Grupa A

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

1. ispitni rok iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 19. veljače 2020.

Pravilo bodovanja zadataka

Svaki točno odgovoreni zadatak donosi 10 bodova, netočno odgovoreni 4 negativna boda, a neodgovoreni 0 bodova.

Zadatak 1. Instrument mjeri slučajnu veličinu čije su vrijednosti zadane skupom $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Sve su vrijednosti jednako vjerojatne. Pokazivač instrumenta, namijenjen brojčanom prikazu izmjerene vrijednosti, je u kvaru koji se manifestira tako da se znak za "minus" ne upali u 40% slučajeva kad bi trebao biti upaljen. Promatrajte opisani mjerni sustav kao komunikacijski kanal i odredite transinformaciju u kanalu.

a) 1,9167 bit/simbol;

b) 1,8386 bit/simbol;

c) 1,7309 bit/simbol;

d) 1,6268 bit/simbol;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Promatrani mjeriteljski sustav, tj. komunikacijski kanal kojim ga modeliramo, možemo opisati matricom uvjetnih vjerojatnosti prijelaza:

$$\left[P\left(y_j|x_i\right)\right] = \begin{bmatrix} 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pri čemu su x_i izmjerene vrijednosti, a y_j vrijednosti prikazane na pokazivaču instrumenta. Nadalje, s obzirom da su sve vrijednosti mjerene veličine međusobno jednako vjerojatne, vrijedi $P(x_i) = 0{,}2$, $i = 1, \ldots, 5$. Koristeći matricu kanala i apriorne vjerojatnosti mjerene veličine moguće je odrediti matricu parova vjerojatnosti (x_i, y_j) koje čine mjerena i prikazana veličina:

$$\left[P\left(x_i, y_j\right)\right] = \left[P\left(x_i\right) \cdot P\left(y_j|x_i\right)\right] = \begin{bmatrix} 0,12 & 0 & 0 & 0 & 0,08 \\ 0 & 0,12 & 0 & 0,08 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 \end{bmatrix}$$

Zbrajanjem po stupcima matrice $[P(x_i, y_j)]$ dobivamo vjerojatnosti pojave izmjerene veličine na pokazivaču, $P(y_j) = [0{,}12\ \ 0{,}12\ \ 0{,}2\ \ 0{,}28\ \ 0{,}28]$, $j = 1, \ldots, 5$. Transinformaciju u kanalu moguće je odrediti koristeći izraz:

$$I\left(X;Y\right)=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}P\left(x_i,y_j\right)\log_2\left(\frac{P\left(x_i,y_j\right)}{P\left(x_i\right)\cdot P\left(y_j\right)}\right)$$

Uvrštavanjem poznatih vrijednosti vjerojatnosti dobivamo $I(X;Y)$ = 1,8386 bit/simbol.

Zadatak 2. Neki diskretni bezmemorijski izvor generira simbole x_i iz skupa X, i = 1, 2, …, 8. Vjerojatnosti simbola, $P(x_i)$, tako su raspodijeljene da je entropija $H(X)$ maksimalna. Kodirajte zadani skup simbola optimalnim ternarnim kodom te odredite efikasnost tako nastalog koda.

a) 0,9604

b) 0,6667

c) 0,9464

d) 0,75

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Ako skup sadrži 8 simbola i ima maksimalnu entropiju, to znači da je vrijedi $H_2(X) = \log_2 8$ = 3 bit/simbol. Pri tome mora vrijediti $P(x_i)$ = 1/8 za svaki i = 1, 2, …, 8. Ako takav skup simbola želimo kodirati optimalnim ternarnim kodom, potrebno je koristiti Huffmanovo ternarno kodiranje. Nakon njegove primjene dobivamo 8 ternarnih kodnih riječi od kojih svaka ima duljinu točno L = 2 ternarna simbola po simbolu izvora. Dakle, efikasnost koda jednaka je: $\varepsilon = H_3(X)/L = \log_3(2)\cdot H_2(X)/L$ = 0,9464.

