Sveučilište u Zagrebu
**Fakultet elektrotehnike i računarstva**

Ispitni rok iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 7. rujna 2017.

---

**1. zadatak (10 bodova):** Instrumentom očitavamo vrijednosti iz skupa simbola $X$ = {-2,-1, 0, 1, 2}. Sve vrijednosti su jednako vjerojatne. Na pokazniku instrumenta pokvaren je indikator za "minus" koji se ne upali u 30% slučajeva. Ako sustav promatramo kao komunikacijski kanal, izračunajte transinformaciju i ekvivokaciju u ovom sustavu.

*Postupak rješavanja:*

Indikator za „minus“ na pokazniku se ne upali u 30% slučajeva, dakle vjerojatnost da će pokaznik prikazati vrijednost "-2" kao "-2" je 0.7, a kao "2" je 0.3. Analogno zaključujemo i za "-1", dok se ostale vrijednosti prikazuju ispravno te je:

$$\left[p(y_j|x_i)\right]=\begin{bmatrix} 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p(x_i)=0,2, \quad i=1,...,5$$

$$\left[p(x_i,y_j)\right]=\left[p(x_i)p(y_j|x_i)\right]=\begin{bmatrix} 0,14 & 0 & 0 & 0 & 0,06 \\ 0 & 0,14 & 0 & 0,06 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 \end{bmatrix}$$

Iz matrice združenih vjerojatnosti zbrajanjem po stupcima dobivamo vrijednosti pojave pojedine vrijednosti na indikatoru instrumenta:

$$\left[p(y_j)\right]=\begin{bmatrix}0,14 & 0,14 & 0,2 & 0,26 & 0,26\end{bmatrix}$$

Transinformaciju možemo dobiti prema sljedećem izrazu:

$$I\left(X;Y\right)=-\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{5}p\left(x_i,y_j\right)\log\frac{p\left(x_i,y_j\right)}{p\left(x_i\right)p\left(y_j\right)}$$

$$I(X;Y)=...=1,9167 \text{ bit/simbol}$$

Ekvivokaciju dobivamo prema:

$$H\left(X|Y\right)=H\left(X\right)-I\left(X;Y\right)$$

$$H(X) = \log_2 5 = 2,32 \text{ bit/simbol}$$

$$H(X \mid Y) = ... = 0,4053 \text{bit/simbol}$$

**2. zadatak (10 bodova):** Komunikacijskim kanalom prenose se tri poruke 'a', 'b' i 'c' , generirane iz skupa simbola $X$={$a$, $b$, $c$}. Vjerojatnosti pojavljivanja simbola su $p$(a) = $p$(b) = 2 × $p$(c). Matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza u kanalu je:

$$\left[ p\left(y_j \middle| x_i\right) \right] = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}$$

Odredite ekvivokaciju i transinformaciju u kanalu te izračunajte promjenu transinformacije ako se provede zaštita tako da se svaka poruka u prijenosu jednom ponovi.

*Postupak rješavanja:*

Iz uvjeta da vjerojatnosni skup bude potpun, slijedi:

$$p(a) = 0,4$$
$$p(b) = 0,4$$
$$p(c) = 0,2$$

Odnosno

$$\left[ p\left(x_i, y_j\right) \right] = \begin{bmatrix} 0,28 & 0,04 & 0,08 \\ 0,08 & 0,28 & 0,04 \\ 0,02 & 0,04 & 0,14 \end{bmatrix}$$

Zbrajanjem po stupcima matrice združenih vjerojatnosti dobivamo:

$$\left[ p(y_j) \right] = \left[ 0,38 \quad 0,36 \quad 0,26 \right]$$

Entropija na ulazu iznosi:

$$H(X) = 1,5219 \text{ bit/simbol}$$

Ekvivokaciju možemo dobiti prema izrazu:

$$H\left(X \middle| Y\right) = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p(x_i, y_j)\log_2 p\left(x_i \middle| y_j\right) = 1,1124 \text{bit/simbol}$$

gdje je:

$$\left[p\left(x_i \middle| y_j\right)\right]=\begin{bmatrix} 0,7368 & 0,1111 & 0,3077 \\ 0,2105 & 0,7778 & 0,1538 \\ 0,0526 & 0,1111 & 0,5385 \end{bmatrix}$$

