Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Ispitni rok iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 14. veljače 2018.

Pravilo bodovanja zadataka

Točni odgovori na zadatke 1 do 8 donose 10 bodova, netočno odgovoreni donose 4 negativna boda, a neodgovoreni zadaci donose 0 bodova. Zadatak 9 donosi 20 bodova i nema negativnih bodova i ne zaokružuje se na obrascu (predaje se postupak).

Zadatak 1: Na ulazu diskretnog komunikacijskog kanala, sa smetnjama, pojavljuju se četiri simbola, $X = \{x_1,...,x_4\}$. Na izlazu tog kanala pojavljuju se također četiri simbola, $Y = \{y_1,...,y_4\}$. Statističke veze između ulaznog i izlaznog skupa simbola zadane su matricom združenih vjerojatnosti - $[p(x_i, y_j)]$.

$$\left[p(x_i, y_j)\right] = \begin{bmatrix} 1/8 & 1/16 & 1/32 & 1/32 \\ 1/16 & 1/8 & 1/32 & 1/32 \\ 1/16 & 1/16 & 1/16 & 1/16 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Odredite transinformaciju u kanalu.

a) 3,375 bit/simbol

b) 3 bit/simbol

c) 0,375 bit/simbol

d) 3,75 bit/simbol

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Vjerojatnosti pojavljivanja simbola na ulazu diskretnog komunikacijskog kanala možemo dobiti iz matrice združenih vjerojatnosti $[p(x_i, y_j)]$ zbrajanjem redaka:

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^{4} p(x_i, y_j)$$

$$[p(x_i)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

dok zbrajanjem po stupcima dobivamo vjerojatnosti pojavljivanja simbola na izlazu diskretnog komunikacijskog kanala:

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{4} p(x_i, y_j)\,; \;\; j = 1, \ldots, 4$$

$$[p(y_j)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Entropiju ulaznog i izlaznog skupa simbola je sada jednostavno izračunati:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{4} p(x_i)\log_2 p(x_i) = 2\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{4} p(y_j)\log_2 p(y_j) = 1{,}75\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

Združena entropija parova simbola:

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} p(x_i,y_j)\log_2 p(x_i,y_j) = 3{,}375\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

Transinformacija:

$$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) = 0{,}375\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

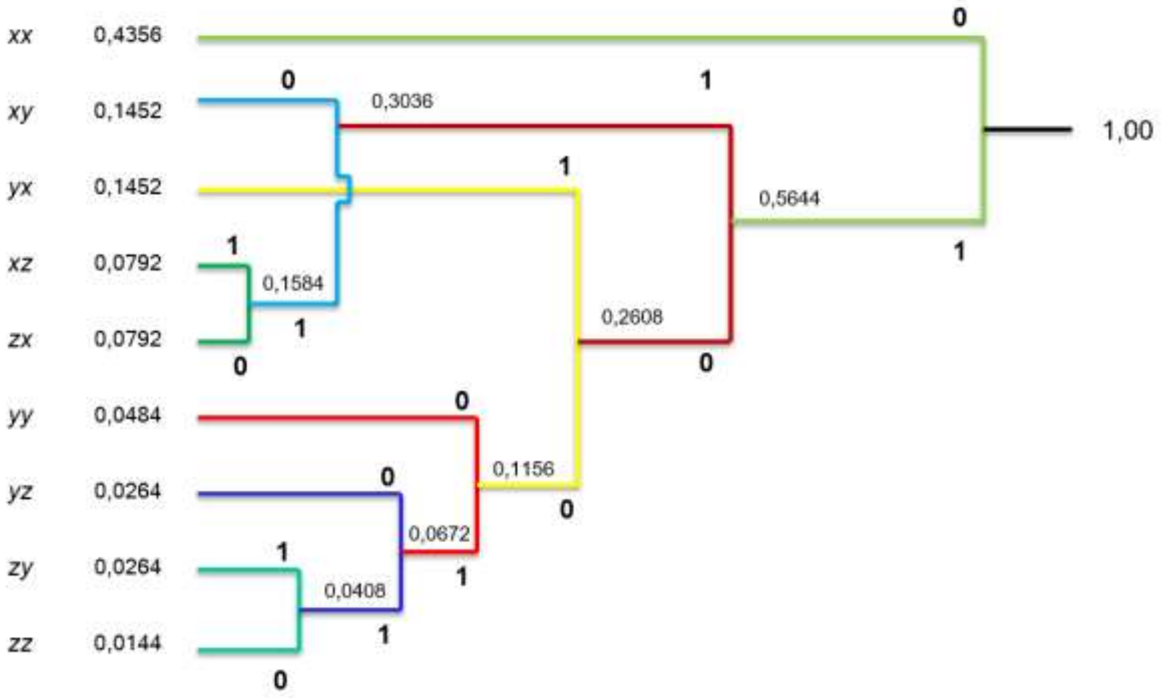
Zadatak 2: Diskretno bezmemorijsko izvorište generira simbole iz skupa simbola $X = \{x, y, z\}$ s vjerojatnostima pojavljivanja 0,66, 0,22, odnosno 0,12. Kodirajte sve parove simbola binarnim Huffmanovim kodom, a potom odredite srednju duljinu kodne riječi izraženu jedinicom bit/simbol.

