Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Dekanski ispitni rok iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 17. rujna 2014.

Obavezno pročitati prije početka rješavanja ispitnih zadataka!

Ispit traje 150 minuta. Student na ispitu smije koristiti sljedeće:

1) prazne listove papira formata A4 za rješavanje zadataka,
2) pribor za pisanje (olovka, gumica),
3) kalkulator (nije dozvoljeno korištenje mobilnih telefona, tableta, laptopa i sličnih uređaja),
4) jedan arak papira formata A4 s matematičkim izrazima, može biti kreiran ručno ili na računalu.

Ako student bude primijećen kako koristi nedozvoljena sredstva na ispitu, bit će isključen iz procesa bodovanja i ocjenjivanja ispita. Za vrijeme trajanja ispita nije dozvoljeno uzajamno posuđivanje listova papira, pribora za pisanje, kalkulatora ili papira s matematičkim izrazima.

Radi lakšeg i točnijeg ispravljanja ispita student treba obratiti pozornost na sljedeće:

a) prilikom bodovanja ispita u razmatranje ćemo uzeti isključivo zadatke koji imaju točan postupak rješavanja i konačno rješenje,
b) na kraju svakog zadatka potrebno je istaknuti konačno rješenje (osim brojčanog iznosa točno rješenje mora imati i odgovarajuću mjernu jedinicu tamo gdje to ima smisla),
c) svaki zadatak je potrebno rješavati na zasebnom listu papira,
d) zadatke je potrebno rješavati pregledno i čitko jer o tome ovisi i preciznost ispravljanja (neuredne i nepregledne postupke rješavanja izuzet ćemo iz postupka bodovanja),
e) prilikom predaje ispita posložite zadatke po broju od najmanjeg prema najvećem i **obavezno** predajte i papiri sa zadacima koji će Vam biti dodijeljeni na početku ispita.

Niže stavljenim potpisom potvrđujem da sam pročitao/pročitala gore navedena pravila te da sam svjestan/svjesna da će ona biti primijenjena prilikom izvedbe i bodovanja ispita

Potpis studenta

Pravilo za bodovanje zadataka

U svakom zadatku masnim je slovima otisnuto koliko pojedini zadatak, odnosno potpitanje nosi bodova. Ukupno je moguće ostvariti najviše 60 bodova. Na ovoj provjeri znanja nema bodovnog praga.

ZADACI

1. zadatak: Razmatrajte kanal sa specifičnom strukturom šuma. Na ulaz kanala dolaze simboli iz skupa $X = \{x_1, ..., x_n\}$, a na izlazu kanala se pojavljuju simboli iz skupa $Y = \{y_1, ..., y_m\}$. Svakom ulaznom simbolu pridijeljena je vjerojatnost $p(x_i)$, $\forall\ i = 1, ..., n$, a svakom izlaznom simbolu vjerojatnost $p(y_j)$, $\forall\ j = 1, ..., m$. Pri tome vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = \sum_{j=1}^{m} p(y_j) = 1$$

Matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza u kanalu, $[P(Y|X)]$, zadana je kao:

$$\left[P(Y|X)\right]=\left[p(y_j|x_i)\right]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

U svakom stupcu matrice vrijedi: $a_{1j} = a_{2j} = ... = a_{nj}$, $\forall\, j = 1, ..., m$. Zadane su vjerojatnosti a_{1j}, $j = 1, ..., m$, što je dovoljno za potpuno opis matrice $[P(Y|X)]$. Također, matrice $[P(X)] = [p(x_i)]$ i $[P(Y)] = [p(y_j)]$ su definirane kao dijagonalne matrice:

$$\left[P(X)\right]=\begin{bmatrix} p(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p(x_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p(x_n) \end{bmatrix} \text{ i } \left[P(Y)\right]=\begin{bmatrix} p(y_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p(y_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p(y_m) \end{bmatrix}$$

a) **(1 bod)** Odredite matricu $[P(X,Y)] = [p(x_i,y_j)]$ pomoću zadanih vjerojatnosti a_{1j} i $p(x_i)$;

b) **(1 bod)** Odredite vjerojatnosti $p(y_j)$, $\forall\, j = 1, ..., m$, pomoću zadanih vjerojatnosti a_{1j};

c) **(1 bod)** Odredite matricu $[P(X|Y)] = [p(x_i|y_j)]$ pomoću zadanih vjerojatnosti $p(x_i)$;

Napomena: rješenja pod a) i c) moraju imati konačan oblik kao zadana matrica $[P(Y|X)]$;

d) **(1 bod)** Odredite $h = H(Y|X = x_i)$, $\forall\, i = 1, ..., n$, kao funkciju zadanih vjerojatnosti a_{1j} i broja m;

e) **(1 bod)** Odredite entropiju $H(Y|X)$ kao funkciju od h;

f) **(1 bod)** Odredite izraz za kapacitet ovakvog kanala i njegovu brojčanu vrijednost.

Postupak rješavanja:

a) $[P(X,Y)] = [P(X)]\cdot P[Y|X]$, odnosno $[p(x_i,y_j)] = [p(x_i)]\cdot[p(y_j|x_i)]$

$$\left[P(X,Y)\right]=\begin{bmatrix} a_{11}p(x_1) & a_{12}p(x_1) & \cdots & a_{1m}p(x_1) \\ a_{11}p(x_2) & a_{12}p(x_2) & \cdots & a_{1m}p(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{11}p(x_n) & a_{12}p(x_n) & \cdots & a_{1m}p(x_n) \end{bmatrix}$$

b) Vjerojatnosti $p(y_j)$ moguće je odrediti iz matrice $[P(X, Y)]$. Zbroj svih elemenata u j-tom stupcu određuje vjerojatnost $p(y_j)$, $\forall\, j = 1, ..., m$. Dakle, s obzirom da vrijedi $\sum_{i=1}^{n} p(x_i)=1$ tada je $p(y_j) = a_{1j}$, $\forall\, j = 1, ..., m$.

