Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Ispitni rok iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 8. veljače 2017.

Pravilo bodovanja zadataka

Netočno odgovoreni zadaci od 10 bodova donose 4 negativna boda, a netočno odgovoreni zadaci od 15 bodova donose 6 negativnih bodova. Neodgovoreni zadaci donose 0 bodova.

1. zadatak (10 bodova): Napon V kojeg mjeri instrument može poprimiti jednu od osam vrijednosti v_i, $i = 1, \ldots, 8$, sa sljedećim vjerojatnostima $p(v_i)$:

v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
$p(v_i)$	0,05	0,05	0,15	0,25	0,30	0,05	0,05	0,10

Tablica vjerojatnosti izmjerenih vrijednosti

Odredite srednji sadržaj informacije generiran instrumentom u jedinici vremena (bit/s) ako instrument mjeri napon svakih 15 ms i tu izmjerenu vrijednost šalje na izlaz.

a) 2,6282 bit/s b) 175,21 bit/s c) 3 bit/s d) 200 bit/s e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Prosječna količina informacije koju daje instrument po mjernoj vrijednosti je:

$$H(v) = -\sum_{i=1}^{8} p(x_i) \cdot \log_2 p(x_i) = \ldots = 2,6282 \text{ bit/mjerna vrijednost}$$

Ako se pokazivanje instrumenta mijenja svakih t = 15 ms, tada količina informacije koju instrument generira u jedinici vremena iznosi

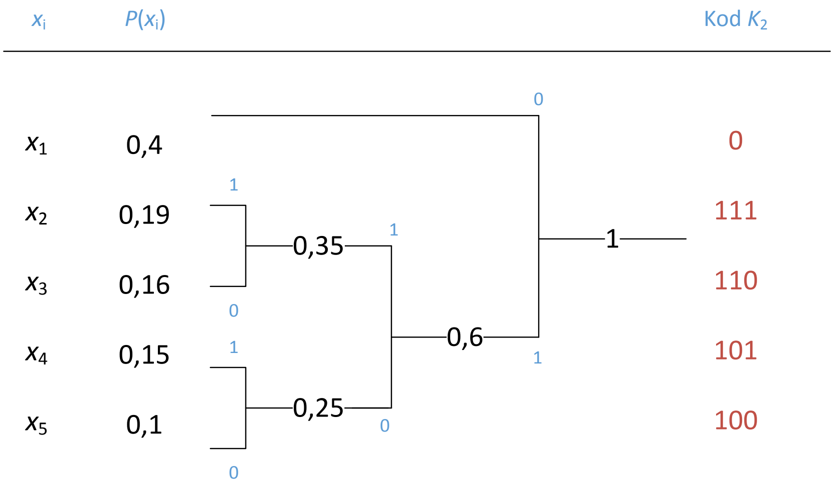
$$R = \frac{H(v)}{t} = 175,214 \text{ bit/s}$$

2. zadatak (10 bodova): Diskretni bezmemorijski izvor, čiji je izlaz opisan slučajnom varijablom X, generira simbole iz petočlanog skupa $\{x_1, \ldots, x_5\}$ s vjerojatnostima pojavljivanja $p(x_1) = 0,4$, $p(x_2) = 0,19$, $p(x_3) = 0,16$, $p(x_4) = 0,15$ i $p(x_5) = 0,1$. Primjenom Huffmanove tehnike u koderu izvora kreiran je kôd K. Odredite srednju duljinu kodne riječi koda K.

a) 2,25 bit/simbol b) 2,2 bit/simbol c) 2,15 bit/simbol d) 2,10 bit/simbol

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:



$$L = \sum_{i=1}^{5} p_i l_i = 0,4 \cdot 1 + 0,19 \cdot 3 + 0,16 \cdot 3 + 0,15 \cdot 3 + 0,1 \cdot 3 = 2,2 \text{ bit/simbol}$$

