Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Ispitni rok iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 14. veljače 2013.

Napomena:

Svaki točno riješen zadatak boduje se s najviše 10 bodova. Svaki zadatak potrebno je rješavati na zasebnom listu papira. U svakom potpitanju jasno istaknite konačni odgovor. Svaka izračunata veličina mora imati točnu brojčanu vrijednost i po potrebi mjernu jedinicu.
<u>U zadacima koji su razdvojeni na više dijelova (tzv. I .dio, II. dio,...) ne postoji nikakva povezanost između navedenih dijelova.</u>

Trajanje ispita: 150 minuta.

ZADACI

1. zadatak: Neka su X_1 i X_2 diskretne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti iz skupova $\{1, 2, ..., m\}$, odnosno $\{m+1, m+2, ..., m+n\}$, $m, n \in \mathbb{N}$, te neka su njihove pripadajuće razdiobe vjerojatnosti p_{X_1}, odnosno p_{X_2}. Neka je

$$X = \begin{cases} X_1 \text{ s vjerojatnošću } \alpha \\ X_2 \text{ s vjerojatnošću } 1-\alpha \end{cases}$$

i) **{5 bodova}** Odredite $H(X)$ kao funkciju od α, $H(X_1)$ i $H(X_2)$.

ii) **{5 bodova}** Odredite maksimalnu vrijednost entropije $H(X)$ u ovisnosti o parametru α.

Rješenje:

i)

Radi lakoće zapisa stavimo: $p_{X_1} = p_1$ i $p_{X_2} = p_2$. Koristeći da je $p_X(x) = \alpha p_1(x)$ za $x \in X_1$, odnosno $p_X(x) = (1-\alpha)p_2(x)$ za $x \in X_2$ dobivamo

$$\begin{aligned} H(X) &= -\sum_{i=1}^{m} \alpha p_1(x=i) log_2\, \alpha p_1(x=i) - \sum_{i=m+1}^{m+n} (1-\alpha)p_2(x=i) log_2\, (1-\alpha)p_2(x=i) \\ &= -\alpha \sum_{i=1}^{m} p_1(x=i)[log_2 \alpha + log_2\, p_1(x=i)] - (1 \\ &\quad - \alpha) \sum_{i=m+1}^{m+n} p_2(x=i)[log_2(1-\alpha) + log_2\, p_2(x=i)] \\ &= -\alpha log_2 \alpha - (1-\alpha) log_2(1-\alpha) + \alpha H(X_1) + (1-\alpha) H(X_2)\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}} \end{aligned}$$

ii)

Maksimum $H(X)$ u ovisnosti o α dobivamo iz

$$\frac{dH(X)}{d\alpha} = log_2 \frac{1-\alpha}{\alpha} + H(X_1) - H(X_2) = 0$$

što daje

$$\frac{1-\alpha}{\alpha} = 2^{H(X_2)-H(X_1)}$$

odnosno

$$\alpha = \frac{1}{1+2^{H(X_2)-H(X_1)}} = \frac{2^{H(X_1)}}{2^{H(X_1)}+2^{H(X_2)}}.$$

Zamjenom prethodnog izraza u $H(X)$ dobivamo

$$H(X) \leq \frac{2^{H(X_1)}}{2^{H(X_1)}+2^{H(X_2)}}\left(H(X_1) - log_2 \frac{2^{H(X_1)}}{2^{H(X_1)}+2^{H(X_2)}}\right) + \frac{2^{H(X_2)}}{2^{H(X_1)}+2^{H(X_2)}}\left(H(X_2) - log_2 \frac{2^{H(X_2)}}{2^{H(X_1)}+2^{H(X_2)}}\right)$$

što nakon sređivanja daje

$$H(X) \leq log_2\left(2^{H(X_1)} + 2^{H(X_2)}\right)$$

2. zadatak: (I. dio) **{3 boda}** Potrebno je binarnim jednoznačno dekodabilnim kodom kodirati $n + 3$ izvorišna simbola, $n \in \mathbb{N}$, ali tako da prva tri simbola imaju duljinu kodne riječi 3 bita, dok ostali simboli trebaju imati duljinu kodne riječi 8 bita. Odredite najveći n za koji je navedeni uvjet kodiranja zadovoljen.