Zadatak 3. Jako dugačak slijed bita ulazi u koder koji koristi Hammingov kôd s matricom provjere pariteta Ham(5). Koderom formirane kodne riječi prenose se binarnim simetričnim kanalom u kojem vjerojatnost pogreške bita iznosi p = 0,002. Odredite da li je kod perfektan te odredite vjerojatnost pogrešnog dekodiranja, P_{pd}, promatrano na jako dugačkom slijedu primljenih kodnih riječi.

a) Kod je perfektan, $P_{\text{pd}} = 4{,}1279\cdot10^{-4}$

b) Kod nije perfektan, $P_{\text{pd}} = 4{,}1279\cdot10^{-4}$

c) Kod je perfektan, $P_{\text{pd}} = 1{,}7896\cdot10^{-3}$

d) Kod nije perfektan, $P_{\text{pd}} = 1{,}7896\cdot10^{-3}$

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Ako Hammingov kod koristi matricu provjere pariteta Ham(5) tada se radi o linearnom binarnom blok kodu oznake [31, 26, 3]. Provjera perfektnosti:

$$M=2^k\le\frac{2^n}{\binom{31}{0}+\binom{31}{1}}$$

Uvrštavanjem poznatih n = 31 i k = 26, dobivamo da je u gornjem izrazu ispunjena jednakost, pa s obzirom da Hammingov kôd [31, 26, 3] postoji on je ujedno i perfektan. Dekoder će ispravno dekodirati sve primljene kodne riječi koje ne sadrže pogreške ili sadrže najviše jedan pogrešno primljeni bit:

$$P_{id} = \binom{31}{0}(1-p)^{31} + \binom{31}{1} p \cdot (1-p)^{30}$$

Sukladno tome, vjerojatnost pogrešnog dekodiranja iznosi $P_{pd} = 1 - P_{id} = 1{,}7896 \cdot 10^{-3}$.

Zadatak 4. Odredite srednju snagu signala $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) - 2 \cdot \sin^2(2\pi f_0 t)$ [V], za svaki $t \in$ R i $f_0 \neq 0$.

a) 0,875 W

b) 2,5 W

c) 0 W

d) 2 W

e) Ništa od navedenog.

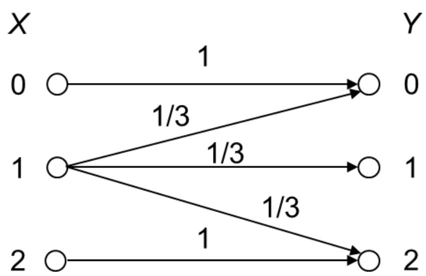
Postupak rješavanja:

Srednju snagu zadanog signala možemo odrediti na sljedeći način:

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) - 2\sin^2(2\pi f_0 t) = \cos(2\pi f_0 t) - 2\left(\frac{1-\cos(4\pi f_0 t)}{2}\right) = -1 + \cos(2\pi f_0 t) + \cos(4\pi f_0 t)$$

$$P = (-1)^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2\,\mathrm{W}$$

Zadatak 5. Razmatrajte kanal opisan slikom. To je jedan od mogućih oblika ternarnog kanala, razdioba ulaznih simbola 0, 1 i 2 zadana je izrazom desno od slike. Odredite vjerojatnost p za koju transinformacija u kanalu postiže svoj maksimalni iznos, tj. kapacitet kanala. Napomena: u postupku rješavanja morate dokazati da za proračunatu vrijednost od p transinformacija doista poprima maksimalnu vrijednost.



$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ p & 1-2p & p \end{pmatrix}$$

a) 26/55

b) 23/53

c) 3/55

d) 7/53

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

$$[P(X)] = [p \quad 1-2p \quad p], \quad [P(Y\mid X)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[P(Y)\right]=\left[P(X)\right]\cdot\left[P(Y|X)\right]=\begin{bmatrix}\frac{1+p}{3} & \frac{1-2p}{3} & \frac{1+p}{3}\end{bmatrix}$$

$$H(Y)=\sum_{i=1}^{3}P(y_i)\log\left(P(y_i)\right)=\log(3)-\frac{1-2p}{3}\log(1-2p)-\frac{2(1+p)}{3}\log(1+p)$$

$$H(Y|X)=\sum_{i=1}^{3}P(x_i)\sum_{j=1}^{3}P\left(y_j|x_i\right)\log\left(P\left(y_j|x_i\right)\right)=(1-2p)\log(3)$$

