UNIVERZITET U ZENICI
POLITEHNIČKI FAKULTET

APLIKACIJA ZA NUMERIČKO RJEŠAVANJE SISTEMA LINEARNIH ALGEBARSKIH JEDNAČINA

-SEMINARSKI RAD-

STUDENTI

Ajdin Bukvić

Lejla Bijedić

PREDMETNI NASTAVNIK

r. prof. dr. Aleksandar Karač

Zenica, 11.02.2024.

SADRŽAJ

1. UVOD

Sistemi linearnih algebarskih jednačina predstavljaju skup linearnih jednačina s više nepoznatnih promjenjivih. Numeričko rješavanje sistema linearnih algebarskih jednačina označava proces pronalaska aproksimativnog rješenja za određeni sistem linearnih jednačina koristeći numeričke metode. Upotreba numeričkih metoda je značajna kod velikih ili kompleksnih sistema. Osnovni pojmovi koji se koriste u radu sa sistemima linearnih algebarskih jednačina uključuju: matricu koeficijenata (A), vektor konstanti (b), vektor nepoznatih (x) i rješenje sistema (x), za neki sistem od n linearnih jednačina i n nepoznatih. Matrica koeficijenata je matrica koja sadrži koeficijente nepoznatih promjenjivih u sistemima jednačina, gdje redovi matrice označavaju jednačine, a kolone nepoznate promjenjive. Nepoznate promjenjive su one čije se vrijednosti žele odrediti, dok su koeficijenti jednačina faktori koji množe nepoznate promjenjive. Vektor konstanti je vektor koji sadrži konstante slobodnih članova, odnosno svaki element ovog vektora odgovara konstanti slobodnog člana za jednu od jednačina. Vektor nepoznatih je vektor koji sadrži nepoznate promjenjive, odnosno one koje se traže. Vektor rješenja sistema predstavlja vrijednosti koje zadovoljavju sve jednačine. U matričnoj formi sistem može biti zapisan kao $Ax = b$. Rješavanje sistema može dovesti do tri slučaja: sistem ima jedinstveno rješenje, sistem nema rješenja i sistem ima beskonačno rješenja.

Razvojem nauke i tehnologije u današnje vrijeme, javljaju se potrebe za primjenom numeričkih metoda u mnogim oblastima. U područjima inženjeringa, ekonomije, finansija, računarstva diskretizacijom različitih problema dobijaju se kompleksni i veliki sistemi, te je stoga neophodno koristiti metode koje će pomoći u rješavanjima ovih problema. Kroz ovaj seminarski rad će biti obrađena primjena nekoliko različitih metoda, koje se međusobno razlikuju po samom načinu izvršavanja algoritma, ali i po vremenskoj složenosti i preciznosti.

2. TEORIJSKI DIO

Kada je u pitanju primjena numeričkih metoda za rješavanje sistema linearnih algebarskih jednačina ove metode se dijele na dvije glavne grupe: direktne i iterativne. Direktne metode dovode do tačnog rješenja sistema nakon konačnog broja aritmetičkih operacija. Iterativne metode određuju rješenje postupkom uzastopnih aproksimacija koje se postepeno poboljšavaju. Direktne metode su efikasnije za manje sisteme ili za sisteme s posebnim karakteristikama, dok su iterativne metode bolje za veće sisteme, pogotovo ukoliko su sistemi „rijetki“. U nastavku će biti objašnjen princip na kojem se zasniva izvršavanje algoritama metoda korištenih u aplikaciji.

- Direktne metode
  - Gaussova metoda

Gaussova metoda spada u direktne metode, koje su bazirane na principu eliminacije. Eliminacijska metoda rješava sistem linearnih jednačina tako što rješava jednu jednačinu za jednu nepoznatu, a zatim se zamjenom dobijenog izraza u preostalih n – 1 jednačina određuje preostalih n – 1 jednačina. Ovaj proces se izvodi n – 1 puta, odnosno dok se ne dođe do jednačine koja uključuje samo zadnju nepoznatu. Vrijednost zadnje nepoznate se računa iz zadnje jednačine u procesu eliminacije. Nakon toga se vrijednosti svih prethodnih nepoznatih računaju uvrštavanjem u prethodnu jednačinu, procesom koji se naziva povratna zamjena. Za potrebe eliminacije mogu se koristiti opcije skaliranja (množenja konstantom) ili zamjene redoslijeda redova. Gaussova metoda je osnova za sve naredne metode, koje su izvedene iz nje.

