Sveučilište u Zagrebu

Fakultet elektrotehnike i računarstva

Dekanski rok iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 20. rujna 2017.

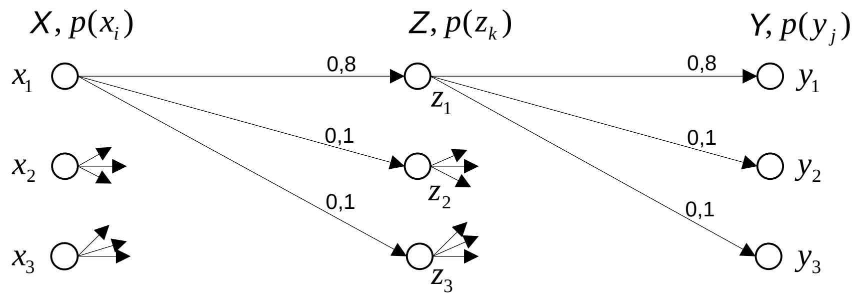
Trajanje ispita: 120 minuta

---

1. zadatak (10 bodova): Tri simbola jednakih vjerojatnosti pojavljivanja prenose se preko dva serijski vezana kanala u kojima je vjerojatnost ispravnog prijenosa 0.8, a svi mogući pogrešni prijelazi su jednako vjerojatni. Odredite vjerojatnosti pojave simbola y_j na izlazu kanala ako je na ulazu simbol x_i za sve parove i, j.

Postupak rješavanja:

Na slici je dan model kanala opisanog u zadatku. Radi preglednosti slike samo su navedeni prijelazi za jedan ulazni simbol.



Model kanala

Vjerojatnosti pojave simbola na ulazu u kanal su jednake i iznose 1/3, tj.

$$p(x_i) = \frac{1}{3} \text{ za } i = 1, 2, 3$$

Da bi odredili vjerojatnosti $p(y_j | x_i)$ moramo pronaći vezu između ulaznog i izlaznog skupa simbola.

Također, sa slike vidimo da je:

$$\left[p(z_k | x_i) \right] = \left[p(y_j | z_k) \right] = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 08 \end{bmatrix}$$

Matrica združenih vjerojatnosti je:

$$[p(x_i, z_k)] = \begin{bmatrix} \frac{8}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{30} & \frac{8}{30} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{8}{30} \end{bmatrix}.$$

Iz sljedećeg uvjeta:

$$p(z_k) = \sum_{i=1}^{3} p(x_i, z_k), \text{za } k = 1, 2, 3$$

Dobivamo:

$$p(z_1) = p(z_2) = p(z_3) = \frac{1}{3} \rightarrow [p(z_k)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Važno je uočiti da se vektor vjerojatnosti $[p(z_k)]$ mogao dobiti klasičnim množenjem matrica, tj. $[p(z_k)] = [p(x_i)]\ [p(z_k|x_i)]$.

Iz

$$[p(y_j, z_k)] = \begin{bmatrix} \frac{8}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{30} & \frac{8}{30} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{8}{30} \end{bmatrix}$$

dobivamo vrijednost pojave simbola na izlazu iz kanala, tj.

$$p(y_1) = p(y_2) = p(y_3) = \frac{1}{3} \rightarrow [p(y_j)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

U ovom slučaju također vrijedi slijedeća jednakost $[p(y_j)] = [p(z_k)]\ [p(y_j|z_k)]$.

Da bismo odredili vjerojatnost $p(y_j\,|x_i)$ poslužiti ćemo se prethodno napisanim izrazima, tj.

