Ispit iz Teorije informacije

Zadatak 1. Odredite kapacitet kanala zadanog niže navedenom matricom $[p(Y|X)]$.

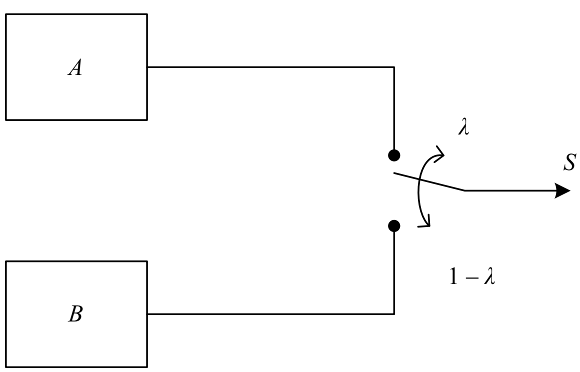
$$[p(Y|X)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A) $1\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$ B) $\log_2 3\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$
C) $2\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$ D) $\log_2 5\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$

Zadatak 2. Diskretni bezmemorijski izvor generira simbole iz skupa $\{A, B\}$ s vjerojatnostima pojavljivanja $p(A) = 0.8$ i $p(B) = 0.2$. Odredite *najmanji* n takav da broj 0.06 pripada konačnom intervalu dobivenom aritmetičkim kodiranjem poruke $\overbrace{AAA\cdots A}^{n}B$. Napomena: simbolu A odgovara podinterval $[0, 0.8)$.

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13

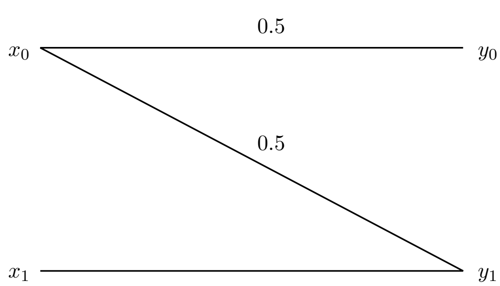
Zadatak 3. Dva izvora, A i B, spojena na preklopnik kako je predočeno slikom 1, generiraju simbole iz disjunktnih skupova. Preklopnik slučajno odabire izvor A s vjerojatnošću λ, odnosno izvor B s vjerojatnošću $1-\lambda$. Entropije izvor zadane su u natovima i označavamo ih kao H_A i H_B ($H_A \neq H_B$). Za koju će vjerojatnost λ entropija H_S na izlazu preklopnika S biti najveća? Napomena: prilikom proračuna koristite prirodni logaritam.



Slika 1: Dva izvorišta spojena na preklopnik.

A) $\frac{e^{H_A}}{e^{H_A}+e^{H_B}}$ B) $\frac{e^{H_B}}{e^{H_A}+e^{H_B}}$
C) $\frac{2^{H_A}}{2^{H_A}+2^{H_B}}$ D) $\frac{2^{H_B}}{2^{H_A}+2^{H_B}}$

Zadatak 4. Za koju se vjerojatnost pojave simbola x_0 postiže kapacitet kanala sa slike 2?



Slika 2: Z kanal s vjerojatnosti pogreške 0.5.

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$
C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$

Zadatak 5. Poruku od 3 bita štitimo dodatnim paritetnim bitom i zatim šaljemo binarnim simetričnim kanalom s vjerojatnosti pogreške 0.02. Odredite kolika je vjerojatnost (zaokružena na dvije decimale) da će kod otkriti pogrešku ako *znamo* da je barem jedna i nastala.

A) 0.95 B) 0.96 C) 0.97 D) 0.98

Zadatak 6. Razmatramo signal $x(t) = \cos(\omega t)$. Kružna frekvencija signala, ω, elementarni je događaj slučajne varijable Ω opisane sljedećom funkcijom gustoće vjerojatnosti:

$$g_\Omega(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2}\omega, & \omega \in [0, 2\pi] \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Signal $x(t)$ uzorkujemo frekvencijom $f_s = 1$ [Hz]. Kolika je vjerojatnost da <u>neće</u> doći do *aliasinga*? Napomena: kad je ω odabran, on se ne mijenja u vremenu, tj. konstantan je za svaki $t \in \mathbb{R}$.

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1

Zadatak 7. Linearni blok kod zadan je sljedećom generirajućom matricom:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Koja od sljedećih kodnih riječi ne pripada tom kodu?

A) 01101 B) 11010 C) 11100 D) 11101

Zadatak 8. Izvor generira simbole iz skupa $\{\bigstar, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ prema sljedećoj razdiobi: $p(\bigstar) = \frac{5}{39}$, $p(\clubsuit) = \frac{6}{39}$, $p(\diamondsuit) = \frac{6}{39}$, $p(\heartsuit) = \frac{7}{39}$ i $p(\spadesuit) = \frac{15}{39}$. Ako provedemo kodiranje Shannon-Fanoovim postupkom, kolika je prosječna duljina kodne riječi? Je li dobiveni kod optimalan?

