Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Ispitni rok iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 13. veljače 2019.

Pravilo bodovanja zadataka

Svaki točno odgovoreni zadatak donosi 10 bodova, netočno odgovoreni 4 negativna boda, a neodgovoreni 0 bodova.

Zadatak 1: Diskretno bezmemorijsko izvorište generira simbole iz skupa simbola $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Vjerojatnosti pojavljivanja simbola su sljedeće: $p(x_1) = 0,4$, $p(x_2) = 0,3$, $p(x_3) = 0,2$ i $p(x_4) = 0,1$. Izračunajte količinu informacije koja se prenosi u poruci $x_1x_2x_1x_3$.

a) 6,70 bit/poruka

b) 7,38 bit/poruka

c) 1,85 bit/poruka

d) 1,68 bit/poruka

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

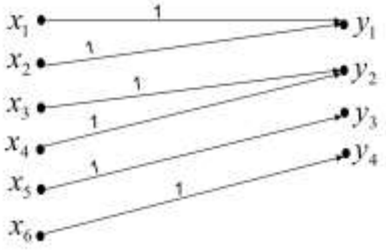
$$I(x_i) = -\log_2 p(x_i)\,[\text{bit/simbol}]$$

$$I(x_1x_2...x_k) = -\log_2\left(p(x_1)\cdot p(x_2)\cdot...\cdot p(x_k)\right)[\text{bit/poruka}]$$

$$p(x_1)=0,4 \qquad p(x_2)=0,3 \qquad p(x_3)=0,2 \qquad p(x_4)=0,1$$

$$I(x_1x_2x_1x_3) = 6,70\ \text{bit/poruka}$$

Zadatak 2: Odredite kapacitet kanala sa slike uz nepoznate vjerojatnosti pojavljivanja ulaznog skupa simbola (X) .



a) 0 bit/simbol

b) 1 bit/simbol

c) 2,58 bit/simbol

d) 2 bit/simbol

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

$$[p(x_i)] = [p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5 \quad p_6]$$

$$\left[p\left(y_j \mid x_i\right)\right]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\left[p\left(x_i, y_j\right)\right]=\left[p\left(x_i\right)p\left(y_j \mid x_i\right)\right]=\begin{bmatrix}p_1 & 0 & 0 & 0\\ p_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & p_3 & 0 & 0\\ 0 & p_4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & p_5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & p_6\end{bmatrix}$$

$$C=\max_{\{p(x_i)\}} I\left(X;Y\right)=\max_{\{p(x_i)\}}\left[H\left(Y\right)-H\left(Y \mid X\right)\right]$$

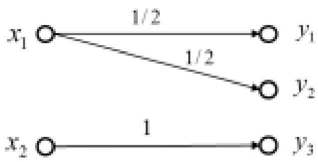
$$H\left(Y \mid X\right)=-\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{4} p\left(x_i, y_j\right)\log_2 p\left(y_j \mid x_i\right)=0\,\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

Dakle, kapacitet zadanog kanala iznosi:

$$C=\max_{\{p(x_i)\}} H\left(Y\right)=\log_2 4=2\,\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

Maksimum se postiže ako su sve vjerojatnosti pojavljivanja simbola na izlazu jednake, što u općem slučaju ne mora vrijediti, ali je moguće postići kad je $p_1 + p_2 = p_3 + p_4 = p_5 = p_6 = 1/4$.

Zadatak 3: Odredite kapacitet kanala sa slike.