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y|X)=2p\log(3)-\frac{1-2p}{3}\log(1-2p)-\frac{2(1+p)}{3}\log(1+p)$$

$$C=\max_{p}\left[I(X;Y)\right]$$

$$\frac{dI(X;Y)}{dp}=2\log(3)+\frac{2}{3}\frac{1}{\ln 2}+\frac{2}{3}\log(1-2p)-\frac{2}{3}\frac{1}{\ln 2}-\frac{2}{3}\log(1+p)$$

$$=\frac{2}{3}\left(\log(27)+\log(1-2p)-\log(1+p)\right)=\frac{2}{3}\log\left(\frac{27-54p}{1+p}\right)$$

$$\frac{dI(X;Y)}{dp}=0\Leftrightarrow\frac{2}{3}\log\left(\frac{27-54p}{1+p}\right)=0\Leftrightarrow 27-54p=1+p\Leftrightarrow p=\frac{26}{55}\text{ je stacionarna točka}$$

$$\frac{d^2I(X;Y)}{dp^2}=\frac{2}{3\log(2)}\left(\frac{-2}{1-2p}+\frac{-1}{1+p}\right)=\frac{2}{\left(2p^2+p-1\right)\ln(2)}$$

$$\text{za } p=\frac{26}{55}\Rightarrow\frac{d^2I(X;Y)}{dp^2}=-\frac{6050}{243\ln(2)}<0\Rightarrow\text{za } p=\frac{26}{55}\text{ transinformacija ima maksimalnu vrijednost}$$

Zadatak 6. Zadan je kôd $K_1 = V(n)$. Pretpostavimo da je n paran broj. Neka je $K_2 = V(n + 1)$. Iz koda K_2 uzmemo sve kodne riječi **c** čija težina zadovoljava jednakost $w(\mathbf{c}) = 2m + 1$, $m = 0, 1, 2, ..., n/2$, i tako formiramo kôd K_3. Odredite točnu oznaku novonastalog koda K_3. Napomena: potrebno je pridržavati se definicija oznaka blok koda i linearnog blok koda danih u udžbeniku „Uvod u teoriju informacije i kodiranje".

a) $(n + 1, 2^n, 1)$

b) $[n + 1, n, 1]$

c) $[n + 1, n, 2]$

d) $(n + 1, 2^n, 2)$

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Kôd K_3 je u stvari paritetni kôd nastao dodavanjem neparnog paritetnog bita na sve riječi koda K_2. S obzirom da kôd K_1 ima 2^n kodnih riječi i kôd K_3 će imati 2^n kodnih riječi. Svaka kodna riječ koda K_3 sadrži n bita poruke i jedan dodani paritetni bit, dakle ukupno $n + 1$ bita. Udaljenost između dvije kodne riječi iznosi najmanje 2. To je u skladu s poznatom činjenicom da paritetni kodovi, nastali dodavanjem jednog paritetnog bita na poruku, mogu otkriti jednostruke pogreške. Paritetni kôd nastao dodavanjem neparnog paritetnog bita nije linearan (ne sadrži riječ sastavljenu od svih 0) pa je oznaka takvog koda, u kontekstu zadatkom zadanih veličina, $(n + 1, 2^n, 2)$.

Zadatak 7. Razmotrite linearni vremenski nepromjenjivi (LTI) sustav impulsnog odziva $h(t)$ na čiji ulaz dolazi signal opisan slučajnim procesom koji je stacionaran u širem smislu. Neka očekivanje tog procesa iznosi 5 mV. Odredite očekivanje slučajnog procesa na izlazu LTI-sustava. Veličina T je simbolička oznaka koja se striktno odnosi na količinu vremena izraženu jedinicom milisekunda.

