

# Naključne matrike

Ajda Lemut

Projekt pri predmetu Matematika z računalnikom

18. november 2019

## Definicija

**Naključne matrike** so matrike, v katerih so vsi elementi naključne spremenljivke.

## Opazovane porazdelitve:

- a) enakomerna porazdelitev na intervalu  $[0, 1]$ ,
- b) enakomerna porazdelitev celih števil na intervalu  $[-5, 5]$ ,
- c) standardizirana normalna porazdelitev (Gaussova porazdelitev) in
- d) diskretna porazdelitev z vrednostima iz dane dvoelementne množice  $\{0, 1\}$ .

## Implementacija v Matlabu:

- a)  $A = \text{rand}(n)$ ,
- b)  $A = \text{randi}([-r, r], n)$ ,
- c)  $A = \text{randn}(n)$  in
- d)  $A = a + (b - a) * \text{randi}([0, 1], n)$ .

- **fanaliza**
- **analiza**
- **parametri**
- **Pričakovano število realnih lastnih**
- **Naključne simetricne matrike**
  - fanaliza\_sim
  - analiza\_sim
  - eigenvalues\_density
- **GOE & GUE & GSE**
  - fanaliza\_G
  - analiza\_G
  - eigenvalues\_analiza\_G

# fanaliza.m

```
function [stevilo_realnih_lastnih, vse_lastne, normvse_lastne, vse_sledi, vse_det] = fanaliza(n, st_ponovitev, d)

    stevilo_realnih_lastnih = zeros(st_ponovitev, 1); % vector of numbers of real eigenvalues
    vse_lastne = zeros(n, st_ponovitev); % matrix of all eigenvalues
    normvse_lastne = zeros(n, st_ponovitev); % lamda/sqrt(n)
    vse_sledi = zeros(st_ponovitev,1); % vector of all traces
    vse_det = zeros(st_ponovitev,1); % vector of all determinants

    for k = 1 : st_ponovitev

        %% generating of a random matrix
        if matches(d,'uni')
            % uniformly distributed random numbers in the interval (0,1)
            A = rand(n);
        elseif matches(d,'int')
            % uniformly distributed random integers in the range defined by r
            A = randi([-5,5],n);
        elseif matches(d,'norm')
            % normally distributed random numbers
            A = randn(n);
        elseif matches(d,'discr')
            %descrete with elements a and b, both with the same probability
            a = 0;
            b = 1;
            A = a + (b-a) * randi([0, 1], n);
        else
            error('Unidentified distribution')
        end
    end
```

# fanaliza.m

```
%> calculation of eigenvalues
lastne = eig(A);
for l = 1 : n
    vse_lastne(l,k) = lastne(l);
    normvse_lastne(l,k) = lastne(l)/sqrt(n);
end

%> number of real eigenvalues
st_reálnih_lastnih = 0;
for i = 1 : n
    if isreal(lastne(i))
        st_reálnih_lastnih = st_reálnih_lastnih + 1;
    else
        continue
    end

end

stevilo_reálnih_lastnih(k)= st_reálnih_lastnih;

%> calculation of trace
vse_sledi(k) = trace(A);

%> calculation of determinant
vse_det(k) = det(A);

end
end
```

# analiza.m

```
% dolocimo velikost naključne matrike, porazdelitev za konstrukcijo in stevilo ponovitev konstrukcije
d = 'norm'; % 'uni'/'int'/'norm'/'discr'
n = 50;
st_ponovitev = 400;

%-----
% zazenemo glavno funkcijo glede na izbrane spremenljivke
[stevilo_realnih_lastnih, vse_lastne, normvse_lastne, vse_sledi, vse_det] = fanaliza(n, st_ponovitev, d);

%% -----ANALIZA-----
%% Verjetnosti

st_vsajenarealna = 0;
st_vserealne = 0;
for st = 1:length(stevilo_realnih_lastnih)
    if stevilo_realnih_lastnih(st) == n
        st_vsajenarealna = st_vsajenarealna + 1;
        st_vserealne = st_vserealne + 1;
    elseif stevilo_realnih_lastnih(st) > 0
        st_vsajenarealna = st_vsajenarealna + 1;
    else
        continue
    end
end
```

# analiza.m

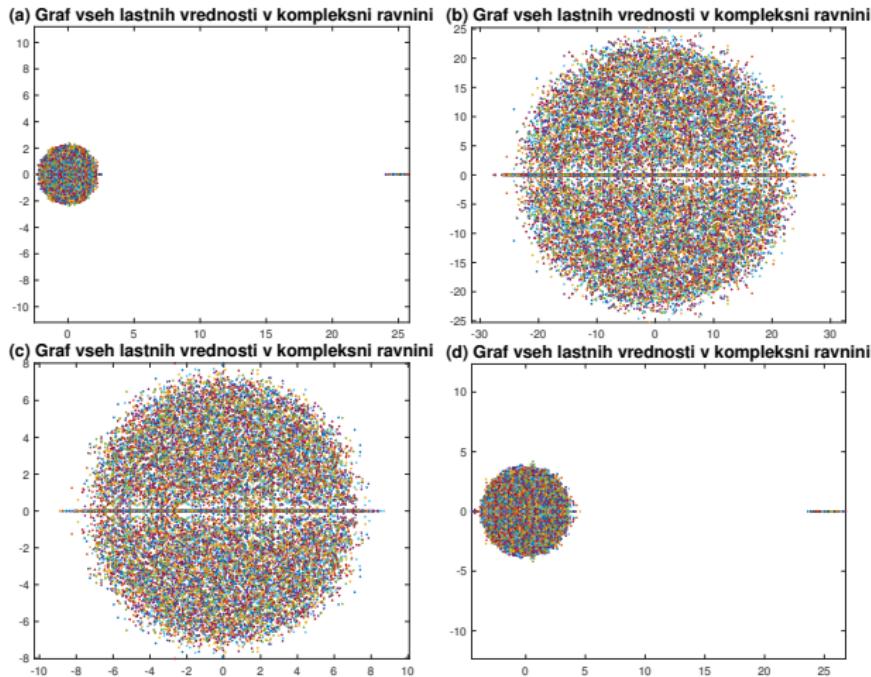
```
verjetnost_vsajenarealna = st_vsajenarealna/st_ponovitev;
fprintf('Verjetnost, da je vsaj ena lastna vrednost realna: %.3f \n', verjetnost_vsajenarealna);
verjetnost_vserealne = st_vserealne/st_ponovitev;
fprintf('Verjetnost, da so vse lastne vrednosti realne: %.3f \n', verjetnost_vserealne);
povprecje_st_realmih = mean(stevilo_realmih_lastnih);
fprintf('Povprecje stevila realnih: %.3f \n' , povprecje_st_realmih);

abela = table( verjetnost_vsajenarealna, verjetnost_vserealne, povprecje_st_realmih , 'VariableNames',[ "Vsaj ena realna", "Verjetnosti"= sprintf('verjetnosti_%s_%d_%d.txt',d,n,st_ponovitev);
writetable(abela, verjetnosti);

%% Pomozna funkcija za parametre v odvisnosti od velikosti matrike

maxdim = 100; %maksimalna velikost matrike
x = 1:1:maxdim;
y = zeros(1,maxdim);
z = zeros(1,maxdim);
for i = x
    [stevilo_realmih_lastnih1, vse_lastnel, normvse_lastnel, vse_sledil, vse_detl] = fanaliza(i, st_ponovitev, d);
    y(i) = mean(stevilo_realmih_lastnih); %povprecno stevilo realnih
    z(i) = y(i)/i ; %delez realnih
end
```

