Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Ispitni rok iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 12. srpnja 2016.

Obavezno pročitati prije početka rješavanja ispitnih zadataka!

Ispit traje 120 minuta. Student na ispitu smije koristiti sljedeće:

1) prazne listove papira formata A4 za rješavanje zadataka,
2) pribor za pisanje (olovka, gumica),
3) kalkulator (nije dozvoljeno korištenje mobilnih telefona, tableta, laptopa i sličnih uređaja),
4) jedan arak papira formata A4 s matematičkim izrazima, može biti kreiran ručno ili na računalu.

Ako student bude primijećen kako koristi nedozvoljena sredstva na ispitu, bit će isključen iz procesa bodovanja i ocjenjivanja ispita. Za vrijeme trajanja ispita nije dozvoljeno uzajamno posuđivanje listova papira, pribora za pisanje, kalkulatora ili papira s matematičkim izrazima.

Radi lakšeg i točnijeg ispravljanja ispita student treba obratiti pozornost na sljedeće:

a) prilikom rješavanja svakog zadatka, student mora imati postupak rješavanja i jasno istaknuto konačno rješenje (osim brojčanog iznosa točno rješenje mora imati i odgovarajuću mjernu jedinicu tamo gdje to ima smisla),
b) svaki zadatak je potrebno rješavati na zasebnom listu papira,
c) zadatke je potrebno rješavati pregledno i čitko jer o tome ovisi i preciznost ispravljanja (neuredne i nepregledne postupke rješavanja izuzet ćemo iz postupka bodovanja),
d) prilikom predaje ispita posložite zadatke po broju od najmanjeg prema najvećem i **obavezno** predajte i papire sa zadacima koji će Vam biti dodijeljeni na početku ispita.

Potpisom potvrđujem da sam pročitao/pročitala gore navedena pravila te da sam svjestan/svjesna da će ona biti primijenjena prilikom izvedbe i bodovanja ispita

Potpis studenta

ZADACI

1. zadatak (15 bodova): Na objektu upravljanom iz udaljene centralne lokacije nalaze se tri ventila, v_1, v_2 i v_3. Objekt je s udaljenom lokacijom povezan komunikacijskim kanalom. Svaki se ventil može nalaziti u dva položaja: otvoren, odnosno zatvoren. Vjerojatnosti da se ventil nalazi u jednom od ta dva položaja međusobno su jednake. Komunikacijski kanalom se na centralnu lokaciju prenose informacije o promjeni položaja ventila u trenutku kad dođe do promjene položaja ventila. Promatranjem rada objekta ustanovljeno je da se od 100 prenesenih poruka 70 odnosi na prvi ventil, 20 na drugi i 10 na treći. Odredite srednji sadržaj informacije po jednoj prenijetoj poruci.

Rješenje:

$$p(v_1) = 0,7$$
$$p(v_2) = 0,2$$
$$p(v_3) = 0,1$$
$$p(v_i)_{otvoreno} = p(v_i)_{zatvoreno} = 0,5 \cdot p(v_i)$$
$$i = \{1, 2, 3\}$$

Definiramo skup mogućih poruka koje se šalju komunikacijskim kanalom:

$$V = \{v_{1o}, v_{1z}, v_{2o}, v_{2z}, v_{3o}, v_{3z}\}$$

te je srednji sadržaj informacije po prenijetoj poruci jednak:

$$H(V) = -\sum_{i=1}^{n} p(v_i) \cdot \log_2 p(v_i)$$
$$H(V) = -\sum_{i=1}^{6} p(v_i) \cdot \log_2 p(v_i)$$
$$H(V) = -2 \cdot \left[0,35 \cdot \log_2 \left(0,35\right) + 0,1 \cdot \log_2 \left(0,1\right) + 0,05 \cdot \log_2 \left(0,05\right)\right]$$
$$H(V) = 2,156\,[bit\,/\,poruka]$$

2. zadatak (10 bodova): Diskretno bezmemorijsko izvorište generira simbole iz skupa $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Vjerojatnosti pojavljivanja simbola su sljedeće: $p(x_1) = 0,4$, $p(x_2) = 0,3$, $p(x_3) = 0,2$ i $p(x_4) = 0,1$. Izračunajte količinu informacije koja se prenosi u poruci $x_1x_2x_1x_3$.