- Gauss-Jordanova metoda

Gauss-Jordanova metoda je varijacija Gaussove metode, gdje se elementi iznad i ispod glavne dijagonale eliminišu (postaju nula). Matrica koeficijenata se potom transformiše u dijagonalnu matricu, te se redovi obično skaliraju, čime se matrica koeficijenata transformiše u jediničnu matricu (I). Transformisani vektor konstanti tada predstavlja vektor rješenja.

- Matrična metoda

Matrična metoda koristi inverznu matricu koeficijenata za rješavanje sistema linearnih jednačina. Za sistem jednačina predstavljen kao $Ax = b$, množenjem s inverznom matricom rješenje sistema se može predstaviti kao $x = A^{-1}b$. Na taj način s poznatom inverznom matricom, rješenje sistema je proizvod inverzne matrice i vektora konstanti.

- Metoda faktorizacije

Metoda faktorizacije zasniva se na predstavljanju matrice koeficijenata kao proizvoda neke dvije matrice. Matrica se može razložiti na proizvod dvije matrice na beskonačno mnogo načina. Ovim procesom se dobijaju dvije matrice L (donja trougaona matrica) i U (gornja trougaona matrica). Jedna od metoda kod koje su elementi na glavnoj dijagonali L matrice jednaki jedinici naziva je Doolittle metoda. Doolittle metodom, U matrica je definisana kao gornja trougaona matrica određena korakom eliminacije Gaussove metode, dok su elementi L matrice definisani kao eliminacijski množitelji. Kada se odrede L i U matrice vektor rješenja se određuje transformisanjem vektora b ($Lb' = b$), te potom rješavanjem jednačine $Ux = b'$.

- Iterativne metode
    - ❖ Jacobijeva metoda

Jacobijeva iterativna metoda se zasniva na rješavanju svake jednačine sistema za komponentu vektora rješenja koji je povezan s dijagonalnim elementom. Prvo se inicijalizira početni vektor rješenja, a zatim se u svakoj narednoj iteraciji taj vektor mijenja s poboljšanim vektorom rješenja. Iterativni postupak se provodi sve dok se ne zadovolji neki zadani uslov, kao naprimjer preciznost ili maksimalni broj iteracija. Jedna vrijednost iz vektora rješenja zavisi samo od vrijednosti vektora rješenja iz prethodne iteracije, tako da se računanja svih komponenti odvijaju istovremeno i nezavisno jedne od drugih, a također i redoslijed procesiranja jednačina nije bitan.

❖ Gauss-Seidelova metoda

Gauss-Seidelova metoda se za razliku od Jacobijeve metode temelji na korištenju zadnjih izračunatih vrijednosti vektora rješenja za računanje. Algoritam Gauss-Seidelove metode je nastao iz Jacobijevog algoritma. Pošto se vrijednosti iz vektora rješenja koriste odmah nakon što su izračunate, Gauss-Seidelova metoda obično ima bržu konvergenciju od Jacobijeve metode, odnosno potreban je manji broj iteracija. S druge strane u ovoj metodi jednačine se moraju rješavati pravim redoslijedom.

❖ Metode relaksacije (za Jacobijevu i Gauss-Seidelovu metodu)

Metode relaksacije za Jacobijevu i Gauss-Seidelovu metodu predstavljaju određene izmjene u njihovim algoritmima koji dovode do poboljšanja performansi, odnosno brzine konvergencije, određenog brojem iteracija. Proces relaksacije odnosi se na procedure kojima se prvo određuje redoslijed relaksacije na način da se pronađe najveći ostatak među rezultatima. Nakon toga se relaksacijom određene jednačine izračuna nova vrijednost u vektoru rješenja, pri čemu su prvobitne vrijednosti nule. Ovim postupkom se mijenjaju ostali ostatci koje zavise od vrijednosti iz vektora rješenja. Kako se razlike relaksiraju, vrijednosti ostataka se postepeno udaljavaju od nule. Proces se ponavlja dok sve vrijednosti ostataka ne ispune uslov konvergencije. Promjena u algoritmima uključuje dodavanje relaksacijskog faktora (**ω**), koji množi ostatke. Kada je vrijednost faktora relaksacije jednaka 1, radi se o običnoj Jacobijevoj ili Gauss-Seidelovoj metodi, a najviše se koriste vrijednosti veće od 0 i manje od 2. Za određivanje najoptimalnije vrijednosti faktora relaksacije ne postoji direktna metoda, već se zasniva na eksperimentalnom pristupu.