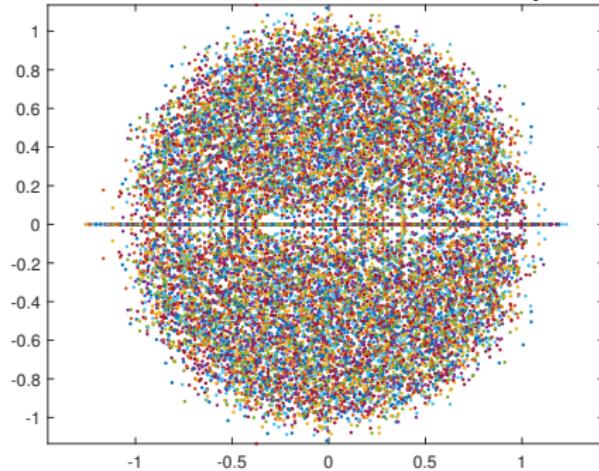
# Lastne vrednosti naključnih matrik



Slika: Grafi lastnih vrednosti v kompleksni ravnini 400 matrik velikosti  $50 \times 50$ .

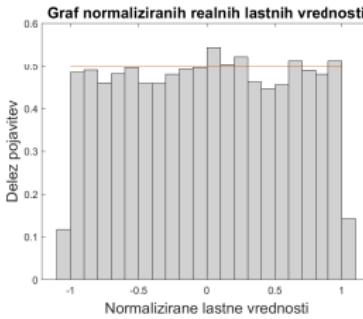
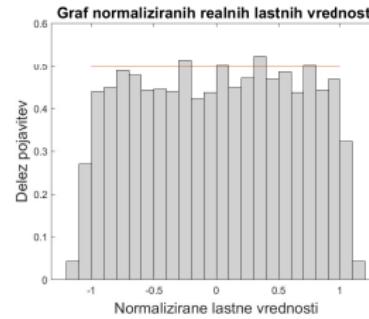
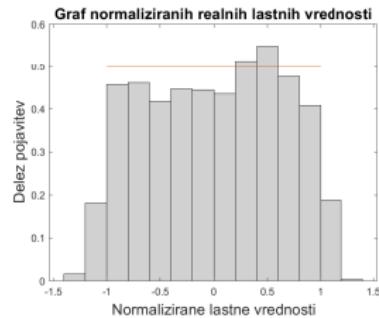
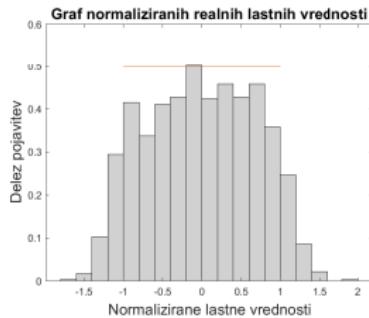
# Lastne vrednosti naključnih matrik

Graf vseh normaliziranih lastnih vrednosti v kompleksni ravnini



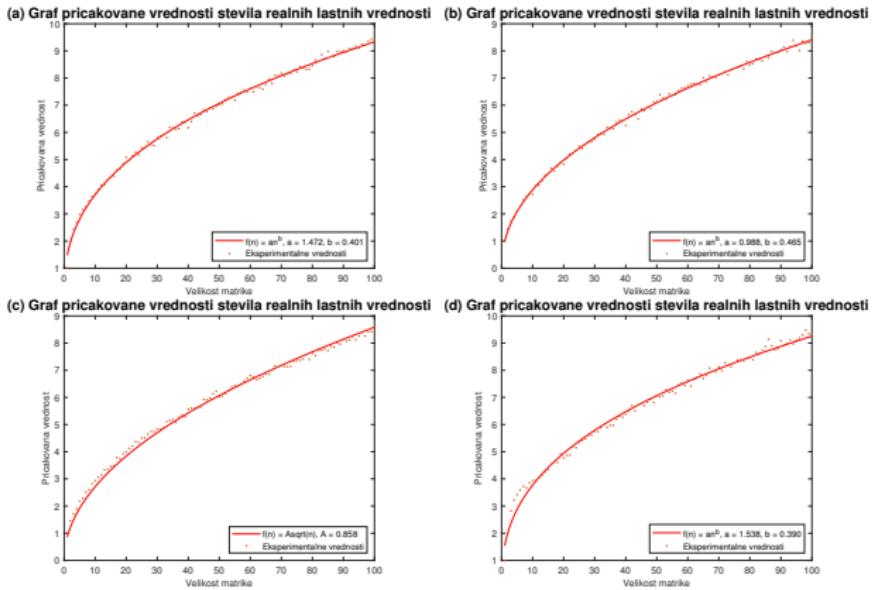
Slika: Graf vseh normaliziranih lastnih vrednosti 400 matrik velikosti  $50 \times 50$  generiranih z normalno porazdelitvijo v kompleksni ravnini.