a) 1,58 bit/simbol

b) 1 bit/simbol

c) 2 bit/simbol

d) 3,16 bit/simbol

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

$$C=\max_{\{p(x_i)\}} I(X;Y)=\max_{\{p(x_i)\}}\left[H(X)-H(X \mid Y)\right]$$

$$H(X)=-\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\log_2 p(x_i)$$

$$H(X \mid Y)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j)\log_2 p(x_i \mid y_j)$$

$$\left[p(x_i)\right]=\left[p_1 \quad p_2\right]$$

$$\left[p(y_j \mid x_i)\right] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[p(x_i, y_j)\right] = \left[p(x_i)p(y_j \mid x_i)\right] = \begin{bmatrix} 0.5p_1 & 0.5p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 \end{bmatrix}$$

$$\left[p(y_j)\right] = \left[0.5p_1 \quad 0.5p_1 \quad p_2\right]$$

$$[p(x_i \mid y_j)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H(X \mid Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j)\log_2 p(x_i \mid y_j) = 0$$

$$C = \max_{\{p(x_i)\}} I(X;Y) = \max_{\{p(x_i)\}}\left[H(X) - H(X \mid Y)\right] = \max_{\{p(x_i)\}}\left[H(X)\right]$$

Maksimum transinformacije se postiže kad su vjerojatnosti pojavljivanja simbola na ulazu međusobno jednake te kapacitet zadanog kanala iznosi:

$$C = \max_{\{p(x_i)\}}\left[H(X)\right] = \log_2 2 = 1\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

Zadatak 4: Dan je skup simbola S s pripadajućim vjerojatnostima pojavljivanja :

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_m \\ p_1 & p_2 & & p_m \end{pmatrix}$$

Simboli su jednoznačno kodirani prefiksnim kodom. Ako je m = 6 i ako su zadane duljine kodnih riječi, $\{l_1, l_2, ..., l_6\} = \{1, 1, 2, 3, 2, 3\}$, odredite najmanji broj simbola abecede prefiksnog koda.

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Za svaki prefiksni kod sa abecedom od d simbola i duljinama kodnih riječi l_1, l_2, ..., l_n vrijedi Kraftova nejednakost, $\sum_{i=1}^{m} d^{-l_i} \leq 1$, tj. za konkretan slučaj:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d} + \frac{1}{d^2} + \frac{1}{d^3} + \frac{1}{d^2} + \frac{1}{d^3} \leq 1$$

$$\frac{2}{d} + \frac{2}{d^2} + \frac{2}{d^3} \leq 1$$

$$2d^2 + 2d + 2 - d^3 \leq 0$$

$$d \geq 2.9196$$

Kako broj simbola abecede mora biti prirodan broj, najmanji cijeli broj koji zadovoljava Kraftovu nejednakost je :

$$d_{\min} = \lceil 2.9196 \rceil = 3$$
$$d_{\min} = 3$$

Zadatak 5: Diskretno bezmemorijsko izvorište generira simbole iz skupa simbola $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_7\}$ s vjerojatnostima pojavljivanja 0,49, 0,26, 0,12, 0,04, 0,04, 0,03, odnosno 0,02. Odredite razliku efikasnosti koda kada se dani skup simbola kodira binarnim i ternarnim Huffmanovim kodom. Napomena: Kod iskazivanja razlike efikasnosti koristite apsolutnu vrijednost razlike.

a) 0,0681

b) 0,0472

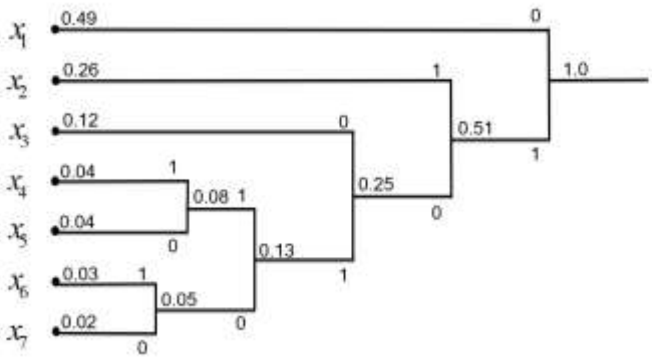
c) 0,0943

d) 0,0172

e) ništa od navedenog

Postupa rješavanja:

ii) binarni Huffmanov kod

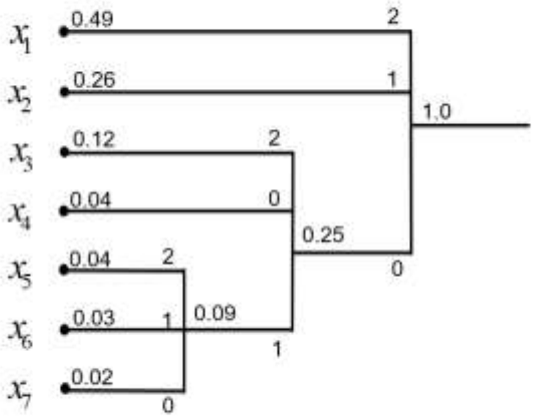


Simbol (x_i)	Vjerojatnost pojavljivanja $p(x_i)$	Kodna riječ $C(x_i)$	Duljina kodne riječi $l(x_i)$
x_1	0.49	1	1
x_2	0.26	01	2
x_3	0.12	000	3
x_4	0.04	00111	5
x_5	0.04	00110	5
x_6	0.03	00101	5
x_7	0.02	00100	5

$$L(X) = \sum_{i=1}^{7} l(x_i)\, p(x_i) = 2.02 \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

$$\varepsilon = \frac{H(X)}{L(X)} = \frac{-\sum_{i=1}^{7} p(x_i)\log_2(p(x_i))}{\sum_{i=1}^{7} l(x_i)p(x_i)} = 0.995$$

ii) ternarni Huffmanov kod



Simbol (x_i)	Vjerojatnost pojavljivanja p(x_i)	Kodna riječ C(x_i)	Duljina kodne riječi l(x_i)
x_1	0.49	2	1
x_2	0.26	1	1
x_3	0.12	02	2
x_4	0.04	00	2
x_5	0.04	012	3
x_6	0.03	011	3
x_7	0.02	010	3

$$L_{(3)}(X) = \sum_{i=1}^{7} l(x_i)p(x_i) = 1.34\frac{\text{ternarna simbola}}{\text{simbol}}$$

$$\varepsilon_{(3)} = \frac{H_{(3)}(X)}{L_{(3)}(X)} = \frac{-\sum_{i=1}^{7} p(x_i)\log_3(p(x_i))}{\sum_{i=1}^{7} l(x_i)p(x_i)} = 0.9478$$

Zadatak 6: Razmatrajte blok kôd *K* s 8 kodnih riječi koji svaku poruku duljine 3 bita kodira dodatnim paritetnim bitom koristeći pri tome neparni paritet. Kodne riječi se prenose binarnim simetričnim kanalom u kojem vjerojatnost pogrešnog prijenosa bita iznosi 0,01. Odredite vjerojatnost da zadani kôd *K* otkrije pogreške bita, ako pretpostavimo da je na svakoj kodnoj riječi sigurno nastupila barem jedna pogreška.

a) $38{,}82\cdot10^{-3}$

b) $75{,}33\cdot10^{-3}$

c) 0,97

d) 0,985

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

U analizi prijenosa kodnih riječi promatranim binarnim simetričnim kanalom postoje sljedeći događaji: *A* – pogreška je otkrivena, *A** – pogreška nije otkrivena, *B* – pogreška je nastupila i *B** – pogreška nije nastupila. Vjerojatnost da je pogreška otkrivena ako je sigurno i nastupila na jednom ili više bita kodne riječi je uvjetna vjerojatnost $P(A|B)$ i vrijedi: $P(A|B) = P(A, B)/P(B)$, pri čemu je $P(A, B)$ vjerojatnost da je pogreška otkrivena i da je nastupila te vrijedi:

$$P(A,B)=\underbrace{\binom{4}{1}p(1-p)^3}_{\text{jednostruka pogreška}}+\underbrace{\binom{4}{3}p^3(1-p)}_{\text{trostruka pogreška}}=38{,}82\cdot10^{-3}.$$

