Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Ispitni rok iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 7. veljače 2012.

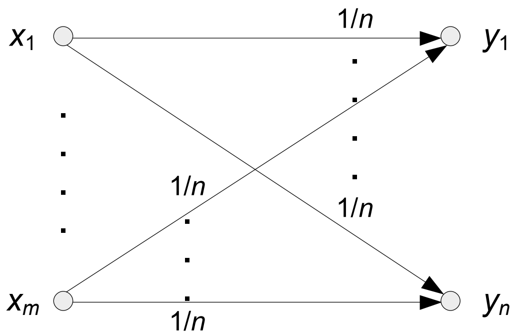
Napomena:

Svaki točno riješen zadatak boduje se s najviše 10 bodova. Svako točno riješeno potpitanje boduje se s najviše 2 boda. Svaki zadatak potrebno je rješavati na zasebnom listu papira. U svakom potpitanju jasno istaknite konačni odgovor. Svaka izračunata veličina mora imati točnu brojčanu vrijednost i po potrebi mjernu jedinicu.

Trajanje ispita: 120 minuta.

ZADACI

1. zadatak: Razmatrajte diskretni informacijski kanal s međusobno neovisnim ulazima i izlazima, prikazan na slici.



Vjerojatnosti pojave simbola na ulazu kanala zadane su kao $p(x_i)$, $i = 1, .. , m$. Vjerojatnosti pojave simbola na izlazu kanala zadane su kao $p(y_j)$, $j = 1, .. , n$. Nadalje, vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{m} p(x_i) = \sum_{j=1}^{n} p(y_j) = 1$$

Nadalje, svaki ulazni simbol x_i, $i = 1, .. , m$, preslikava se u bilo koji od izlaznih simbola y_j, $j = 1, .. , n$, s jednakom vjerojatnošću: $p(y_j|x_i) = 1/n$, $\forall\ i, j$. Kanal je dodatno definiran matricom združenih vjerojatnosti $[P(X,Y)]$ koja ima n identičnih stupaca:

$$[P(X,Y)] = \begin{bmatrix} p_1 & p_1 & \cdots & p_1 \\ p_2 & p_2 & \cdots & p_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_m & p_m & \cdots & p_m \end{bmatrix}$$

U potpitanjima a), b), c) i d) odredite tražene veličine kao funkcije isključivo varijabli n i p_i:

a) Izraz za $H(X)$.

b) Izraz za $H(Y)$.

c) Izraz za $H(X|Y)$

d) Izraz za i $H(Y|X)$.

e) Odredite kapacitet zadanog kanala.

Postupak rješavanja:

a) Temeljem zadanih uvjetnih vjerojatnosti prijelaza $p(y_j|x_i) = 1/n$, te temeljem matrice $[P(X,Y)]$ moguće je odrediti vjerojatnosti $p(x_i)$, $i = 1, .. , m$, kao funkcije od n i p_i:

$$p(x_i)=\sum_{j=1}^{n} p(x_i,y_j)=\sum_{j=1}^{n} p_i = np_i$$

Sukladno tome, entropija $H(X)$ se određuje prema izrazu:

$$H(X)=-\sum_{i=1}^{m} p(x_i)\log_2\left[p(x_i)\right]=-\sum_{i=1}^{m} np_i\log_2(np_i)=-n\left(\sum_{i=1}^{m} p_i\log_2(p_i)\right)-\log_2(n)\left[\text{bit/simbol}\right]$$

b) S obzirom da matrica $[P(X,Y)]$ ima n identičnih stupaca, moguće je odrediti vjerojatnosti $p(y_j)$, j = 1, .. , m, kao funkcije od n i p_i, na sljedeći način