Postupak rješavanja:

$$I\left(x_i\right) = -\log_2 p\left(x_i\right) \text{ bit/simbol}$$
$$I\left(x_1x_2x_1x_3\right) = -\log_2\left(p\left(x_1\right) \cdot p\left(x_2\right) \cdot p\left(x_1\right) \cdot p\left(x_3\right)\right)$$
$$I\left(x_1x_2x_1x_3\right) = -\log_2\left(0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,2\right)$$
$$I\left(x_1x_2x_1x_3\right) = 6,70 \text{ bit/poruka}$$

3. zadatak (15 bodova): Diskretni bezmemorijski izvor X generira 5 simbola (#, e, l, o, t) s vjerojatnostima pojavljivanja $p(\#) = 0,4$, $p(e) = 0,19$, $p(l) = 0,16$, $p(o) = 0,15$ i $p(t) = 0,1$. Dekodirajte slijed 001001111110110110, poslan s izvora X i kodiran Shannon-Fanoovom metodom.

Rješenje:

x_i	$p(x_i)$	Korak 1	Korak 2	Korak 3	Kod
#	0,4	0	0		00
e	0,19	0	1		01
l	0,16	1	0		10
o	0,15	1	1	0	110
t	0,1	1	1	1	111

Rješenje: #letooo

4. zadatak (20 bodova): Informacijski izvor šalje slijed sastavljen od n uzastopnih simbola a, a neposredno nakon toga šalje simbol * kao oznaku kraja slijeda. Predajnik pri tome koristi entropijsko kodiranje kodom LZ77. Duljina posmičnog prozora iznosi 1 simbol, a duljina prozora za kodiranje jednaka je m simbola. Koliko mora iznositi minimalna cjelobrojna duljina slijeda n pa da se za svaki $m \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ može postići da je zadnja trojka na izlazu kodera jednaka (0, 0, *).

Postupak rješavanja:

Zbog zahtjeva da zadnja trojka bude oblika (0, 0, *) mora vrijediti $n = k \cdot m + 1$, pri čemu je k prirodni broj. To znači da broj $n - 1$ mora biti djeljiv sa svim prirodnim brojevima između 2 i 9, tj. $n - 1$ mora biti najmanji zajednički višekratnik tog skupa prirodnih brojeva. Dakle, $n - 1 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$ simbol, a sam $n = 2521$ simbol.

5. zadatak (20 bodova): Izvor generira poruke nastale ravnomjernim kodiranjem simbola iz skupa od 128 jednako vjerojatnih simbola, $X = \{x_1, \ldots, x_{128}\}$. Poruke se prije slanja u kanal kodiraju Hammingovom tehnikom zaštitnog kodiranja. Širina prijenosnog pojasa komunikacijskog kanala iznosi 4 kHz, dok omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma iznosi 20 dB. Odredite koliko je poruka moguće prenositi danim komunikacijskim kanalom unutar svake sekunde.

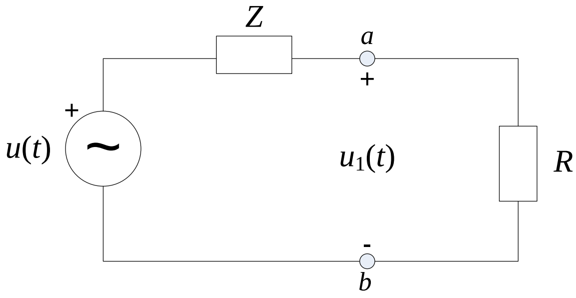
Postupak rješavanja:

Ako skup od 128 jednako vjerojatnih simbola kodiramo ravnomjernim kodom, tada je svaki simbol opisan jednoznačnom porukom duljine 7 bita. Nadalje, ako tu poruku kodiramo Hammingovim kodom, tada je na svaku poruku potrebno dodati 4 zaštitna bita na pozicije 1, 2, 4 i 8 u kodnoj riječi. Dakle, ukupan broj bita po svakoj kodnoj riječi iznosit će 11. Kanal širine prijenosnog pojasa 4 kHz u kojem omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma iznosi 20 dB ima kapacitet

$$C = B \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right) = 4 \cdot 10^3 \log_2(1 + 100) = 26632{,}85 \left[\frac{\text{bit}}{\text{s}}\right]$$

Podijelimo li kapacitet kanala s duljinom svake kodne riječi, dobivamo da je svake sekunde promatranim kanalom moguće poslati 2421 kodnu riječ, odnosno poruku.

6. zadatak (20 bodova): Razmatrajte naponski izvor koji generira napon $u(t)$. Unutarnji otpor izvora je realan i iznosi Z ohma, a na stezaljke a i b spojen mu je otpornik otpora R ohma. Napon između stezaljki a i b opisan je funkcijom $u_1(t)$.