c) S obzirom da vrijedi $[P(X,Y)] = [P(X|Y)]\cdot[P(Y)]$, tj. $[p(x_i,y_j)] = [p(x_i|y_j)]\cdot[p(y_j)]$, za svaki element matrice $[P(X|Y)]$ vrijedi: $p(x_i|y_j) = p(x_i,y_j)/p(y_j)$. Sukladno tome, matrica $[P(X|Y)]$ ima oblik

$$\left[P(X|Y)\right]=\begin{bmatrix} p(x_1) & p(x_1) & \cdots & p(x_1) \\ p(x_2) & p(x_2) & \cdots & p(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p(x_n) & p(x_n) & \cdots & p(x_n) \end{bmatrix}$$

d) U slučaju zadanog kanala čija matrice $[P(Y|X)]$ ima identične retke, za entropiju $H(Y|X = x_\mathrm{i})$ vrijedi:

$$H\left(Y\middle|X=x_i\right)=-\sum_{j=1}^{m} p\left(y_j\middle|x_i\right)\log_2\left[p\left(y_j\middle|x_i\right)\right]=-\sum_{j=1}^{m} a_{1j}\log_2\left(a_{1j}\right)=h \text{ [bit/simbol]}$$

pri čemu je za zadanu matricu $[P(Y|X)]$ h realna konstanta.

e) Za entropiju šuma $H(Y|X)$ vrijedi:

$$H\left(Y\middle|X\right)=\sum_{i=1}^{n} p\left(x_i\right)H\left(Y\middle|X=x_i\right)=h\sum_{i=1}^{n} p\left(x_i\right)=h\left[\text{bit/simbol}\right]$$

f) Kapacitet kanala određujemo maksimizacijom transinformacije $I(X;Y)$ u kanalu. Za transinformaciju vrijedi: $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$. Entropiju $H(Y)$ moguće je izračunati pomoću vjerojatnosti a_{1j} na sljedeći način:

$$H\left(Y\right)=-\sum_{j=1}^{m} a_{1j}\log_2\left(a_{1j}\right)=h\left[\text{bit/simbol}\right]$$

U našem slučaju, zbog činjenice da $H(Y|X)$ ima konstantan iznos h [bit/simbol], te da vjerojatnosti $p(y_j)$ ovise isključivo o a_{1j} i $H(Y) = h$ [bit/simbol] neovisno o razdiobi apriornih vjerojatnosti $p(x_i)$, kapacitet kanala možemo odrediti kao:

$$C=\max_{\{p(x_i)\}}\left[H\left(Y\right)-H\left(Y\middle|X\right)\right]=0\left[\text{bit/simbol}\right]$$

Konačan rezultat je logičan jer vjerojatnosti $p(y_j)$ uopće ne ovise o razdiobi apriornih vjerojatnosti $p(x_i)$, pa je očito količina informacije o ulaznim simbolima koja se kanalom prenese do odredišta jednaka nuli.

2. zadatak: Diskretni bezmemorijski izvor generira 11 simbola sa sljedećim vjerojatnostima pojavljivanja:

$p(x_1) = 0{,}16$; $p(x_2) = 0{,}14$; $p(x_3) = 0{,}13$; $p(x_4) = 0{,}12$; $p(x_5) = p(x_6) = 0{,}1$; $p(x_7) = p(x_8) = 0{,}06$; $p(x_9) = 0{,}05$, $p(x_{10}) = p(x_{11}) = 0{,}04$.

Izlaz izvora spojen je na koder informacije koji simbole kodira Huffmanovim kvaternarnim kodom, koristeći pri tome 4 kvaternarna simbola: 0, 1, 2 i 3. Pravilo kodiranja je takvo da se simbolu ili nadsimbolu veće vjerojatnosti pridružuje manji kvaternarni simbol (3 > 2 > 1 > 0). Također, ako dva simbola imaju jednaku vjerojatnost (npr. x_7 i x_8), tada se simbolu većeg indeksa (u ovom primjeru to je x_8) pridružuje veći kvaternarni simbol.

a) **(2 boda)** Kodirajte zadani skup simbola kvaternarnim Huffmanovim kodom koristeći gore navedeno pravilo te ispišite kvaternarne kodne riječi za sve simbole;

b) **(1 bod)** Izračunajte srednju duljinu kodne riječi na izlazu kodera informacije izraženu brojem kvaternarnih simbola po izvornom simbolu (jedinica: k.s./simbol);

c) **(1 bod)** Izračunajte efikasnost zadanog Huffmanovog koda (**preporuka**: prilikom proračuna entropije izvora umnoške $p\times\log(p)$ zaokružujte na tri decimalne znamenke);

d) **(2 boda)** U ovisnosti o vjerojatnostima pojavljivanja simbola x_i na izlazu izvora, izračunajte vjerojatnosti pojavljivanja kvaternarnih simbola na izlazu kodera informacije (**preporuka**: rezultate zaokružite na 3 decimalne znamenke);

Postupak rješavanja:

a) Prilikom kodiranja potrebno je nadopuniti skup izvornih simbola s dva simbola čije su vjerojatnosti pojavljivanja 0. Time je zadovoljen uvjet da je broj simbola $N = M + k\cdot(M - 1)$, pri čemu je M broj simbola koje koristi koder informacije, što za kvaternarni kôd iznosi M = 4, dok je $k \in$ Z i $k \geq 0$. Dakle, $13 = 4 + 3\cdot3$. Postupkom kodiranja dobivamo sljedeće kodne riječi:

x_i	$p(x_i)$	$C(x_i)$	l_i
x_1	0,16	2	1
x_2	0,14	3	1
x_3	0,13	00	2
x_4	0,12	01	2
x_5	0,1	02	2
x_6	0,1	03	2
x_7	0,06	11	2
x_8	0,06	12	2
x_9	0,05	13	2
x_{10}	0,04	100	3
x_{11}	0,04	101	3
x_{12}	0,0	102	3
x_{13}	0,0	103	3