A) $\frac{87}{39}\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$, kod je optimalan B) $\frac{89}{39}\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$, kod je optimalan

C) $\frac{87}{39}\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$, kod nije optimalan D) $\frac{89}{39}\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$, kod nije optimalan

Zadatak 9. Na ulaz sklopa za analogno-digitalnu pretvorbu dovodi se analogni signal širine spektra 8 [kHz]. Taj se signal uzorkuje minimalnom frekvencijom za koju je još uvijek ispunjen Shannonov teorem o uzimanju uzoraka. Svaki se uzorak kodira s 8 bitova. Ako dobiveni informacijski slijed šaljemo AWGN kanalom širine 10 [kHz], koliki mora biti minimalni omjer srednje snage signala i šuma, S/N, da bi bio moguć prijenos bez pogrešaka?

A) 34.5 dB B) 36.5 dB C) 38.5 dB D) 40.5 dB

Zadatak 10. Na signal $s(t) = 10\cos(2\pi t)$ [V] pribraja se šum spektralne gustoće snage $S_N(f) = \exp(-|f|)$ [W/Hz]. Dobiveni signal dolazi na ulaz filtra sljedeće amplitudne karakteristike:

$$A(f) = \begin{cases} 1, & |f| < 5 \text{ Hz} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Koliki je omjer snage signala i šuma na izlazu iz filtra? Napomena: snagu mjerimo na otporu od 1 [Ω].

A) 12 dB B) 14 dB C) 16 dB D) 18 dB

Rješenja ispitnog roka iz Teorije informacije – 17.2.2015.

1.

$$\left[p(Y\mid X)\right]=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$C=\max_{p(x_i)} I(X;Y)=\max_{p(x_i)}\left[H(Y)-H(Y\mid X)\right]$$

- kako u kanalu nema šuma, $H(Y|X) = 0$

$$C=\max_{p(x_i)}\left[H(Y)\right]=\log_2(3)\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

2.

$$A\equiv\left[0\,,0.8\right)$$
$$B\equiv\left[0.8\,,1\right)$$

- vrijednost 0.06 mora biti u podintervalu $0.8^n>0.06>0.8^{n+1}$

$$0.8^n>0.06\ /:\ln$$
$$n\cdot\ln(0.8)>\ln(0.06)/:\ln(0.8)$$
$$n<12.608$$

- provjera za drugi dio intervala

$$0.06>0.8^{n+1}\ /\ln$$
$$\ln(0.06)>(n+1)\cdot\ln(0.8)/:\ln(0.8)$$
$$n+1>12.6$$
$$n>11.6$$

- temeljem gornje dvije nejednakosti slijedi n = 12.

3.

$$H_S=-\lambda\ln\lambda-(1-\lambda)\ln(1-\lambda)+\lambda H_A+(1-\lambda)H_B$$

$$\frac{\partial H_S}{\partial\lambda}=0$$

$$\ln\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)+H_A-H_B=0$$

$$\lambda^*=\frac{e^{H_A}}{e^{H_A}+e^{H_B}}$$

4.

Krenimo od poznate formule za kapacitet diskretnog komunikacijskog kanala

$$C = \max_{\{p(x_i)\}} I(X;Y)$$

Nadalje, $I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$ te neka su p_0 i $p_1 = 1 - p_0$ vjerojatnosti pojavljivanja ulaznog skupa simbola X. Neka je $[p(Y|X)]$ matrica uvjetnih prijelaza kanala: $\left[p(Y \mid X)\right] = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Matrica združenih vjerojatnosti je: $\left[p(X,Y)\right] = \begin{bmatrix} 0{,}5p_0 & 0{,}5p_0 \\ 0 & p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5p_0 & 0{,}5p_0 \\ 0 & 1-p_0 \end{bmatrix}$, odnosno

$\left[p(Y)\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{p_0}{2} & \dfrac{2-p_0}{2} \end{bmatrix}$.

$$H(Y \mid X) = -\left\{2 \cdot \frac{p_0}{2} \log_2 \frac{1}{2}\right\} = p_0$$

$$H(Y) = -\left\{\frac{p_0}{2} \log_2 \frac{p_0}{2} + \frac{2-p_0}{2} \log_2\left(\frac{2-p_0}{2}\right)\right\} = \ldots = -\left\{\frac{1}{2}\left[p_0 \log_2 p_0 + (2-p_0)\log_2(2-p_0)\right] - 1\right\}$$

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y \mid X) = -\frac{1}{2}\left[p_0 \log_2 p_0 + (2-p_0)\log_2(2-p_0)\right] + 1 - p_0$$

Nadalje, $C = \max\limits_{\{p(x_i)\}} I(X;Y)$ te dobivamo

$$\frac{dI(X;Y)}{dp_0} = -\frac{1}{2\ln 2}\left\{\ln p_0 + 1 - \ln(2-p_0) - 1\right\} - 1 = -\frac{1}{2\ln 2} \ln \frac{p_0}{2-p_0} - 1 = 0 \text{ odnosno}$$

$$\frac{1}{2\ln 2} \ln \frac{2-p_0}{p_0} = 1$$

$$\ln \frac{2-p_0}{p_0} = \ln 4$$

tj. $p_0 = \dfrac{2}{5} \rightarrow p_1 = \dfrac{3}{5}$

5.