Naposlijetku, transinformaciju dobivamo iz:

$$I_1\left(X;Y\right)=H(X)-H(X|Y)=0,4095 \text{ bit/simbol}$$

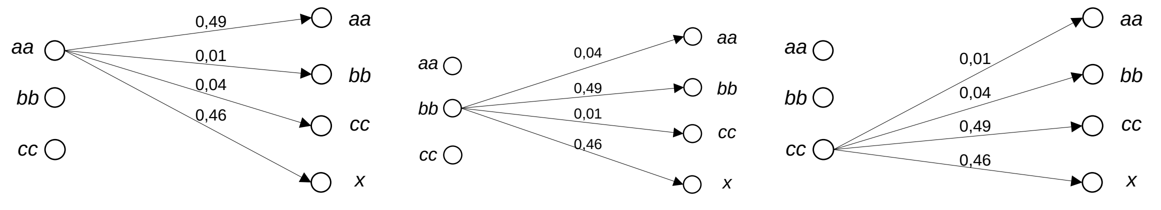
**Napomena**: Transinformacija se mogla dobiti i preko $H(Y)$ i $H(Y|X)$, tj.: $H(Y)$ = 1,566 bit/simbol; $H(Y|\mathrm{X})$ = 1,1565 bit/simbol.

Ako se svaka poruka u prijenosu jednom ponovi, na strani prijamnika se, ovisno o tome da li je došlo do grešaka u prijenosu, može pojaviti devet različitih kombinacija: 'aa', 'ab',…,'cc'. Od njih devet, samo se 'aa', 'bb' i 'cc' mogu dekodirati, a ostalih šest su nedefinirane. Njih ćemo u grafu prijelaza označiti stanjem *x*. Na primjer, vjerojatnost prijama nedefinirane kombinacije prilikom slanja simbola *aa* (tj. poruke 'aa'), zbog pogrešaka u prijenosu, je:

$$\begin{aligned} ab&=0,7\cdot 0,1=0,07 \\ ac&=0,7\cdot 0,2=0,14 \\ ba&=0,1\cdot 0,7=0,07 \\ bc&=0,1\cdot 0,2=0,02 \\ ca&=0,2\cdot 0,7=0,14 \\ cb&=0,2\cdot 0,1=\underline{0,02} \\ &\qquad\qquad\quad 0,46 \end{aligned}$$

Analogno možemo dobiti vjerojatnosti prijama nedefinirane kombinacije i za simbole *b* i *c*. Iste, također, iznose 0,46.

Graf prijelaza (podijeljen na tri grafa radi preglednosti) izgleda ovako:




Proračunajmo sada iznova potrebne vrijednosti za izračun transinformacije:

$$\left[p\left(y_j \middle| x_i\right)\right]=\begin{bmatrix} 0,49 & 0,01 & 0,04 & 0,46 \\ 0,04 & 0,49 & 0,01 & 0,46 \\ 0,01 & 0,04 & 0,49 & 0,46 \end{bmatrix}$$

$$\left[p\left(x_i,y_j\right)\right]=\left[p(x_i)p\left(y_j\middle|x_i\right)\right]=\begin{bmatrix}0{,}196 & 0{,}004 & 0{,}016 & 0{,}184\\ 0{,}016 & 0{,}196 & 0{,}004 & 0{,}184\\ 0{,}002 & 0{,}008 & 0{,}098 & 0{,}092\end{bmatrix}$$

$$\left[p(y_j)\right]=\left[0{,}214 \quad 0{,}208 \quad 0{,}118 \quad 0{,}46\right]$$

