Metrična in delna metrična dimenzija kartezičnega produkta

Zanimalo naju je, kakšna je metrična in delna metrična dimenzija pri različnih kartezičnih produktih grafov. Najprej sva si pogledali kartezični produkt poti $P_t \square P_m$. Ugotovili sva da je metrična in delna metrična dimenzija enaka 2. Pri kartezičnem produktu poti in cikla, $P_t \square C_m$ sva ugotovili, da je metrična dimenzija pri sodih m enaka 3, delna metrična pa je enaka 2. Če je m lih sva dobili metrično dimenzijo 2, delna metrična dimenzija pa ni tako lepa kot v prejšnem primeru, velja pa $dim_f(P_t \square C_m) \geq dim_f(C_m) = \frac{m}{m-1}$. Nadaljevali sva s kartezičnim produktom ciklov $C_t \square C_m$. Za lihe m sva dobili metrično dimenzijo 3, z izjemo $C_2 \square C_5$, ki ima metrično dimenzijo 2. Če sta m in n soda, sva dobili metrično dimenzijo 4, z izjemo $C_2 \square C_4$, ki ima metrično dimenzijo 3. Za delno metrično dimenzijo sva ugotovili, če sta m in n soda, je enaka 2 sicer pa je manjša od 2. Pri kartezičnem produktu polnega grafa in poti $K_t \square P_m$, sva ugotovili, da je metrična dimenzija vedno enaka $t-1$. Delna metrična dimenzija, pa je enaka $\frac{|V(K_t)|}{2} = dim_f(K_t)$. Metrična dimenzija kartezičnega produkta polnega grafa in cikla $K_t \square C_m$ je enaka 3, če je $t = 4$ in m sod, oziroma 4, če je $t = 4$ in m lih. Če je $t \geq 5$, je metrična dimenzija enaka $t - 1$. Delna metrična dimenzija je enaka $\frac{|V(K_t)|}{2}$, razen v posebnem primeru ko je $t = 2$ in m lih, $m \geq 3$, je $dim_f(K_t \square C_m) = \frac{2m}{m+1}$, tu je tudi metrična dimenzija enaka 2. Povzetek ugotovitev:

G	$\beta(G)$	$dim_f(G)$
$P_t \square P_m$	2	2
$P_t \square C_m$	2, če je m liho 3, če je m sodo	$\geq dim_f(C_m) = \frac{m}{m-1}$ 2
$C_t \square C_m$	3, če je t ali m liho 4, če je t in m sodo	≤ 2 2
$K_t \square P_m$	t-1	$\frac{\lvert V(K_t)\rvert}{2} = dim_f(K_t)$
$K_t \square C_m$	3, če je t $=$ 4 in m sod 4, če je t $=$ 4 in m lih t-1, t≥5 2, če je t =2, m lih, $m \geq 3$	$\frac{\lvert V(K_t)\rvert}{2}$ $\frac{\lvert V(K_t)\rvert}{2}$ $\frac{\lvert V(K_t)\rvert}{2}$ $\frac{2m}{m+1}$

Metrična in delna metrična dimenzija mreže

Po definiciji je dvodimenzionalna mreža graf $G_{m,n}$ velikosti $m \times n$, ki je kartezični produkt poti $P_m \square P_n$. Tako je d-dimenzionalna mreža graf $G_{m_1,m_2,\ldots,m_d} = P_{m_1} \square P_{m_2} \square \ldots P_{m_d}$. Posebaj sva izračunali metrično in delno metrično dimenzijo za $G_{m,n} = P_m \square P_n$, kjer sva ugotovili, da sta obe enaki 2. Za dimenzije večje od 2 pa velja naslednja formula :

$$\beta(P_{m_1} \square P_{m_2} \square \ldots \square P_{m_d)} \leq d, \text{ za } d \geq 2$$

Zgornjo formulo sva potrdili z računanjem posebnega primera mreže hiperkocke. Hipekocka je sestavljena iz kartezičnega produkta poti P_2. Pogledali sva hiperkocke do dimenzije 5, saj je bilo za večje dimenzije računsko prezahtevno. Hiperkocko dimenzije n označimo $Q_n = \underbrace{P_2 \square P_2 \square \ldots \square P_2 \square}_{n}$. Opazimo da je

$$\beta(Q_n) \leq n$$

Hkrati velja, za $n \geq 2$ je delna metrična dimenzija $dim_f(Q_n) = 2$. V spodnji tabeli so povzete najine ugotovitve in znane metrične ter delne metrične dimenzije za dimenzije večje od 5.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15
$\beta(Q_n)$	2	3	4	4	5	6	6	7	7	≤ 10
$dim_f(Q_n)$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2