# Lastne vrednosti naključnih matrik



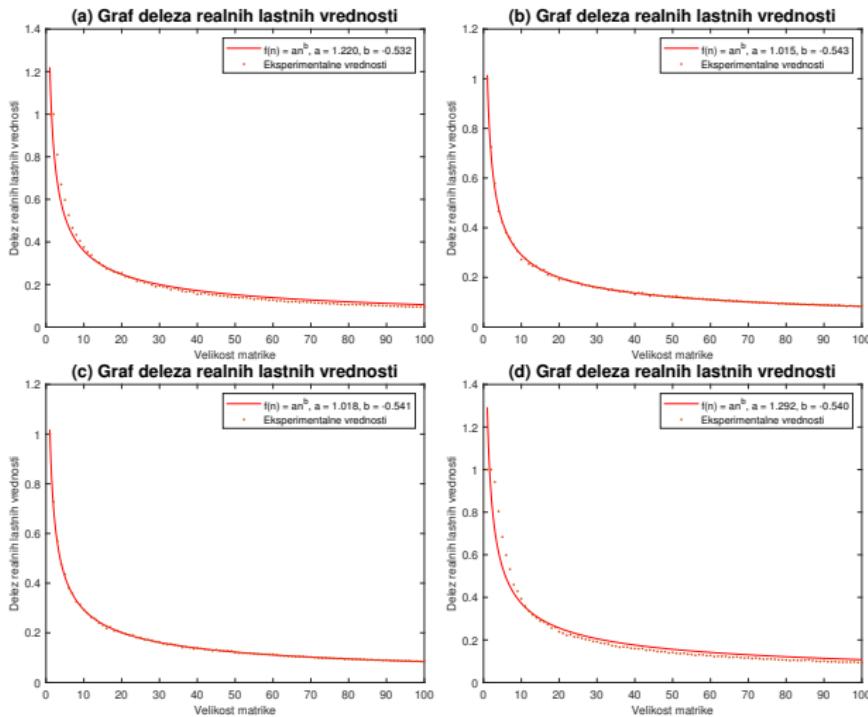
Slika: Grafi normaliziranih realnih lastnih vrednosti 400 matrik velikosti  $10 \times 10$ ,  $50 \times 50$ ,  $100 \times 100$  in  $500 \times 500$  generiranih z normalno porazdelitvijo.

# Lastne vrednosti naključnih matrik



Slika: Grafi pričakovanih vrednosti števila realnih lastnih vrednosti 400 matrik velikosti  $50 \times 50$ .

# Lastne vrednosti naključnih matrik



Slika: Grafi deležov števila realnih lastnih vrednosti 400 matrik velikosti  $50 \times 50$ .

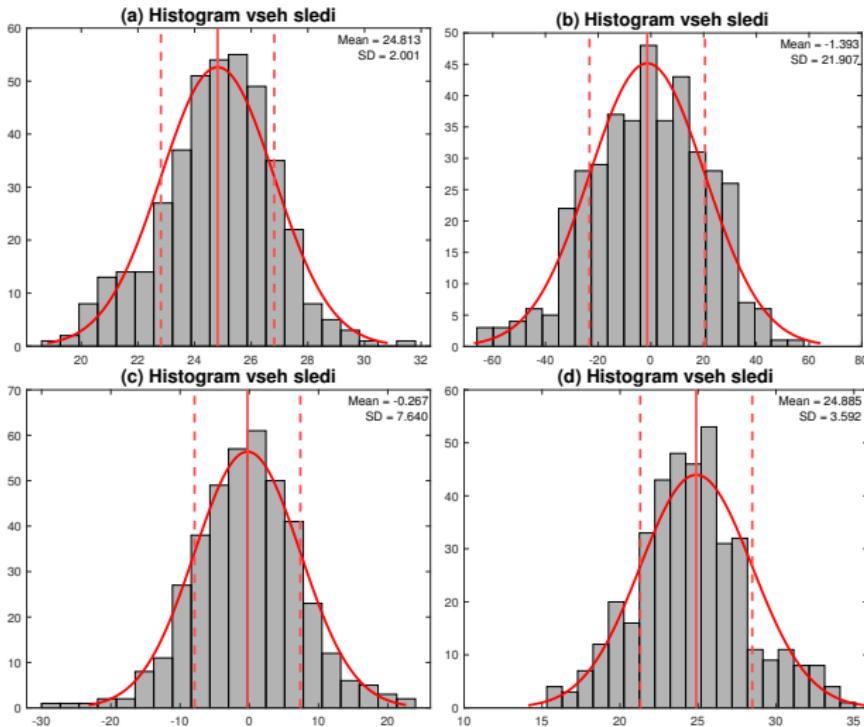
# Lastne vrednosti naključnih matrik

Teoretična pričakovana vrednost	Eksperimentalna pričakovana vrednost
1	1
1.41	1.46
1.71	1.71
1.94	1.91
2.15	2.18
2.33	2.29
2.5	2.52
2.65	2.6
2.79	2.83
2.93	2.93

