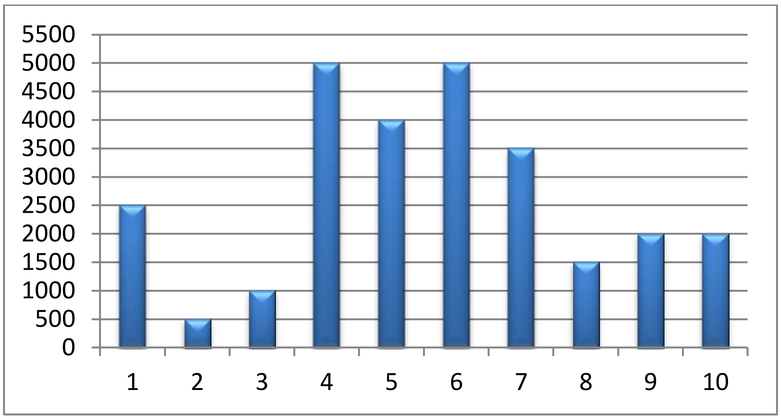
Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Ispitni rok iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 22. veljače 2016.

Pravilo bodovanja zadataka

Svaki točno odgovoreni zadatak donosi 10 bodova, svaki netočno odgovoreni -4 boda, a neodgovoreni zadaci donose 0 bodova.

Zadatak 1: Mirna digitalizirana slika s bojama "1", "2", "3", …, "10" zadana je histogramom (Slika 11, na *y*-osi navedena je frekvencija pojavljivanja pojedine boje):



Slika 1: Frekvencije pojavljivanja pojedinih boja

Svaka boja ("1", "2", "3", …, "10") kodira se jednim simbolom iz skupa simbola $X = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Koliko je minimalno vrijeme potrebno za prijenos dane slike od računala A do računala B modemom 56 kbit/s?

a) $1{,}48 \cdot 10^{-5}$ s
b) 1,48 s
c) 0,48 s
d) $0{,}48 \cdot 10^{-5}$ s
e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Podaci iz histograma mogu se preglednije prikazati tablicom (Tablica 1). Kako bi odredili vjerojatnosti pojavljivanja pojedinog simbola $p(x_i)$, potrebno je izračunati ukupan broj odaslanih simbola, te pojedine frekvencije pojavljivanja simbola podijeliti tim brojem.

Tablica 1: Tablični prikaz podataka iz histograma

x_i	"1"	"2"	"3"	"4"	"5"	"6"	"7"	"8"	"9"	"10"
f_i	2500	500	1000	5000	4000	5000	3500	1500	2000	2000

$p(x_i)$	0,926	0,019	0,037	0,185	0,148	0,185	0,13	0,056	0,074	0,074

Ukupno imamo 10 simbola. Zbroj frekvencija pojavljivanja i pojedine vjerojatnosti dobivamo prema sljedećim izrazima:

$$\sum_{k=1}^{10} f_k = 27000$$

$$p(x_i) = \frac{f_i}{\sum_{k=1}^{10} f_k}; i = 1,2, \dots, 10$$

Dakle,

$$[p(x_i)] = \left[\frac{2500}{27000} \quad \frac{500}{27000} \quad \frac{1000}{27000} \quad \frac{5000}{27000} \quad \frac{4000}{27000} \quad \frac{5000}{27000} \quad \frac{3500}{27000} \quad \frac{1500}{27000} \quad \frac{2000}{27000} \quad \frac{2000}{27000}\right]$$

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{10} p(x_i) \log_2 p(x_i) = 3{,}0798 \ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

ii) Minimalno vrijeme potrebno za prijenos slike zadanom brzinom može se odrediti prema:

$$t_{\min} = \frac{H(X) \sum_{k=1}^{10} f_k}{R_b}$$

$$t_{\min} = \frac{H(X) \sum_{k=1}^{10} f_k}{56 \ \frac{\text{kbit}}{\text{s}}} = \frac{3{,}0798 \ \cdot 27000}{56000}$$
$$= 1{,}4849 \text{ s}$$

