Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Ispitni rok iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 7. srpnja 2014.

Obavezno pročitati prije početka rješavanja ispitnih zadataka!

Ispit traje 150 minuta. Student na ispitu smije koristiti sljedeće:

1) prazne listove papira formata A4 za rješavanje zadataka,
2) pribor za pisanje (olovka, gumica),
3) kalkulator (nije dozvoljeno korištenje mobilnih telefona, tableta, laptopa i sličnih uređaja),
4) jedan arak papira formata A4 s matematičkim izrazima, može biti kreiran ručno ili na računalu.

Ako student bude primijećen kako koristi nedozvoljena sredstva na ispitu, bit će isključen iz procesa bodovanja i ocjenjivanja ispita. Za vrijeme trajanja ispita nije dozvoljeno uzajamno posuđivanje listova papira, pribora za pisanje, kalkulatora ili papira s matematičkim izrazima.

Radi lakšeg i točnijeg ispravljanja ispita student treba obratiti pozornost na sljedeće:

a) prilikom bodovanja ispita u razmatranje ćemo uzeti isključivo zadatke koji imaju točan postupak rješavanja i konačno rješenje,
b) na kraju svakog zadatka potrebno je istaknuti konačno rješenje (osim brojčanog iznosa točno rješenje mora imati i odgovarajuću mjernu jedinicu tamo gdje to ima smisla),
c) svaki zadatak je potrebno rješavati na zasebnom listu papira,
d) zadatke je potrebno rješavati pregledno i čitko jer o tome ovisi i preciznost ispravljanja (neuredne i nepregledne postupke rješavanja izuzet ćemo iz postupka bodovanja),
e) prilikom predaje ispita posložite zadatke po broju od najmanjeg prema najvećem i **obavezno** predajte i papiri sa zadacima koji će Vam biti dodijeljeni na početku ispita.

Niže stavljenim potpisom potvrđujem da sam pročitao/pročitala gore navedena pravila te da sam svjestan/svjesna da će ona biti primijenjena prilikom izvedbe i bodovanja ispita

Potpis studenta

Pravilo za bodovanje zadataka

Svaki točno riješen zadatak boduje se sa šest (**6**) bodova, zadatak koji nije rješavan s nula (**0**) bodova, a svaki netočno riješen zadatak boduje se s tri negativna boda (**-3**). Na ispitu je potrebno ostvariti barem **30** bodova (od mogućih **60**).

ZADACI

1. zadatak. Neka su X i Y diskretne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti iz diskretnih skupova $\mathcal{X}$, odnosno $\mathcal{Y}$. Neka je $H(X)$ = 11 bit/simbol i neka je $H(Y|X) = H(X|Y)$. Odredite najmanji mogući broj elemenata skupa $\mathcal{Y}$.

a) 110 simbola

b) 1024 simbola

c) 1100 simbola

d) 2048 simbola

Postupak rješavanja:

$$I(X;Y) = H(X) - H(X \mid Y) = H(Y) - H(Y \mid X)$$

Nadalje, dobivamo

$$H(Y) = H(X) - H(X \mid Y) + H(Y \mid X)$$

odnosno uz $H(Y \mid X) = H(X \mid Y)$

$$H(Y) = H(X) = 11 \text{ bit/simbol}$$

Najmanji broj elemenata skupa $\mathcal{Y}$ dobije se iz uvjeta da je maksimalna entropija na diskretnom skupu ostvariva uz jednoliku razdiobu vjerojatnosti pojavljivanja simbola, tj.:

$$H(Y) \leq \log_2 |\mathcal{Y}|$$

odnosno

$$|\boldsymbol{\mathcal{Y}}| \geq \mathbf{2^{11} = 2048}.$$

2. zadatak. U nekom komunikacijskom sustavu abeceda izvora sadrži 5 simbola, x_1, x_2, x_3, x_4 i x_5, a abeceda odredišta 4 simbola, y_1, y_2, y_3 i y_4. Matrica združenih vjerojatnosti simbola izvora i odredišta zadana je na sljedeći način:

$$\left[P(X,Y)\right] = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,05 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,05 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,05 & 0 \end{bmatrix}$$

Odredite ekvivokaciju u kanalu koji povezuje gore opisani izvor i odredište.

