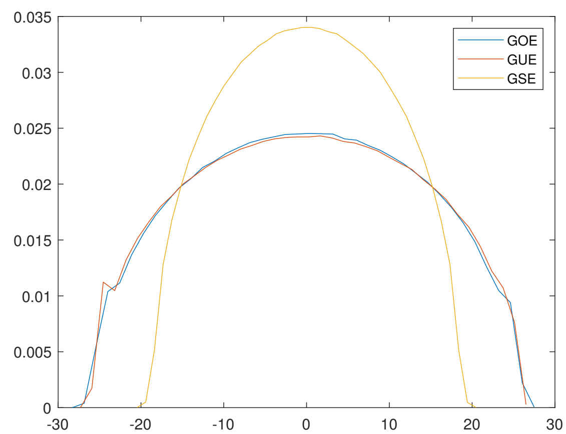


Slika 16: Grafi logaritmov vseh determinant 400 simetičnih naključnih matrik velikosti 50×50.
(a) enakomerna porazdelitev na $[0, 1]$
(b) enakomerna porazdelitev celih števil na $[-5, 5]$
(c) standardizirana normalna porazdelitev
(d) diskretna porazdlitev z elementi $0, 1$.

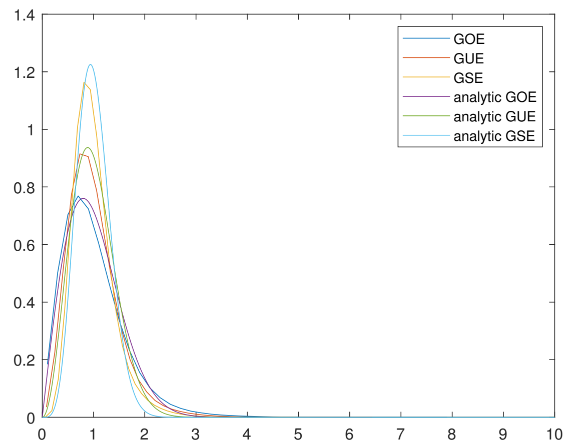
8.5 GOE, GUE, GSE



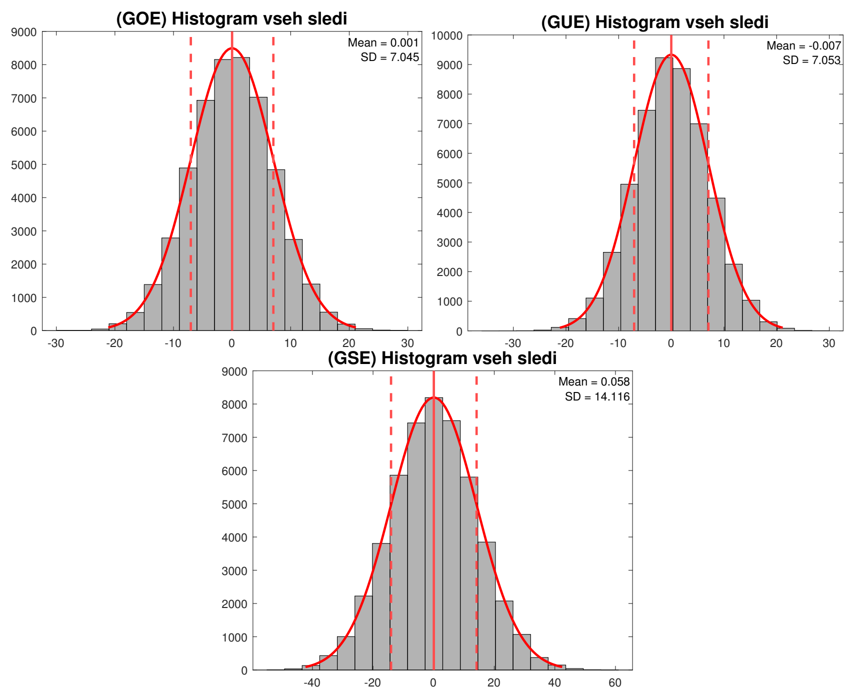
Slika 17: Graf gostote lastnih vrednosti izračunan za matrike velikosti 50×50 pri 50000 ponovitvah.