Drugim riječima, pogreška će biti otkrivena ako je nastupila na jednom ili na tri bita kodne riječi. Vjerojatnost da je pogreška nastupila dana je izrazom:

$$P(B)=P(A,B)+P(A^*,B)\ ,$$

gdje je $P(A^*, B)$ vjerojatnost da je pogreška nastupila i nije otkrivena, što se događa ako pogreška nastupi na dva ili na četiri bita unutar kodne riječi:

$$P(A^*,B)=\underbrace{\binom{4}{2}p^2(1-p)^2}_{\text{dvostruka pogreška}}+\underbrace{\binom{4}{4}p^4}_{\text{četverostruka pogreška}}=0{,}59\cdot10^{-3}.$$

Sukladno tome, $P(B)=1-(1-p)^4=39{,}41\cdot10^{-3}$ pa je u konačnici tražena vjerojatnost

$$P(A|B)=\frac{P(A,B)}{P(B)}=0{,}985.$$

Zadatak 7: Na ulaz linearnog i vremenski nepromjenjivog (LTI) sustava dolazi slučajni signal $X(t)$ koji ima obilježje stacionarnog slučajnog procesa u širem smislu (WSS), čija srednja vrijednost iznosi 1 V, a spektralna gustoća snage $S_X(f)$ jednaka je 1 mW/Hz za $|f| \le 1$ MHz. Impulsni odziv $h(t)$ promatranog LTI-sustava dan je izrazom:

$$h(t)=\frac{\sin\left[2\pi f_g t\right]}{2\pi t},$$

Odredite koliko mora iznositi granična frekvencija f_g LTI-sustava i srednja snaga P signala $Y(t)$ na izlazu LTI-sustava pa da autokovarijanca slučajnog procesa $Y(t)$, $C_Y(t_1, t_2)$, ima iznos 0 za slučaj kad je $t_2 = t_1$.

a) $f_g = 1000$ Hz, $P = 1$ W

b) $f_g = 500$ Hz, $P = 0{,}25$ W

c) $f_g = 500$ Hz, $P = 0{,}0625$ W

d) f_g = 1000 Hz, P = 0,25 W

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Očekivanje i spektralna gustoća snage slučajnog procesa $Y(t)$ na izlazu LTI-sustava određeni su sljedećim izrazima:

$$E\left[Y(t)\right]=E\left[X(t)\right]\cdot H(0),\quad S_Y(t)=S_X(t)\cdot\left|H(f)\right|^2.$$

Izraz za autokovarijancu C_Y slučajnog procesa $Y(t)$ glasi:

$$C_Y(t_1,t_2)=E\left\{\left[Y(t_1)-\mu_Y(t_1)\right]\left[Y(t_2)-\mu_Y(t_2)\right]\right\}=R_Y(t_1,t_2)-E\left[Y(t_1)\right]E\left[Y(t_2)\right],$$

pri čemu vrijedi $\mu_Y(t) = E[Y(t)]$. S obzirom da je proces $Y(t)$ također stacionaran u širem smislu, vrijedi:

$$C_Y(t_1,t_2)=R_Y(\tau)-\left(E\left[Y(t)\right]\right)^2,\tau=t_2-t_1,$$

a u posebnom slučaju kad je $t_1 = t_2$ vrijedi:

$$C_Y(t_1,t_1)=R_Y(0)-\left(E\left[Y(t)\right]\right)^2$$

Nadalje, izraz za impulsni odziv promatranog LTI-sustava moguće je preuredit u oblik $\sin(x)/x$:

$$h(t)=\frac{\sin\left[2\pi f_g t\right]}{2\pi t}=f_g\frac{\sin\left[2\pi f_g t\right]}{2\pi f_g t}$$

Općenito, ako je prijenosna funkcija idealnog niskopropusnog sustava definirana kao

$$H(f)=\begin{cases}1, & |f|\le f_g\\ 0, & |f|>f_g\end{cases}$$

tada takav sustav ima impulsni odziv definiran izrazom

$$h(t)=2f_g\frac{\sin\left[2\pi f_g t\right]}{2\pi f_g t}$$

Usporedbom ova dva izraza za impulsni odziv zaključujemo da je prijenosna funkcija promatranog LTI-sustav definirana sljedećim izrazom:

$$H(f)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |f|\le f_g\\ 0, & |f|>f_g\end{cases}$$