a) 2,665 bit/simbol

b) 0,6 bit/simbol

c) 0,81 bit/simbol

d) 1,666 bit/simbol

Postupak rješavanja:

Temeljem zadane matrice združenih vjerojatnosti simbola zbrajanjem vjerojatnosti po recima, odnosno po stupcima možemo dobiti vjerojatnosti $p(x_i)$, odnosno $p(y_j)$:

$p(x_1) = 0,25$

$p(x_2) = 0,1 + 0,3 = 0,4$

$p(x_3) = 0,05 + 0,1 = 0,15$

$p(x_4) = 0,05 + 0,1 = 0,15$

$p(x_5) = 0,05$

Provjera: $\sum_{i=1}^{5} p(x_i) = 0,25 + 0,4 + 0,15 + 0,15 + 0,05$

$p(y_1) = 0,25 + 0,1 = 0,35$

$p(y_2) = 0,3 + 0,05 = 0,35$

$p(y_3) = 0,1 + 0,05 + 0,05 = 0,2$

$p(y_4) = 0,1$

Provjera: $\sum_{j=1}^{4} p\left(y_j\right) = 0,35 + 0,35 + 0,2 + 0,1$

Ekvivokaciju $H(X|Y)$ računamo prema sljedećem izrazu:

$$H\left(X|Y\right) = -\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{4} p\left(x_i, y_j\right)\cdot \log_2\left[\frac{p\left(x_i, y_j\right)}{p\left(y_j\right)}\right]\left[\text{bit/simbol}\right]$$

Uvrštavanjem gore zadanih te izračunatih vrijednosti dobivamo $H(X|Y)$ = 0,809 bit/simbol, odnosno zaokruženo na dvije decimale 0,81 bit/simbol.

3. zadatak. Dan je izvor informacije koji generira 4 simbola, m_1, m_2, m_3 i m_4. Vjerojatnosti pojavljivanja simbola određene su izrazima: $p(m_1) = 2p(m_2) = 4p(m_3)$ i $p(m_3) = p(m_4)$. Koder informacije kodira svaki simbol m_i, $i = 1, ..., 4$, s dva binarna simbola po simbolu prema sljedećem pravilu: $m_1 \rightarrow 00$, $m_2 \rightarrow 01$, $m_3 \rightarrow 10$ i $m_4 \rightarrow 11$. Odredite vjerojatnost pojavljivanja binarnog simbola 0 na izlazu izvora informacije.

a) 11/16

b) 4/7

c) 1/4

d) 5/16

Postupak rješavanja:

Temeljem zadanih jednadžbi $p(m_1) = 2p(m_2) = 4p(m_3)$ i $p(m_3) = p(m_4)$ jednostavno proračunavamo vjerojatnosti $p(m_i)$:

$p(m_1) = 1/2$ $p(m_2) = 1/4$ $p(m_3) = p(m_4) = 1/8$

Vjerojatnost pojavljivanja binarnog simbola 0 na izlazu izvora informacije određujemo na sljedeći način:

$p(0) = p(m_1)\cdot 1 + p(m_2)\cdot 0,5 + p(m_3)\cdot 0,5 + p(m_4)\cdot 0 = 11/16$

4. zadatak. Na ulaz kodera informacije dolazi poruka sastavljena od deset simbola *a* i oznake kraja poruke (simbol *), *aaaaaaaaaa**. Koliko mora iznositi duljina prozora za kodiranje pa da izlaz iz kodera informacije koji koristi kôd LZ77 bude određen sljedećim trojkama: (0,0,*a*), (1,8,*a*), (0,0,*)? **Napomena**: u ovom zadatku duljina pomičnog prozora nije bitna, radi korektnosti rješenja pretpostavimo da je veća od 10 simbola.

a) 8 simbola

b) 9 simbola

c) 10 simbola

d) 7 simbola

Postupak rješavanja:

U prvom koraku koder je pozicioniran na prvom slovu *a*, posmični prozor zahvaća nula simbola i stoga je izlaz iz kodera trojka (0,0,*a*). U sljedećem koraku posmični prozor obuhvaća slovo a, a prozor za kodiranje mora zahvatiti svih preostalih 9 slova a kako bi izlaz iz kodera na kraju bio (0,0,*). Ako je duljina posmičnog prozora 9 simbola, onda će doista druga trojka po redu na izlazu kodera biti (1,8,*a*) jer u posmičnom je prozoru pronađeno jedno slovo *a*, u prozoru za kodiranje ima osam slova *a* zaredom, dok je posljednje slovo *a* u prozoru za kodiranje ujedno i treći član trojke (1,8,*a*) (sukladno knjizi "Uvod u teoriju kodiranje i informacije", str. 269., treći član trojke na izlazu kodera uvijek mora biti simbol koji u prozoru za kodiranje dolazi neposredno nakon pronađenog niza).