b) Srednju duljinu kodne riječi na izlazu kodera informacije određujemo izrazom:

$$\overline{L}_4 = \sum_{i=1}^{11} l_i p(x_i) = 1,78 \left[\frac{\text{k.s.}}{\text{simbol}} \right]$$

c) Efikasnost zadanog Huffmanovog koda definirana je kao omjer entropije izvora i srednje duljine kodne riječi. S obzirom da je pod b) izračunata srednja duljina kodne riječi izražena brojem kvaternarnih simbola po simbolu izvora, potrebno je prvo izračunati entropiju izraženu brojem kvaternarnih simbola po izvornom simbolu [k.s./simbol]:

$$H_2(X) = -\sum_{i=1}^{11} p(x_i) \log_2 \left[p(x_i) \right] = -\sum_{i=1}^{11} p(x_i) \frac{\log_4 \left[p(x_i) \right]}{\log_4(2)} \left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}} \right]$$

$$H_4(X) = -\sum_{i=1}^{11} p(x_i) \log_4 \left[p(x_i) \right] = H_2(X) \cdot \log_4(2) = \frac{1}{2} H_2(X) \left[\frac{\text{k.s.}}{\text{simbol}} \right]$$

$$H_2(X) = -\sum_{i=1}^{11} p(x_i) \log_2 \left[p(x_i) \right] = 3,309 \left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}} \right]$$

Dakle, $H_4(X) = 1,6545$, pa je efikasnost zadanog Huffmanovog koda moguće odrediti kao:

$$\varepsilon = \frac{H_4(X)}{\overline{L}_4} = 0,9295 = 92,95\% \approx 93\%$$

d) Svaka kodna riječ $C(x_i)$ sastoji se od n_{i0} kvaternarnih simbola 0, n_{i1} kvaternarnih simbola 1, n_{i2} kvaternarnih simbola 2 i n_{i3} kvaternarnih simbola 3, pri čemu za dobiveni kôd vrijedi $0 \leq n_{ix} \leq 2$, $x \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dakle, vjerojatnosti kvaternarnih simbola moguće je odrediti na sljedeći način:

$$p(0)=\frac{\sum_{i=1}^{11} n_{i0}\,p(x_i)}{\sum_{i=1}^{11} l_i\,p(x_i)},\ p(1)=\frac{\sum_{i=1}^{11} n_{i1}\,p(x_i)}{\sum_{i=1}^{11} l_i\,p(x_i)},\ p(2)=\frac{\sum_{i=1}^{11} n_{i2}\,p(x_i)}{\sum_{i=1}^{11} l_i\,p(x_i)},\ p(3)=\frac{\sum_{i=1}^{11} n_{i3}\,p(x_i)}{\sum_{i=1}^{11} l_i\,p(x_i)}$$

$$p(0)+p(1)+p(2)+p(3)=\frac{\sum_{i=1}^{11}\left(n_{i0}+n_{i1}+n_{i2}+n_{i3}\right)p(x_i)}{\sum_{i=1}^{11} l_i\,p(x_i)}=\frac{\overline{L}_4}{\overline{L}_4}=1$$

Dakle, $p(0) = 0{,}7/1{,}78 = 0{,}393$, $p(1) = 0{,}47/1{,}78 = 0{,}264$, $p(2) = 0{,}32/1{,}78 = 0{,}180$ i $p(3) = 0{,}29/1{,}78 = 0{,}163$. Provjera: $0{,}393 + 0{,}264 + 0{,}18 + 0{,}163 = 1$.

3. zadatak: Razmatrajte izvor koji generira četiri simbola iz skupa $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ s odgovarajućim vjerojatnostima pojavljivanja za koje vrijedi:

$$1 > p(x_1) = p_1 > p(x_2) = p_2 > p(x_3) = p_3 > p(x_4) = p_4 > 0 \text{ i } \sum_{i=1}^{4} p_i = 1.$$

Svi su simboli potpuno neovisni jedni o drugima. Nadalje, izvor je spojen s koderom informacije koji navedene simbole kodira binarnim simbolima sukladno algoritmu Shannon-Fano, a rezultat toga je prefiksni kôd. Kodne riječi na izlazu kodera informacije, $C(x_i)$, ovise o razdiobi vjerojatnosti simbola $x_i \in X$. Neka su zadane vjerojatnosti $p_3 = 0{,}19$ i $p_4 = 0{,}15$.

a) **(3 boda)** Odredite granice unutar kojih se smije nalaziti p_1 pa da kodna riječ $C(x_1)$ može imati duljinu jedan bit.

b) **(3 boda)** Neka izvor informacije generira poruku duljine 10 simbola x_2. Sukladno zahtjevu iz potpitanja a) da $C(x_1)$ može imati duljinu jedan bit, odredite koliko može iznositi najveći sadržaj informacije prenijet porukom sastavljenom od 10 simbola x_2. Rezultat zaokružite na dvije decimalne znamenke.

Postupak rješavanja:

a) Način kodiranja algoritmom Shannon-Fano ovisi o razdiobi vjerojatnosti $p(x_i)$. Pri tome je važno kako se simboli x_i, ovisno o $p(x_i)$, grupiraju. Bit je algoritma da prilikom podjele simbola u dvije grupe razlika zbroja vjerojatnosti simbola u jednoj i drugoj grupi bude minimalna. U slučaju zadanih simbola x_i i adekvatne razdiobe vjerojatnosti $p(x_i)$, konačan rezultat kodiranja algoritmom Shannon-Fano može biti:

1) $C(x_1) = 00$, $C(x_2) = 01$, $C(x_3) = 10$, $C(x_4) = 11$, ili

2) $C(x_1) = 0$, $C(x_2) = 10$, $C(x_3) = 110$, $C(x_4) = 111$.