$$p(y_j)=\sum_{i=1}^{m} p(x_i,y_j)=\sum_{i=1}^{m} p_i=\frac{1}{n}$$

Sukladno tome, entropija H(Y) se određuje prema izrazu

$$H(Y)=-\sum_{j=1}^{n} p(y_j)\log_2\left[p(y_j)\right]=-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\log_2\left(\frac{1}{n}\right)=-n\frac{1}{n}\log_2\left(\frac{1}{n}\right)=\log_2(n)\left[\text{bit/simbol}\right]$$

c) Entropiju $H(X|Y)$ moguće je odrediti temeljem uvjetnih vjerojatnosti $p(x_i|y_j)$ i uz poznate združene vjerojatnosti $p(x_i,y_j) = p_i$:

$$H(X|Y)=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p(x_i,y_j)\log_2\left[p(x_i|y_j)\right]$$

S obzirom da vrijedi $p(x_i|y_j) = p(x_i,y_j)/p(y_j) = p_i/(1/n) = np_i$, vrijedi:

$$H(X|Y)=-\sum_{i=1}^{m} np_i\log_2(np_i)\left[\text{bit/simbol}\right]=H(X)$$

d) Entropiju $H(Y|X)$ moguće je odrediti temeljem poznatih uvjetnih vjerojatnosti $p(y_j|x_i) = 1/n$ i združenih vjerojatnosti $p(x_i,y_j) = p_i$:

$$H(Y|X)=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p(x_i,y_j)\log_2\left[p(yj|x_i)\right]=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i\log_2\left(\frac{1}{n}\right)=-\sum_{i=1}^{m} np_i\log_2\left(\frac{1}{n}\right)=$$
$$=\log_2(n)\left[\text{bit/simbol}\right]=H(Y)$$

e) S obzirom da je $H(X) = H(X|Y)$ te $H(Y) = H(Y|X)$, kapacitet kanala iznosi 0 bit/simbol.

2. zadatak: Razmatrajte uređaj za digitalizaciju signala. Taj se uređaj sastoji od serijskog spoja sklopa za uzimanje uzoraka, kvantizatora i sklopa za kodiranje kvantiziranih uzoraka. Na ulaz sklopa za uzimanje uzoraka dolazi analogni signal $x(t)$ za čiji spektar $X(f)$ vrijedi: $X(f) \neq 0$ za $0 \leq |f| \leq 4$ kHz, $X(f) = 0$ za $|f| > 4$ kHz. U sklopu za uzimanje uzoraka signal $x(t)$ uzorkujemo frekvencijom koja je 1,25 puta veća od Nyquistove frekvencije uzorkovanja za promatrani signal $x(t)$. U kvantizatoru svaki uzorak kvantiziramo koristeći jednoliku kvantizaciju s 256 kvantizacijskih razina. Konačno, sklop za kodiranje kvantiziranih uzoraka generira na svom izlazu binarne simbole. Pretpostavimo da su svi uzorci međusobno neovisni.

a) Odredite maksimum srednjeg sadržaja informacije na izlazu kvantizatora.

b) Pod pretpostavkom da su sve moguće kvantizirane vrijednosti uzoraka signala $x(t)$ međusobno jednako vjerojatne, tj. da su u kvantiziranom signalu sve kvantizacijske razine zastupljene s jednakom vjerojatnošću, odredite vlastiti sadržaj informacije svakog kvantiziranog uzorka.

c) Odredite maksimalnu prijenosnu brzinu na izlazu uređaja za digitalizaciju signala.

d) Pretpostavite da se izlaz iz uređaja za digitalizaciju signala maksimalnom prijenosnom brzinom dovodi na ulaz AWGN kanala širine prijenosnog pojasa 10 kHz (prijenosna funkcija kanala $H(f)$ različita je od nule u pojasu od -10 kHz do 10 kHz). Odredite minimalni potreban omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma u kanalu (u decibelima!) pa da kroz ovakav kanal bude moguć prijenos informacije bez gubitaka.

e) Odredite učinkovitost prijenosnog pojasa AWGN kanala definiranog u potpitanju d). Napomena: omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma u kanalu ima minimalni iznos pri kojem je kroz ovakav kanal moguć prijenos informacije bez gubitaka.