3. APLIKACIJA

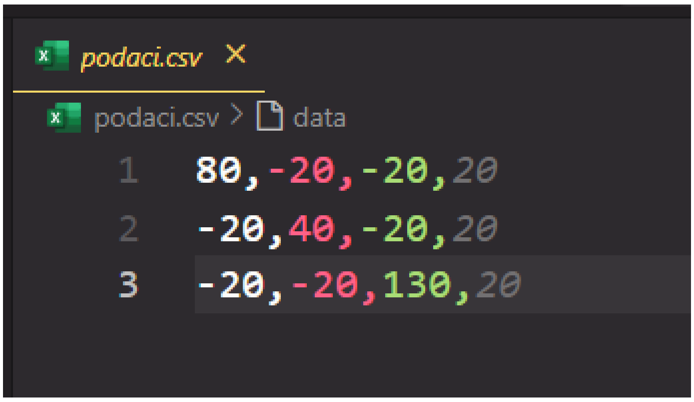
Što se tiče same implementacije prethodno navedenih metoda, korištene su sljedeće tehnologije: HTML, CSS i JavaScript. Razlog za odabir ovih tehnologija je jednostavnost implementacije i kreiranja korisničkog interfejsa. Obzirom da su današnje aplikacije većinom web bazirane, ove tehnologije su idealan izbor upravo iz tog razloga. Ono što ih karakteriše je nezavisnost platforme i operativnog sistema, te mogućnost pristupa iz različitih web preglednika i uređaja. Struktura same stranice je izgrađena unutar HTML (HyperText Markup Language), dok je za stilizaciju korišten CSS (Cascading Style Sheets). Za sam dizajn korišten je još i Bootstrap. Bootstrap je besplatni CSS okvir otvorenog koda, koji olakšava izgradnju responzivnih stranica, a također dolazi i s dosta ugrađenih komponenti i stilova. Glavni dio koda napisan u programskog jeziku JavaScript obuhvata implementacije algoritama za odabrane numeričke metode, komunikaciju korisnika s korisničkim interfejsom i upravljanje cjelokupnim programom. U nastavku će biti prikazan izgled korisničkog interfejsa aplikacije i objašnjene glavne funkcionalnosti, kao i način korištenja aplikacije.

Aplikacija je jednostavna za korištenje i sastoji se od odabira i unosa nekoliko ključnih parametara. Prvi padajući meni odnosi se na odabir načina unosa podataka i sadrži ukupno 4 opcije:

- Ručni unos podataka – Unos putem tastature, pogodan za unos malog broja sistema, na način da se koeficijenti i konstante unose jedan po jedan, kao što je prikazano na slici 1. Preduslov za unos ovih podataka je unos broja jednačina, nakon kojeg se automatski generiše sistem od NxN jednačina, čiji je prikaz formatiran i lahko uočljiv.

Slika 1 – Interfejs za ručni unos podataka

- Unos „lijepljenjem“ kopiranih podataka – Na ovaj način se unaprijed pripremljena matrica koeficijenata i vektor konstanti smještaju u predviđena tekstualna polja za unos. Podaci u polju za unos matrice moraju biti odvojeni zarezom, te koeficijenti svake jednačine moraju biti napisani u novom redu, dok je za vektor konstanti dovoljno da podaci budu odvojeni zarezom. Naravno, na ovaj način je moguće unijeti podatke i direktno putem tastature
- Učitavanje podataka iz datoteke – Ukoliko se posjeduje pripremljena datoteka u CSV formatu, moguće je takvu datoteku učitati unutar aplikacije i koristiti te podatke. Podaci unutar datoteke moraju biti odvojeni zarezom, te svaka jednačina mora biti napisana u novom redu (slika 2), kao što je već i opisano. Jedina razlika je ta što zadnja kolona u svakom redu predstavlja jedan podatak iz vektora konstanti. Dakle, ukoliko se radi o zapisu 3x4, zapravo se radi o sistemu 3x3, jer su zadnji članovi konstante.