Dakle, vrijedit će: $E[Y(t)] = 1/2\cdot E[X(t)]$ = 1/2 V i $S_Y(f) = 1/4\cdot S_X(f)$ = 1/4 mW/Hz, $|f| \le f_g$ kHz. Temeljem navedenog moguće je odrediti iznos autokovarijance $C_Y(t_1, t_1)$

$$C_Y(t_1,t_1)=\int_{-f_g}^{f_g}\frac{1}{4}10^{-3}df-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}f_g10^{-3}-\frac{1}{4}$$

Ako se taj izraz izjednači s nulom, dobivamo konačni rezultat da je f_g = 500 Hz, a srednja snaga signala $Y(t)$ jednaka je $R_Y(0)$ = 0,25 W.

Zadatak 8: Na ulaz AWGN-kanala dolazi slučajni signal $X(t)$ koji ima Gaussovu razdiobu amplituda i obilježje stacionarnog slučajnog procesa u širem smislu (WSS). Pretpostavimo da je njegovo očekivanje jednako nuli, a njegova standardna devijacija iznosi 1 V. Na taj signal aditivno djeluje bijeli Gaussov šum čije je očekivanje jednako nuli, a spektralna gustoća snage $S_N(f)$ jednaka 0,5 mW/Hz za $f \in \mathbf{R}$. Odredite iznos kapaciteta takvog kanala za slučaj kad širina prijenosnog pojasa kanala teži u beskonačnost.

a) 1000 nat/s

b) 2000 bit/s

c) 1000 bit/s

d) 1443 nat/s

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

U slučaju kad širina prijenosnog pojasa teži u beskonačnost, izraz za kapacitet kanala je:

$$\lim_{B\to\infty} C = C_\infty = \frac{1}{\ln 2}\frac{S}{N_0}\left[\text{bit/s}\right] = \frac{S}{N_0}\left[\text{nat/s}\right].$$

Ako je očekivanje signala $X(t)$ jednako nuli, tada je njegova srednja snaga jednaka kvadratu standardne devijacije, tj. $S = \sigma_X^2$ = 1 W. Ako je spektralna gustoća snage $S_N(f)$ jednaka 0,5 mW/Hz za $f \in \mathbf{R}$, to znači da je $N_0/2$ = 0,5 mW/Hz, a sam N_0 iznosi 1 mW/Hz. U konačnici C_∞ = 1000 nat/s.

Zadatak 9: Razmatrajte linearni binarni blok kôd K s oznakom [n, k, 3] koji je ujedno i perfektan. Odredite koliko iznosi duljina kodne riječi koda K, ako vrijedi $\mathbf{G}\cdot\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$, pri čemu je $\mathbf{G}$ generirajuća matrica koda K, a nul-matrica $\mathbf{0}$ ima 4 stupca.

a) 11 bita

b) 7 bita

c) 15 bita

d) 3 bita

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Ako je kôd [n, k, 3] perfektan, to znači da se sve kodne riječi iz $V(n)$ nalaze unutar kugli u čijim se središtima nalaze kodne riječi koda K. Tada vrijedi:

$$2^k = \frac{2^n}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1}}.$$

Dakle, vrijedi da je $2^{n-k} = 1 + n$. Nadalje, s obzirom da matrica $\mathbf{G}$ ima dimenzije $k \times n$, a matrica $\mathbf{H}^T$ dimenzije $n \times n - k$, tada njihov produkt, tj. matrica $\mathbf{0}$, ima dimenzije $k \times n - k$. Ako je zadano da matrica $\mathbf{0}$ ima četiri stupca, to znači da je $n - k = 4$. Uvrštavanjem u prethodni izraz dobivamo da je $1 + n = 16$, tj. $n = 15$.