5. zadatak. Koder informacije koji koristi aritmetičko kodiranje na svom ulazu prima poruke sastavljene od dva simbola, *X* i *Y*. Osnovni intervali za simbole *X* i *Y* su [0, 1/3), odnosno [1/3, 1). Kôd kojeg kreira koder informacije je prefiksni i sadrži binarne simbole 0 i 1. Ako se na ulazu kodera informacije pojavi poruka sastavljena od deset simbola, odredite koja je najmanja moguća duljina kodne riječi kreirane algoritmom aritmetičkog koda, a da pri tome bude zadržano svojstvo prefiksnosti koda, tj. da kodna riječ odabrana **za bilo koji** podinterval nije prefiks neke druge kodne riječi odabrane za neki drugi podinterval.

a) 7 bita

b) 9 bita

c) 10 bita

d) 12 bita

Postupak rješavanja:

U knjizi "Uvod u teoriju informacije i kodiranje" na stranicama 264 i 265 stoji sljedeće: "Prilikom kodiranja, bilo koja vrijednost iz odabranog podintervala u potpunosti definira podinterval, a time i kodiranu poruku. Postavlja se pitanje koju vrijednost iz dobivenog podintervala odabrati kao karakterističnu vrijednost, tj. kodnu riječ. Može se pokazati [49] da je poruku *x* moguće jednoznačno kodirati tako da se uzme neka vrijednost iz podintervala dobivenog za poruku *x* opisanim postupkom, da se ta vrijednost zapiše u binarnom obliku, te da se iz takvog zapisa uzme prvih $l(x)$ binarnih znamenki, gdje je $l(x)$:

$$l(x) = \left\lceil \log \frac{1}{P(x)} \right\rceil + 1 \text{ [bit]},$$

gdje je $P(x)$ duljina promatranog podintervala. Može se pokazati i da se na ovakav način dobiva prefiksni kôd, tj. da kôd za bilo koji podinterval nije prefiks koda za neki drugi podinterval."

Temeljem navedenog, zadatak je trebalo riješiti na sljedeći način. Ako na ulaz kodera informacije dođe deset simbola, tada su moguće sve kombinacije simbola $x = x_1...x_{10}$, pri čemu je $x_i \in \{X, Y\}$, $i = 1,...,10$, a prilikom kodiranja duljina podintervala **za bilo koji** slijed od deset simbola određena je izrazom

$$P_j(x) = \prod_{i=1}^{10} p(x_i),\ p(x_i) = \begin{cases} 1/3 & za\ x_i = X \\ 2/3 & za\ x_i = Y \end{cases},\ j = 1,...,2^{10}$$

Dakle, da bi kod bio prefiksni, **za bilo koji** podinterval potrebno je odabrati $l_j(x)$ binarnih znamenki, pri čemu vrijedi:

$$l_j(x) = \left\lceil \log\left[\frac{1}{P_j(x)}\right] \right\rceil + 1[bit],\ j = 1,...,2^{10}$$

U konačnici trebalo je odrediti minimalnu vrijednost od $l_j(x)$, a da pri tome ostane sačuvano svojstvo prefiksnosti koda. S obzirom da vrijedi da je $(2/3)^{10} \geq P_j(x) \geq (1/3)^{10}$, tada je evidentno da će $l_j(x)$ imati minimalnu vrijednost kad je $P_j(x)$ maksimalan, tj. kad iznosi $(2/3)^{10}$. Shodno tome, konačno rješenje iznosi 7 bita.