# Lastne vrednosti naključnih matrik

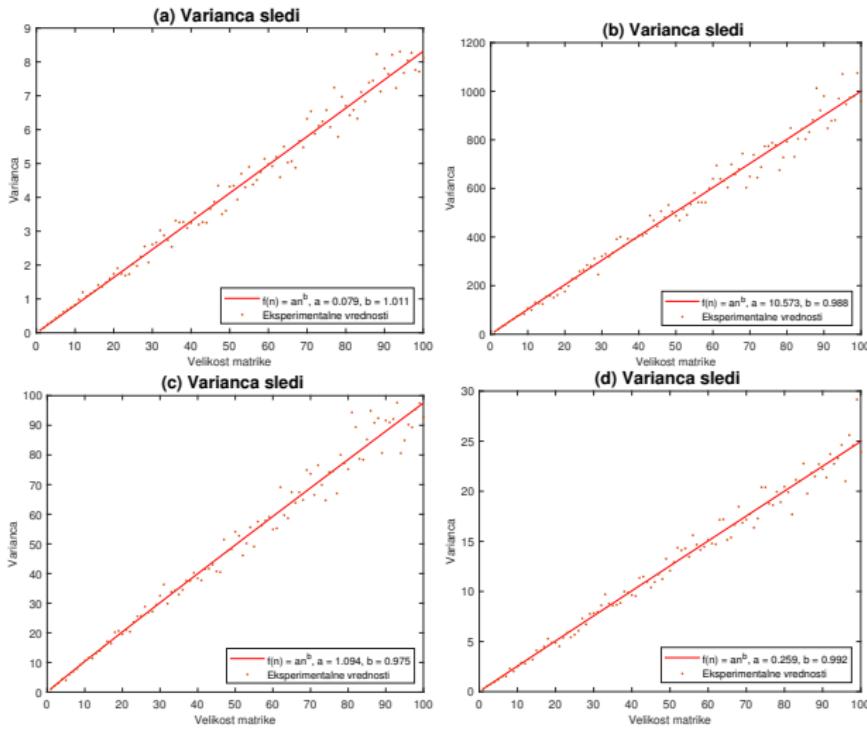
	Vsaj ena realna	Vse realne	Povprecno stevilo realnih
Uni	1	0	6.74
Int	1	0	6.2
Norm	1	0	5.99
Discr	1	0	7.08

# Sledi naključnih matrik



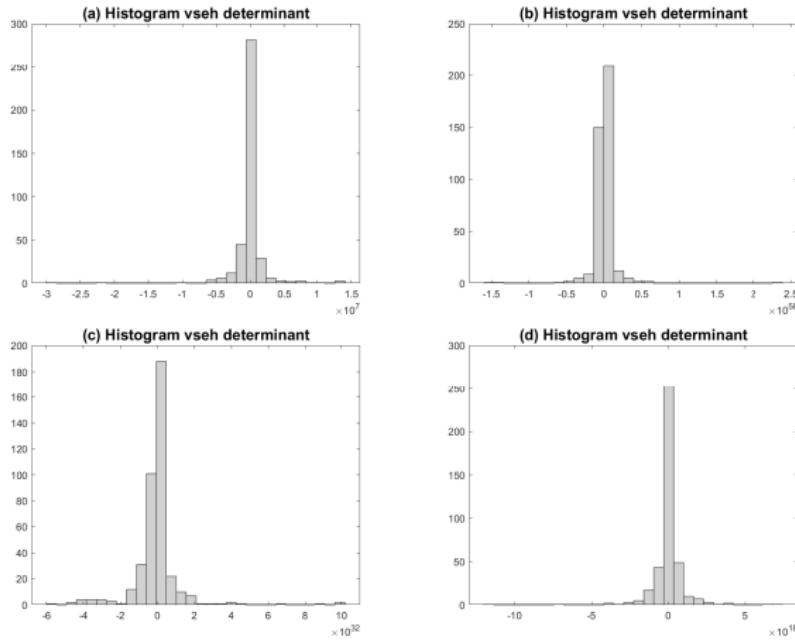
Slika: Grafi vseh sledi 400 matrik velikosti  $50 \times 50$ .

# Sledi naključnih matrik



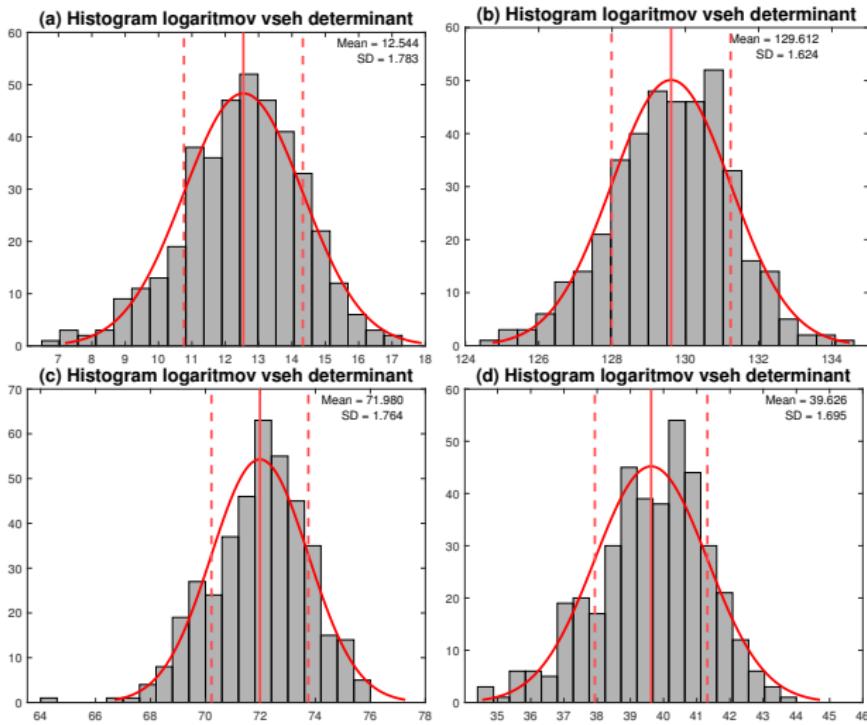
Slika: Grafi varianc sledi 400 matrik velikosti  $50 \times 50$ .