Pretpostavite da je napon $u(t)$ zadan kao periodičan slijed pravokutnih impulsa definiranih sljedećim izrazom:

$$u(t) = \begin{cases} A & \text{za}\, 0 \leq t < T/2 \\ -A & \text{za}\, T/2 \leq t < T \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

pri čemu je A amplituda signala $u(t)$ zadana u voltima, a T je trajanje perioda signala $u(t)$ u sekundama.

a) Odredite izraz za Fourierove koeficijente u_k napona $u(t)$, $\forall k \in \mathbf{Z}$ (naputak: možete koristiti svojstvo Fourierove transformacije da istosmjerna komponenta u vremenskoj domeni opisana funkcijom $x(t) = K$ [V], $\forall f \in \mathbf{R}$, i delta funkcija $X(f) = K \cdot \delta(f)$ čine Fourierov transformacijski par). Konačan izraz za koeficijente u_k mora biti izražen kao funkcija od A i k.

b) Koristeći koeficijente u_k iz a) napišite matematički izraz za spektar signala $U(f)$.

c) Odredite izraz za srednju snagu P_1 koju razvija napon $u_1(t)$ na otporniku otpora R ohma. Izraz za snagu P_1 prikažite kao funkciju veličina A, Z i R.

d) Odredite maksimalan iznos kojeg može poprimit snaga P_1 u odnosu na zadanu amplituda napona izvora, A, i unutarnji otpor izvora, Z. Prikažite izraz za snagu P_1 kao funkciju od A i Z.

Postupak rješavanja:

a) Napon $u(t)$ možemo prikazati kao zbroj dva napona, $u_1(t)$ i $u_2(t)$, pri čemu vrijedi:

$$u_1(t) = \begin{cases} 2A & \text{za}\, 0 \leq t < T/2 \\ 0 & \text{za}\, T/2 \leq t < T \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad i \quad u_2(t) = -A, \forall t \in \mathbb{R}$$

Koristeći izraz za Fourierove koeficijente periodičnog slijeda pravokutnih impulsa, c_k:

$$c_k = A \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin(k\omega_0 \tau/2)}{k\omega_0 \tau/2}$$

te sukladno definiciji napona $u_1(t)$, dobivamo

$$u_{1k}=2A\frac{1}{2}\frac{\sin\left(k2\pi\frac{1}{T}\frac{T/2}{2}\right)}{k2\pi\frac{1}{T}\frac{T/2}{2}}=A\frac{\sin\left(k\pi/2\right)}{k\pi/2},k\in\mathbb{Z}.$$

Napon $u_2(t)$ je istosmjerna komponenta koja ima samo jedan Fourierov koeficijent,

$$u_{2k}=\begin{cases}-A & za\, k=0\\ 0 & za\, k\neq 0\end{cases},k\in\mathbb{Z}$$

Nadalje vrijedi:

$$u_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}u(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[u_1(t)+u_2(t)\right]e^{-jk\omega_0 t}dt=$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}u_1(t)e^{-jk\omega_0 t}dt+\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}u_2(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=u_{1k}+u_{2k}$$

Konačan izraz za Fourierove koeficijente zadanog napona $u(t)$ je:

$$u_k=\begin{cases}0 & za\, k=0\\ A\frac{\sin\left(k\pi/2\right)}{k\pi/2} & za\, k\neq 0\end{cases},k\in\mathbb{Z}$$

b) Izraz za spektar signala $U(f)$ je sljedeći:

$$U(f)=\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}A\frac{\sin\left(k\pi/2\right)}{k\pi/2}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right),k\in\mathbb{Z}$$

c) Snaga P_1 na otporniku otpora R oma vezana je uz snagu izvora P izrazom:

$$P_1=P\frac{R}{Z+R}\,[W]$$

Trenutni iznos snage izvora, $p(t)$, povezan je s naponom izvora, $u(t)$, sljedećim izrazom: $p(t) = u^2(t)/(Z + R)$. S obzirom da je $u^2(t) = A^2$, $\forall t \in \mathbf{R}$, vrijedi: $p(t) = A^2/(Z + R)$. Očito je da se radi o konstanti pa je i srednja vrijednost snage izvora, P, jednaka trenutnoj vrijednosti: $P = A^2/(Z + R)$. Dakle,

$$P_1=\frac{A^2}{Z+R}\frac{R}{Z+R}=A^2\frac{R}{\left(Z+R\right)^2}\,[W]$$

d) Ako A i Z promatramo kao zadane (fiksne) veličine, snaga P_1 će poprimiti maksimalan iznos ako je ispunjen uvjet: $Z = R$. Tada je $P_1 = A^2/(4Z)$.