3. zadatak (10 bodova): U komunikacijskom kanalu s obilježjem LTI-sustava na signal $s(t) = 20\cos(2\pi t)\,[\mathrm{V}]$ djeluje bijeli šum spektralne gustoće snage $S_N(f) = e^{-3|f|}\,[\mathrm{W/Hz}]$, $f \in$ **R**. Novonastali signal dovodi se na ulaz filtra amplitudnog odziva $|H(f)|$. Odredite omjer S/N (u dB!) na izlazu filtra ako je $|H(f)| = 1$ za $|f| \le 2$ Hz i $|H(f)| = 0$ za $|f| > 2$ Hz.

a) 24,78 dB b) 300 dB c) 200 dB d) 27,79 dB e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Amplituda: $A = 20$ V

S obzirom da zadani filtar propušta signal u potpunosti (frekvencija signala $s(t)$ iznosi 1 Hz, dok je granična frekvencija filtra 2 Hz), snagu signala S računamo prema izrazu:

$$S = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} s^2(t)dt \text{ tj. } S = \frac{A^2}{2} = 200\,\mathrm{W}$$

Snagu šuma računamo sa promijenjenim granicama, što je određeno filtrom:

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} S_N(f) \cdot |H(f)|^2\, df = 2\int_0^2 e^{-3f} df = \frac{2}{3}\left(1 - e^{-6}\right) = 0,665\,\mathrm{W}$$

Omjer S/N u decibelima računamo prema izrazu:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{S}{N}\right)$$

Odnosno,

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 24,782\,\text{dB}$$

4. zadatak (10 bodova): Bezmemorijsko izvorište generira simbole iz skupa simbola $X = \{a, b, c, d\}$. Vjerojatnosti pojavljivanja simbola su $p(a) = 0,5$, $p(b) = 0,3$, $p(c) = 0,1$ i $p(d) = 0,1$. Poruku „*aaadab*“ (navodnici nisu dio poruke) kodirajte aritmetičkim kodom te odredite broj bitova potreban za jednoznačno kodiranje zadane poruke (potrebno je ostvariti prefiksni kôd). **Napomena:** Prethodno navedeni redoslijed simbola u skupu X iskoristite za stvaranje kumulativnih podintervala unutar [0, 1), pri čemu je simbol a najbliži nuli. Također, prilikom računanja podintervala nemojte zaokruživati dobivene vrijednosti dobivenih granica jer bi to moglo dovesti do krivog izračuna traženog broja bita.

a) 9 bita   b) 10 bita   c) 11 bita   d) 12 bita   e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Simbol	**Frekvencija pojavljivanja**	**Vjerojatnosti pojavljivanja**	**Kumulativni podintervali, [DS; GS)**
a	4	0,5	[0; 0,5)
b	1	0,3	[0,5; 0,8)
c	0	0,1	[0,8; 0,9)
d	1	0,1	[0,9; 1)

Novi se podintervali *D'* i *G'* računaju prema sljedećim formulama: $$D' = D + (G - D)\cdot D_s$$ $$G' = D + (G - D)\cdot G_s$$

Početna vrijednost donje granice je: $D = 0$

Početna vrijednost gornje granice je: $G = 1$

a: $$D' = D + (G - D)\cdot D_s = 0 + (1-0)\cdot 0 = 0$$
$$G' = D + (G - D)\cdot G_s = 0 + (1-0)\cdot 0,5 = 0,5$$
$$D = D' = 0; G = G' = 0,5$$

a: $$D' = D + (G - D)\cdot D_s = 0 + (0,5-0)\cdot 0 = 0$$
$$G' = D + (G - D)\cdot G_s = 0 + (0,5-0)\cdot 0,5 = 0,25$$
$$D = D' = 0; G = G' = 0,25$$

a: $$D' = D + (G - D)\cdot D_s = 0 + (0,25-0)\cdot 0 = 0$$
$$G' = D + (G - D)\cdot G_s = 0 + (0,25-0)\cdot 0,5 = 0,125$$
$$D = D' = 0; G = G' = 0,125$$

$$D' = D + (G - D)\cdot D_s = 0 + (0{,}125 - 0)\cdot 0{,}9 = 0{,}1125$$
d: $$G' = D + (G - D)\cdot G_s = 0 + (0{,}125 - 0)\cdot 1 = 0{,}125$$
$$D = D' = 0{,}1125; G = G' = 0{,}125$$