$$I_2\left(X;Y\right)=0{,}5545 \text{ bit/simbol}$$

Promjena transinformacije iznosi:

$$\Delta I\left(X;Y\right)=0{,}145 \text{ bit/simbol}$$

**3. zadatak (10 bodova):** Dano je diskretno bezmemorijsko izvorište koje generira simbole $x_i$, $i$ = 1, 2,... Svi simboli su jednako vjerojatni i maksimalna entropija izvorišnog skupa simbola iznosi $H(X)$=3,4594 bit/simbol. Kodirajte ternarnim kodom (Huffman!) dani skup simbola $X$ te odredite efikasnost danog koda.

*Postupak rješavanja:*

Potrebno je odrediti broj izvorišnih simbola $n$. Kako su svi simboli jednako vjerojatni možemo zapisati:

$$p(x_1)=p(x_2)=...=p(x_n)=\frac{1}{n}$$

Iz prethodne jednakosti i poznate entropije na ulazu računamo broj simbola:

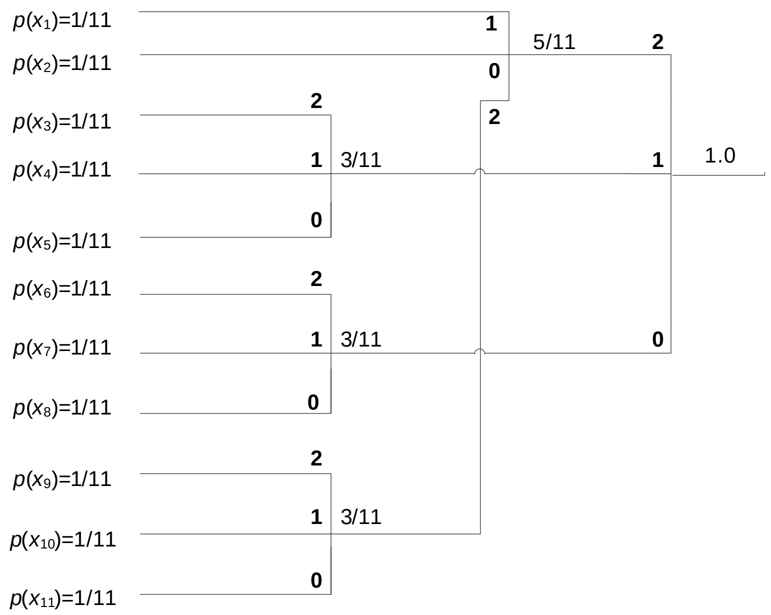
$$H(X) = 3{,}4594 \text{ bit/simbol}$$

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\log_2 p(x_i) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\log_2\frac{1}{n} = -n\cdot\frac{1}{n}\log_2\frac{1}{n} = \log_2 n$$

$$n = 2^{H(X)} = 2^{3{,}4594} = 11$$

Iz toga jasno slijedi :

$$p(x_1) = p(x_2) = \cdots = p(x_{11}) = \frac{1}{11}$$




U tablici su prikazani simboli sa pripadajućim kodnim riječima i njihovim duljinama.

| simbol ($x_i$) | vjerojatnost pojavljivanja $p(x_i)$ | kodna riječ $C(x_i)$ | duljina kodne riječi $l(x_i)$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1/11 | 21 | 2 |
| $x_2$ | 1/11 | 20 | 2 |
| $x_3$ | 1/11 | 12 | 2 |
| $x_4$ | 1/11 | 11 | 2 |
| $x_5$ | 1/11 | 10 | 2 |
| $x_6$ | 1/11 | 02 | 2 |
| $x_7$ | 1/11 | 01 | 2 |
| $x_8$ | 1/11 | 00 | 2 |
| $x_9$ | 1/11 | 222 | 3 |
| $x_{10}$ | 1/11 | 221 | 3 |
| $x_{11}$ | 1/11 | 220 | 3 |