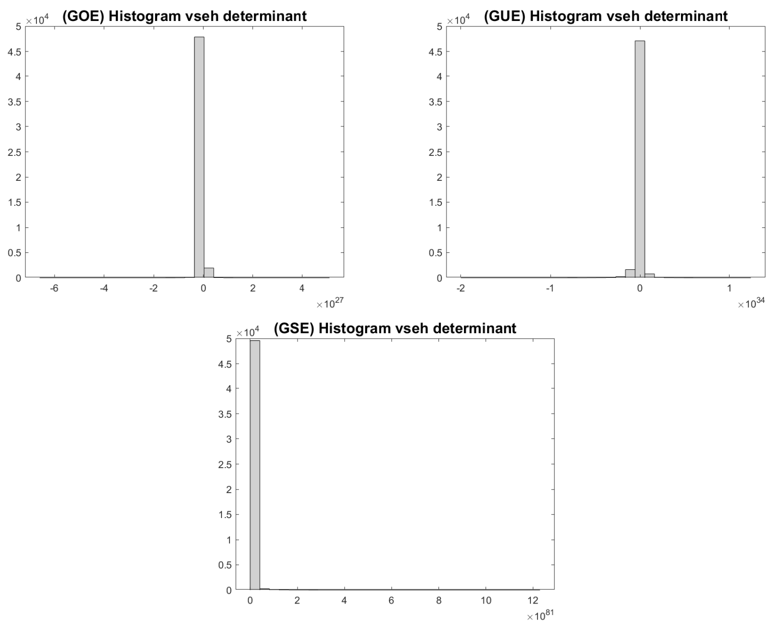
Slika 18: Graf porazdelitve nivojnih razmikov izračunan za matrike velikosti 50×50 pri 50000 ponovitvah.



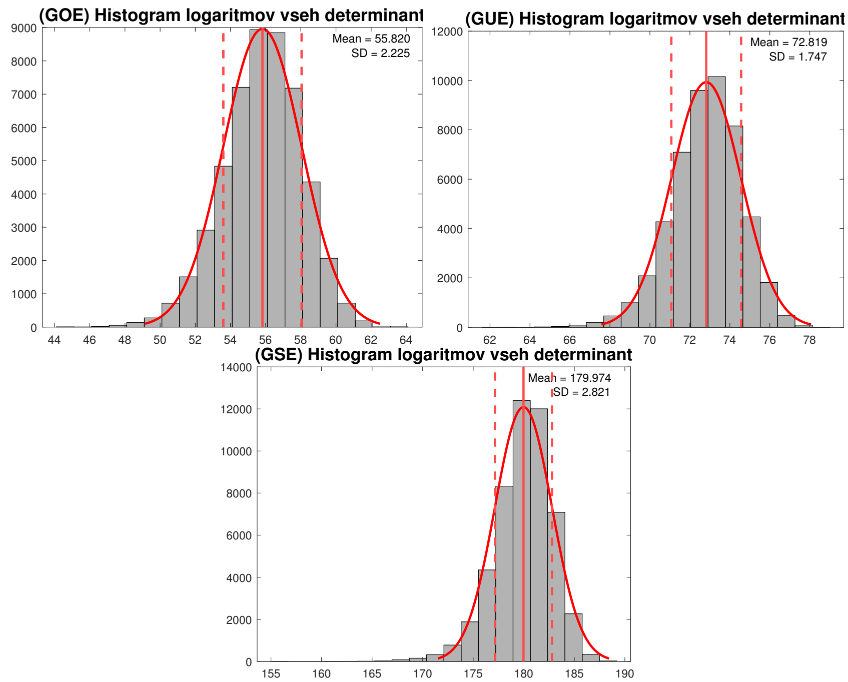
Slika 19: Graf porazdelitve normaliziranih lastnih vrednosti s povprečnim razmikom lastnih vrednosti izračunan za matrike velikosti 50×50 pri 50000 ponovitvah.



Slika 20: Graf vseh sledi 50000 matrik velikosti 50×50.



Slika 21: Grafi vseh determinant 50000 simetičnih matrik velikosti 50×50.



Slika 22: Grafi logaritmov vseh determinant 50000 matrik velikosti 50×50.

Literatura

[1] A. Edelman, E. Kostlan in M. Shub, *How Many Eigenvalues of a Random Matrix Are Real?*, Journal of the American Mathematical Society **7**(1)(1994), 247–267.

[2] V. L. Girko, *The circular law*, Theory of Probability Its Applications, **29**(4)(1985), 694–706.

[3] S. Hameed, K. Jain in A. Lakshminarayan, *Real eigenvalues of non-Gaussian random matrices and their products*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **48**(38)(2015).

[4] G. Livan, M. Novaes in P. Vivo, *Introduction to random matrices* , Theory and practice **26**, Springer, 2018.

[5] H .H. Nguyen in V. Vu, *Random matrices: Law of the determinant*, The Annals of Probability **42**(1)(2014), 146–167.

[6] Wikipedia, The Free Encyclopedia, [ogled 9. 4. 2022], dostopno na https://en.wikipedia.org/wiki/Random_matrix.