Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Ispitni rok iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 10. rujna 2019.

Svaki točno označeni zadatak na obrascu za odgovore donosi 20 bodova, netočno označeni 8 negativnih bodova, a neoznačeni donosi 0 bodova. Za ostvarivanje bodova za svaki zadatak nužan je točan i cjelovit postupak.

Zadatak 1: Na ulazu diskretnog binarnog komunikacijskog kanala pojavljuju se dva simbola $X = \{x_1, x_2\}$ s pripadajućim vjerojatnostima pojavljivanja $p(x_1)$, odnosno $p(x_2)$. Odredite kapacitet danog kanala. Matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza u kanalu zadana je kao

$$\left[p\left(y_j \mid x_i\right)\right]=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

a) 0,3219 bit/simbol

b) 1 bit/simbol

c) 0,6438 bit/simbol

d) 0,1609 bit/simbol

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

$$p(x_1)=q$$

$$p(x_2)=1-q$$

$$\left[p\left(x_i, y_j\right)\right]=\left[p(x_i)\,p\left(y_j \mid x_i\right)\right]=\begin{bmatrix} q & 0 \\ 0,5\,(1-q) & 0,5\,(1-q) \end{bmatrix}$$

Zbrajanjem matrice združenih vrijednosti po stupcima dobivamo vjerojatnost pojave simbola na izlazu

$$p(y_1)=0,5\,(1+q)$$

$$p(y_2)=0,5\,(1-q)$$

Zatim rješavamo entropiju izlaza prema formuli

$$H(Y)=-\sum_{j=1}^{2} p(y_j)\,\log_2\left(p(y_j)\right)$$

$$H(Y)=-\frac{(1+q)}{2}\,\log_2(1+q)-\frac{(1-q)}{2}\,\log_2(1-q)+1$$

Pritom računamo entropiju šuma formulom

$$H(Y \mid X)=-\sum_{i=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} p\left(x_i, y_j\right)\log_2\left(p\left(y_j \mid x_i\right)\right)$$

$$H(Y \mid X)=-\left[q\log_2 1+0,5\,(1-q)\log_2(0,5)+0,5(1-q)\log_2(1-q)\right]$$

$$H(Y \mid X)=1-q$$

Transinformaciju računamo formulom:

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y \mid X)$$

$$I(X;Y)=-\frac{1}{2\ln 2}\,\left((1+q)\,\ln(1+q)+(1-q)\,\ln(1-q)\right)+q$$

Da bismo dobili vjerojatnost pojavljivanja ulaznog skupa moramo derivirati jednadžbu transinformacije i dobiveni izraz izjednačiti sa nulom

$$0=-\frac{1}{2\ln 2}\left(\ln\left(1+q\right)-\ln\left(1-q\right)\right)+1$$

$$0=-\ln\left(1+q\right)+\ln\left(1-q\right)+\ln\left(4\right)$$

$$0=\ln\left(\frac{4\ \left(1-q\right)}{1+q}\right)$$

$$q=0,6$$

Konačno računamo kapacitet danog kanala formulom

$$C=\max_{\{p(x_i)\}} I\left(X;Y\right)=\max_{\{p(x_i)\}}\ (H(Y)-H(Y\mid X))$$

$$C=0,\ 3219\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

Zadatak 2: Dan je linearni binarni blok kod K čija je matrica provjere pariteta

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0&1\\1&1&0&0&1&0\\1&0&1&1&0&0\end{bmatrix}$$

Ako je primljena kodna riječ c'=[1 1 0 1 1 0] odredite kodnu riječ koja je poslana.

a) [1 1 0 1 1 1] b) [1 0 0 1 1 0] c) [0 1 0 1 1 0] d) [1 0 0 1 1 0] e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$$S(\mathbf{c}')=\mathbf{c}'\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&1&0&1&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix}1&1&0&1&1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&1&1&0\end{bmatrix}$$

Zadatak 3: Dvije kodne riječi „00" i „11" koriste se za prijenos informacija preko diskretnog binarnog simetričnog kanala u kojem je vjerojatnost pogrešnog prijenosa $p < 0{,}5$. Na prijamnoj strani provodi se sljedeće pravilo dekodiranja: ako su u primljenoj kodnoj riječi dva bita različita, prijamnik od predajnika traži ponovno slanje te kodne riječi. U svim drugim slučajevima prijamnik (dekoder kanala) provodi dekodiranje. Odredite vjerojatnost pogrešnog dekodiranja.