*ii*) Efikasnost koda računa se prema izrazu:

$$\varepsilon_{(3)} = \frac{H_{(3)}(X)}{L_{(3)}(X)}$$

Proračunajmo potrebne veličine:

$$H_{(3)}(X) = -\sum_{i=1}^{11} p(x_i)\log_3 p(x_i) = -\log_3 \frac{1}{11} = 2{,}183\ \frac{\text{tern. simbola}}{\text{simbol}}$$

$$L_{(3)}(X) = \sum_{i=1}^{11} p(x_i)l_i = 2,273 \ \frac{\text{tern. simbola}}{\text{simbol}}$$

Naposlijetku:

$$\varepsilon_{(3)} = \frac{H_{(3)}(X)}{L_{(3)}(X)} = \frac{2,183}{2,273} = 0,9604$$

**4. zadatak (10 bodova):** Dan je skup simbola $X = \{1, 2, 3\}$ s vjerojatnostima pojavljivanja $p_1 = 0.8$, $p_2 = 0.02$ i $p_3 = 0.18$. Dekodirajte primljenu kodiranu poruku 0,772352 duljine 4 simbola koja je kodirana aritmetičkim kodom.

*Postupak rješavanjae:*

Odredimo ponovno tablicu kumulativnih podskupova:

| Simbol | Vjerojatnosti pojavljivanja | Komulativni podskupovi, $[D_s, G_s)$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.8 | [0, 0.8) |
| 2 | 0.02 | [0.8, 0.82) |
| 3 | 0.18 | [0.82, 1) |

Dekodiranje poruke kodirane aritmetičkim kodom se provodi tako da se računaju pripadni podintervali za svaki simbol i provjerava kojem podintervalu kodirana poruka pripada.

Postupak se ponavlja onoliko puta koliko je poruka duga.

$L_a$ = 0.772352 => očito je da kodirana poruka pripada podintervalu [0, 0.8), te je prvi simbol poruke `1`.

$$D = 0; \quad G = 0.8$$

1: $D' = D + (G - D)\cdot D_s = 0 + (0.8-0)\cdot 0 = 0$
$G' = D + (G - D)\cdot G_s = 0 + (0.8-0)\cdot 0.8 = 0.64$

2: $D' = 0 + (0.8 - 0)\cdot 0.8 = 0.64$
$G' = 0 + (0.8 - 0)\cdot 0.82 = 0.6560$

3: $D' = 0 + (0.8 - 0)\cdot 0.82 = 0.6560$
$G' = 0 + (0.8 - 0)\cdot 1 = 0.8$

Vidimo da kodirana poruka pripada podintervalu trećeg simbola te je drugi simbol poruke `3`.

$$D = 0.6560; \quad G = 0.8$$

$$
\begin{aligned}
&1: && D' = 0.6560 + (0.8 - 0.6560)\cdot 0 = 0.6560 \\
& && G' = 0.6560 + (0.8 - 0.6560)\cdot 0.8 = 0.7712 \\
&2: && D' = 0.6560 + (0.8 - 0.6560)\cdot 0.8 = 0.7712 \\
& && G' = 0.6560 + (0.8 - 0.6560)\cdot 0.82 = 0.7741
\end{aligned}
$$

Treći simbol poruke je simbol \`2\`.

$$D = 0.7712; \quad G = 0.7741$$

$$
\begin{aligned}
&1: && D' = 0.7712 + (0.7741 - 0.7712)\cdot 0 = 0.7712 \\
& && G' = 0.7712 + (0.7741 - 0.7712)\cdot 0.8 = 0.7735
\end{aligned}
$$

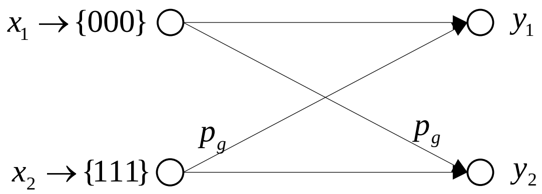
Četvrti simbol poruke je \`1\`, tj. poruka je