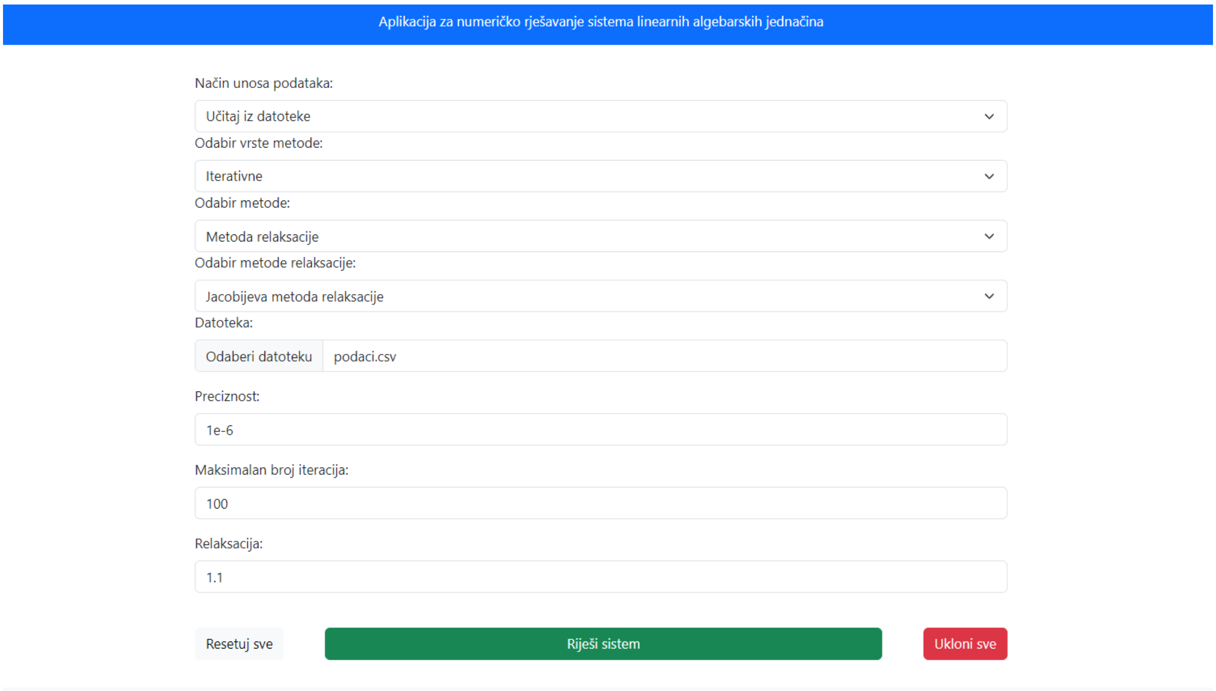


Slika 2 – Primjer sadržaja CSV datoteke

- Korištenje testnih podataka – Predstavlja učitavanje unaprijed definisanih matrica koeficijenata i vektora konstanti (kod kojih sistem ima rješenje) iz izvornog koda. Ovaj pristup se može koristiti za testiranje same aplikacije ili poređenje rezultata odabirom različitih metoda.

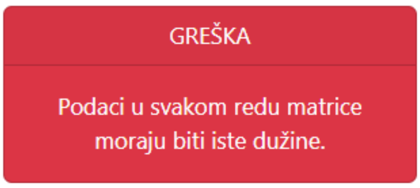
Drugi padajući meni se odnosi na odabir vrste metoda: direktne ili iterativne, a odabirom jedne od ovih grupa se automatski ažurira prikaz padajućeg menija ispod (slika 1). U tom padajućem meniju se bira metoda koja se želi koristiti. Dodatno, odabirom iterativnih vrsta metoda, automatski se prikazuju polja za unos preciznosti i maksimalnog broja iteracija. Također, odabirom metoda relaksacije, prikazuje se još jedan padajući meni za odabir metode relaksacije, kao i još jedno dodatno bolje za unos faktora relaksacije (slika 3).

Klikom na dugme „Riješi sistem“ se poziva odabrana metoda, te se rezultati ispisuju ispod dugmeta (što će biti prikazano u narednom poglavlju). Pored ovog velikog dugmeta, koje se nalazi u sredini (slika 2), radi lakšeg uočavanja, nalaze se još dva dugmeta „Resetuj sve“ i „Ukloni sve“. Dugme „Resetuj sve“ će obrisati unesene vrijednosti iz svih prikazanih polja, ukoliko je potrebno unijeti neke potpuno druge podatke, što se uštedjeti vrijeme u odnosu na ručno brisanje svakog polja pojedinačno. Dugme „Ukloni sve“ odnosi se na uklanjanje svih rezultata koji se dobiju rješavanjem sistema nekom od korištenih metoda.