# Determinante naključnih matrik



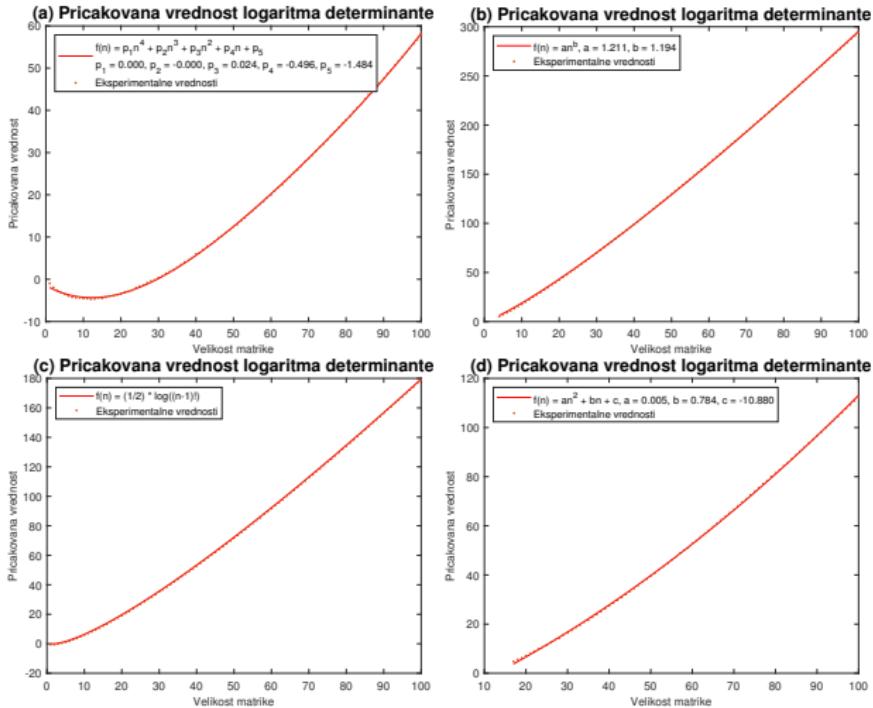
Slika: Grafi vseh determinant 400 matrik velikosti  $50 \times 50$ .

# Determinante naključnih matrik



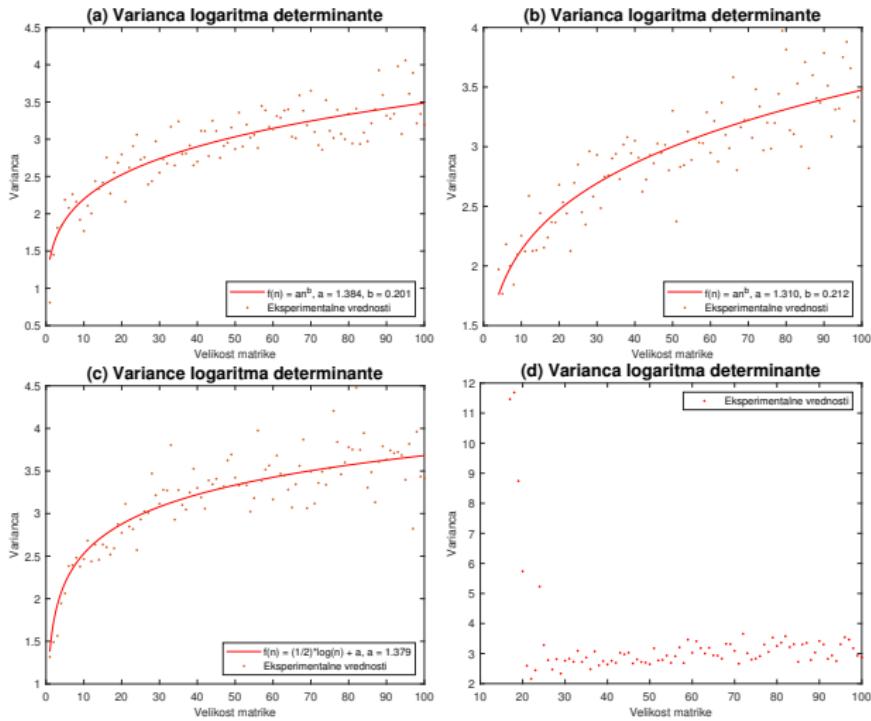
Slika: Grafi logaritmov vseh determinant 400 matrik velikosti  $50 \times 50$ .

# Determinante naključnih matrik



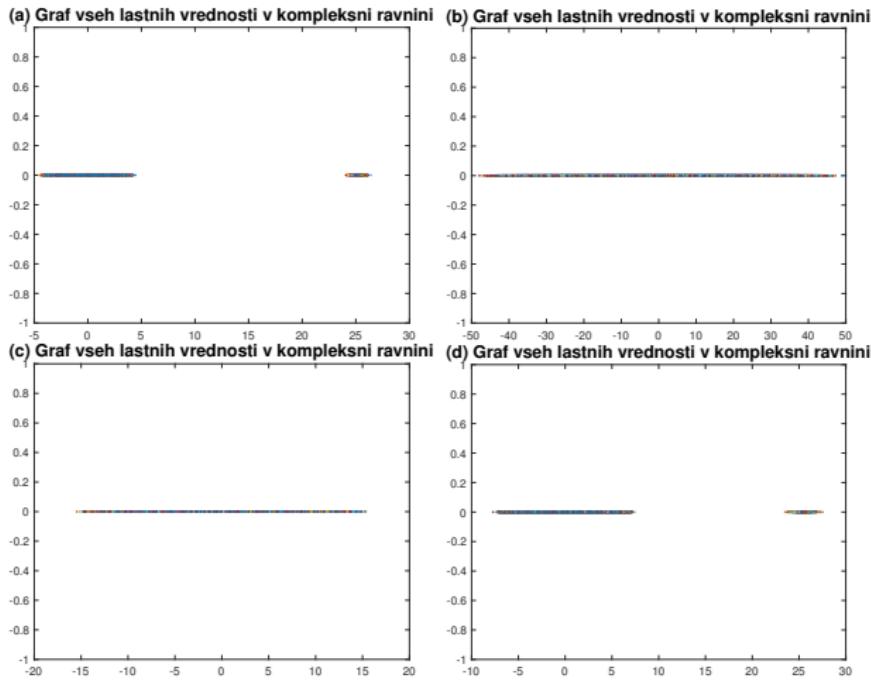
Slika: Grafi vseh pričakovanih vrednosti logaritmov determinant 400 matrik velikosti  $50 \times 50$ .