Zadatak 2: Dana je diskretna slučajna varijabla Z koja poprima vrijednosti 0 i 1 s vjerojatnostima $1 - a$, odnosno a. Neka slučajna varijabla X, neovisna o Z, poprima vrijednosti iz skupa $\{1, 2, ..., n\}$ s vjerojatnostima $p(i) = q_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Neka su vjerojatnosti a i q_i odabrane tako da je entropija od $X \cdot Z$ najveća moguća. Odredite koliko iznosi a.

a) $n/(n + 1)$

b) $1/n$

c) $1/(n + 1)$

d) 0,5

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

S obzirom da slučajna varijabla Z poprima vrijednosti 0 i 1, pomnožena sa slučajnom varijablom X koja poprima jednu od vrijednosti iz skupa$\{1, 2, ..., n\}$ daje vrijednosti iz skupa $\{0, 1, ..., n\}$. Sukladno tome, vjerojatnosti koje poprimaju elementarni događaji slučajne varijable Y dani su sljedećim vektorom:

$$p(Y) = \left[p(0), p(1), \ldots, p(n)\right] = \left[[(1-a)\sum_{i=1}^{n} q_i], aq_1, aq_2, ..., aq_n\right]$$

S obzirom da je $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$, vrijedi sljedeće

$$H(Y) = -\left[(1-a)\log_2(1-a) + a\sum_{i=1}^{n} q_i\left[\log_2(a) + \log_2(q_i)\right]\right]$$

$$H(Y) = -\left[(1-a)\log_2(1-a) + a\log_2(a) + a\sum_{i=1}^{n} q_i \log_2(q_i)\right]$$

$$H(Y) = H(Z) + aH(X)$$

$H(X)$ je najveći za $q_i = 1/n$, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, te iznosi $H(X) = \log_2(n)$.

$$H(Y) = -\left[(1-a)\log_2(1-a) + a\log_2(a) + a \cdot n\frac{1}{n}\log_2\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= -\left[\log_2(1-a) - p\log_2(1-a) + a\log_2(a) + a\log_2\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

Maksimum neke funkcije dobivamo kad njenu prvu derivaciju izjednačimo s nulom:

$$\frac{-1}{(1-a)\ln(2)} - \log_2(1-a) - \frac{-a}{(1-a)\ln(2)} + \log_2(a) + \frac{a}{a\ln(2)} + \log_2\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

$$\frac{-(1-a)}{(1-a)\ln(2)} + \frac{1}{\ln(2)} - \log_2(1-a) + \log_2(a) - \log_2(n) = 0$$

$$\log_2\left[\frac{a}{n(1-a)}\right] = 0 \rightarrow \frac{a}{n(1-a)} = 1 \rightarrow a = n(1-a)$$

Konačno rješenje je $a = \dfrac{n}{n+1}$

Zadatak 3: Diskretno bezmemorijsko izvorište generira simbole iz skupa $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Vjerojatnosti pojavljivanja simbola su sljedeće: $p(x_1) = 0{,}4$, $p(x_2) = 0{,}3$, $p(x_3) = 0{,}2$ i $p(x_4) = 0{,}1$. Izračunajte količinu informacije koja se prenosi u poruci $x_1x_2x_1x_4$.

a) 6,70 bit/poruka

b) 7,386 bit/poruka
c) 2,043 bit/poruka
d) 7,70 bit/poruka
e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

$$I(x_i) = -\log_2 p(x_i) \text{ bit/simbol}$$
$$I(x_1 x_2 x_1 x_3) = -\log_2 \left(p(x_1) \cdot p(x_2) \cdot p(x_1) \cdot p(x_4) \right)$$
$$I(x_1 x_2 x_1 x_3) = -\log_2 (0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}1)$$
$$I(x_1 x_2 x_1 x_3) = 7{,}70 \text{ bit/poruka}$$

Zadatak 4: Na izvoru se pojavljuju četiri simbola $\{1, 2, 3, 4\}$. Omjer vjerojatnosti pojavljivanja simbola je p_1:p_2:p_3:p_4 = 1:2:3:4. Slijed od 5 simbola kodiran je aritmetičkim kodom i dobivena je kodirana poruka: 0,65625. Pronađite prva četiri simbola iz kodiranog slijeda.

a) 4232
b) 4233
c) 4222
d) 4223
e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