$p_g = 0{,}02$

$A \equiv$ kod otkriva pogrešku

$B \equiv$ nastala je barem jedna pogreška

$\mathrm{p}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = ?$

$$\mathrm{p}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = \frac{\mathrm{p}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{p(B)} = \frac{\binom{4}{1} p_g (1-p_g)^3 + \binom{4}{3} {p_g}^3 (1-p_g)}{1 - (1-p_g)^4} \approx 0{,}97031 \approx 0{,}97$$

6.

$$p(\text{"nema aliasinga"}) = p(2\pi f_s > 2\omega) = p(2\pi > 2\omega) = p(\omega < \pi)$$

$$p(\Omega < \pi) = \int_0^{\pi} \frac{1}{2\pi^2}\omega\, d\omega = \frac{1}{2\pi^2}\frac{\omega^2}{2}\bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi^2}\frac{\pi^2}{2} = \frac{1}{4}$$

7.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{sve kodne riječi}$$

- lako je uočiti da kodna riječ 11101 ne pripada kodu

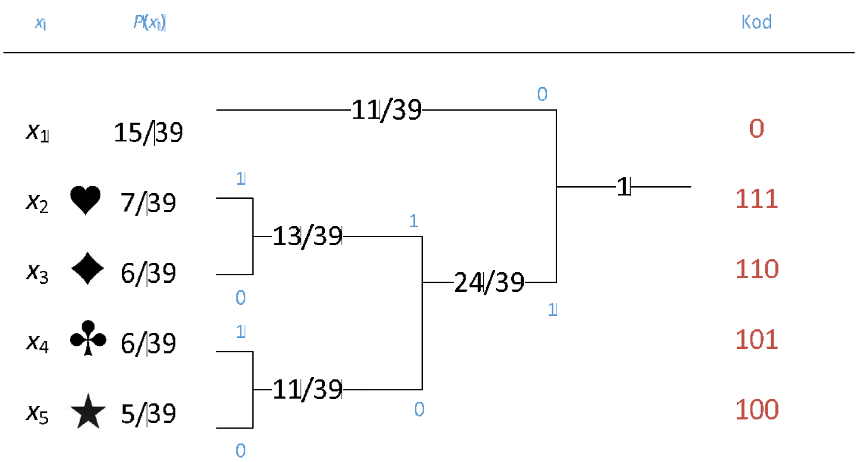
8.

a) Shannon-Fanoov kod

x_i	$P(x_i)$	Korak 1	Korak 2	Korak 3	Kod
♠	15/39	0	0		00
♥	7/39	0	1		01
♦	6/39	1	0		10
♣	6/39	1	1	0	110
★	5/39	1	1	1	111

$$L = \sum_{i=1}^{5} p_i l_i = \frac{15}{39}\cdot 2 + \frac{7}{39}\cdot 2 + \frac{6}{39}\cdot 2 + \frac{6}{39}\cdot 3 + \frac{7}{39}\cdot 3 = \frac{89}{39} \text{ bit/simbol}$$

b)Huffmanov kod



$$L = \sum_{i=1}^{5} p_i l_i = \frac{15}{39}\cdot 1 + \frac{7}{39}\cdot 3 + 2\cdot\frac{6}{39}\cdot 3 + \frac{5}{39}\cdot 3 = \frac{87}{39}\ \text{bit/simbol}$$

- pošto je prosječna duljina kodne riječi u Huffmanovom kodu manja od Shannon-Fanoovog koda, zaključak je da Shannon-Fanoov kod u navedenom slučaju nije optimalan

9.

$$\text{R} \equiv \text{brzina na izlazu A/D pretvornika}$$

$$\text{R} = 2\cdot 8000\,\text{uzorak/s}\cdot 8\,\text{bit/uzorak} = 128\ \text{kbit/s}$$

$$C = B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$$

$$128\cdot 10^3 = 10\cdot 10^3\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$$

$$\frac{S}{N} = 2^{12,8}-1$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 10\log_{10}\left(2^{12,8}-1\right) \approx 38,53\text{dB}$$

10.

$$s(t) = 10\cos(2\pi t)$$

$$S_N(f) = e^{-|f|}$$

$$S = \int_0^T Rs^2(t)dt = \frac{10^2}{2} = 50\text{W}$$

$$N = \int_{-s}^{+s} S_N(f)df = \int_{-s}^{+s} e^{-|f|}df = 2\int_0^{+s} e^{-x}dx = 2-2e^{-s} \approx 1,9865\,\text{W}$$

$$\frac{S}{N} = \frac{50}{1,9865} = 14\text{dB}$$