1321

**5. zadatak (10 bodova):** Dvije kodne riječi "000" i "111" koriste se za prijenos informacija preko diskretnog binarnog simetričnog kanala u kojem je vjerojatnost pogrešnog prijenosa $p_g$=0,2. Na prijamnoj strani se kod dekodiranja koristi pravilo minimalne udaljenosti. Odredite vjerojatnost pogrešnog dekodiranja. Također, odredite vjerojatnost pogrešnog dekodiranja za slučaj binarnog kanala s brisanjem simbola u kojem je vjerojatnost brisanja $p$=0,2.

*Postupak rješavanja:*

*i*) Skicirajmo prvi kanal:



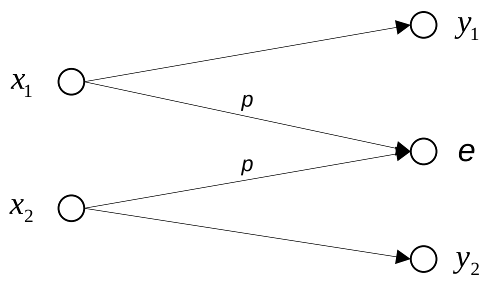

Slijed bitova na izlazu iz kanala će se dekodirati ovako:

| $\underline{\underline{000}}$ | $\underline{\underline{111}}$ |
|---|---|
| 001 | 101 |
| 010 | 110 |
| 100 | 011 |

Vjerojatnost pogrešnog dekodiranja, $p_{pd}$, iznosi:

$$p_{\mathrm{pd}} = \binom{3}{2} p_{\mathrm{g}}^2 \left(1 - p_{\mathrm{g}}\right) + \binom{3}{3} p_{\mathrm{g}}^3 \left(1 - p_{\mathrm{g}}\right)^0 = 3 p_{\mathrm{g}}^2 \left(1 - p_{\mathrm{g}}\right) + p_{\mathrm{g}}^3 = 0{,}1040$$

*ii*) Skicirajmo kanal s brisanjem simbola:




Vjerojatnost pogrešnog dekodiranja za slučaj binarnog kanala s brisanjem simbola $p$ iznosi:

$$p_{\mathrm{pd}} = \frac{1}{2}\binom{3}{3} p^3 (1-p)^0 = \frac{1}{2} \cdot p^3 = 0{,}0040$$

**6. zadatak (10 bodova):** Ciklični kôd [7, $k$] opisan je generirajućim polinomom $g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$. Odredite generirajuću matricu **G** = [**I**|**A**] te kodnu riječ koja počinje s [110].

*Postupak rješavanja:*

Odredimo generirajuću matricu **G** danog cikličnog koda:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} & & & & & & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Dakle, matrica **G** iznosi:

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Kod cikličkog koda [7,3] prva tri bita kodne riječi su informacijski bitovi te kodnu riječ možemo dobiti množenjem kodirane poruke [110] s generirajućom matricom **G**:

$$\mathbf{c} = [110] \cdot \mathbf{G} = [1101001]$$

**7. zadatak (20 bodova):** Neka je $k$ binarnih simetričnih kanala (BSK), svaki s vjerojatnošću pogrešnog prijenosa $p$, vezano u seriju. Odredite izraz za vjerojatnost pogrešnog prijenosa cijelog sustava serijski vezanih kanala, $P$ te ako je $p$ = 0,1 i $P$ = 0,4463129088, odredite koliko iznosi broj kanala, $k$.

**Napomena:** Vjerojatnost $P$ zadana je vrlo precizno jer $k$ mora biti cijeli broj.

*Postupak rješavanja:*

BSK ima dva simbola na ulazu, 0 i 1. Vjerojatnost pogrešnog prijenosa, tražena u ovom zadatku, je uvjetna vjerojatnost. To je vjerojatnost da je 0 na ulazu serijskog spoja BSK-a (u nastavku ćemo taj spoj zvati i **cijeli kanal**) prešla u 1 na izlazu serijskog spoja BSK-a, ili obratno, da je 1 prešla u 0. Dovoljno je promatrati jedan slučaj, npr. da je 0 prešla u 1.