$$D' = D + (G - D)\cdot D_s = 0{,}1125 + (0{,}125 - 0{,}1125)\cdot 0 = 0{,}1125$$
a: $$G' = D + (G - D)\cdot G_s = 0{,}1125 + (0{,}125 - 0{,}1125)\cdot 0{,}5 = 0{,}11875$$
$$D = D' = 0{,}1125; G = G' = 0{,}11875$$

$$D' = D + (G - D)\cdot D_s = 0{,}1125 + (0{,}11875 - 0{,}1125)\cdot 0{,}5 = 0{,}115625$$
b: $$G' = D + (G - D)\cdot G_s = 0{,}1125 + (0{,}11875 - 0{,}1125)\cdot 0{,}8 = 0{,}1175$$
$$D = D' = 0{,}115625; G = G' = 0{,}1175$$

Broj bitova potrebnih za jednoznačno kodiranje poruke prefiksnim aritmetičkim kodom moguće je izračunati pomoću konačnih vrijednosti granica podintervala, G i D:

$$N = \left\lceil \log_2\left(\frac{1}{G-D}\right)\right\rceil + 1 = \left\lceil \log_2\left(\frac{1}{0{,}1175 - 0{,}115625}\right)\right\rceil + 1 = \lceil 9{,}0588 \rceil + 1 = 10 + 1 = 11\,\text{bit}$$

5. zadatak (10 bodova): Dugačak slijed bitova 1010101... ulazi u Hammingov koder $[n,k]$ = [7,4] i nakon toga se prenosi binarnim simetričnim kanalom u kojem je vjerojatnost pogrešnog prijenosa bita 0,004. Odredite za koliko se promijeni vjerojatnost ispravnog dekodiranja promatranog slijeda ako se umjesto Hammingova kodera kao zaštita uporabi parni paritet. **Napomena**: traži se apsolutna vrijednost promjene.

a) 0,02172 bita b) 0,02712 bita c) 0,01458 d) 0,01951 e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Iz oznake koda vidljivo je da poruke imaju 4 bita, s tim da je kod Hammingovog koda duljina kodne riječi 7 bita, a kod paritetnog 5 bita.

Distanca Hammingovog koda: $d(K)$ = 3, što znači da on može točno dekodirati one kodne riječi na kojima je nastala najviše jedna pogreška bita. Vjerojatnost takvog događaja iznosi

$$p_H = \binom{7}{0}\left(1 - p_g\right)^7 + \binom{7}{1} p_g (1 - p_g)^6 = 0{,}999668$$

Nasuprot tome, paritetni kod može samo otkriti pogreške, što znači da će dekoder ispravno dekodirati poruku samo kada nije nastupila pogreška bita. Vjerojatnost takvog događaja iznosi

$$p_P = \binom{5}{0}\left(1 - p_g\right)^5 = 0{,}980159$$

Razlika ovih dviju vjerojatnosti je $\Delta p = p_H - p_P = 0{,}01951$

6. zadatak (10 bodova): Razmatrajte blok kôd K koji sadrži 16 kodnih riječi i koji svaku poruku duljine 4 bita kodira dodatnim paritetnim bitom koristeći pri tome parni paritet. Kodne riječi prenose se binarnim simetričnim kanalom u kojem vjerojatnost pogrešnog prijenosa bita iznosi 0,03. Odredite vjerojatnost da kôd K u prijemniku ne otkrije eventualne pogreške bita. **Napomena**: razmatrajte prijenos jako dugačkog slijeda cjelovitih kodnih riječi. Također, ne razmatrajte hipotetska stanja kvara kodera ili dekodera, jer ona u zadatku nisu niti definirana.

a) 0,8904 b) 0,8533 c) $5{,}08\cdot10^{-3}$ d) 0,9247 e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja

U prijenosu kodnih riječi koda K zadanim kanalom imamo četiri osnovna događaja:

$$\begin{aligned} &A - \text{pogreška otkrivena}\\ &\overline{A} - \text{pogreška nije otkrivena}\\ &B - \text{pogreška nastupila}\\ &\overline{B} - \text{pogreška nije nastupila}\end{aligned}$$