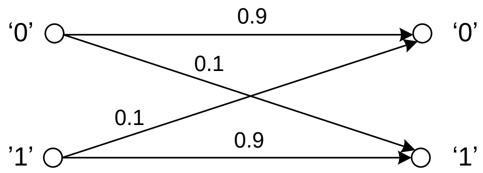
$[p(y_j)] = [p(z_k)]\ [p(y_j|z_k)] = [p(x_i)]\ [p(z_k|x_i)]\ [p(y_j|z_k)] = [p(x_i)]\ [p(y_j|x_i)]$, tj. uočavamo da vrijedi:

$$[p(y_j|x_i)] = [p(z_k|x_i)]\ [p(y_j|z_k)]$$

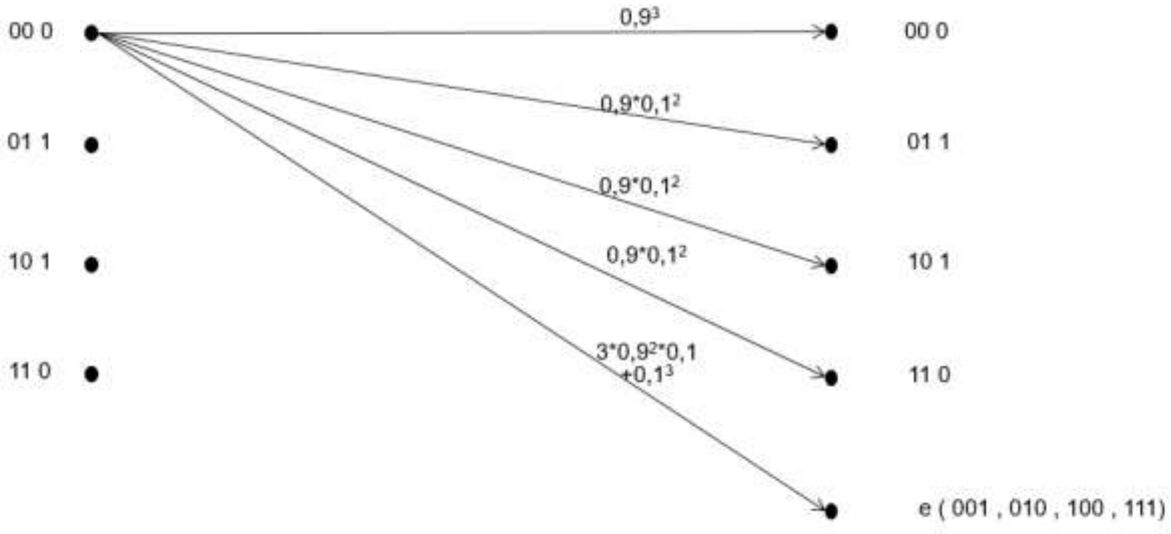
što nakon proračuna daje:

$$\left[p(y_j\,|x_i)\right] = \begin{bmatrix} 0,66 & 0,17 & 0,17 \\ 0,17 & 0,66 & 0,17 \\ 0,17 & 0,17 & 0,66 \end{bmatrix}$$

2. zadatak (10 bodova): Četiri poruke, generirane iz skupa od četiri jednako vjerojatna simbola $X = \{x_1,...,x_4\}$, kodirane binarnim kodom (x_1 – '00'; x_2 – '01'; x_3 – '10'; x_4 – '11'), prenose se binarnim simetričnim kanalom (slika). Izračunajte transinformaciju u kanalu ako se u prijenosu kao zaštita poruka uvede jedan paritetni bit (parni paritet!).



Postupak rješavanja:



$$[p(y_j\,|\,x_i)] \begin{bmatrix} 0,729 & 0,009 & 0,009 & 0,009 & 0,244 \\ 0,009 & 0,729 & 0,009 & 0,009 & 0,244 \\ 0,009 & 0,009 & 0,729 & 0,009 & 0,244 \\ 0,009 & 0,009 & 0,009 & 0,729 & 0,244 \end{bmatrix}$$

$$[p(x_i,y_j)]=[p(x_i)]_d[p(y_j\mid x_i)]=$$

$$=\begin{bmatrix}0,25 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0,25 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0,25 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0,25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0,729 & 0,009 & 0,009 & 0,009 & 0,244\\ 0,009 & 0,729 & 0,009 & 0,009 & 0,244\\ 0,009 & 0,009 & 0,729 & 0,009 & 0,244\\ 0,009 & 0,009 & 0,009 & 0,729 & 0,244\end{bmatrix}$$