Dakle, samo u drugom ishodu kodiranja moguće je ostvariti da $C(x_1)$ ima duljinu jednog bita. Da bi se simboli x_i dijelili u grupe na način koji odgovara binarnom kodu kreiranom u ishodu 2, mora vrijediti:

$| p_1 - (p_2 + p_3 + p_4)| \le | (p_1 + p_2) - (p_3 + p_4)|$, tj. s obzirom da je $p_3 + p_4 = 0{,}19 + 0{,}15 = 0{,}34$

$| p_1 - p_2 - 0{,}34 | \le | p_1 + p_2 - 0{,}34|$

Desna strana nejednakosti uvijek vrijedi zbog uvjeta $1 > p(x_1) > p(x_2) > p(x_3) > p(x_4) > 0$. Lijeva strana nejednakosti će polučiti sljedeći rezultat:

- za $p_1 \ge p_2 + p_3 + p_4$ vrijedi: $p_1 - p_2 - p_3 - p_4 \le p_1 + p_2 - p_3 - p_4$, što daje: $2p_2 \ge 0$, a to uvijek vrijedi;

Međutim, iz uvjeta $p_1 \geq p_2 + p_3 + p_4$, tj. $p_1 \geq p_2 + 0{,}34$, te uz $p_2 = 1 - p_1 - (p_3 + p_4) = 0{,}66 - p_1$ mora vrijediti: $2p_1 \geq 1$, tj. $\boldsymbol{p_1 \geq 0{,}5}$; istovremeno, zbog uvjeta $p_2 > p_3$, tj. $p_2 > 0{,}19$, te zbog jednakosti $p_1 + p_2 = 1 - (p_3 + p_4)$, slijedi $p_1 < 0{,}66 - 0{,}19$, tj. $\boldsymbol{p_1 < 0{,}47}$. S obzirom da je ova dva uvjeta za p_1 nemoguće istovremeno zadovoljiti, $p_1 \geq p_2 + p_3 + p_4$ nije opcija koja pogoduje rješenju.

- za $p_1 \leq p_2 + p_3 + p_4$ vrijedi: $-p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \leq p_1 + p_2 - p_3 - p_4$, tj.

$-p_1 + p_2 + 0{,}34 \leq p_1 + p_2 - 0{,}34$,

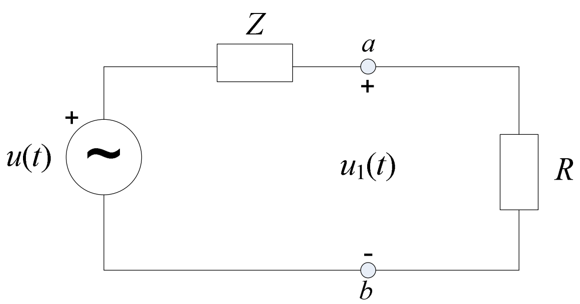
i konačno: $\boldsymbol{p_1 \geq 0{,}34}$

Kao što je već ranije rečeno, zbog jednakosti $p_1 + p_2 = 1 - (p_3 + p_4)$, slijedi $p_1 < 0{,}66 - 0{,}19$, tj. $\boldsymbol{p_1 < 0{,}47}$. Ova dva uvjeta za je moguće istovremeno zadovoljiti pa je konačno rješenje: $p_1 \in [0{,}34,\ 0{,}47)$.

b) Sukladno rezultatu iz a), te zbog $p_2 = 1 - (p_1 + p_3 + p_4)$, mora vrijediti: $p_2 \in (0{,}19,\ 0{,}32]$. Sadržaj informacije sadržan u jednom simbolu x_2 iznosi $I(x_2) = -\log_2(p_2)$ bita. Dakle, maksimalan sadržaj informacije kojeg može prenositi simbol x_2 uz ograničenje u zadatku iznosi $I(x_2) < -\log_2(0{,}19) = 2{,}396$ bita. Konačno, sadržaj informacije u poruci duljine 10 uzastopnih simbola x_2 mora zadovoljavati uvjet:

$$I\left(\underbrace{x_2 \ldots x_2}_{10\,\text{puta}}\right) < 23{,}96\,[bit]$$

4. zadatak: Razmatrajte naponski izvor koji generira napon $u(t)$. Unutarnji otpor izvora je realan i iznosi Z ohma, a na stezaljke a i b spojen mu je otpornik otpora R ohma. Napon između stezaljki a i b opisan je funkcijom $u_1(t)$.



Pretpostavite da je napon $u(t)$ zadan kao periodičan slijed pravokutnih impulsa definiranih sljedećim izrazom:

$$u(t) = \begin{cases} A & \text{za}\, 0 \leq t < T/2 \\ -A & \text{za}\, T/2 \leq t < T \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

pri čemu je A amplituda signala $u(t)$ zadana u voltima, a T je trajanje perioda signala $u(t)$ u sekundama.

a) **(2 boda)** Odredite izraz za Fourierove koeficijente u_k napona $u(t)$, $\forall k \in \mathbf{Z}$ (naputak: možete koristiti svojstvo Fourierove transformacije da istosmjerna komponenta u vremenskoj domeni opisana funkcijom $x(t) = K$ [V], $\forall f \in \mathbf{R}$, i delta funkcija $X(f) = K \cdot \delta(f)$ čine Fourierov transformacijski par). Konačan izraz za koeficijente u_k mora biti izražen kao funkcija od A i k.

b) **(1 bod)** Koristeći koeficijente u_k iz a) napišite matematički izraz za spektar signala $U(f)$.

c) **(1 bod)** Odredite izraz za srednju snagu P_1 koju razvija napon $u_1(t)$ na otporniku otpora R ohma. Izraz za snagu P_1 prikažite kao funkciju veličina A, Z i R.

d) **(2 boda)** Odredite maksimalan iznos kojeg može poprimit snaga P_1 u odnosu na zadanu amplituda napona izvora, A, i unutarnji otpor izvora, Z. Prikažite izraz za snagu P_1 kao funkciju od A i Z.