# Determinante naključnih matrik



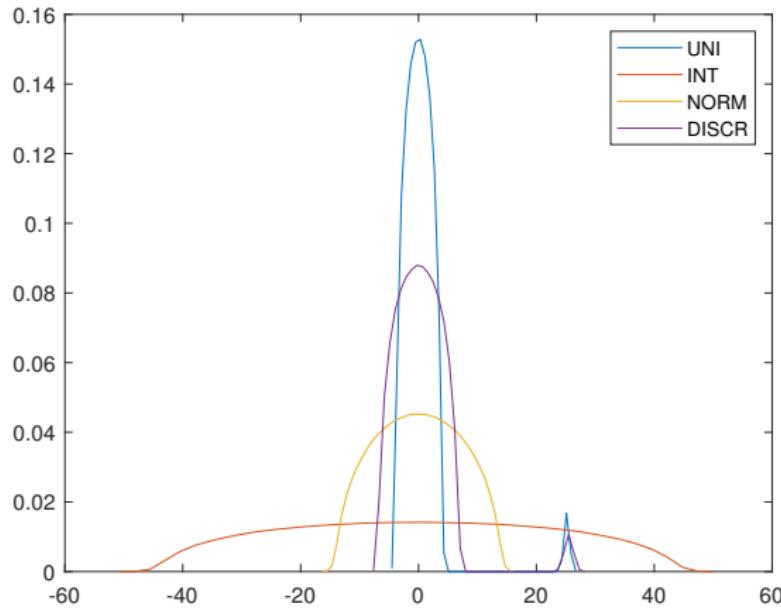
Slika: Grafi vseh varianc logaritmov determinant 400 matrik velikosti  $50 \times 50$ .

# Lastne vrednosti naključnih simetrične matrik



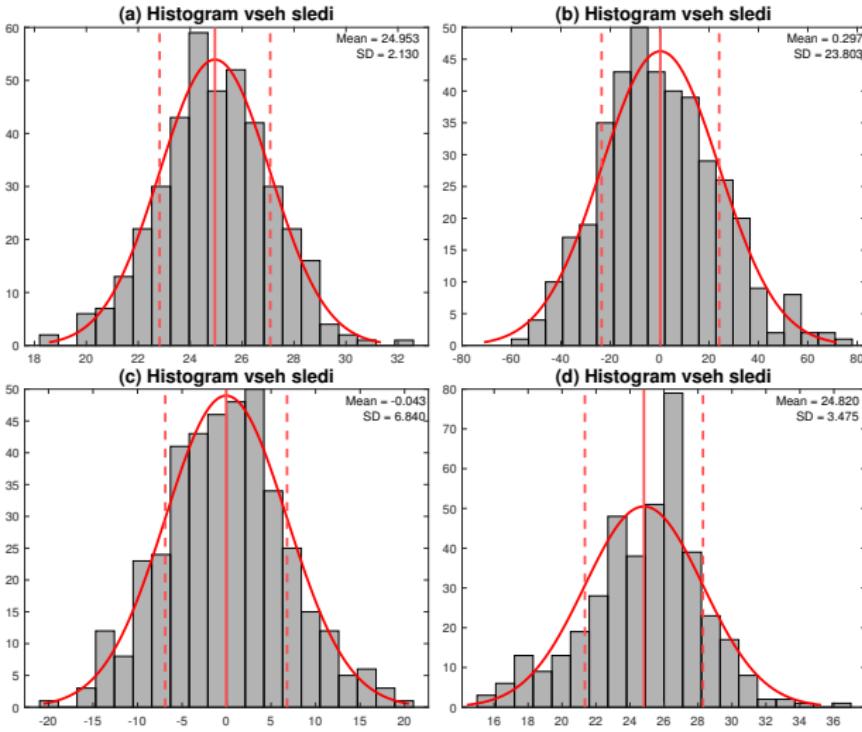
Slika: Graf lastnih vrednosti v kompleksni ravnini 400 simetričnih naključnih matrik velikosti  $50 \times 50$ .

# Lastne vrednosti naključnih simetrične matrik



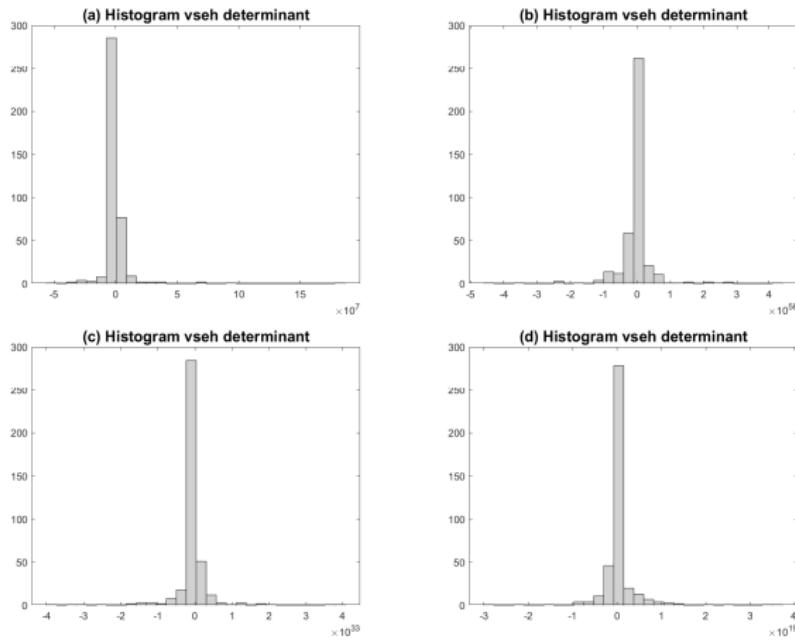
Slika: Graf gostote lastnih vrednosti 400 matrik velikosti  $50 \times 50$ .