$$[p(x_i,y_j)]=\begin{bmatrix}0,18225 & 0,00225 & 0,00225 & 0,00225 & 0,061\\ 0,00225 & 0,18225 & 0,00225 & 0,00225 & 0,061\\ 0,00225 & 0,00225 & 0,18225 & 0,00225 & 0,061\\ 0,00225 & 0,00225 & 0,00225 & 0,18225 & 0,061\end{bmatrix}$$

$$H(X)=-\sum_{i=1}^{4}p(x_i)\,\log_2\left(p(x_i)\right)=2\,\frac{bit}{simbol}$$

$$[p(y_j)]=\begin{bmatrix}0,189 & 0,189 & 0,189 & 0,189 & 0,244\end{bmatrix}$$

$$H(Y)=-\sum_{j=1}^{5}p(y_j)\,\log_2\left(p(y_j)\right)=2,31363\,\frac{bit}{simbol}$$

$$[p(x_i,y_j)]=\begin{bmatrix}0,18225 & 0,00225 & 0,00225 & 0,00225 & 0,061\\ 0,00225 & 0,18225 & 0,00225 & 0,00225 & 0,061\\ 0,00225 & 0,00225 & 0,18225 & 0,00225 & 0,061\\ 0,00225 & 0,00225 & 0,00225 & 0,18225 & 0,061\end{bmatrix}$$

$$H(X,Y)=-\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5}p(x_i,y_j)\,\log_2\left(p(x_i,y_j)\right)=3,01247\,\frac{bit}{simbol}$$

$$I(X;Y)=H(X)+H(Y)-H(X,Y)=$$
$$=2+2,31363-3,01247=$$
$$=1,3012\,\frac{bit}{simbol}$$

3. zadatak (10 bodova): Bezmemorijsko izvorište generira simbole iz skupa simbola $X=\{a, b, c, d, e, f, g\}$ s vjerojatnostima pojavljivanja $p(a)=0.22$, $p(b)=0.35$, $p(c)=0.15$, $p(d)=0.09$, $p(e)=0.09$, $p(f)=0.05$ i $p(g)=0.05$. Kodirajte dani skup simbola Shannon-Fano metodom (binarno kodiranje) tako da srednja duljina kodne riječi bude minimalna. Odredite srednju duljinu kodne riječi te efikasnost koda.

Postupak rješavanja:

p(b)=0.35	0	0		
p(a)=0.22	0	1		
p(c)=o.15	1	0	0	
p(d)=0.09	1	0	1	
p(e)=0.09	1	1	0	
p(f)=0.05	1	1	1	0
p(g)=0.05	1	1	1	1

$$L = \sum_{i=1}^{n} p_i l_i = 2.53 \frac{bit}{simbol}$$

$$\varepsilon = \frac{H(X)}{L}$$

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\log_2 p(x_i) = 2.48 \frac{bit}{simbol}$$

$$\varepsilon = 0.9797$$

4. zadatak (10 bodova): Uzimajući polazni rječnik *D* gdje je *D*[1]=*a* i *D*[2]=*b* kodirajte poruku *abbbbbbabababaaab* koristeći algoritam LZW.

Postupak rješavanja:

U tablici pregledno je prikazan postupak LZW kodiranja, a ispod nje je algoritam, izveden korak po korak.