(II. dio) **{3 boda}** Bezmemorijsko izvorište generira četiri simbola a_1, a_2, a_3 i a_4 s vjerojatnostima pojavljivanja 0.5, 0.25, 0.125 i 0.125, slijedno gledano. Odredite srednju duljinu kodne riječi binarnog Huffmanovog koda koji se koristi za kodiranje svih blokova izvorišnih simbola duljine 5 (simbola). Srednju duljinu kodne riječi izrazite jedinicom „bit/blok_simbola".

(III. dio) **{4 boda}** Neka $\overline{M} = \sum_i p_i \log_2(l_i)$ predstavlja očekivanje od logaritma duljina kodnih riječi l_i pridruženih entropijskim kodiranjem diskretnoj slučajnoj varijabli X s razdiobom vjerojatnosti $p_X(x)$. Također, neka je $\overline{M}_1 = \min(\overline{M})$ za sve prefiksne kodove, i isto tako neka je $\overline{M}_2 = \min(\overline{M})$ za sve jednoznačno dekodabilne kodove. Koji odnos postoji između $\overline{M}_1$ i $\overline{M}_2$. Dokažite!

Rješenje:

(I. dio)

Ako je kôd jednoznačno dekodabilan tada zadovoljava Kraft-McMillanovu nejednakost, tj.:

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i} \leq 1$$

l_i - duljina kodne riječi dodijeljene simbolu x_i

Iz uvjeta zadatka dobivamo da je:

$$3\frac{1}{2^3} + n\frac{1}{2^8} \leq 1$$

odnosno

$$\boldsymbol{n \leq 160}$$

(II. dio)

Entropija danog skupa simbola je $H(X)$ = 1,75 bit/simbol, dok je srednja duljina kodne riječi za slučaj binarnog kodiranja Huffmanovim kodom jednaka $L(X) = H(X)$ = 1,75 bit/simbol. Dakle, za slučaj kodiranja svih blokova izvorišnih simbola duljine 5 srednja duljina kodne riječi iznosi **8,75 bit/ blok_simbola (**$5\cdot L(X)$**)**.

(III. dio)

Prefiksni kodovi su podgrupa jednoznačno dekodabilnih kodova. Neka su $\{l_i\}$ duljine kodnih riječi nekog jednoznačno dekodabilnog koda, M, za koji je $\bar{M} = \bar{M}_2$. Budući da $\{l_i\}$ zadovoljavaju Kraft-McMillanovu nejednakost (Ako je kôd jednoznačno dekodabilan tada zadovoljava Kraft-McMillanovu nejednakost.), što znači da sigurno postoji prefiksni kôd sa zadanim duljina kodnih riječi - $\{l_i\}$. Nadalje, zaključujemo da je $\bar{M} = \bar{M}_1$, odnosno da je $\boldsymbol{\bar{M}_1 = \bar{M}_2}$**.**

3. **zadatak: {10 bodova}** Zadana su dva paralelna kanala u kojima djeluje aditivni bijeli Gaussov šum Z_1, odnosno Z_2 s očekivanjem nula. Isto tako, vrijedi $E[Z_1^2] = 0.5$, odnosno $E[Z_2^2] = 0.7$. Na ulazu prvog kanala djeluje signal X_1, dok na ulazu drugog kanala djeluje signal X_2. Neka je $E[X_1]=E[X_2]=0$ te $E[X_1^2] + E[X_2^2] = 0.4$. Odredite maksimalnu dinamiku u zadanom sustava kanala (bit/simbol).

Rješenje:

Dinamika u sustavu paralelnih kanala jednaka je zbroju dinamika pojedinih kanala, tj.:

$$D = D_1 + D_2 = \frac{1}{2}log_2\left(1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_{Z_1}^2}\right) + \frac{1}{2}log_2\left(1 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_{Z_2}^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}log_2\left(1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_{Z_1}^2}\right) + \frac{1}{2}log_2\left(1 + \frac{0.4 - \sigma_1^2}{\sigma_{Z_2}^2}\right)$$

Maksimum dinamike nalazimo deriviranjem prethodnog izraza po σ_1^2 i izjednačavanjem istog s nulom. Dakle, iz

$$\frac{dD}{d\sigma_1^2} = 0$$

dobivamo $\sigma_1^2 = 0.3 \rightarrow \sigma_2^2 = 0.1$.