a) 1,255 bit/simbol
b) 2,51 bit/simbol
c) 4 bit/simbol
d) 3,47 bit/simbol
e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

PAR SIMBOLA (a_i)	**VJEROJATNOST POJAVLJIVANJA PARA SIMBOLA (p_i)**
xx	0,4356
xy	0,1452
yx	0,1452
xz	0,0792
zx	0,0792
yy	0,0484
yz	0,0264
zy	0,0264
zz	0,0144
∑	1**,0000**

PAR SIMBOLA (a_i)	**VJEROJATNOST POJAVLJIVANJA (p_i)**	**KODNA RIJEČ**	**DULJINA KODNE RIJEČI (l_i)**
xx	0,4356	0	1
xy	0,1452	110	3
yx	0,1452	101	3
xz	0,0792	1111	4
zx	0,0792	1110	4
yy	0,0484	1000	4
yz	0,0264	10010	5
zy	0,0264	100111	6
zz	0,0144	100110	6



$$L_{par} = \sum_{1}^{9} p_i\, l_i$$

$$L_{par} = 2,5108 \frac{\textbf{bit}}{\textbf{par simbola}}$$

$$L = \frac{L_{par}}{2} = 1,2554 \frac{\textbf{bit}}{\textbf{simbol}}$$

Zadatak 3: Za zaštitu poruka u prijenosu uporabljen je koder koji koristi kod Ham(3) pri čemu je matrica provjere pariteta zadana kao:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Odredite sindrom, $S(\mathbf{c}')$, za primljenu kodnu riječ $\mathbf{c}'$ = [1101110].

a) 000
b) 001
c) 010
d) 100
e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

$S(\mathbf{c}') = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{H}^T$

$$S(\mathbf{c}') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 4: Govorni signal na ulazu promatranog prijenosnog sustava uzorkovan je frekvencijom f_u = 8 kHz, a potom kodiran s 8 bita po uzorku. Omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma u kanalu iznosi 30 dB. Odredite potrebnu širinu prijenosnog pojasa, ako se šum u kanalu poveća za 3 dB.

a) 8 kHz
b) 1,9953 kHz
c) 6,4 kHz
d) 7,133 kHz
e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Ako se šum u kanalu poveća za 3 dB, tada vrijedi:

$$3\,\text{dB} = 10 \cdot \log N_2 - 10 \cdot \log N_1 = 10 \cdot \log \frac{N_2}{N_1} \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = 1{,}9953$$

Temeljem frekvencije uzorkovanja f_u i broja bita po uzorku r možemo dobiti informacijsku brzinu

$$R = f_u \cdot r = 64\ \text{kbit/s}\,.$$

Kapacitet kanala C mora biti veći ili jednak informacijskoj brzini R. Budući da je širina pojasa proporcionalna s kapacitetom kanala, potrebna širina prijenosnog pojasa je ona koju dobivamo za $C = R$ i iznosi:

$$B = \frac{C}{\log_2\left(1 + \frac{S_1}{N_2}\right)} = \frac{R}{\log_2\left(1 + \frac{S_1}{N_1} \cdot \frac{N_1}{N_2}\right)} = \frac{R}{\log_2\left(1 + \frac{1000}{1{,}9953}\right)} = 7{,}133\,\text{kHz}$$

Zadatak 5: Promatrajte dva informacijska izvora bez memorije. Prvi izvor generira skup simbola $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Svakom simbolu x_i pridijeljena je apriorna vjerojatnost pojavljivanja $P(x_i)$, i = 1, ..., n. Drugi izvor generira skup simbola $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$, pri čemu vrijedi m =

$3n$. Svakom simbolu y_j, $j = 1, ..., m$, pridružena je apriorna vjerojatnost pojavljivanja sukladno sljedećem pravilu: $P(y_{3i-2}) = P(y_{3i-1}) = P(y_{3i}) = P(x_i)/3$, $\forall\ i = 1, ..., n$. Odredite razliku između entropija ova dva skupa simbola, $H(Y) - H(X)$.