Tablični prikaz LZW kodiranja

korak	mjesto	sadržaj rječnika	Izlaz
1	1	*D*[3] = *ab*	[1]
2	2	*D*[4] = *bb*	[2]
3	3	*D*[5] = *bbb*	[4]
4	5	*D*[6] = *bbba*	[5]
5	8	*D*[7] = *aba*	[3]
6	10	*D*[8] = *abab*	[7]

7	13	*D*[9] = *ba*	[2]
8	14	*D*[10] = *aa*	[1]
9	15	*D*[11] = *aab*	[10]
10	16		[2]

Napomena: Masnim i podcrtanim slovima prikazuje se element u rječniku koji odgovara trenutnom izlazu. U redu ispod navodi se novi unos u rječnik, te naposlijetku izlaz iz kodera informacije.

a<u></u>*bbbbbbabababaaab*

D[3]=*ab*

izlaz=[1]

*a****b****bbbbbabababaaab*

D[4]=*bb*

izlaz=[2]

*ab****bb****bbbabababaaab*

D[5]=*bbb*

izlaz=[4]

*abbb****bbb****abababaaab*

D[6]=*bbba*

izlaz=[5]

*abbbbbb****ab****ababaaab*

D[7]=*aba*

izlaz=[3]

*abbbbbbab****aba****baaab*

D[8]=*abab*

izlaz=[7]

*abbbbbbababa**b**aaab*

D[9]=*ba*

izlaz=[2]

*abbbbbbababab**a**aab*

D[10]=*aa*

izlaz=[1]

*abbbbbbababab**aa**b*

D[11]=*aab*

izlaz=[10]

*abbbbbbabababaaa**b***

izlaz= [2]

Kodirana poruka = [1, 2, 4, 5, 3, 7, 2, 1, 10, 2]

5. zadatak (10 bodova): Dan je binarni kôd *K* [*n*, *k*]=[7, 4] s generirajućom matricom

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Odredite kodnu riječ koja je poslana ako je primljena kodna riječ **c'** = [1110100].

Postupak rješavanja:

Prvo odredimo matricu **A**. Iz $\mathbf{G} = [\mathbf{I}_k |\ \mathbf{A}]$ slijedi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow -\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrica provjere pariteta:

$$\mathbf{H} = [-\mathbf{A}^{\mathbf{T}} |\ \mathbf{I}_{n-k}] = [\mathbf{A}^{\mathbf{T}} |\ \mathbf{I}_{n-k}]$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Izračunamo sindrom prema izrazu

$$S(\mathbf{c}') = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{H}^{\mathbf{T}}$$

$$S(\mathbf{c}') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dobili smo da je sindrom jednak **0**, pa iz toga zaključujemo da je poslana kodna riječ jednaka primljenoj, tj.

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. zadatak (10 bodova): Neka je *K* linearni ciklični kôd kojem pripada kodna riječ 011011. Kodirajte poruku 11 koristeći metodu ciklične provjere zalihosti, tj. ciklične redundantne zaštite (engl. *Cyclic Redundancy Check*, skr. CRC).

Postupak Rješavanja:

Polinomski zapis poruke **d** = [1 1], koju treba kodirati, je $d(x) = x + 1$ tako da je zaštitni dio kodne riječi:

$$r(x) = d(x) \cdot x^r \ mod\ [g(x)]$$

$(x^5 + x^4) \div (x^4 + x^3 + x + 1) = x$

$\underline{}$
$x^5 \pm x^4 \pm x^2 \pm x$

$x^2 + x$

Dakle, $r(x) = x^2 + x$, odnosno zaštitni bitovi su 0110. Kodna riječ je tada:

$$\mathbf{c} = [110110]$$

7. zadatak (20 bodova): Promatrajmo slučajni proces *X*(*t*) zadan kao $X(t) = A\cos 2\pi ft$, gdje je *f* konstanta, a *A* slučajna varijabla s jednolikom razdiobom na [0, 2]. Odredite autokovarijancu i autokorelaciju danog slučajnog procesa.