Konačno,

$$D = D_1 + D_2 = \frac{1}{2} log_2 \left(1 + \frac{0.3}{0.5}\right) + \frac{1}{2} log_2 \left(1 + \frac{0.1}{0.7}\right) = 0.435 \ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

4. zadatak: Za neki linearni binarni blok kôd *K* zadani su svi njegovi sindromi **s** i njima pripadajući vodeći članovi razreda (tzv. reprezenti razreda) standardnog niza koda *K*.

s	Vodeći članovi razreda
0000	000000
1100	100000
1000	010000
0100	001000
0011	000100
0010	000010
0001	000001
1010	010010

s	Vodeći članovi razreda
1001	010001
0110	001010
0101	001001
1110	100010
1101	100001
1011	010100
0111	001100
1111	100100

i) **{2 boda}** Neka je primljena kodna riječ **c**'=[100101]. Odredite najvjerojatniju poslanu kodnu riječ **c**. **Napomena:** Pri dekodiranju se koristi sindromsko dekodiranje.

ii) **{2 boda}** Odredite minimalnu udaljenost, $d_{\min}$, zadanog koda *K*.

iii) **{3 boda}** Neka je dan komunikacijski kanal u kojem je vjerojatnost ispravnog prijenosa bita jednaka *p*=0.998 i koji se koristi za prijenos kodnih riječi koda *K*. Također, neka se kanalom prenosi 10^7 bita u sekundi. Odredite približan broj pogrešno dekodiranih kodnih riječi u jednoj minuti. (**Napomena:** Kod proračuna radite sa 6 decimalnih mjesta! Pri dekodiranju se koristi sindromsko dekodiranje.)

iv) **{3 boda}** Odredite sve kodne riječi zadanog koda *K*.

Rješenje:

Lako se uviđa da se radi o kodu [*n*, *k*]=[6, 2].

Poznavajući sindrome i njima pripadajuće vodeće članove razreda nekog koda *K* moguće je odrediti transponiranu matricu provjere pariteta, tj.:

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

odnosno matricu **H**:

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&1&0&1\end{bmatrix}.$$

i) Odredimo sindrom primljene kodne riječi **c**'=[100101], tj. S(**c**')= **c**'$\mathbf{H}^T$=[1110] . Dani sindrom odgovara vektoru pogreške **e**=[100010]. Također vrijedi, **c**= **c**'⊕**e** te je najvjerojatnija poslana kodna riječ **c**=[000111].

ii) Minimalna udaljenost koda može se odrediti na više načina, a jedan je: odredimo koliko minimalno stupaca u matrici **H** treba zbrojiti u aritmetici modulo 2 tako da je rezultat njihova zbroja 0. U našem slučaju to je 3 te je $d_{\min}$=3.

iii) Vjerojatnost ispravnog dekodiranja kodne riječi je:

$$p_{\mathrm{id}}=p^6+6p^5(1-p)+9p^4(1-p)^2=0{,}999976$$

Nadalje, približan broj kodnih riječi pogrešno dekodiranih u jednoj minuti iznosi:

$$N_{pd(min)}=10^7\,\frac{\text{bit}}{\text{s}}\times 60\,\frac{\text{s}}{\text{min}}\times\frac{1\ \text{kodna riječ}}{6\ \text{bit}}\times(1-p_{\mathrm{id}})\approx 2396.7\,\frac{\text{kodna riječ}}{\text{min}}$$

Dakle, približno 2397 kodnih riječi je pogrešno dekodirano u jednoj minuti.

iv) Da bi odredili sve kodne riječi danog koda moramo poznavati njegovu generirajuću matricu **G**. Polazeći od matrice **H** uz zamjene stupaca (prvo 3↔4, a potom 2↔3) dobivamo matricu $\widetilde{\mathbf{H}}$ u obliku [$\mathbf{A}^T$ **I**], tj.

$$\widetilde{\mathbf{H}}=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0&0\\1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

odnosno matricu $\widetilde{\mathbf{G}}$, u obliku [**I A**], tj.

$$\widetilde{\mathbf{G}}=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&1\end{bmatrix}.$$

Zamjenom stupaca (prvo 2↔3, a potom 3↔4) u matrici $\widetilde{\mathbf{G}}$ dobivamo

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&1\end{bmatrix}.$$

Za sve moguće poruke **d**={00, 10, 01, 11} dobivamo kodne riječi danog koda *K*, tj.