Postupak rješavanja:

a) Napon $u(t)$ možemo prikazati kao zbroj dva napona, $u_1(t)$ i $u_2(t)$, pri čemu vrijedi:

$$u_1(t)=\begin{cases} 2A & \text{za}\, 0 \le t < T/2 \\ 0 & \text{za}\, T/2 \le t < T \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad i \quad u_2(t) = -A, \forall t \in \mathbb{R}$$

Koristeći izraz za Fourierove koeficijente periodičnog slijeda pravokutnih impulsa, c_k:

$$c_k = A\frac{\tau}{T_0}\frac{\sin(k\omega_0\tau/2)}{k\omega_0\tau/2}$$

te sukladno definiciji napona $u_1(t)$, dobivamo

$$u_{1k} = 2A\frac{1}{2}\frac{\sin\left(k2\pi\frac{1}{T}\frac{T/2}{2}\right)}{k2\pi\frac{1}{T}\frac{T/2}{2}} = A\frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2}, k \in \mathbb{Z}\,.$$

Napon $u_2(t)$ je istosmjerna komponenta koja ima samo jedan Fourierov koeficijent,

$$u_{2k} = \begin{cases} -A & za\, k=0 \\ 0 & za\, k \ne 0 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Nadalje vrijedi:

$$u_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[u_1(t)+u_2(t)\right]e^{-jk\omega_0 t}dt =$$
$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u_1(t)e^{-jk\omega_0 t}dt + \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u_2(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = u_{1k} + u_{2k}$$

Konačan izraz za Fourierove koeficijente zadanog napona $u(t)$ je:

$$u_k = \begin{cases} 0 & za\, k=0 \\ A\dfrac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2} & za\, k \ne 0 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

b) Izraz za spektar signala $U(f)$ je sljedeći:

$$U(f) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\ne 0}}^{\infty} A\frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right), k \in \mathbb{Z}$$

c) Snaga P_1 na otporniku otpora R oma vezana je uz snagu izvora P izrazom:

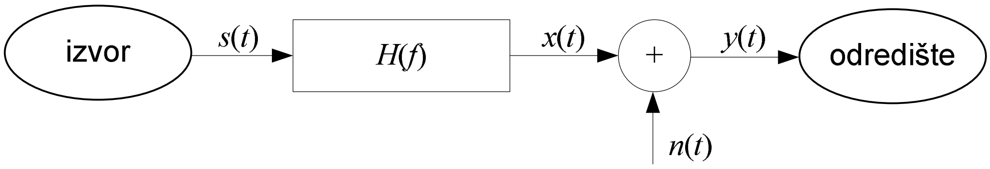
$$P_1 = P\frac{R}{Z+R}[W]$$

Trenutni iznos snage izvora, $p(t)$, povezan je s naponom izvora, $u(t)$, sljedećim izrazom: $p(t) = u^2(t)/(Z + R)$. S obzirom da je $u^2(t) = A^2$, $\forall t \in \mathbf{R}$, vrijedi: $p(t) = A^2/(Z + R)$. Očito je da se radi o konstanti pa je i srednja vrijednost snage izvora, P, jednaka trenutnoj vrijednosti: $P = A^2/(Z + R)$. Dakle,

$$P_1 = \frac{A^2}{Z+R}\frac{R}{Z+R} = A^2\frac{R}{\left(Z+R\right)^2}\left[W\right]$$

d) Ako A i Z promatramo kao zadane (fiksne) veličine, snaga P_1 će poprimiti maksimalan iznos ako je ispunjen uvjet: $Z = R$. Tada je $P_1 = A^2/(4Z)$.

5. zadatak: Razmatrajte komunikacijski kanal u kontinuiranom vremenu prikazan na donjoj slici.



Dakle, kanal koji povezuje izvor i odredište je serijski spoj linearnog i vremenski neovisnog (LTI) kanala prijenosne funkcije $H(f)$ i AWGN kanala u kojem djeluje šum $n(t)$. Pretpostavimo da je signal na izlazu izvora, $s(t)$, širokopojasni signal obilježja stacionarnog slučajnog procesa čija spektralna gustoća snage $S_s(f)$ iznosi 10 μW/Hz za $|f| \leq 10$ MHz, a na ostalim je frekvencijama jednaka nuli. Neka kanal prijenosne funkcije $H(f)$ ima obilježje idealnog niskopropusnog kanala i neka vrijedi $|H(f)| = 0{,}1$ za $|f| \leq 1$ MHz i $|H(f)| = 0$ na ostalim frekvencijama. Nadalje, neka je $n(t)$ bijeli Gaussov šum spektralne gustoće snage 0,5 nW/Hz, $\forall f \in \mathbf{R}$. Također, pretpostavimo da signal $x(t)$ ima Gaussovu razdiobu amplituda i da su svi njegovi uzorci međusobno neovisni.

a) **(1 bod)** Odredite iznos kapaciteta zadanog AWGN kanala.

b) **(1 bod)** Koliko iznosi standardna devijacija signala $x(t)$ na otporniku otpora 1 ohm, ako je $E[x(t)] = 0$?

c) **(1 bod)** Odredite dinamiku u zadanom AWGN kanalu.

d) **(1 bod)** Koliko iznosi smanjenje omjera srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma u zadanom AWGN kanalu uzrokovano primjenom realnog kodnog sustava uslijed kojeg prijenosna brzina iznosi 50% od kapaciteta zadanog AWGN kanala?

e) **(2 boda)** Koliko bi iznosio kapacitet zadanog AWGN kanala, ako je $|H(f)| = 0{,}1$ $\forall f \in R$?

Napomena: sve proračunate brojčane iznose zaokružite na najviše tri decimale.