Dakle, ako se serijski spoj BSK-a sastoji od $k$ = 1 BSK, tada je rješenje evidentno iz samog zadataka i iznosi $p_g = p$.

Nadalje, ako su dva BSK vezana u seriju ($k$ = 2) tada je $p_g = 2p(1 - p)$, tj. do pogrešnog prijenosa s ulaza na izlaz cijelog kanala dolazi ako:

a) 0 koja se pojavljuje na ulazu cijelog kanala u prvom BSK pređe u 0 i u drugom BSK ta ista 0 pređe u 1, ili

b) 0 koja se pojavljuje na ulazu cijelog kanala u prvom BSK pređe u 1 i u drugom BSK ta ista 1 pređe u 1.

U oba slučaja 0 koja se pojavila na ulazu cijelog kanala u konačnici je prešla u 1 na izlazu cijelog kanala, a to je pogrešan prijenos.

Nadalje, ako su tri BSK vezana u seriju ($k$ = 3) tada je $p_g = 3(1 - p)^2 p + p^3$, tj. do pogrešnog prijenosa u sljedeće četiri kombinacije (od osam mogućih):

0 – 0 – 0 – 1

0 – 0 – 1 – 1

0 – 1 – 0 – 1

0 – 1 – 1 – 1

Na primjer: 0 – 0 – 0 – 1 je riječima moguće interpretirati kao: 0 na ulazu cijelog kanal prešla je u 0 na izlazu prvog BSK, ta ista 0 prešla je u 0 na izlazu drugog BSK, ta je pak 0 prešla u 1 na izlazu trećeg BSK, tj. na izlazu cijelog kanal – pogrešan prijenos.

Daljnje raspisivanje za $k$ = 4 i više ne bi imalo smisla. Treba uočiti sljedeće:

a) ukupan broj mogućih prijelaza iz 0 na ulazu cijelog kanala u neki simbol (0 ili 1) na izlazu cijelog kanala iznosi $2^k$;

b) svaki prijelaz s kraja na kraj kanala ima vjerojatnost oblika: $(1-p)^{k-i} p^i$, pri čemu je $0 \le i \le k$.

c) pogrešan prijelaz s kraja na kraj cijelog kanala će nastupiti samo ako je $i$ neparan, što znači da je na cijelom putu od ulaza do izlaza cijelog kanala 0 prešla u 1 i 1 u 0 ukupno neparan broj puta.

Cijeli problem postaje jasniji ako se slikovito prikaže Pascalovim trokutom (Slika 1). Svaki redak u Pascalovom trokutu predstavlja slučaj jednog od mogućih serijskih spojeva BSK-a. U svakom retku određeni broj predstavlja u stvari broj prijelaza s kraja na kraj u kojima se (1 – *p*), tj. ispravan prijelaz pojavljuje $k - i$ puta, a $p$, tj. neispravan prijelaz $i$ puta. Koeficijent uz član $(1-p)^{k-i}\, p^i$ je uvijek jednak $\binom{k}{i}$.

| | | | $1-p$ | | | | $p$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k = 0$ | | | | | 1 | | | | |
| $k = 1$ | | | | 1 | | 1 | | | |
| $k = 2$ | | | 1 | | 2 | | 1 | | |
| $k = 3$ | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | |
| $k = 4$ | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 |

$2(1-p)p$

$3(1-p)^2 p$

**Slika 1.** Slikoviti opis problema neispravnog prijelaza simbola u serijskom spoju BSK-a

Sada možemo u istom tom Pascalovom trokutu označiti sve neispravne prijelaze kako bi u konačnici odredili njihov zbroj po retku za određeni $k$.