Za traženi događaj da kôd K ne otkrije pogreške bita, tj. $\overline{A}$, vrijedi: $P\left(\overline{A}\right)=P(\overline{A},B)+P(\overline{A},\overline{B})$, tj. pogreška nije otkrivena u dva slučaja: a) kad je pogreška nastupila i nije otkrivena – događaj ($\overline{A}$, B), i b) kad pogreška nije nastupila i nije otkrivena – događaj ($\overline{A},\overline{B}$). Vjerojatnost događaja ($\overline{A}$, B) možemo jednostavno odrediti koristeći poznatu činjenicu da paritetni kôd (vrijedi podjednako za parni i neparni paritet) ne otkriva paran broj pogrešaka bita na kodnim riječima. U ovom konkretnom slučaju, imajući u vidu da kodne riječi imaju duljinu 5 bita (4 bita poruke i jedan paritetni bit), to znači da dekoder neće otkriti dvije niti četiri pogreške bita na kodnoj riječi:

$$P\left(\overline{A},B\right)=\underbrace{\binom{4}{2}p^2\left(1-p\right)^2+}_{\text{dvostruka pogreška}}\underbrace{\binom{4}{4}p^4}_{\text{četverostruka pogreška}}=6p^2\left(1-p\right)^2+p^4=5{,}08167\cdot10^{-3}\approx5{,}08\cdot10^{-3}$$

pri čemu je p zadana vjerojatnost pogrešnog prijenosa bita ikoja iznosi 0,03. Vjerojatnost događaja ($\overline{A},\overline{B}$) moguće je odrediti izrazom:

$$P\left(\overline{A},\overline{B}\right)=\binom{4}{0}\left(1-p\right)^4=0{,}97^4=0{,}88529281=0{,}8853$$

tj. događaj ($\overline{A},\overline{B}$) nastupa u slučaju kad u prijenosu nije bilo pogrešaka pa tada pogreške nisu niti otkrivene. Dakle, ukupna vjerojatnost da kôd K ne otkrije pogreške bita iznosi:

$$P\left(\overline{A}\right)=P(\overline{A},B)+P(\overline{A},\overline{B})=0{,}89037448\approx0{,}8904$$

7. zadatak (10 bodova): Odredite kapacitet diskretnog komunikacijskog kanala čija je matrica uvjetnih prijelaza zadana kao:

$$\left[p(y_j\mid x_i)\right]=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

a) 1,585 bit/s b) 0,667 bit/simbol c) 1 bit/simbol d) 0 bit/simbol

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja

Zadani kanal je slabo simetričan (WSC) pa se njegov kapacitet može odrediti temeljem jednostavnog izraza:

$$C = \log\left(\mathrm{card}(Y)\right) - H(Y \mid x) = \log_2(3) - \left(-\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\log_2\frac{2}{3}\right) =$$
$$= \log_2 3 + \frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\log_2\frac{2}{3} = \frac{2}{3}\,\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{simbol}}$$

Do istog se rezultata može doći i postupnim izvođenjem:

$$C = \max_{\{p(x_i)\}} I(X;Y) = \max_{\{p(x_i)\}} \left[H(Y) - H(Y \mid X)\right]$$
$$p_1 = p(x_1),\ p_2 = p(x_2)$$
$$\left[p(x_i, y_j)\right] = \left[p(x_i)p(y_j \mid x_i)\right] = \begin{bmatrix} (2/3)p_1 & (1/3)p_1 & 0 \\ 0 & (1/3)p_2 & (2/3)p_2 \end{bmatrix}$$

Zbrajanjem po stupcima dobivamo:

$$\frac{2}{3}p_1 = p(y_1), \quad \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2 = \frac{p_1 + p_2}{3} = p(y_2) = \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}p_2 = p(y_3)$$

Nadalje:

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{3} p(y_j)\log_2 p(y_j) = -\left[\frac{2}{3}p_1\log_2\left(\frac{2}{3}p_1\right) + \frac{1}{3}\log_2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3}p_2\log_2\left(\frac{2}{3}p_2\right)\right] =$$
$$= -\frac{2}{3}\left[p_1\log_2\left(\frac{2}{3}\right) + p_2\log_2\left(\frac{2}{3}\right) + p_1\log_2 p_1 + p_2\log_2 p_2\right] - \frac{1}{3}\log_2\left(\frac{1}{3}\right) =$$
$$= -\frac{2}{3}\left[(p_1 + p_2)\log_2\left(\frac{2}{3}\right) - H(X)\right] - \frac{1}{3}\log_2\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\log_2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3}H(X) - \frac{1}{3}\log_2\left(\frac{1}{3}\right) =$$
$$= -\frac{2}{3} - \log_2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3}H(X)$$

$$H(Y \mid X) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} p(y_j, x_i)\log_2 p(y_j \mid x_i)$$
$$H(Y \mid X) = -\left[\frac{2}{3}p_1\log_2\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3}p_1\log_2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}p_2\log_2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3}p_2\log_2\left(\frac{2}{3}\right)\right] =$$
$$= -\frac{2}{3} + \log_2 3\ \frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{simbol}}$$

$$C = \max_{\{p(x_i)\}}\left[-\frac{2}{3} - \log_2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3}H(X) + \frac{2}{3} + \log_2\left(\frac{1}{3}\right)\right] = \max_{\{p(x_i)\}}\left[\frac{2}{3}H(X)\right]$$

Entropija $H(X)$ je maksimalna kad su vjerojatnosti ulaznih simbola međusobno jednake, tj. kad je $p(x_1) = p(x_2) = 1/2$. U tom je slučaju $H(X) = \log_2(2) = 1$ bit/simbol pa je $C = 2/3$ bit/simbol, odnosno 0,667 bit/simbol.

8. zadatak (15 bodova). Razmatrajte komunikacijski kanal koji ima karakteristiku idealnog niskopropusnog filtra čija je prijenosna funkcija zadana sljedećim izrazima:

$$H(f) = |H(f)|e^{-j\Theta(f)}, |H(f)| = \begin{cases} 1 & \text{za} |f| \le f_g \\ 0 & \text{za} |f| > f_g \end{cases}, \Theta(f) = 2\pi f \tau, \forall f \in \mathbf{R}$$

Nadalje, pretpostavimo da impulsni odziv zadanog filtra, $h(t)$, poprima maksimum u trenutku $t_1 = 1$ ms. Također, pretpostavimo da $h(t)$ nakon maksimuma prvu sljedeću nul-točku poprima u točki $t_2 = 2$ ms. Odredite iznos fazne karakteristike kanala na frekvenciji f_g, $\Theta(f_g)$.

a) 180° b) 2π rad c) 1,571 rad d) 0 rad e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja

Impulsni odziv idealnog niskopropusnog filtra prikazan je slikom na stranici 77 udžbenika "Uvod u teoriju informacije i kodiranje". Za prikaz na toj slici pretpostavljeno je da je $\tau = 0$. Ako je konstanta različita od nule, cijeli se impulsni odziv pomiče ulijevo (za $\tau < 0$) ili udesno ($\tau > 0$):

$$h(t) = 2f_g \frac{\sin\left[2\pi f_g (t-\tau)\right]}{2\pi f_g (t-\tau)}$$

Kao što je vidljivo iz izraza za $h(t)$, on uvijek poprima svoj maksimum u točki $t_1 = \tau$. Dakle, sukladno zadanome, vrijedit će da je $\tau = 1$ ms. Iz prikaza impulsnog odziva jasno je da su nul-točke najbliže maksimumu razmaknute od njega za $1/(2f_g)$ sekundi. Iz zadanih vrijednosti moguće je jednostavno zaključiti da je $1/(2f_g) = (t_2 - t_1)$, $f_g = 1/[2(t_2 - t_1)]$, iz čega slijedi $f_g = 500$ Hz. Konačno, vrijednost fazne karakteristike kanala na frekvenciji f_g iznosi: $\Theta(f_g) = 2\pi f_g \tau = \pi$ [rad].