1 - (0 - 0.1)
2 - (0.1 - 0.3)
3 - (0.3 - 0.6)
4 - (0.6 - 1)
Prvi simbol je 4

1 - (0.6 - 0.64)
2 - (0.64 - 0.72)
Drugi simbol je 2

1 - (0.64 - 0.648)
2 - (0.648 - 0.664)
Treći simbol je 2

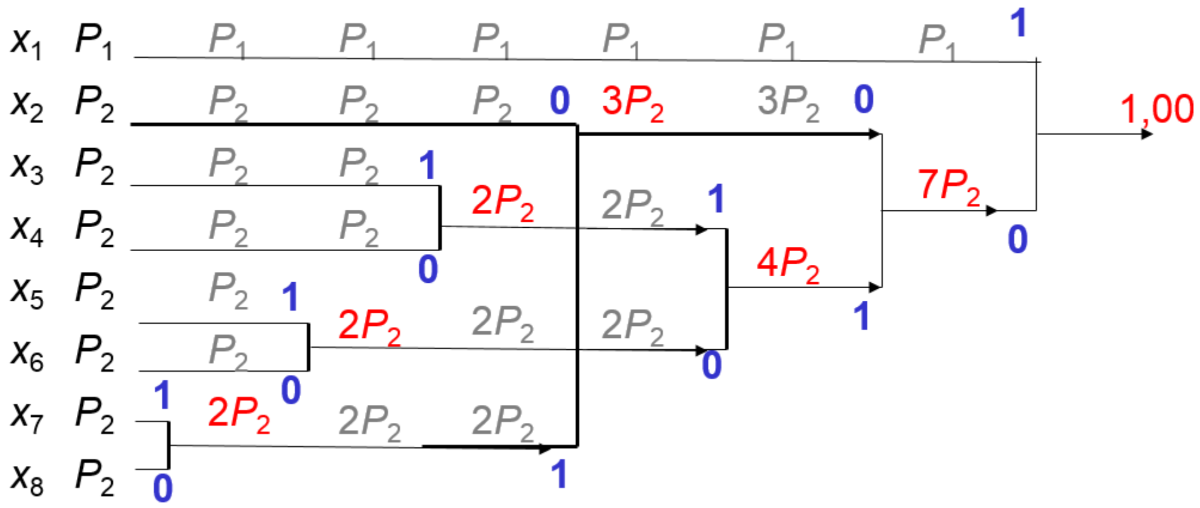
1 - (0.648 - 0.6496)
2 - (0.6496 - 0.6528)
3 - (0.6528 - 0.6576)
Četvrti simbol je 3

Kodirani slijed: 4223

Zadatak 5: Diskretno bezmemorijsko izvorište generira simbole iz skupa simbola $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_8\}$ s vjerojatnostima pojavljivanja $p(x_1) > p(x_2) = p(x_3) = p(x_4) = \ldots = p(x_8)$. Neka su $l_1, l_2, \ldots, l_8$ duljine kodnih riječi binarnog Huffmanova koda za simbole $x_1, x_2, \ldots, x_8$, slijedno gledano. Odredite najmanji q za koji je $l_1 = 1$ (uz uvjet $p(x_1) > q$).

a) 4/11 b) 2/11 c) 3/11 d) 5/11 e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:



$$p(x_1) = P_1$$

$$p(x_2) = p(x_3) = \ldots = p(x_8) = P_2$$

Iz $l_1 = 1$ slijedi da je $P_1 \geq 4P_2$

$$q = P_1$$

$$P_1 = 4P_2$$

$$P_1 + 7P_2 = 1$$

$$4P_2 + 7P_2 = 1$$

$$11P_2 = 1$$

$$P_2 = \frac{1}{11}$$

$$P_1 = \frac{4}{11}$$

$$q = \frac{4}{11}$$

Zadatak 6: Koder kanala u nekom komunikacijskom sustavu koristi Hammingov kôd zadan matricom provjere pariteta Ham(r). Odredite koliko najmanje mora iznositi r pa da kodna brzina ovako zadanog linearnog binarnog blok koda bude veća od 0,944.