| | | | | $1-p$ | | | | $p$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k = 0$ | | | | | | 1 | | | | | |
| $k = 1$ | | | | | 1 | | 1 | | | | |
| $k = 2$ | | | | 1 | | 2 | | 1 | | | |
| $k = 3$ | | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | | |
| $k = 4$ | | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | |
| $k = 5$ | 1 | | 5 | | 10 | ⋮ | 10 | | 5 | | 1 |

Slika 2. Kružićem su označeni pogrešni prijelazi

Dakle, neispravni prijelazi se pojavljuju kad je $i$ neparan. Vrlo lako možemo provjeriti da to odgovara za već ranije analizirane slučajeve $k$ = 1, 2, 3. Međutim, preostaje problem kako odrediti zbroj zaokruženih članova oblika $\binom{k}{i}(1-p)^{k-i}\, p^i$ po svakom retku. Kao prvo, zbroj tih članova po svakom retku iznosi 1:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (1-p)^{k-i}\, p^i = 1$$

To mora biti zadovoljeno zato jer svaki redak predstavlja sve moguće prijelaze iz 0 na ulazu cijelog kanala u neki simbol (0 ili 1) na izlazu cijelog kanala, a zbroj vjerojatnosti svih mogućih prijelaza mora biti jednaka jedinici. A tu vjerojatnost 1 možemo prikazati kao:

$$1 = \left[(1-p) + p\right]^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (1-p)^{k-i}\, p^i$$

Sad još preostaje kako iz zbroja faktora $\binom{k}{i}(1-p)^{k-i}\, p^i$ izdvojiti samo one s neparnim brojem $i$. Očito da vrijedi:

$$\left[(1-p) - p\right]^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (1-p)^{k-i}\, p^i$$

a odgovarajući trokut (nećemo ga zvati Pascalov jer bi to bila povreda originala) izgleda kao

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $1-p$ | | | | | $p$ | | | |
| $k = 0$ | | | | | | 1 | | npr. $-4(1-p)p^3$ | | | |
| $k = 1$ | | | | | 1 | | -1 | | | | |
| $k = 2$ | | | | 1 | | -2 | | 1 | | | |
| $k = 3$ | | | 1 | | -3 | | 3 | | -1 | | |
| $k = 4$ | | 1 | | -4 | | 6 | | -4 | | 1 | |
| $k = 5$ | 1 | | -5 | | 10 | . | -10 | | 5 | | -1 |
| | | | | | | . | | | | | |
| | | | | | | . | | | | | |

Slika 3 Primjer trokuta za razvoj izraza $\left[(1-p)-p\right]^k$

Dakle, ako od $\left[(1-p)+p\right]^k$ oduzmemo $\left[(1-p)-p\right]^k$ ostat će samo članovi $\binom{k}{i}(1-p)^{k-i}\,p^i$ s neparnim brojem *i*, i to pomnoženi s dva:

$$\left[(1-p)+p\right]^k-\left[(1-p)-p\right]^k=2\sum_{i=0}^{k}(1-p)^{k-i}\,p^i \text{ za neparne } i$$

Na primjer, za $k = 3$ vrijedi:

$$\left[(1-p)+p\right]^3=(1-p)^3+3(1-p)^2\,p+3(1-p)\,p^2+p^3$$
$$\left[(1-p)-p\right]^3=(1-p)^3-3(1-p)^2\,p+3(1-p)\,p^2-p^3$$
$$\left[(1-p)+p\right]^3-\left[(1-p)-p\right]^3=6(1-p)^2\,p+2p^3=2\left[(1-p)^2\,p+p^3\right]$$

Nadalje, vrijedi:

$$\underbrace{\left[(1-p)+p\right]^k}_{ovo\ je\ jednako\ 1^k=1}-\left[(1-p)-p\right]^k=1-(1-2p)^k$$