K={000000, 111000, 000111, 111111}.

5. zadatak: (I. dio) Signal $x(t) = 10\cos(600\pi t)\cos^2(1600\pi t)$ [V] uzorkuje se frekvencijom uzorkovanja 4 kHz.

i) **{1 bod}** Odredite srednju snagu signala, $x(t)$, koja se troši na jediničnom otporu.

ii) **{2 boda}** Skicirajte amplitudni spektar uzorkovanog signala u području frekvencija od -9 kHz do 9 kHz.

iii) **{3 boda}** Odredite interval za gornju graničnu frekvenciju f_g niskopropusnog filtra koji se koristi za rekonstrukciju zadanog signala $x(t)$.

(II. dio) **{4 boda}** Odredite je li sustav definiran kao

$$y(t) = \cos(2t) \cdot x(t+1)$$

linearan i vremenski nepromjenjiv. **Napomena:** $x(t)$ predstavlja ulaz sustava, a $y(t)$ njegov izlaz.

Rješenje:

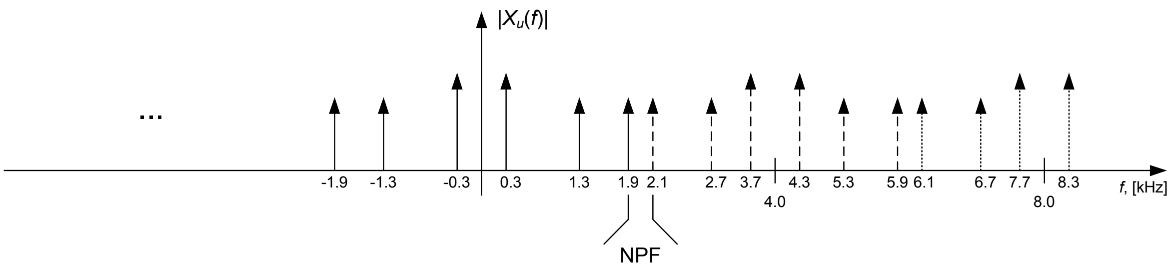
$$x(t) = 10\cos(600\pi t)\cos^2(1600\pi t) = 10\cos(600\pi t)\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(3200\pi t)\right]$$
$$= 5\cos(600\pi t) + 2.5\cos(3800\pi t) + 2.5\cos(2600\pi t)$$

(I. dio)

i)

$$P = 0.5[5^2 + 2.5^2 + 2.5^2] = 18.75 \text{ W}$$

ii)



iii)

Sa slike (dio zadatka pod ii) je vidljivo da gornja granična frekvencija NPF-a mora bit u intervalu:

$$1900 \text{ Hz} < f_g < 2100 \text{ Hz}$$

(II. dio)

Neka su

$$y_1(t) = \cos(2t) \cdot x_1(t+1)$$

$$y_2(t) = \cos(2t) \cdot x_2(t+1)$$

Također, neka je

$$x(t) = a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)$$

tada je

$$y(t) = \cos(2t) \cdot x(t+1) = \cos(2t) \cdot [a \cdot x_1(t+1) + b \cdot x_2(t+1)]$$
$$= a \cdot \cos(2t) \cdot x_1(t+1) + b \cdot \cos(2t) \cdot x_2(t+1) = a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$$

Što znači da je zadani sustav linearan.

Nadalje je potrebno provjeriti je li sustav vremenski nepromjenjiv, tj.

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">$y(t) = \cos(2t) \cdot x(t+1)$</td></tr>
<tr><td align="center">$y_1(t) = \cos(2t) \cdot x_1(t+1)$</td><td align="center">$y_2(t) = \cos(2t) \cdot x_2(t+1)$</td></tr>
<tr><td align="center">$t \longrightarrow t - t_0$</td><td align="center">$x_2(t) \rightarrow x_1(t - t_0)$</td></tr>
<tr><td align="center">$y_1(t - t_0) = \cos(2(t - t_0)) \cdot x_1(t - t_0 + 1)$</td><td align="center">$y_2(t) = \cos(2t) \cdot x_1(t - t_0 + 1)$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">$y_1(t - t_0) \neq y_2(t)$</td></tr>
</table>

Iz prethodnog zaključujemo da je zadani sustav vremenski promjenjiv.