Postupak rješavanja:

a) Maksimum srednjeg sadržaja informacije na izlazu kvantizatora nastupa kad su sve kvantizacijske razine jednako vjerojatne i iznosi $H(X)_{\max} = \log_2(256) = 8$ bit/uzorak.

b) Ako pretpostavimo da su sve moguće kvantizirane vrijednosti uzoraka signala $x(t)$ međusobno jednako vjerojatne, tada vjerojatnost svake razine x_i, $i = 1, ..., 256$, iznosi $p(x_i) = 1/256$. Tada je vlastiti sadržaj informacije svakog uzorka dan izrazom:

$$I(x_i) = -\log_2\left(\frac{1}{256}\right) = 8[\text{bit/uzorak}]$$

c) Maksimalna prijenosna brzina uređaja za digitalizaciju signala jednaka je umnošku maksimalnog srednjeg sadržaja informacije na izlazu tog uređaja i frekvencije uzorkovanja. Frekvencija uzorkovanja jednaka je $f_u = 1{,}25 \cdot f_N$, pri čemu je širina spektra signala $x(t)$ iznosi 4 kHz, a Nyquistova frekvencija uzorkovanja za takav signal iznosi $f_N = 8$ kHz. Dakle, $f_u = 10$ kHz. Konačno, $R_{\max} = H(X)_{\max} \cdot f_u = 80$ kbit/s.

d) Izraz za kapacitet AWGN kanala je sljedeći:

$$C = B\log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)[\text{bit/s}]$$

pri čemu je S/N omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma u kanalu. Dakle, AWGN kanal ima širinu prijenosnog pojasa $B = 10$ kHz i mora vrijediti $C \geq R_{\max}$:

$$B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)\geq R_{\max}$$

$$10^4\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)\geq 8\cdot 10^4$$

$$1+\frac{S}{N}\geq 256 \rightarrow \frac{S}{N}\geq 255$$

Dakle, minimalni potrebni omjer S/N iznosi 255, tj. 24,07 dB.

e) Učinkovitost prijenosnog pojasa definirana je kao omjer prijenosne brzine i širine prijenosnog pojasa kanala. S obzirom da u potpitanju d) uređaj za digitalizaciju signala šalje informacije brzinom R = 80 kbit/s i to je ujedno prijenosna brzina u kanalu, a širina prijenosnog pojasa kanala iznosi 10 kHz, tada učinkovitost prijenosnog pojasa iznosi $E = R/B$ = 8 bit/s/Hz.

3. zadatak: Informacijski izvor generira dugačak slijed binarnih simbola. Svi su simboli međusobno neovisni. Broj simbola nula u slijedu je dva puta veći od broja simbola jedan. **Napomena**: prilikom proračuna svih veličina koristite barem četiri decimalna mjesta.

a) Odredite entropiju zadanog skupa simbola.

b) Odredite binarni Huffmanov kôd koji osigurava da srednja duljina kodne riječi nije veća od 0,94 bit/simbol, te potom ispišite dobivene kodne riječi i njihove duljine. **Napomena:** Potrebno je pronaći onaj binarni Huffmanov kôd čija je srednja duljina kodne riječi najbliža traženoj i istodobno manja od nje.

c) Koliko iznosi srednja duljina kodne riječi (bit/simbol) dobivena nakon kodiranja provedenog u potpitanju b)?

d) Odredite efikasnost danog koda.

e) Rješenje potpitanja b) daje nam skup od n kodnih riječi s duljinama l_i, $i = 1, ..., n$. Dokažite da općenito za bilo koji skup od n kodnih riječi s duljinama l_i, $i = 1, ..., n$, proračunatim pod b) postoji prefiksni kôd.