a) 0 bit/simbol

b) 1 bit/simbol

c) 1.58 bit/simbol

d) –1.58 bit/simbol

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Izvor koji generira skup simbola $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ čije su apriorne vjerojatnosti pojavljivanja $P(x_i)$, $i = 1, ..., n$, ima entropiju određenu izrazom:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} P(x_i)\log_2 P(x_i)$$

Na sličan način, izvor koji generira skup simbola $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$, čije su apriorne vjerojatnosti pojavljivanja $P(y_j)$, $j = 1, ..., m$, ima entropiju određenu izrazom:

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{m} P(y_j)\log_2 P(y_j)$$

S obzirom da vrijedi $m = 3n$ i $p(y_{3i-2}) = p(y_{3i-1}) = p(y_{3i}) = p(x_i)/3$, $\forall\ i = 1, ..., n$, tada je:

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{m} P(y_j)\log_2 P(y_j) = -\sum_{j=1}^{3n} \frac{P\left(x_{\lceil j/3 \rceil}\right)}{3}\log_2 \frac{P\left(x_{\lceil j/3 \rceil}\right)}{3} = -\sum_{i=1}^{n} P(x_i)\log_2 \frac{P(x_i)}{3} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} P(x_i)\log_2 P(x_i) + \sum_{i=1}^{n} P(x_i)\log_2 3 = H(X) + \log_2(3)\cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} P(x_i)}_{=1} = H(X) + \log_2(3)$$

Dakle, razlika $H(Y) - H(X)$ iznosi 1,58 bit/simbol.

Zadatak 6: Koder informacije koji koristi aritmetičko kodiranje na svom ulazu prima poruke sastavljene isključivo od dva simbola, X i Y (npr. *XYXXXY*). Osnovni intervali za simbole X i Y su $[0, 1/3)$, odnosno $[1/3, 1)$. Prilikom kodiranja neke poruke koristi se pravilo da se uvijek uzme vrijednost na sredini podintervala dobivenog algoritmom aritmetičkog kodiranja te poruke i ta se vrijednost pretvori u binarni broj temeljem kojeg se određuje kodna riječ na izlazu kodera. Pri tome treba uzeti u obzir pretpostavku da je kôd kreiran koderom informacije prefiksni! Ako se na ulazu promatranog kodera informacije pojavi poruka duljine osam simbola, odredite koja je najmanja moguća duljina binarne kodne riječi kreirane algoritmom aritmetičkog koda za takvu poruku, a da pri tome bude zadržano svojstvo prefiksnosti koda.

a) 5 bita

b) 14 bit

c) 17 bita

d) 7 bita

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Ako se na ulazu kodera pojavi poruka duljine osam simbola, tada se, s obzirom na zadane osnovne podintervale [0, 1/3), odnosno [1/3, 1), širina $P(x)$ konačnog podintervala (nakon kodiranja svih osam simbola) nalazi unutar granica:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^8}_{\text{za } XXXXXXXX} \le P(x) \le \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^8}_{\text{za } YYYYYYYY}$$

Ako se prilikom aritmetičkog kodiranja poruke uzme vrijednost na sredini podintervala dobivenog algoritmom aritmetičkog kodiranja te poruke i ta se vrijednost pretvori u binarni broj temeljem kojeg se određuje kodna riječ na izlazu kodera, uzimajući pri tome u obzir prefiksnost koda, tada za duljinu kodne riječi, $l(x)$, vrijedi

$$l(x) = \left\lceil \log_2 \frac{1}{P(x)} \right\rceil + 1\,[\text{bit}]$$

Dakle, ako naiđe slijed simbola *YYYYYYYY* tada će širina $P(x)$ podintervala dobivenog kodiranjem te poruke biti najveća (promatrano na razini poruka duljine osam simbola!), a recipročna vrijednost, $1/P(x)$, najmanja, te će, sukladno tome najmanja moguća duljina binarne kodne riječi kreirane algoritmom aritmetičkog koda za poruku duljine osam simbola iznositi 6 bita.

Zadatak 7: Na ulaz sklopa za uzimanje uzoraka dolazi signal $u(t) = 2\sin(2\pi f_0 t + \phi)$. Prilikom uzorkovanja signala zadovoljen je uvjet da je frekvencija uzorkovanja $f_u > 2f_0$. Uzorci signala $u(t)$ dolaze na ulaz kvantizatora s jednolikom karakteristikom kvantiziranja čiji se dozvoljeni raspon amplituda ulaznog signala nalazi unutar intervala od –5 V do +5 V. Odredite s koliko najmanje bita treba kodirati svaki kvantizirani uzorak signala $u(t)$ pa da omjer srednje snage tog signala prema srednjoj snazi kvantizacijskog šuma bude veći od 23 dB. Napomena: broj bita po uzorku mora biti cjelobrojan.

a) 5 bit/uzorak

b) 6 bit/uzorak

c) 4 bit/uzorak

d) 7 bit/uzorak

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Amplituda signala $u(t)$ iznosi 2 V. Dakle, srednja snaga signala $u(t)$ jednaka je $A^2/2$, tj. 2 W.