$$h(t)=\begin{cases} \frac{12}{T}t, & 0 \le t < \frac{T}{4} \\ -\frac{12}{T}t+6, & \frac{T}{4} \le t < \frac{T}{2} \\ -\frac{4}{T}t+2, & \frac{T}{2} \le t < \frac{3T}{4} \\ \frac{4}{T}t-4, & \frac{3T}{4} \le t < T \end{cases}$$

a) $5 \cdot T/4$ [V];

b) $5 \cdot T/4$ [μV];

c) $5 \cdot T/2$ [V];

d) $5 \cdot T/2$ [μV];

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Ako na ulaz LTI-sustava prijenosne funkcije $H(f)$ djeluje signal $X(t)$ obilježja stacionarnog slučajnog procesa čija je srednja vrijednost μ_X, tada za srednju vrijednost μ_Y stacionarnog slučajnog procesa na izlazu LTI-sustava vrijedi: $\mu_Y = \mu_X \cdot H(0)$. $H(0)$ dobivamo Fourierovom transformacijom zadanog impulsnog odziva LTI-sustava:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

$$H(0) = \int_0^T h(t)dt = \left(\frac{3 \cdot T/2}{2} - \frac{T/2}{2} \right) \cdot 10^{-3} = \frac{T}{2} \cdot 10^{-3} \Rightarrow \mu_Y = 5[\text{mV}] \cdot \frac{T}{2} \cdot 10^{-3} = 5\frac{T}{2}[\mu\text{V}]$$

Zadatak 8. Neki izvor generira simbole iz abecede $X = \{x_1, ..., x_n\}$, čija je razdioba zadana izrazom:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ p_1 = \frac{N_1}{M} & \cdots & p_n = \frac{N_n}{M} \end{pmatrix}, \quad M = \sum_{i=1}^{n} N_i$$

Razdioba vjerojatnosti simbola određena je mjerenjem tijekom vremena na jako dugom nizu simbola (pretpostavka: $t \to \infty$). Izvor je pseudoslučajan, tj. generira uzorak od M simbola i taj uzorak trajno ponavlja. Ako je izvor ujedno i ergodičan, te ako se niti jedan niz ne može ponoviti, odredite S_i kao broj pojavljivanja simbola x_i po skupu, promatrano na jednom mjestu u nizu te po svim mogućim nizovima koje izvor može generirati. Odredite broj S_1 konkretno za $M = 12$ i $p_1 : p_2 : p_3 = 3 : 2 : 1$, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

a) 1155

b) 6930

c) 2310

d) 4620

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Ako je izvor ergodičan onda prosjek po skupu mora biti jednak prosjeku po vremenu. Broj različitih sljedova duljine M u kojima je razdioba vjerojatnosti jednaka zadanoj iznosi:

$$B_S = \binom{M}{N_1} \cdot \binom{M-N_1}{N_2} \cdot \binom{M-N_1-N_2}{N_3} \cdots \binom{M-N_1-N_2-\ldots-N_{n-2}}{N_{n-1}} \cdot \binom{M-N_1-N_2-\ldots-N_{n-1}}{N_n} =$$

$$= \binom{M}{N_1} \cdot \binom{M-N_1}{N_2} \cdot \binom{M-N_1-N_2}{N_3} \cdots \binom{N_{n-1}+N_n}{N_{n-1}} \cdot \binom{N_n}{N_n} =$$

$$= \frac{M!}{N_1!(M-N_1)!} \cdot \frac{(M-N_1)!}{N_2!(M-N_1-N_2)!} \cdot \frac{(M-N_1-N_2)!}{N_3!(M-N_1-N_2-N_3)!} \cdots \frac{N_n!}{0!N_n!} =$$

$$= \frac{M!}{N_1!N_2!\cdots N_n!}$$

Za broj pojavljivanja simbola i na nekom mjestu u nizu, S_{i}, mora vrijediti: $N_i : M = S_{\mathrm{i}} : B_{\mathrm{s}}$. Dakle, mora vrijediti:

$$S_i = \frac{B_s N_i}{M} = \frac{M!}{N_1!N_2!\cdots N_n!} \cdot \frac{N_i}{M} = \frac{(M-1)!}{\prod_{i=1}^{n} N_i!} N_i$$