Zadatak 10: Pravokutni periodični signal $x(t)$ dolazi na ulaz kvantizatora. Signal je definiran sljedećim izrazima:

$$x(t)=\begin{cases} A & \text{za } 0 \le |t| < \tau/2 \\ -A & \text{za } \tau/2 \le |t| < T_0/2 \end{cases}, \; A>0, \; x(t+T_0)=x(t), \; t \in \mathbf{R}$$

Sam kvantizator ima jednoliku karakteristiku kvantiziranja, oblika stepenaste funkcije. Kvantizator je dizajniran tako da amplitude bilo kojeg ulaznog signala mogu poprimati kontinuirane vrijednosti između –2 V i 2 V. Svaka pozitivna vrijednost uzorka zadanog signala $x(t)$ koja padne u interval $m_k < x(nT_u) \le m_{k+1}$ biva pretvorena u vrijednost v_k = 1 V na izlazu kvantizatora, pri čemu je v_k pozicioniran na sredini intervala $(m_k, m_{k+1}]$. Također vrijedi $A > v_k$. Nadalje, omjer srednje snage signala $x(t)$ prema srednjoj snazi kvantizacijskog šuma iznosi 5000. Odredite vrijednost od A, ako se svaki kvantizirani uzorak zapisuje kodnom riječi duljine 6 bita te ako je omjer $T_0/\tau = 4$. Također pretpostavite da je period uzimanja uzoraka T_u strogo manji od trajanja perioda signala $x(t)$, T_0, vrijedi $T_0 = M \cdot T_u$, $M \in \mathbf{N}$, te da je $x(nT_u) \neq 0$ za sve $n \in \mathbf{Z}$. Napomena: srednja snaga uzorka jednaka je kvadratu njegove amplitude.

a) 1,151 V

b) 1,628 V

c) 1,014 V

d) 1,105 V

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

S obzirom da ulazni signal poprima samo dvije moguće vrijednosti, tj. A i $–A$, prilikom kvantiziranja opisanim kvantizatorom kvantizacijski šum Q će imati obilježje determinističkog, a ne slučajnog signala. Signal šuma $q = m – v$ uvijek poprima jednu od dvije moguće vrijednosti: $A – v_k$ ili $–A + v_k$, s time da se te vrijednosti pojavljuju u pravilnom (determinističkom) rasporedu, promatrano na duljem vremenskom intervalu T_p, >> T_0. Dakle, na razini jednog perioda signala $x(t)$, dok je amplituda signala jednaka A, kvantizacijski šum ima vrijednost $A – v_k$, a za vrijeme dok je amplituda signala jednaka $–A$, iznosi $–A + v_k$. S obzirom na zadane uvjete ($T_u < T_0$, $T_0 = M \cdot T_u$, $M \in \mathbf{N}$, te $x(nT_u) \neq 0$ za sve $n \in \mathbf{Z}$) i veličine uzoraka koje mogu nastupiti moguće je zaključiti da će svi uzorci imati istu snagu:

$$E\left[Q^2\right]=\left(A-v_k\right)^2.$$

U ovom specifičnom slučaju, zbog zadanih uvjeta vezanih uz ulazni signal i sam proces kvantizacije, snaga šuma nije ovisna o omjeru T_0/τ, kao niti o koraku kvantizacije. Sam signal ima srednju (ali i trenutnu) snagu A^2 W. Razlog tome je što kad se signal $x(t)$ kvadrira, dobivamo istosmjerni signal amplitude A^2. Dakle, niti srednja snaga signala ne ovisi o omjeru T_0/τ. Sukladno svemu navedenom, omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma dan je izrazom

$$\frac{S}{Q}=\frac{A^2}{\left(A-v_k\right)^2}=5\cdot 10^3$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe dobivamo

$$A_{1,2}=\frac{10^4 \pm \sqrt{10^8-4\cdot 4999\cdot 5000}}{2\cdot 4999}, \; A_1=1{,}014\,\text{V}, \; A_2=0{,}986\,\text{V}$$

S obzirom na zadani uvjet $A > v_k$, konačno rješenje iznosi A = 1,014 V.