9. zadatak (15 bodova): Zadan je skup X od n simbola, $n \in \mathbf{N}$ i $n \ge 2$. Vjerojatnosti pojavljivanja simbola zadane su izrazima: $p(x_i) = 1/(2^i)$ za $1 \le i \le n-1$, $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$, pomoću kojih je u potpunosti definirana razdioba vjerojatnosti simbola iz skupa X. Simbole se prije slanja u kanal kodira binarnim Shannon-Fanovim kodom. Vaš je zadatak odrediti za koliko se promijeni srednja duljina kodne riječi kad se broj simbola u skupu X poveća za 1 i to posebno za slučaj $n = 30$. **Napomene**: prilikom proširenja skupa X za jedan simbol treba uzeti u obzir da se ne radi o uvođenju "praznog" simbola čija je vjerojatnost jednaka 0, nego o novoj, modificiranoj razdiobi vjerojatnosti, a strogo u skladu s ranije zadanim izrazima. Također, razmatrajte apsolutnu vrijednost promjene srednje duljine kodne riječi.

a) $9{,}31 \cdot 10^{-10}$ bit/simbol b) 0 bit/simbol c) $1{,}86 \cdot 10^{-9}$ bit/simbol

d) $4{,}66 \cdot 10^{-10}$ bit/simbol e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja

Iz definicije skupa simbola i pripadajućih im vjerojatnosti jasno je da mora vrijediti: $p(x_i) = 1/(2^{n-1})$. Ako poredamo simbole po padajućim vjerojatnostima i kodiramo ih Shannon-Fanovom tehnikom, dobit ćemo sljedeći kôd:

simbol x_i	vjerojatnost $p(x_i)$	kôd
x_1	1/2	0
x_2	1/4	10
x_3	1/8	110
$\vdots$		
x_{n-2}	$1/(2^{n-2})$	$\underbrace{111\cdots10}_{n-2}$
x_{n-1}	$1/(2^{n-1})$	$\underbrace{111\cdots110}_{n-1}$
x_n	$1/(2^{n-1})$	$\underbrace{111\cdots111}_{n-1}$

Dakle, svaki je simbol x_i kodiran kodnom riječi duljine i bita, s iznimkom simbola x_n koji je kodiran kodnom riječi duljine n – 1 bita. U ovom posebnom slučaju razdiobe vjerojatnosti simbola vrijedi da je srednja duljina kodne riječi jednaka entropiji skupa simbola:

$$\overline{L}=\sum_{i=1}^{n-1} i\cdot\frac{1}{2^i}+(n-1)\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2^i}\log_2\left(\frac{1}{2^i}\right)-\frac{1}{2^{n-1}}\log_2\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\log_2 p(x_i)=H(X)$$

Ako se broj promatrani skup poveća za jedan simbol, x_{n+1}, dobivamo novi kôd:

simbol x_i	vjerojatnost $p(x_i)$	kôd
x_1	1/2	0
x_2	1/4	10
x_3	1/8	110
$\vdots$		
x_{n-1}	$1/(2^{n-1})$	$\underbrace{111\cdots10}_{n-1}$
x_n	$1/(2^n)$	$\underbrace{111\cdots110}_{n}$
x_{n+1}	$1/(2^n)$	$\underbrace{111\cdots111}_{n}$

Usporedbom dvije inačice skupa simbola X, jedne s n simbola, nazovimo je X_n, i druge s n + 1 simbola, nazovimo je X_{n+1}, moguće je uočiti da se entropija, tj. srednja duljina kodne riječi promijeni za:

$$H(X_{n+1})=H(X_n)-\underbrace{(n-1)\cdot\frac{1}{2^{n-1}}}_{n-\text{ti simbol u skupu } X_1}+\underbrace{2\cdot n\cdot\frac{1}{2^n}}_{\substack{\text{pretvara se}\\ \text{u 2 simbola u}\\ \text{skupu } X_2}}$$

$$H(X_{n+1})-H(X_n)=\frac{1}{2^{n-1}}\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

Konkretno, ako je n = 30, tada će promjena entropije iznositi $1/(2^{29}) = 1{,}86\cdot10^{-9}$ bit/simbol.