Iz uvjeta $p_1 : p_2 : p_3 = 3 : 2 : 1$ moguće je odrediti brojeve N_i: $N_1 = (3/2) \cdot N_2 = 3N_3$ i $N_1 + N_2 + N_3 = M$, a $M = 12$. Dakle, $N_1 = 6$, $N_2 = 4$, $N_3 = 2$. Iz toga možemo izračunati broj pojavljivanja simbola x_1 po skupu, a to je:

$$S_1 = \frac{11!}{6! \cdot 4! \cdot 2!} \cdot 6 = 6930 .$$

Zadatak 9. Koder koristi ciklični kôd [7, 4] koji poruku [1 1 0 1] pretvara u kodnu riječ [1 1 1 1 1 1 1]. Na početku neke komunikacije dekoder tog koda na drugoj strani prijenosnog sustava prima sljedeći niz bita: 1 0 0 1 0 1 0 0 1 … (krajnji lijevi bit je prvi koji dolazi na ulaz dekodera). Odredite na kojem je bitu prve kodne riječi u prijenosu nastala pogreška pod pretpostavkom da je na toj kodnoj riječi nastala najviše jedna pogreška.

a) Nije bilo pogreške.

b) Na petom bitu.

c) Na trećem bitu.

d) Na sedmom bitu.

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Ako promatrani kôd [7, 4] poruku **d** = [1 1 0 1] pretvara u kodnu riječ **c** = [1 1 1 1 1 1 1], onda generirajući polinom tog koda možemo odrediti na sljedeći način: $g(x) = c(x) : d(x)$, iz čega proizlazi $g(x) = x^3 + x + 1$. Temeljem poznatog generirajućeg polinoma promatranog cikličnog koda moguće je odrediti njegov polinom za provjeru pariteta, $h(x) = (x^n - 1) : g(x)$. Dakle, $h(x) = x^4 + x^2 + x + 1$. Pomoću poznatog polinoma $h(x)$ moguće je konstruirati matricu provjere pariteta, **H**:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Množenjem prve riječi koja dolazi na ulaz dekodera, $\mathbf{y}$ = [1 0 0 1 0 1 0], s matricom $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ dobivamo:

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Taj rezultat odgovara petom retku matrice $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$, što pak znači da je pogreška nastala na petom bitu gledano s lijeva, tj. od početka riječi koju dekoder prima. Naravno, takvo zaključivanje vrijedi samo uz pretpostavku da je u prijenosu kodne riječi nastala najviše jedna pogreška, što je zadatkom i zadano.

Zadatak 10. Promatrajte prijenosni sustav u kojem je omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma za 5 dB slabiji u odnosu na slučaj korištenja idealnog načina kodiranja u tom istom prijenosnom sustavu. Odredite kapacitet sustava u jedinici bit/s ako prijenosna brzina u sustavu s realnim kodiranjem iznosi 1 bit/simbol te ako širina frekvencijskog pojasa prijenosnog sustava iznosi 5 kHz.

a) 16952,54 bit/s

b) 8476,27 bit/s

c) 10000 bit/s

d) 20000 bit/s

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

U promatranom prijenosnom sustavu u slučaju korištenja stvarnog načina kodiranja najveća ostvariva prijenosna brzina iznosi:

$$R = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{S}{\Gamma N}\right)\left[\text{bit/simbol}\right].$$

Sam Γ iznosi 5 dB, odnosno 3,1623. Izraz za kapacitet tog istog kanala je sljedeći:

$$C = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)\left[\text{bit/simbol}\right].$$

Iz izraza za prijenosnu brzinu možemo izraziti omjer S/N:

$$\frac{S}{N} = \Gamma\left(2^{2R} - 1\right),$$

što možemo uvrstiti u izraz za kapacitet kanala i dobivamo:

$$C = \frac{1}{2}\log_2\left[1 + \Gamma\left(2^{2R} - 1\right)\right]\left[\text{bit/simbol}\right].$$

Uvrštavanjem poznatih veličina Γ = 3,1623 i R = 1 bit/simbol dobivamo C = 1,6953 bit/simbol. Ako pak širina frekvencijskog pojasa prijenosnog sustava iznosi B = 5 kHz, tada kapacitet sustava iznosi C_1 = $C \cdot 2B$ = 16952,54 bit/s.