Postupak rješavanja:

$X = \{0, 1\}$, $p_0 = 2/3$; $p_1 = 1/3$

a) $H(X) = 0{,}9183$ bit/simbol

b) Srednja duljina kodne riječi za zadani skup simbola X iznosi 1 bit/simbol. Međutim, to ne zadovoljava postavljeni uvjet da srednja duljina kodne riječi nije veća od 0,94 bit/simbol. Dakle, potrebno je napraviti proširenje danog koda, tj. srednja duljina kodne riječi će se smanjivati ako kod kodiranja udružujemo simbole (kodiramo sve parove simbola, pa sve trojke, itd., sve dok ne postignemo željeni uvjet).

Kodiranje svih parova simbola:

Par (s_1, s_2)	00	01	10	11
Vjerojatnost para (s_1, s_2)	4/9	2/9	2/9	1/9
Kodna riječ	1	01	000	001

L_2 = 1,889 bit/par_simbola, tj. $L_2/2$ = 0,944 bit/simbol. Dakle, postavljeni uvjet nije zadovoljen.

Kodiranje svih trojki simbola:

Trojke simbola (s_1, s_2, s_3)	000	001	010	011	100	101	110	111
Vjerojatnost pojavljivanja trojki (s_1, s_2, s_3)	8/27	4/27	4/27	2/27	4/27	2/27	2/27	1/27
Kodna riječ	00	11	010	1000	011	1001	1010	1011

L_3 = 2,815 bit/trojka, tj. $L_3/3$ = 0,938 bit/simbol. Postavljeni uvjet je zadovoljen. Kodne riječi i njihove duljine su:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
Kodna riječ i	00	11	010	1000	011	1001	1010	1011
Duljina (l_i)	2	2	3	4	3	4	4	4

c) $L = 0{,}938$ bit/simbol

d) $\varepsilon = \frac{H(X)}{L} = 0.9790$

e) Uvjet postojanja prefiksnog koda s definiranim duljinama kodnih riječi provjerava se preko Kraftove nejednakosti. Dakle, mora vrijediti: $\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i} \leq 1$, pri čemu su l_i duljine dobivenih kodnih riječi. U našem slučaju vrijedi: $2 \cdot 2^{-2} + 2 \cdot 2^{-3} + 4 \cdot 2^{-4} = 1$. Dakle postoji prefiksni kôd s navedenim duljinama kodnih riječi.

4. zadatak: Dan je linearni binarni ciklični kôd K, $[n, k] = [?, 11]$. Poznato je da kodne riječi [001111111111000] i [111111111111111] pripadaju danom kodu.

a) Odredite kodnu brzinu danog koda.

b) Odredite generirajući polinom, $g(x)$, koda K.

c) Skicirajte koder kanala danog cikličnog koda.

d) Na ulazu kodera kanala koda K pojavljuje se poruka [00000000111]. Odredite cikličnu provjeru zalihosti za danu poruku u polinomskom i binarnom zapisu.

e) Odredite cikličnu provjeru zalihosti za prvu kodnu riječ koja se pojavljuje na izlazu kodera kanala dualnog koda $K^{\perp}$, ako se na njegovom ulazu pojavljuje slijed bitova 00010001000...

Postupak rješavanja:

a) $n = 15 \rightarrow [n, k] = [15, 11] \rightarrow R = k/n = 0{,}7333$.

b) Iz zadanog koda [15,11], vidimo da polinom mora biti stupnja $n - k$ odnosno $15 - 11 = 4$. Da bi odredili generirajući polinom danog koda koristit ćemo se sljedećim pravilima:

1. Zbroj dvije kodne riječi koda K daje novu kodnu riječ koja pripada kodu K.

2. Ciklični posmak kodne riječi iz K opet daje kodnu riječ iz K.

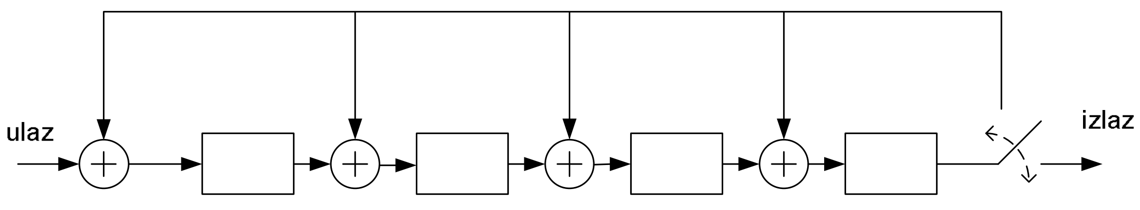
3. Generirajući polinom je najmanjeg stupnja u K.

Iz prvog pravila (zbrajanjem danih kodnih riječi u mod-2 aritmetici) dobivamo novu kodnu riječ koda K, tj.

$$\begin{array}{r} 111111111111111 \\ +\ 001111111111000 \\ \hline 110000000000111 \end{array}$$

Zatim dobivenu kodnu riječ posmičemo za 2 mjesta u lijevo te dobivamo kodnu riječ: [000000000011111] koja prema pravilu 2. pripada kodu K. Koristeći treće pravilo dobivamo da je generirajući polinom danog koda $g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

c) Koder kanala cikličnog koda:



d) $r(x) = x^3 + x^2$ ili $\mathbf{r} = [1100]$

e) $(x^{15}+1):g(x) = h(x) \rightarrow h(x) = x^{11} + x^{10} + x^6 + x^5 + x + 1$. Dani polinom $h(x)$ je generirajući polinom koda $K^{\perp}$, za koji je $[n^{\perp}, k^{\perp}] = [15, 4]$. Dakle, na ulaz kodera kanala koda $K^{\perp}$ dolazi prva poruka [0001], dok se na njegovom izlazu pojavljuje kodna riječ $\mathbf{c}^{\perp}$ čija je ciklična provjera zalihosti [10001100011] ili polinomski $x^{10} + x^6 + x^5 + x + 1$.

5. zadatak: Na ulaz linearnog i vremenski nepromjenjivog prijenosnog sustava dolazi signal $x(t) = -1 + 2\cdot\cos^2(5\cdot 10^3\cdot t)$ [V]. Prijenosni sustav definiran je prijenosnom funkcijom $H(f)$ na sljedeći način:

$$H(f) = \begin{cases} 0{,}5\cdot e^{-j2\pi f}\ [\text{V/Hz}] & 0\,\text{Hz} \le |f| \le 10^4\,\text{Hz} \\ 0 & |f| \ge 10^4\,\text{Hz} \end{cases}$$

a) Odredite izraz za spektar signala $x(t)$.

b) Odredite izraz za signal $y(t)$ na izlazu sustava.

c) Odredite izraz za točke t_k na vremenskoj osi u kojima impulsni odziv sustava prolazi kroz nulu, tj. $h(t_k) = 0$.

d) Na ulaz zadanog prijenosnog sustava dovodimo signal koji ima obilježje Gaussovog bijelog šuma (stacionarni slučajni proces u širem smislu). Taj je slučajni proces familija Gaussovih slučajnih varijabli od kojih svaka ima identičnu razdiobu određenu funkcijom gustoće vjerojatnosti:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-0{,}1)^2/2}$$

Odredite srednju vrijednost signala na izlazu prijenosnog sustava.

e) Ako na ulaz zadanog prijenosnog sustava dovedemo slučajni signal opisan u potpitanju d), odredite izraz za spektralnu gustoću snage signala na izlazu prijenosnog sustava.