Slika 3 – Interfejs za učitavanje podataka iz datoteke

Jedna od ključnih funkcionalnosti aplikacije je da se nakon rješavanja nekog sistema rezultati ispisuju ispod, a ukoliko je potrebno riješiti neki sistem korištenjem više metoda radi poređenja rezultata, ostavljena je mogućnost kojom se zadnji rezultat prikazuje na vrhu dok svi prethodni rezultati ostaju učitani na stranici i pomjeraju se za jedno mjesto ispod. Pored svega navedenog („vidljivog“) aplikacija sadrži efikasnu validaciju unesenih podataka (ispravan format, granične vrijednosti, obavezan unos i drugi), koji su popraćeni ispisom detaljne poruke o grešci (slika 4)



Slika 4 – Primjer prikaza poruke o grešci

4. PRIMJERI PRIMJENE APLIKACIJE

4.1. Primjer 1

U prethodnom poglavlju je objašnjen način na koji se biraju metode i unose potrebi parametri, kao i sami podaci. Kako je već rečeno, rješavanjem sistema, klikom na previđeno dugme dobija se ispis koji je prikazan na slici 5. Radi lakšeg praćenja unesenih matrice koeficijenata i vektora konstanti, dodan je poseban prikaz ovih podataka u matričnom formatu (Ax = b), kako bi podaci bili vidljivi, posebno što u ovom slučaju podaci dolaze iz datoteke (slika 2). Konkretni primjer je riješen Gauss-Seidelovom metodom, kako je naznačeno u samom naslovu ispisa rezultata. Ispod toga se u posebnom okviru nalaze rezultati za sve nepoznate promijenjive, kao i vrijeme koje je bilo potrebno za izvršavanje algoritma na unesenim podacima, izraženo u sekundama. Također, pored samog naslova se nalazi i dugme „Ukloni“, koje ima sličnu funkcionalnost kao prethodno objašnjeno dugme „Ukloni sve“, s razlikom da se ovoga puta ne uklanjaju svi rezultati, već samo jedan, onaj pored kojeg se nalazi dugme. Ispod matričnog prikaza i okvira s rješenjima nalaze se još dva dugmeta „Spremi PDF“ i „Spremi CSV“. Klikom na prvo dugme se trenutni prikaz rješenja sprema u PDF, te se automatski sprema na disk, dok se klikom na dugme CSV tabela ispod konvertuje u CSV format, te se zajedno s unesenom matricom, vektorom idobijenim rezultatima sprema na disk. Naravno korisnik može odabrati lokaciju na koju će spremiti datoteke i naziv datoteke. Spomenuta tabela sadrži listu rješenja koja su dobijena nakon svake iteracije, sve do najbližeg rješenja (zadnja iteracija).

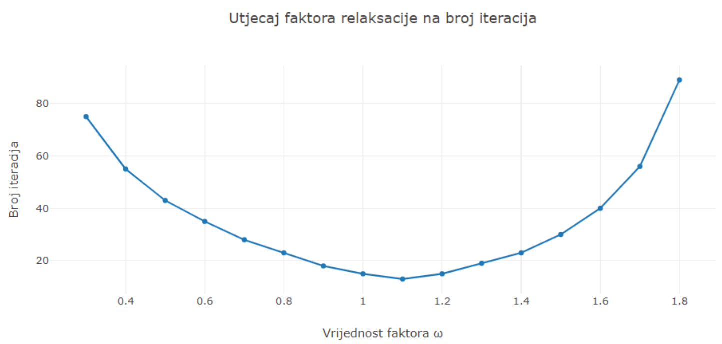
Iteracija	x1	x2	x3
1	0	0	0
2	0.25	0.625	0.28846153846153844
3	0.4783653846153846	0.8834134615384615	0.363350591715976 3
4	0.5616910133136095	0.9625208025147929	0.3883402793582157 5
5	0.5877152704682522	0.988027774913234	0.39626816082792093
6	0.5960739839352887	0.9961710723816047	0.3988069317410605
7	0.5987445010306663	0.9987757163858635	0.3996184949871584
8	0.5995985528432555	0.9996085239152069	0.39987801180899424
9	0.5998716339310504	0.9998748228700223	0.3999609933540112
10	0.5999589540560084	0.9999599737050098	0.3999875273478489
11	0.5999868752632146	0.9999872013055316	0.39999601177980715
12	0.5999958032713347	0.999995907525571	0.3999987247379855
13	0.5999986580658891	0.9999986914019374	0.3999995922258195