Postupak rješavanja:

a) Kapacitet AWGN kanala određujemo izrazom:

$$C = B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)[\text{bit/s}]$$

pri čemu je S srednja snaga signala $x(t)$, B je širina frekvencijskog pojasa na kojeg je signal $x(t)$ ograničen u AWGN kanalu, a N je srednja snaga šuma $n(t)$. Srednju snagu signala $x(t)$ određujemo pomoću njegove spektralne gustoće snage $S_x(f)$ za koju vrijedi:

$$S_x(f)=S_s(f)\left|H(f)\right|^2=\begin{cases}0{,}1\ \mu\text{W/Hz} & |f|\le 1\text{MHz}\\ 0 & |f|>1\text{MHz}\end{cases}$$

Sukladno tome, $S = 2B\cdot S_x(f)$, pri čemu je B širina prijenosnog pojasa kanala prijenosne funkcije $H(f)$ i iznosi 1 MHz (to je širina frekvencijskog pojasa na koji je ograničen signal $x(t)$). Dakle, $S = 2\cdot10^{-1}$ = 200 mW. Bijeli Gaussov šum $n(t)$ spektralne gustoće snage $N_0/2$ = 0,5 nW/Hz će unutar pojasa širine $2B$ = 2 MHz razviti srednju snagu $N = N_0B$ = 1 mW. Dakle, $C = 10^6\log_2(1 + 200)$ = 7,651 Mbit/s.

b) Standardna devijacija signala $x(t)$, σ_x, određena je srednjom snagom tog signala. S obzirom da je $E[x(t)] = 0$, tada vrijedi: $S = \sigma_x^2/R$. Uz zadani R = 1 ohm, σ_x = 0,446 V.

c) Dinamika u AWGN kanalu određene je izrazom: $C = 2BD$, što znači da je $D = C/(2B)$ = 3,826 bit/simbol.

d) U AWGN kanalu s realnim kodnim sustavom ostvarena je prijenosna brzina $R = C/2$. Smanjenje omjera srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma uzrokovano primjenom realnog kodnog sustava definirano je izrazom:

$$\Gamma=\frac{S/N}{2^{C/(2B)}-1}$$

Uvrstimo li u taj izraz sljedeće vrijednosti: S = 200 mW, N = 1 mW, C = 7,651 Mbit/s i B = 1 MHz, dobit ćemo: Γ = 15,178.

e) Ako je $|H(f)| = 0{,}1\ \forall f \in R$, tada je signal $x(t)$ ograničen na pojas frekvencija širine B = 10 MHz (proizlazi iz definicije spektralne gustoće snage signala $s(t)$). Tada je njegova srednja snaga $S = 2B\cdot S_x(f) = 2B\cdot S_s(f)\cdot|H(f)|^2$ = 2 W. Kapacitet je moguće odrediti sljedećim izrazom: $C = 10^7\log_2[1 + 2/(2\cdot10^7\cdot0{,}5\cdot10^{-9})]$ = 76,51 Mbit/s.

6. zadatak: Razmatrajte naponski signal $x(t) = 10\cdot\cos(2000\pi t)\cdot\cos(6000\pi t)$ [V].

a) **(1 bod)** Sukladno Nyquistovom teoremu o uzorkovanju signala u osnovnom pojasu frekvencija odredite minimalnu frekvenciju uzorkovanja s kojom bi morali uzorkovati signal $x(t)$.

b) **(1 bod)** Odredite srednju snagu signala $x(t)$ na otporniku otpora 1 ohm.

c) **(1 bod)** Signal $x(t)$ dovodimo na kvantizator koji provodi jednoliku kvantizaciju (korak kvantiziranja je konstantan). Ako kvantizator svaki uzorak kodira s 8 bita, odredite koliko najviše smije iznositi maksimalni **raspon** amplituda signala na ulazu kvantizatora pa da pri kvantizaciji signala $x(t)$ bude ostvaren omjer S/Q (omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma kvantiziranja) od barem 40 dB.

d) **(1 bod)** Odredite koliko minimalno smije iznositi raspon amplituda na ulazu kvantizatora pa da prilikom kvantizacije signala $x(t)$ ne dođe do izobličenja. Napomena: karakteristika kvantizatora je simetrična, tj. raspon amplituda se kreće od $-A_m$ do A_m.

e) **(2 boda)** Koliko minimalno mora iznositi prijenosna brzina kanala kroz koji se prenose kodirani uzorci signala $x(t)$, ako odaberemo frekvenciju uzimanja uzoraka signala $x(t)$ koja je dvostruko veća od minimalno potrebne?

Napomena: sve proračunate brojčane iznose zaokružite na najviše tri decimale.

Postupak rješavanja:

a) Signal $x(t) = 10\cdot\cos(2000\pi t)\cdot\cos(6000\pi t)$ možemo napisati kao zbroj dva signala:

$$5\cos(4000\pi t) + 5\cos(8000\pi t)$$

Najveća frekvencija u spektru signala $x(t)$ iznosi f_m = 4000 Hz, što znači da frekvencija uzorkovanja, f_u, mora biti veća od 8 kHz.

b) Spektar signala $x(t)$ definiran je izrazom:

$$X(f)=\frac{5}{2}\delta(f-2000)+\frac{5}{2}\delta(f+2000)+\frac{5}{2}\delta(f-4000)+\frac{5}{2}\delta(f+4000)$$

Ovo je u stvari prikaz razvoja signala $x(t)$ u Fourierov red, što pokazuje da se radi o periodičnom signalu osnovne frekvencije 2 kHz. Adekvatni Fourierovi koeficijenti su: $c_{-1} = c_1 = c_{-2} = c_2 = 5/2$. Primijenimo li izraz za srednju snagu periodičnog signala dobit ćemo:

$$P_x=|c_0|^2+2\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2=4\left(\frac{5}{2}\right)^2=25[\mathrm{W}]$$

c) Ako kvantizator koristi r = 8 bita po uzorku, tada za srednju snagu kvantizacijskog šuma, Q, vrijedi:

$$Q=\frac{1}{3}A_m^2 2^{-2r}$$

pri čemu je A_m najveća amplituda signala koji se smije pojaviti na ulazu kvantizatora. Kako bi zadovoljili uvjet da omjer srednje snage signala $x(t)$, S, prema srednjoj snazi šuma, Q, iznosi barem 40 dB, mora vrijediti $S/Q \geq 10^4$. Dakle,

$$\frac{25}{A_m^2 2^{-16}/3}\geq 10^4 \rightarrow A_m \leq \sqrt{\frac{75\cdot 2^{16}}{10^4}}=22{,}17[\mathrm{V}]$$