# Sledi naključnih simetrične matrik



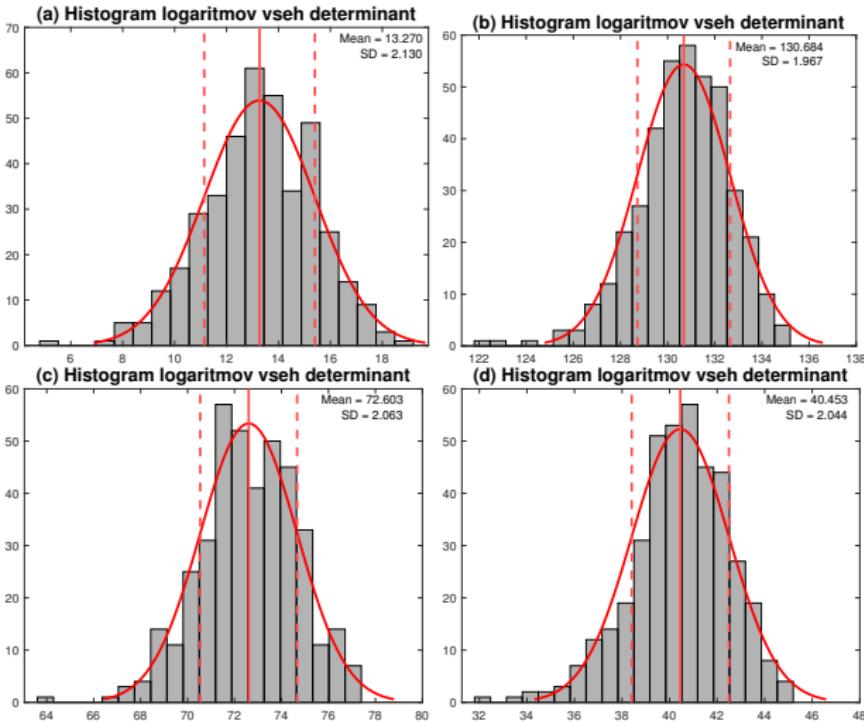
Slika: Grafi vseh sledi 400 simetričnih naključnih matrik velikosti  $50 \times 50$ .

# Determinante naključnih simetrične matrik



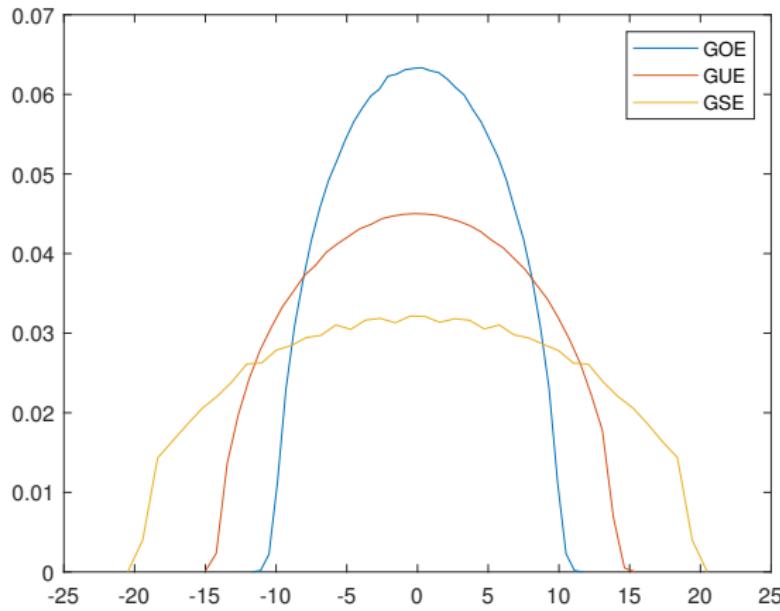
Slika: Grafi vseh determinant 400 simetričnih naključnih matrik velikosti  $50 \times 50$ .

# Determinante naključnih simetrične matrik



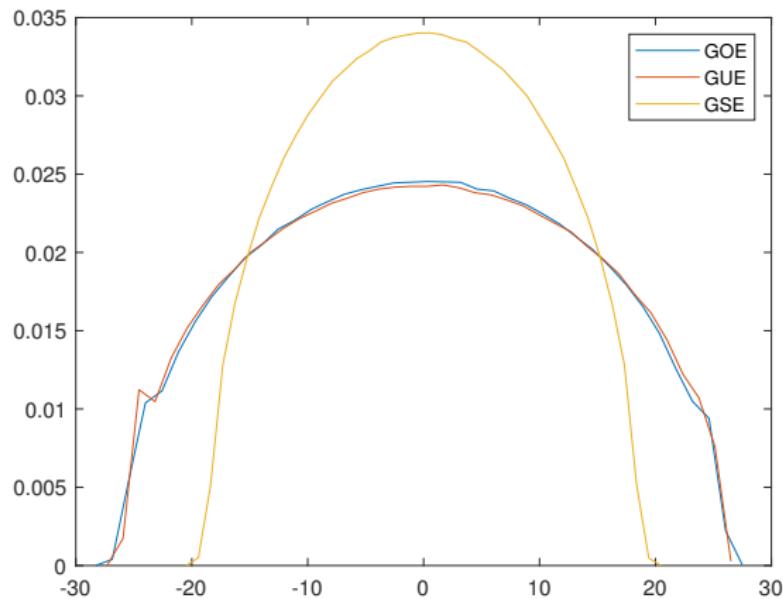
Slika: Graf logaritmov vseh determinant 400 simetričnih naključnih matrik velikosti  $50 \times 50$ .

# GOE, GUE in GSE



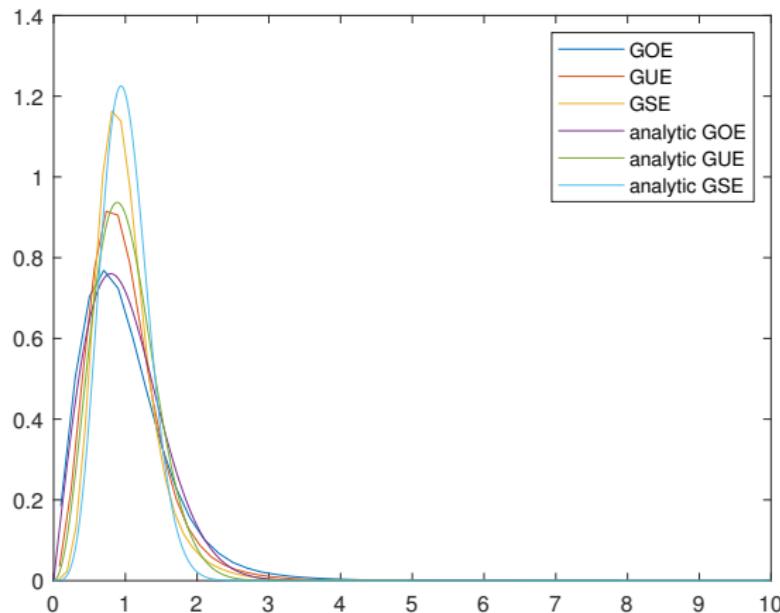
Slika: Graf gostote lastnih vrednosti izračunan za matrike velikosti  $50 \times 50$  pri 50000 ponovitvah.