6.zadatak. Zadan je binarni blok kôd *K*. Na ulazu kodera kanala danog koda pojavljuju se tri poruke: $\mathbf{d}_1$ = [101], $\mathbf{d}_2$ = [011] i $\mathbf{d}_3$ = [111]. Na izlazu kodera kanala, za dane tri poruke $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ i $\mathbf{d}_3$ pojavljuju se sljedeće tri kodne riječi: $\mathbf{c}_1$ = [100101], $\mathbf{c}_2$ = [001011], odnosno $\mathbf{c}_3$ = [010110]. Odredite 5. i 6. bit u kodnoj riječi koja odgovara poruci $\mathbf{d}_4$ = [110].

a) 00

b) 01

c) 10

d) 11

Postupak rješavanja:

Temeljem zadanih poruka i kodnih riječi očito je da se radi o kodu [*n*, *k*] = [6, 3]. Također, temeljem zadanih kodnih riječi $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ i $\mathbf{c}_3$ vidljivo je da generirajuća matrica danog koda *K* nije u standardnom obliku. Dakle, neka je

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{bmatrix}, a_i, b_i, c_i \in \{0,1\} \; za \; i = 1,...,6$$

Nadalje, za zadane poruke i kodne riječi vrijede sljedeće jednakosti:

$$\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{G} = \mathbf{c}_1 \rightarrow [101] \cdot \mathbf{G} = [100101] \qquad (1)$$

$$\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{G} = \mathbf{c}_2 \rightarrow [011] \cdot \mathbf{G} = [001011] \qquad (2)$$

$$\mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{G} = \mathbf{c}_3 \rightarrow [111] \cdot \mathbf{G} = [010110] \qquad (3)$$

Temeljem navedenih jednakosti određujemo bitove matrice **G**. Na primjer,

Temeljem jednakosti (1) za prvi bit kodne riječi $\mathbf{c}_1$ vrijedi sljedeće: $a_1 \oplus c_1 = 1$

Temeljem jednakosti (2) za prvi bit kodne riječi $\mathbf{c}_2$ vrijedi sljedeće: $b_1 \oplus c_1 = 0$

Temeljem jednakosti (3) za prvi bit kodne riječi $\mathbf{c}_3$ vrijedi sljedeće: $a_1 \oplus b_1 \oplus c_1 = 0$

Iz toga slijedi: $a_1 = 0$, $b_1 = 1$ i $c_1 = 1$. Po istoj analogiji određujemo sve ostale bitove matrice **G** i dobivamo:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dakle, $\mathbf{c}_4 = \mathbf{d}_4 \cdot \mathbf{G}$ = [101110], odnosno bitovi koji odgovaraju 5. i 6. poziciji u kodnoj riječi $\mathbf{c}_4$ su 1 i 0.

7. zadatak. U nekom komunikacijskom sustavu koder kanala koristi ciklični kod [7,4,3] s generirajućim polinomom $g(x) = 1 + x + x^3$. Koder kanala koristi generirajuću matricu u obliku:

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0&0\\0&1&0&1&1&0&0\\0&0&1&0&1&1&0\\0&0&0&1&0&1&1\end{bmatrix}$$

Ako je dekoder kanala primio kodnu riječ [1010011], odredite koja je poruka poslana. Pretpostavka je da je prilikom prijenosa eventualno nastupila jednostruka pogreška bita na kodnoj riječi ili pogreške nije bilo.

a) [1010]

b) [1001]

c) [1111]

d) [0011]

Postupak rješavanja:

Primljenu kodnu riječ c = [1010011] treba u polinomnom obliku podijeliti s generirajućim polinomom: $x^6 + x^4 + x + 1 : x^3 + x + 1 = x^3 + 1 = d(x)$, što znači da j poslana poruka [1001]. Da to doista vrijedi, moguće je provjeriti množenjem vektora poruke **d** sa zadanom generirajućom matricom **G**: [1001]·**G** = [1010011], što odgovara zadanoj kodnoj riječi koju je primio dekoder kanala.

8. zadatak. Signal $x(\mathrm{t}) = 2e^{-t/5} \cdot \mathrm{u(t)}$ [V] dovodi se na ulaz idealnog niskopropusnog filtra (NPF). Odredite graničnu frekvenciju NPF-a, f_g, tako da je energija signala na njegovom izlazu jednaka polovini energije signala na njegovom ulazu.