a) 6 bita
b) 8 bita

c) 7 bita
d) 10 bita
e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Hammingov kôd definiran matricom Ham(r) koristi r zaštitnih bita koji štite m bita poruke. Kodna brzina $R(K)$ definirana je kao omjer broja bita poruke, m, prema ukupnom broju bita u kodnoj riječi (zbroj broja bita poruke i broja zaštitnih bita), $m + r$. Nadalje, vrijedi relacija:

$m + r \leq 2^r - 1$. Dakle, kodna brzina uz zadani broj zaštitnih bita bit će maksimalna kad vrijedi

$m + r = 2^r - 1$. Sukladno tome, kodna brzina ovog koda Ham(r) bit će jednaka:

$$R(K) = \frac{2^r - 1 - r}{2^r - 1} = 1 - \frac{r}{2^r - 1}$$

Uzevši u obzir uvjet $R(K) > 0{,}944$ i ponuđena rješenja dobivamo da je uvjet ispunjen uz $r = 7$ bita.

Zadatak 7: Neka su dani sljedeći kodovi: K_1 = {0000, 0101, 1010, 1111}, K_2 = {0000, 1110, 1111, 0101, 1010} i K_3 = {0000, 0011,0101, 0110, 1001, 1010, 1100, 1111}. Koji kod ima najveću kodnu brzinu?

a) K_1

b) K_2

c) K_3

d) K_1 i K_2

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Kodna brzina računa se kao $R(K) = \frac{\log_2(M)}{n}$, a kada je M oblika 2^k, kodna brzina jednaka je

$$R(K) = \frac{k}{n}$$

$$R(K_1) = \frac{2}{4} = 0.5$$

$$R(K_2) = \frac{2.322}{4} \approx 0.58$$

$$R(K_3) = \frac{3}{4} = 0.75$$

Zadatak 8: Neka je primljen signal $r(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + n(t)$, gdje je $n(t)$ aditivni Gaussov bijeli šum sa spektralnom gustoćom snage $N_0/2$. Primljeni signal doveden je na ulaz RC filtra čija je širina prijenosnog pojasa $B = 1/(4RC)$. Odredite omjer srednje snage “korisnog” signala prema srednjoj snazi šuma uzimajući pritom da kosinusi signal prolazi kroz filtar nepromijenjen.

a) $\frac{2A_c^2 C}{N_0}$

b) $\frac{2A_c^2 RC}{N_0}$

c) $\frac{A_c^2 RC}{2N_0}$

d) $\frac{2A_c^2 N_0}{RC}$

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

“Korisni” signal je kosinus dio primljenog signala. Kosinus je periodičan signal, a srednja snaga periodičnog signala računa se prema izrazu: $P = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} r^2(t)dt$

Kako RC filtar u potpunosti propušta kosinusni signal njegova srednja snaga iznosi: $P = \frac{A_c^2}{2}$

Srednja snaga aditivnog Gaussovog bijelog šuma unutar frekvencijskog pojasa $0 \le |f| \le B$ iznosi: $N = N_0 B$, tj. $N = N_0 \frac{1}{4RC} = \frac{N_0}{4RC}$

$$\frac{S}{N} = \frac{P}{N} = \frac{\frac{A_c^2}{2}}{\frac{N_0}{4RC}} = \frac{4A_c^2 RC}{2N_0} = \frac{2A_c^2 RC}{N_0}$$

Zadatak 9: Odredite prijenosnu funkciju LTI sustava čiji je impulsni odziv $h(t) = 0.5e^{-10|t|}$.

a) $H(f) = \frac{100}{10 + 4\pi^2 \cdot f^2}$

b) $H(f) = \frac{10}{10 + 4\pi^2 \cdot f^2}$

c) $H(f) = \frac{1}{100 + 4\pi^2 \cdot f^2}$

d) $H(f)=\dfrac{10}{100+4\pi^2\cdot f^2}$

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Prijenosna funkcija $H(f)$ i impulsni odziv $h(t)$ čine Fourierov transformacijski par i vrijedi:

$$H(f)=F\left[h(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

Nadalje,

$$h(t)=0,5\cdot e^{-10|t|}=\begin{cases}0,5\cdot e^{-10t}\text{za}\, t\geq 0\\ 0,5\cdot e^{+10t}\text{za}\, t\geq 0\end{cases}$$