Postupak rješavanja:

a) Koristeći izraz $\cos^2(x) = [1 + \cos(2x)]/2$, signal na ulazu sustava, $x(t)$, je moguće prikazati kao:

$$x(t) = -1 + 2\cos^2\left(5\cdot 10^3 t\right) = -1 + 2\frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(10^4 t\right)\right] = \cos\left(10^4 t\right)$$

Sukladno tome, spektar signala x(t) moguće je odrediti Fourierovom transformacijom (knjiga "Uvod u teoriju informacije i kodiranje, str. 56):

$$X(f) = \frac{1}{2}\left[\delta\left(f - \frac{10^4}{2\pi}\right) + \delta\left(f + \frac{10^4}{2\pi}\right)\right][\text{W/Hz}]$$

b) Signal na izlazu sustava moguće je odrediti koristeći inverznu Fourierovu transformaciju:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) e^{j2\pi f t} df$$

S obzirom da je promatrani prijenosni sustav linearan, za spektar izlaznog signala, $Y(f)$, vrijedi: $Y(f) = X(f)\cdot H(f)$. Sukladno tome, vrijedi:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) H(f) e^{j2\pi f t} df = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\delta\left(f - \frac{10^4}{2\pi}\right) + \delta\left(f + \frac{10^4}{2\pi}\right)\right] e^{-j2\pi f} e^{j2\pi f t} df =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\delta\left(f - \frac{10^4}{2\pi}\right) + \delta\left(f + \frac{10^4}{2\pi}\right)\right] e^{j2\pi f(t-1)} df = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{j10^4(t-1)} + e^{-j10^4(t-1)}}{2}\right] = \frac{1}{2}\cos\left[10^4(t-1)\right][\text{V}]$$

c) Impulsni odziv sustava moguće je odrediti inverznom Fourierovom transformacijom prijenosne funkcije:

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{j2\pi ft}df=\int_{-10^4}^{10^4} 0,5e^{-j2\pi f}\, e^{j2\pi ft}df=2\cdot 10^4\,\frac{\sin\left[2\pi 10^4(t-1)\right]}{2\pi 10^4(t-1)}$$

Očito je da će impulsni odziv prolaziti kroz nulu u točkama u kojima je $2\pi 10^4(t-1)=k\pi$, pri čemu je k bilo koji cijeli broj različit od nule, $k\in\mathbf{Z}\backslash\{0\}$. Dakle,

$$t_k=\frac{k}{2\cdot 10^4}+1[\mathrm{s}],\ k\in\mathbf{Z}, k\neq 0$$

d) Ako na ulaz prijenosnog sustava dovedemo zadani stacionarni slučajni signal, iz funkcije gustoće razdiobe je vidljivo da je srednja vrijednost slučajnog procesa na ulazu sustava jednaka μ_X = 0,1 [V]. Nadalje, za srednju vrijednost slučajnog procesa na izlazu sustava vrijedi $\mu_X=\mu_Y\cdot H(0)$ = 0,1·0,5 = 0,05 [V].

e) Spektralnu gustoću snage slučajnog procesa na ulazu sustava, $S_Y(f)$, određujemo Fourierovom transformacijom zadane autokorelacijske funkcije $R(\tau)$. Za $R(\tau)$ Gaussovog bijelog šuma vrijedi:

$$R_X(\tau)=\sigma_X^2\cdot\delta(\tau)$$

pri čemu je σ_X standardna devijacija slučajnih varijabli koje određuju ulazni Gaussov bijeli šum. Iz funkcije gustoće vjerojatnosti zadane u potpitanju d) vidljivo je da je $\sigma_X = 1$. Dakle,

$$S_X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau=1\,[\mathrm{W/Hz}]$$

Konačno, spektralna gustoća snage na izlazu prijenosnog sustava određuje se izrazom:

$$S_Y(f)=S_X(f)\left|H(f)\right|^2$$

Sukladno tome, konačan izraz za $S_Y(f)$ glasi:

$$S_Y(f)=\begin{cases}0,25[\mathrm{W/Hz}] & 0\,\mathrm{Hz}\leq|f|\leq 10^4\,\mathrm{Hz}\\ 0[\mathrm{W/Hz}] & |f|\geq 10^4\,\mathrm{Hz}\end{cases}$$