Srednja snaga kvantizacijskog šuma zadovoljava jednakost:

$$Q = \frac{1}{3} m_{\max}^2 2^{-2r}$$

pri čemu je $m_{\max} = 5$ V, a r je broj bita po uzorku signala. Sukladno navedenom, omjer srednje snage signala $u(t)$ prema srednjoj snazi kvantizacijskog šuma zadovoljava jednakost:

$$\frac{P}{Q} = 2 \frac{1}{\frac{1}{3} m_{\max}^3 2^{-2r}} = 6 \frac{2^{2r}}{m_{\max}^2}$$

Izraženo logaritamski, omjer srednje snage signala $u(t)$ prema srednjoj snazi kvantizacijskog šuma jednak je

$$10\cdot\log_{10}\left(\frac{P}{Q}\right)=10\cdot\log_{10}\left(6\frac{2^{2r}}{m_{\max}^2}\right)=-6,2+6,02\cdot r\,[dB]$$

S obzirom da omjer srednje snage signala $u(t)$ prema srednjoj snazi kvantizacijskog šuma mora bit veći od 23 dB, konačan rezultat je da je po svakom uzorku ulaznog signala $u(t)$ potrebno uzeti 5 bita:

$$\begin{aligned}&-6,2+6,02\cdot r>23\\&6,02\cdot r>29,2\\&r>4,85\\&r=5\end{aligned}$$

Zadatak 8: Razmatrajte kôd C koji nastaje binarnim kodiranjem parnim paritetom temeljem kojeg se svakoj poruci $[x_1\ x_2\ ...\ x_k]$ duljine k bita na njen kraj dodaje paritetni bit R, uslijed čega nastaje kodna riječ $[x_1\ x_2\ ...\ x_k\ R]$ duljine n bita, $x_1, x_2, ...\ x_k, R \in F_2 = \{0, 1\}$. Odredite matricu za provjeru pariteta koda C, ako je $n = 6$.

a) [1 0 0 0 0 1]

b) [0 0 0 0 0 0]

c) [1 0 1 0 1 0]

d) [1 1 1 1 1 1]

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Kôd dobiven kodiranjem parnim paritetom je linearan blok kôd. Distanca takvog koda iznosi 2 (težina najmanje kodne riječi različite od 0 0 0 0 0 0). Uz $n = 6$, kôd C ima oznaku [6, 5, 2]. Uzmimo sve poruke duljine 5 bita koje sadrže samo po jednu binarnu jedinicu, kreirajmo adekvatne kodne riječi i formirajmo generirajuću matricu koda C u standardnom obliku:

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}=\left[\mathbf{I}_5\middle|\mathbf{A}\right]$$

Sukladno tome, matrica za provjeru pariteta koda C ima oblik:

$$\mathbf{H}=\left[\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\middle|\mathbf{I}_1\right]=1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1$$

9. zadatak: Razmatrajte prijenosni kanal na čijem se ulazu pojavljuje signal $x(t)$, a signal na izlazu kanala, $y(t)$, jednak je $a\cdot x(t)$, $0 < a < 1$.

a) (5 bodova) Dokažite da je takav kanala linearan i vremenski invarijantan sustav.

b) (5 bodova) Odredite impulsni odziv i prijenosnu funkciju takvog kanala.

Na ulaz takvog sustava dovodimo signal $x(t) = A\sin(\omega t)$.

c) (5 bodova) Promatrajte ovakav deterministički signal kao rubni slučaj slučajnog procesa opisanog familijom slučajnih varijabli $\{X(t),\ t \in \mathbf{R}\}$, pri čemu je svaka slučajna varijabla $X(t)$ jednaka vrijednosti funkcije $x(t)$ za svaki $t \in \mathbf{R}$. Odredite funkciju gustoće vjerojatnosti $f_{X(t)}(x, t)$ familije slučajnih varijabli $X(t)$ i dokažite da zadovoljava osnovno svojstvo koje svaka funkcija gustoće vjerojatnosti mora zadovoljavati.

d) (5 bodova) Odredite srednju vrijednost promatranog slučajnog procesa. Da li je takav proces stacionaran?