# GOE, GUE in GSE



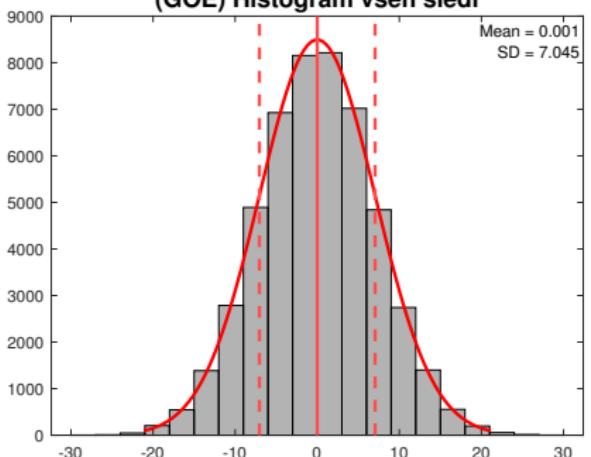
Slika: Graf porazdelitve nivojnih razmikov izračunan za matrike velikosti  $50 \times 50$  pri 50000 ponovitvah.

# GOE, GUE in GSE

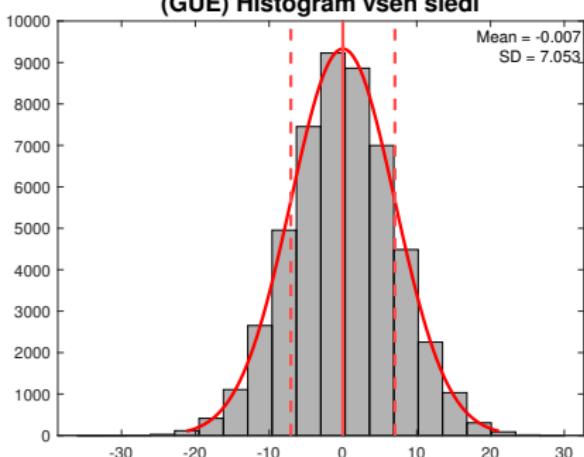


**Slika:** Graf porazdelitve normaliziranih lastnih vrednosti s povprečnim razmikom lastnih vrednosti izračunan za matrike velikosti  $50 \times 50$  pri 50000 ponovitvah.

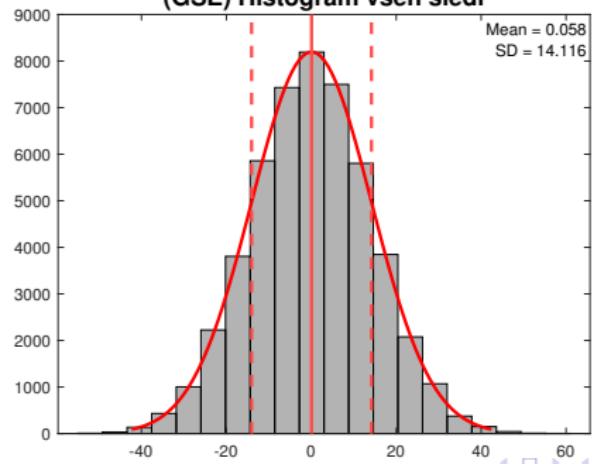
(GOE) Histogram vseh sledi

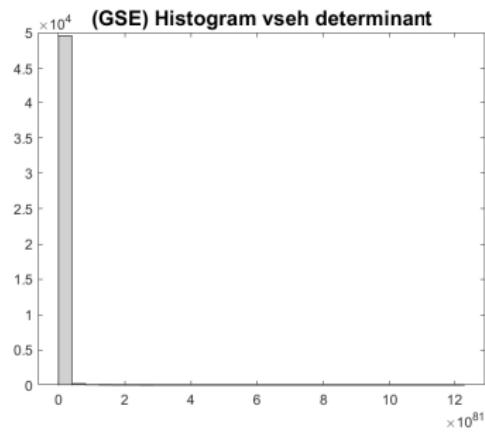
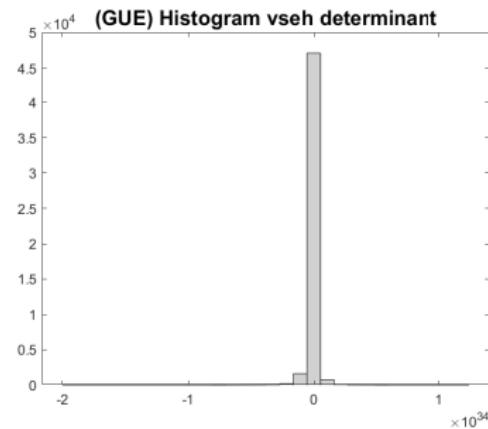
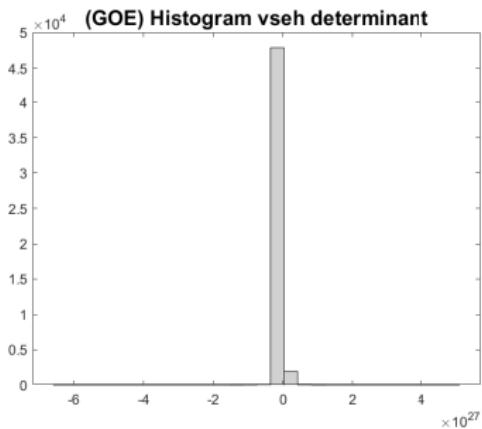


(GUE) Histogram vseh sledi



(GSE) Histogram vseh sledi





Slika: Grafi vseh determinant 50000 simetričnih matrik velikosti  $50 \times 50$