Postupak rješavanja:

$$f_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, x \in [0,2] \\ 0, x \notin [0,2] \end{cases}, x \in R$$

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)dx$$

$$E[A^n] = \int_0^2 x^n \cdot \frac{1}{2} dx \Rightarrow E[A] = \frac{1}{2}\int_0^2 xdx = 1$$

$$E[A^2] = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dx = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} R_X(t_1,t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] \\ &= E[[A\cos 2\pi ft_1][A\cos 2\pi ft_2]] \\ &= E[A^2]\cos(2\pi ft_1)\cos(2\pi ft_2) \end{aligned}$$

$$R_X(t_1,t_2) = \cos(2\pi ft_1)\cos(2\pi ft_2)$$

$$\begin{aligned} C_X(t_1,t_2) &= R_X(t_1,t_2) - E[X(t_1)]E[X(t_2)] \\ &= R_X(t_1,t_2) - E[A\cos 2\pi ft_1]E[A\cos 2\pi ft_2] \\ &= R_X(t_1,t_2) - \left(E[A]\right)^2 \cos(2\pi ft_1)\cos(2\pi ft_2) \end{aligned}$$

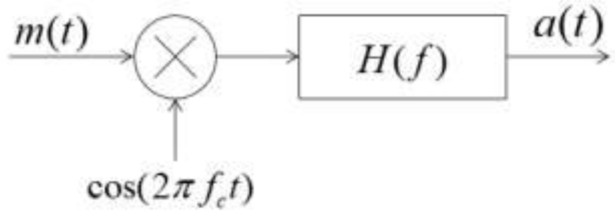
$$C_X(t_1,t_2) = \cos(2\pi ft_1)\cos(2\pi ft_2) - \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cos(2\pi ft_1)\cos(2\pi ft_2)$$

$$C_X(t_1,t_2) = \left(1 - \frac{16}{9}\right)\cos(2\pi ft_1)\cos(2\pi ft_2)$$

$$C_X(t_1,t_2) = -\frac{7}{9}\cos(2\pi ft_1)\cos(2\pi ft_2)$$

8. zadatak (20 bodova): Signal $m(t) = 4 \cdot \cos(2\pi f_1 t) + 4 \cdot \cos(2\pi f_2 t)$ [V], $f_1 = f_2 / 2$, dovodi se na ulaz sklopa sa slike. Odredite snagu signala na izlazu sklopa (slika, točka a)) čija je prijenosna funkcija:

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| = f_c - f_2 \\ \frac{1}{4}, & |f| = f_c - f_1 \\ \frac{1}{2}, & |f| = f_c \\ \frac{3}{4}, & |f| = f_c + f_1 \\ 1, & |f| = f_c + f_2 \end{cases}$$



Napomena: $f_c >> f_1$ i $f_c >> f_2$ ali ne zanemarivo!

Postupak rješavanja:

$$s(t) = m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$
$$s(t) = (4 \cdot \cos(2\pi f_1 t) + 4 \cdot \cos(2\pi f_2 t)) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$
$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(4 \cdot \cos(2\pi t(f_1 + f_c)) + 4 \cdot \cos(2\pi t(f_1 - f_c)) + 4 \cdot \cos(2\pi t(f_2 + f_c)) + 4 \cdot \cos(2\pi t(f_2 - f_c))\right)$$
$$s(t) = 2 \cdot \cos(2\pi t(f_c + f_1)) + 2 \cdot \cos(2\pi t(f_c - f_1)) + 2 \cdot \cos(2\pi t(f_c + f_2)) + 2 \cdot \cos(2\pi t(f_c - f_2))$$

Periodična funkcija $s(t)$, dana gornjim izrazom, prikazana je u obliku Fourierovog reda. Snaga periodičkog signala računa se izrazom:

$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = |c_0|^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$$

U konkretnom slučaju $c_0 = 0$, a ostali koeficijenti c_k jednaki su $\sqrt{2}$. Da bi izračunali snagu signala $a(t)$, moramo koeficijente funkcije $s(t)$ pomnožiti s vrijednostima prijenosne funkcije $H(f)$ na odgovarajućim frekvencijama. Sukladno tome, srednju snagu signala $a(t)$ moguće je izračunati sljedećim izrazom:

$$P = \left(\sqrt{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 + \left(\sqrt{2} \cdot \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\sqrt{2} \cdot 1\right)^2 + \left(\sqrt{2} \cdot 1\right)^2$$
$$P = 5.25 \text{ W}$$