Slika 5 – Prikaz rezultata primjenom Gauss-Seidelove metode

4.2. Primjer 2

Drugi primjer korištenja aplikacije odnosi se na rješavanje sistema Gauss-Seidelovom metodom relaksacije. Ovoga puta korišteni su testni podaci iz same aplikacije. Također, kako je prikazano na slici 6, za metode relaksacije dodan je poseban grafik koji ukazuje na pregled utjecaja faktora relaksacije na broj iteracije, odnosno koja je optimalna vrijednost ovog parametra za zadani sistem. Ono što se još može uočiti iz ove slike jest da se grafik nalazi ispod tabele s rješenjima (gdje se vide samo 4 zadnje iteracije, koje su uzete zbog veličine slike, tako da se ne vide prethodne iteracije, kao i matrični prikaz i rješenja). Ono što je još značajno jeste da se ispod grafika vidi i Jacobijeva metoda relaksacije, s istim korištenim testnim podacima i dobijenim rješenjima. Rezultati ovih metoda su razdvojeni horizontalnom linijom, a radi se o prethodno opisanoj funkcionalnosti, gdje se svi rezultati spremaju na stranici radi naknadnog pregleda i poređenja. Isto tako moguće je ukloniti rezultate svake metode pojedinačno klikom na dugme „Ukloni" (ili sve rezultate odjednom klikom na dugme „Ukloni sve", koje se nalazi na vrhu stranice). Ako se detaljnije pogledaju rezultati iz zadnje iteracije (13.) prikazane u tabeli Gauss-Seidelove metode relaksacije, te prikazanih rezultata u okviru Jacobijeve metode relaksacije, može se zaključiti da su rezultati skoro identični, uz određana odstupanja u decimalama.

10	24.999988502777875	35.714224283109864	42.857119793193895	35.714295910801255	25.00001857039292
11	24.999981452107075	35.71427530728872	42.857145105655356	35.71429552050371	25.000003701594828
12	24.99999629615517	35.71428533683044	42.85714522520136	35.7142874213759	25.0000020309052
13	24.999999797134482	35.71428629160942	42.857143248550834	35.7142857628518	24.999999834282605



Jacobijeva metoda relaksacije

Ukloni

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{vmatrix}$$

RJEŠENJA

x1 = 25
x2 = 35.714285906751556
x3 = 42.857142584918094
x4 = 35.714285906751556
x5 = 25

Vrijeme izvršavanja: 0.0001s.

Slika 6 – Prikaz rezultata primjenom Gauss-Seidelove metode relaksacije

5. REZIME

U ovom seminarskom radu cilj je bio ukratko se upoznati s osnovnim pojmovima i konceptima koji se odnose na tematiku numeričkog rješavanja sistema linearnih algebarskih jednačina. Osnovni pojmovi koji se koriste u ovoj oblasti su matrica koeficijenata, vektor konstanti i vektor rješenja sistema. Korištenje numeričkih metoda za rješavanje sistema linearnih algebarskih jednačina je značajno u mnogim granama nauke i tehnologije, a pojavom sve kompleksnijih problema, upotreba softverskih alata i aplikacija je postala neophodna. Podjelom ovih metoda na direktne i iterativne, te kratkim osvrtom na načine na kojima se zasnivaju i izvršavaju neke od odabranih metoda predstavljen je teorijski dio, koji je poslužio kao podloga za praktičnu implementaciju aplikacije. Implementacija aplikacije za numeričko rješavanje sistema linearnih algebarskih jednačina odrađena je korištenjem HTML, CSS i JavaScript programskog jezika. Aplikacija se sastoji od funkcionalnosti kao što su mogućnost odabira načina unosa, odabira metode, te unosa određenih potrebnih parametara. Pored toga, neke od dodatnih funkcionalnosti uključuju mogućnost prikaza više rezultata odjednom, uklanjanje prikazanih rezultata, validaciju korisnikovog unosa, kao i ispis prateće poruke o grešci. Ispis rezultata dat je grafičkim prikazom unesenih vrijednosti, dobijenih rezultata, a u iterativnim metodama i tabelarnim prikazom rješenja kroz iteracije, te u metodama relaksacije grafikom koji prikazuje optimalnu vrijednost faktora relaksacije. Također, korisniku je ostavljena i mogućnost spremanja i preuzimanja unesenih vrijednosti i dobijenih rezultata u vidu formatirane PDF ili CSV datoteke.

6. LITERATURA

[1] SUNY Geneseo, Department of Mathematics, https://www.geneseo.edu/~aguilar/public/assets/courses/233/main_notes.pdf, pregledano 10.02.2024.

[2] Hoffman, J. D. *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. Marcel Dekker, Inc., 2001.