Konačno, vjerojatnost neispravnog prijelaza, $p_g$, jednaka je:

$$p_g=\frac{1}{2}\left[1-(1-2p)^k\right]$$

Na sličan način bismo mogli dobiti da je vjerojatnost ispravnog prijenosa, $p_t$, s kraja na kraj cijelog kanala jednaka

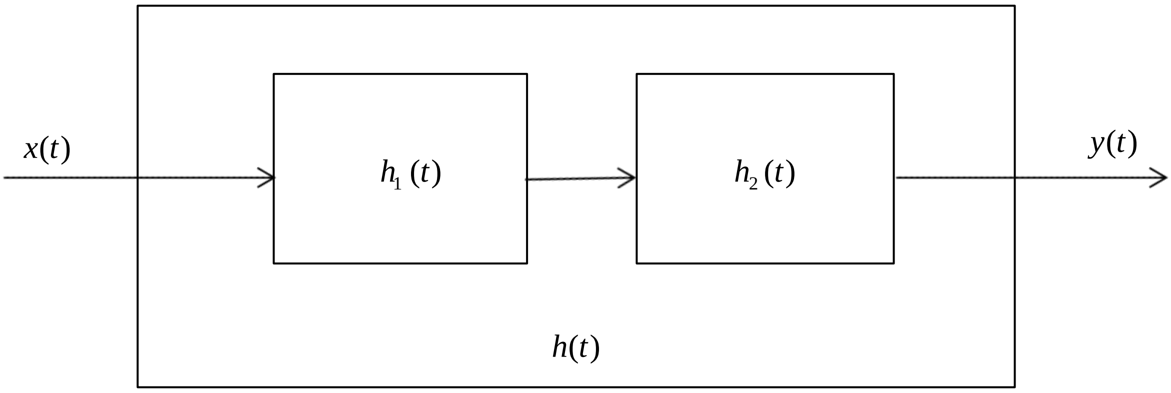
$$p_t=1-p_g=\frac{1}{2}\left[1+(1-2p)^k\right].$$

Vjerojatnost pogrešnog prijenosa *k* serijski spojenih BSK dana je izrazom

$$P = \frac{1}{2}\left[1-(1-2p)^k\right]$$

$$\begin{aligned}
&2P = 1-(1-2p)^k \\
&(1-2p)^k = 1-2P \\
&k\log_{10}(1-2p) = \log_{10}(1-2P) \\
&k = \frac{\log_{10}(1-2P)}{\log_{10}(1-2p)} = 10
\end{aligned}$$

**8. zadatak (20 bodova):** Dva LTI sustava, čiji su impulsni odzivi $h_1(t) = \mathrm{rect}(t-0,5)$ i $h_2(t) = \mathrm{rect}(t)$, serijski su povezani kako je zadano na slici.




Odredite izraz za impulsni odziv LTI sustava $h(t)$, $y(t) = h(t) * x(t)$, te ga precizno skicirajte.

**Napomena:**

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t-X}{Y}\right) = u\left(t-X+\frac{Y}{2}\right) - u\left(t-X-\frac{Y}{2}\right)$$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \text{i } X, Y \in \mathbb{R}$$

*Postupak rješavanja:*

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) h_2(t-\tau)\, d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)h_2(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [u(\tau)-u(\tau-1)][u(t-\tau+0,5)-u(t-\tau-0,5)]d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-\tau+0,5)d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-\tau-0,5)d\tau$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-1)u(t-\tau+0,5)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-1)u(t-\tau-0,5)d\tau$$

$$= \int_{0}^{t+0,5} u(t+0,5)dt - \int_{0}^{t-0,5} u(t-0,5)dt - \int_{1}^{t+0,5} u(t-0,5)dt + \int_{1}^{t-0,5} u(t-1,5)dt$$

$$= (t+0,5)u(t+0,5) - (t-0,5)u(t-0,5) - (t-0,5)u(t-0,5) + (t-1,5)u(t-1,5)$$
$$= (t+0,5)u(t+0,5) - (2t-1)u(t-0,5) + (t-1,5)u(t-1,5)$$