Dakle, najveći dozvoljeni raspon amplituda signala na ulazu kvantizatora smije iznositi najviše 44,34 volta.

d) S obzirom da maksimalna vrijednost signala $x(t)$ iznosi 10 V (moguće dokazati derivacijom, ali je vidljivo i na temelju grube skice funkcije), tada raspon amplituda na ulazu kvantizatora mora iznositi najmanje 20 V pa da prilikom kvantizacije signala $x(t)$ ne dođe do izobličenja.

e) Dakle, ako signal $x(t)$ uzorkujemo frekvencijom 16 kHz, i svaki uzorak kvantiziramo i kodiramo s 8 bita, tada mora vrijediti $R \geq 16\cdot 8$ = 128 kbit/s.

7. zadatak: Razmatrajte jako pouzdan prijenosni sustav u kojem se svaki bit štiti pomoću Hammingovog koda Ham(r), $r \in \mathbf{N}$. Zadani kôd je linearan binarni blok kôd.

a) **(1 bod)** Odredite minimalni r koji je potreban za zaštitu poruke duljine jednog bita i sukladno tome napišite matricu provjere pariteta koda Ham(r) u standardnom obliku.

b) **(1 bod)** Kôd određen u potpitanju a) zvat ćemo nadalje u zadatku kôd K. Odredite generirajuću matricu koda K u standardnom obliku.

c) **(1 bod)** Je li kôd K cikličan? Dokažite tvrdnju koristeći definiciju cikličnog koda.

d) **(1 bod)** Na ulaz dekodera kanala koji koristi kôd K dolazi slijed od 12 bita: 111000101000. Odredite izlaz iz dekodera kanala.

e) **(2 boda)** Pretpostavite da su koder kanala i dekoder kanala koji koriste kôd *K* povezani binarnim simetričnim kanalom s vjerojatnošću pogreške simbola p_g = 0,01. Odredite vjerojatnost neotkrivene pogreške na slijedu od tri uzastopna simbola koji zajedno čine kodnu riječ (**Napomena**: ne razmatrajte slučaj da pogreške nije bilo).

Postupak rješavanja:

a) Ham(r) je binarni Hammingov kôd. Za $r \geq 2$ vrijedi da je Ham(r) linearan blok kod oznake $[2^r - 1,\ 2^r - 1 - r]$. Dakle, za zaštitu poruke duljine 1 bita minimalno je potreban kôd Ham(2): $k = 2^r - 1 - r = 1$ iz čega slijedi $r = 2$. Ham(2) je linearan binarni blok kôd s oznakom [3, 1, 3]. Matrica provjere pariteta ima dva retka i sadrži binarne ekvivalente brojeva 1, 2 i 3 koji određuju pozicije unutar kodne riječi. Jedna od mogućih matrica provjere pariteta je:

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrica provjere pariteta koda Ham(2) u standardnom obliku može poprimiti samo jedan oblik:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Generirajuća matrica koda *K* ima samo jedan redak. Generirajuću matricu koda K u standardnom obliku možemo dobiti pomoću matrice provjere pariteta koda Ham(2) u standardnom obliku:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \middle| \mathbf{I}_2\right], \mathbf{G} = \left[\mathbf{I}_1 \middle| \mathbf{A}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Kôd *K* je cikličan ako je 1) linearan blok kôd i 2) ako bilo koji ciklični posmak kodne riječi iz *K* opet daje kodnu riječ iz *K*.

Kôd *K* sadrži samo dvije kodne riječi:

$$K = \begin{cases} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{cases}$$

Dakle, kôd *K* je linearan jer vrijedi $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in K$, i $a \cdot \mathbf{x} \in K$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ i $a \in \{0, 1\}$. također, ciklični posmak riječi 000, odnosno 111 uvijek daje iste te riječi. Dakle, kôd *K* je cikličan.

d) Ako na ulaz dekodera kanala koji koristi kôd *K* dolazi slijed od 12 bita: 111000101000, tada će, zbog sposobnosti koda da ispravi jednostruke pogreške bita i dekodiranjem prema načelu najbližeg susjeda, na izlazu dekodera kanala biti slijed: 1010.

e) Dekoder kanala slijed bita dekodira u blokovima od po 3 bita. Dekoder neće otkriti pogrešku na kodnoj riječi samo ako nastupi pogreška na sva tri bita kodne riječi: $P_e = p_g^3 = 0{,}01^3 = 10^{-6}$.

8. zadatak: Zadan je linearan binarni ciklični kôd *K* s oznakom (4, 4, $d(K)$).

a) **(2 boda)** Odredite sve kodne riječi i udaljenost koda *K*.

b) **(2 boda)** Odredite generirajući polinom koda *K* i pomoću njega generirajuću matricu koda *K* u standardnom obliku.

c) **(2 boda)** Odredite polinom za provjeru pariteta koda K i pomoću njega matricu provjere pariteta koda K u standardnom obliku.

Postupak rješavanja:

a) Sama oznaka koda K jasno govori da kôd sadrži četiri kodne riječi duljine 4 bita, a s obzirom da je linearan, mora sadržavati i riječ 0000. Dakle, uvidom u sve moguće kombinacije od po 4 bita, njih ukupno 16, eliminacijom nemogućih kombinacija preostale su sljedeće kodne riječi:

$$K = \begin{cases} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{cases}$$

Općenito, neki kôd je cikličan ako je 1) linearan blok kôd i 2) ako bilo koji ciklični posmak kodne riječi iz tog koda opet daje kodnu riječ iz istog koda. Vrlo je lako ustanoviti da kôd K zadovoljava oba uvjeta. Udaljenost koda je $d(K) = 2$.