Sada možemo proračunati prijenosnu funkciju:

$$\begin{aligned}
H(f)&=\\
&=0,5\cdot\int_{-\infty}^{0} e^{10t}\cdot e^{-j2\pi ft}dt+0,5\cdot\int_{0}^{+\infty} e^{-10t}\cdot e^{-j2\pi ft}dt\\
&=0,5\cdot\int_{-\infty}^{0} e^{(10-j2\pi f)}+\cdot\int_{0}^{+\infty} e^{-t(10-j2\pi f)}dt\\
&=0,5\cdot\left(\frac{1}{10-j2\pi f}e^{(10-j2\pi f)t}\Bigg|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{10+j2\pi f}e^{-t(10+j2\pi f)}\Bigg|_{0}^{+\infty}\right)\\
&=0,5\cdot\left(\frac{1}{10-j2\pi f}(1-0)-\frac{1}{10+j2\pi f}(0-1)\right)\\
&=0,5\cdot\left(\frac{1}{10-j2\pi f}+\frac{1}{10+j2\pi f}\right)
\end{aligned}$$

$$H(f)=\frac{10}{100+4\pi^2\cdot f^2}$$

Zadatak 10: Kontinuirana slučajna varijabla X ima funkciju gustoće vjerojatnosti zadanu slikom. Odredite entropiju slučajne varijable X ako je zadano $a = 1$ i $b = 5$.

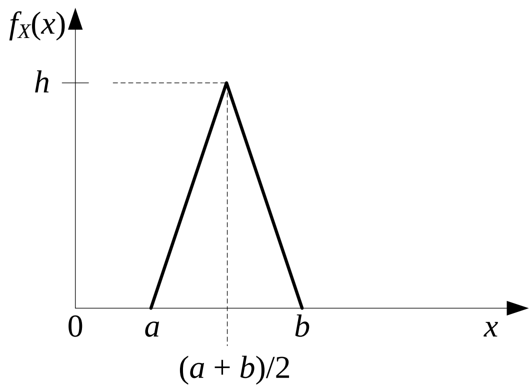
a) 0,693 nat/simbol

b) –0,193 nat/simbol

c) 1,193 nat/simbol

d) –0,5 nat/simbol

e) ništa od navedenog



Postupak rješavanja:

Izraz za $f_X(x)$ određuje se pomoću jednadžbi pravaca kroz dvije točke. Funkcija $f_X(x)$ određena je sljedećim izrazom:

$$f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{2h}{b-a}(x-a) & \text{za } a\le x\le \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{2h}{b-a}(b-x) & \text{za } \dfrac{a+b}{2}\le x\le b \end{cases}$$

Entropiju, tj. diferencijalnu entropiju slučajne varijable X računamo prema sljedećem izrazu:

$$H(X)=-\int_a^{(a+b)/2}\frac{2h}{b-a}(x-a)\ln\left[\frac{2h}{b-a}(x-a)\right]dx-\int_{(a+b)/2}^{b}\frac{2h}{b-a}(b-x)\ln\left[\frac{2h}{b-a}(b-x)\right]dx$$

Koristeći identitet

$$\int x\ln(x)dx=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{x^2}{4}$$

dobivamo:

$$H(X)=\frac{-h}{b-a}\left\{(x-a)^2\ln\left[\frac{2h}{b-a}(x-a)\right]-\frac{(x-a)^2}{2}\right\}\Bigg|_a^{(a+b)/2}+$$

$$+\frac{h}{b-a}\left\{(b-x)^2\ln\left[\frac{2h}{b-a}(b-x)\right]-\frac{(b-x)^2}{2}\right\}\Bigg|_{(a+b)/2}^{b}$$

Nakon sređivanja gornjeg izraza dobivamo:

$$H(X)=\frac{h(b-a)}{2}\left[-\ln(h)+\frac{1}{2}\right]$$

S obzirom da mora vrijediti

$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ jer je $f_X(x)$ funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne varijable, u ovom konkretnom slučaju to implicira da je $h \cdot (b - a)/2 = 1$. Dakle, $H(X) = -\ln(h) + 1/2$. Budući da su zadani $a = 1$ i $b = 5$, mora vrijediti $h = 0{,}5$. Sukladno tome, $H(X) = -\ln(0{,}5) + 0{,}5 = 1{,}193$ nat/simbol.