Napomena: $\int \frac{1}{a^2+b^2x^2}dx=\frac{1}{ab}\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{b}{a}x\right)+\text{konst.}$ i $u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\1, & t\geq 0\end{cases}$

a) 0,1 Hz

b) 1/π Hz

c) 0,2 Hz

d) 0,1/π Hz

Postupak rješavanja:

$X(f) = \int_0^\infty x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \cdots = \frac{2}{\frac{1}{5}+j2\pi f} \rightarrow |X(f)|^2 = \frac{4}{\left(\frac{1}{5}\right)^2+(2\pi f)^2}$

tj.:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty}|X(f)|^2df = 2\int_0^{+\infty}\frac{4}{\left(\frac{1}{5}\right)^2+(2\pi f)^2}df = 8\frac{1}{\frac{1}{5}\cdot 2\pi}\arctan\left(\frac{2\pi}{\frac{1}{5}}f\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{20}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)$$
$$= 10 \text{ Ws}$$

Nadalje,

$$E_y = \int_{-f_g}^{+f_g}|Y(f)|^2df = \int_{-f_g}^{+f_g}|X(f)|^2df = 2\int_0^{+f_g}\frac{4}{\left(\frac{1}{5}\right)^2+(2\pi f)^2}df = 5$$

$$\frac{20}{\pi}\arctan\left(10\pi f_g\right) = 5$$

$$\arctan\left(10\pi f_g\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$10\pi f_g = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f_g = \frac{1}{10\pi}\ \text{Hz}$$

9. zadatak. Zadana su dva paralelna kanala u kojima djeluje aditivni bijeli Gaussov šum opisan slučajnom varijablom Z_1, odnosno Z_2, obje s očekivanjem nula. Isto tako, vrijedi $E[Z_1^2] = 0{,}5$, odnosno $E[Z_2^2] = 0{,}7$. Na ulazu prvog kanala djeluje signal opisan slučajnom varijablom X_1, dok na ulazu drugog kanala djeluje signal opisan slučajnom varijablom X_2. Neka je $E[X_1] = E[X_2] = 0$ te $E[X_1^2] + E[X_2^2] = 0{,}4$. Odredite maksimalnu ukupnu dinamiku u zadanom sustava od dva paralelna kanala izraženu brojem bita koje je moguće prenijeti po svakom simbolu.

a) 0,357 bit/simbol

b) 1,235 bit/simbol

c) 0,435 bit/simbol

d) 0,542 bit/simbol

Postupak rješavanja:

Dinamika u sustavu paralelnih kanala jednaka je zbroju dinamika pojedinih kanala, tj.:

$$\begin{aligned} D = D_1 + D_2 &= \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_{Z_1}^2}\right) + \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_{Z_2}^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_{Z_1}^2}\right) + \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{0.4 - \sigma_1^2}{\sigma_{Z_2}^2}\right) \end{aligned}$$

Maksimum dinamike nalazimo deriviranjem prethodnog izraza po σ_1^2 i izjednačavanjem istog s nulom. Dakle, iz

$$\frac{dD}{d\sigma_1^2} = 0$$

dobivamo $\sigma_1^2 = 0{,}3 \rightarrow \sigma_2^2 = 0{,}1$.

Konačno,

$$D = D_1 + D_2 = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{0{,}3}{0{,}5}\right) + \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{0{,}1}{0{,}7}\right) = 0{,}435\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

10. zadatak.

Zadan je slučajni signal $X(t) = A + B\cdot t$ gdje su A i B neovisne slučajne varijable s jednolikom razdiobom na intervalu [–1, +1]. Odredite autokorelacijsku funkciju $R_X(t_1, t_2)$ slučajnog signala $X(t)$.

a) 1/2

b) 1/3

c) 1/4

d) 0

Postupak rješavanja:

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[(A + +B \cdot t_1)(A + B \cdot t_2)]$$
$$= E[A^2] + E[AB]t_2 + E[AB]t_1 + E[B^2]t_1 t_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t_1 t_2$$

Slučajne varijable A i B su neovisne te vrijedi $E[AB] = E[A]E[B] = 0$. Nadalje,

$$E[A^2] = E[B^2] = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{1}{2} dx = \cdots = \frac{1}{3}$$