b) Generirajući polinom koda K mora biti faktor polinoma $x^4 - 1$. Taj je polinom moguće faktorizirati kao $x^4 - 1 = (x^2 + 1)\cdot(x^2 + 1)$ ili kao $x^4 - 1 = (x + 1)\cdot(x^3 + x^2 + x + 1)$. Polinom $(x^2 + 1)$ određuje kôd dimenzije $k = n - r = 4 - 2 = 2$, polinom $(x + 1)$ određuje kôd dimenzije $k = n - r = 4 - 1 = 3$, dok polinom $(x^3 + x^2 + x + 1)$ određuje kôd dimenzije $k = n - r = 4 - 3 = 1$. Od sva tri generirajuća polinoma zadani kôd K [4, 2] jedino je moguće generirati polinomom $g(x) = (x^2 + 1)$. Pomoću tog polinoma možemo kreirati generirajuću matricu:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

koja ujedno ima i standardni oblik.

c) S obzirom da mora vrijediti $g(x)\cdot h(x) = x^n - 1$, što u slučaju zadanog koda K znači:

$(x^2 + 1)\cdot\, h(x) = x^4 - 1$

tada je vrijedi polinom za provjeru pariteta koda K dan kao $h(x) = (x^2 + 1)$. Uslijed toga će matrica za provjeru pariteta koda K biti jednaka

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

što je ujedno i njen standardni oblik.

9. zadatak: Zadan je linearni binarni blok kôd K s matricom provjere pariteta $\mathbf{H}$, tj.:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poznato je da su kodne riječi danog koda oblika $\mathbf{c} = [\mathbf{d}\ \ \mathbf{p}]$, gdje $\mathbf{d}$ i $\mathbf{p}$ predstavljaju bitove poruke, odnosno, bitove zaštite.

a) (**1 bod**) Odredite kodnu brzinu koda K.

b) (**1 bod**) Je li kôd K perfektan?

c) (**2 boda**) Odredite generirajuću matricu **G** koda K.

d) (**2 boda**) Odredite kodnu riječ **c** koja se pojavljuje na izlazu kodera kanala ako na njegov ulaz dolazi poruka 1010.

Postupak rješavanja:

a) $R = 4/7$

b) $d(K) = 3$; $t = 1$; Kôd K je perfektan.

c) Neka je $\mathbf{c} = [d_1\ d_2\ d_3\ d_4\ p_1\ p_2\ p_3]$. Ako je **c** kodna riječ koda K tada vrijedi: $\mathbf{cH}^T=\mathbf{0}$. Nadalje, dobivamo sustav lineranih jednadžbi

$d_4+p_1+p_2+p_3=0$ (1)

$d_2+d_3+p_2+p_3=0$ (2)

$d_1+d_3+p_1+p_3=0$ (3)

(1) + (2) $\rightarrow p_1= d_2+d_3+d_4$

(1) + (3) $\rightarrow p_2= d_1+d_3+d_4$

(1) + (2) + (3) $\rightarrow p_3= d_1+d_2+d_4$

Na jednostavan način možemo odrediti matricu **G**, tj.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

d) $\mathbf{c} = [1010]\times\mathbf{G}=[1010\ \mathbf{101}]$

10. zadatak (6 bodova) Zadan je skup simbola na izvoru komunikacijskog kanala, $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Svakom simbolu pridijeljena je apriorna vjerojatnost pojavljivanja $p(x_i)$, $i = 1, ..., n$. Nadalje, pretvorimo svaki simbol x_i u dva nova simbola, y_{2i-1} i y_{2i}, pri čemu za apriorne vjerojatnosti pojavljivanja simbola y_j, $j = 1, ..., 2n$, vrijedi sljedeće pravilo: $p(y_{2i-1}) + p(y_{2i}) = p(x_i)$ i $p(y_{2i-1}) = 2\cdot p(y_{2i})$, $\forall\ i = 1, ..., n$ Odredite razliku između entropija ova dva skupa simbola, $H(X) - H(Y)$.

Postupak rješavanja:

Entropija skupa simbola X dana je izrazom:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\log_2\left[p(x_i)\right][\text{bit/simbol}]$$

Za vjerojatnosti $p(y_{2i-1})$ i $p(y_{2i})$ vrijedi sljedeće:

$p(y_{2i}) = p(x_i)/3$ i $p(y_{2i-1}) = 2\cdot p(x_i)/3$, $\forall\ i = 1, ..., n$

Temeljem toga, entropija skupa simbola Y dana je izrazom:

$$H\left(Y\right)=-\sum_{j=1}^{2n}p\left(y_j\right)\log_2\left[p\left(y_j\right)\right]=-\sum_{i=1}^{n}\frac{p\left(x_i\right)}{3}\log_2\left[\frac{p\left(x_i\right)}{3}\right]-\sum_{i=1}^{n}\frac{2p\left(x_i\right)}{3}\log_2\left[\frac{2p\left(x_i\right)}{3}\right]=$$

$$-\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}p\left(x_i\right)\log_2\left[\frac{p\left(x_i\right)}{3}\right]-\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{n}p\left(x_i\right)\log_2\left[\frac{2p\left(x_i\right)}{3}\right]=$$

$$-\frac{1}{3}\left\{\sum_{i=1}^{n}p\left(x_i\right)\log_2\left[p\left(x_i\right)\right]-\sum_{i=1}^{n}p\left(x_i\right)\log_2\left(3\right)\right\}-\frac{2}{3}\left\{\sum_{i=1}^{n}p\left(x_i\right)\log_2\left[2p\left(x_i\right)\right]-\sum_{i=1}^{n}p\left(x_i\right)\log_2\left(3\right)\right\}=$$

$$-\frac{1}{3}\left[-H\left(X\right)-\log_2\left(3\right)\right]-\frac{2}{3}\left[-H\left(X\right)+1-\log_2\left(3\right)\right]=H\left(X\right)-\frac{2}{3}+\log_2\left(3\right)\left[\text{bit/simbol}\right]$$

Dakle, razlika entropija $H(X) - H(Y)$ iznosi $2/3 - \log_2(3)$ bit/simbol = -0,918 bit/simbol.