a) $\dfrac{(1-p)^2}{1-2p+2p^2}$

b) $\dfrac{p^2}{1-2p+2p^2}$

c) $\dfrac{1-p}{1-2p+2p^2}$

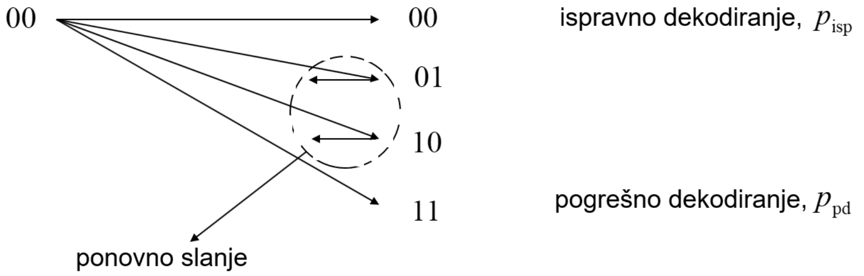
d) $\dfrac{p}{1-2p+2p^2}$

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Vjerojatnost pogrešnog dekodiranja računamo prema formuli $p_{pd} = 1 - p_{isp}$, gdje je p_{isp} vjerojatnost ispravnog dekodiranja.

Na slici su prikazani mogući ishodi prijenosa informacije preko binarnog simetričnog kanala (za kodnu riječ „00"). Dekodiranje će biti ispravno ako je na prijamnoj strani primljena kodna riječ jednaka poslanoj; doći će do ponovnog slanja ako se izmijeni jedan bit na bilo kojoj poziciji unutar kodne riječi; pogrešno se dekodiranje događa ako se na prijamnoj strani pojavi kodna riječ koja se od poslane razlikuje na svim pozicijama unutar kodne riječi. Analogna je situacija za kodnu riječ „11".



Ispravan prijenos događa se u sljedećim situacijama (primjer za kodnu riječ „00"):

Odaslana kodna riječ	Mogući slučajevi ispravnog prijenosa informacije iz *i* – tog pokušaja	Vjerojatnost prijenosa
00 $\rightarrow$	00 ispravan prijenos iz prvog pokušaja	$(1-p)^2$
	01 **00** ili **10** **00** ispravan prijenos iz drugog pokušaja	$2p(1-p)^3$
	01 **01** **00** ili **01** **10** **00** ili **10** **01** **00** ili ispravan prijenos iz trećeg pokušaja	$4p^2(1-p)^4$
	01 **01** **01** **00** ili ... ispravan prijenos iz četvrtog pokušaja	$8p^3(1-p)^5$
	…	…

Uz dodatno sređivanje izraza dobivamo:

$$p_{\text{isp}} = (1-p)^2[1+2p(1-p)+4p^2(1-p)^2+8p^3(1-p)^3+...]$$

$$p_{\text{isp}} = (1-p)^2[1+2p(1-p)+(2p(1-p))^2+(2p(1-p))^3+...]$$

Konačno, koristeći forumulu za sumu geometrijskog reda:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x};|x|<1$$

uz $x = 2p(1 - p)$ dobivamo:

$$p_{\text{isp}} = (1-p)^2\frac{1}{1-2p(1-p)} = \frac{(1-p)^2}{1-2p+2p^2}$$

$$p_{\text{pd}} = 1-p_{\text{isp}} = 1-\frac{(1-p)^2}{1-2p+2p^2}$$

$$p_{\text{pd}} = \frac{p^2}{1-2p+2p^2}$$

Zadatak 4: Na ulaz linearnog i vremenski nepromjenjivog (LTI) sustava dolazi slučajni signal $X(t)$ koji ima obilježje stacionarnog slučajnog procesa u širem smislu (WSS), čija srednja vrijednost iznosi 1 V, a spektralna gustoća snage $S_X(f)$ jednaka je 0,5 mW/Hz za $|f| \leq 1$ MHz. Impulsni odziv $h(t)$ promatranog LTI-sustava dan je izrazom:

$$h(t) = \frac{\sin\left[2\pi f_g t\right]}{2\pi t},$$

Odredite koliko mora iznositi granična frekvencija f_g LTI-sustava i srednja snaga P signala $Y(t)$ na izlazu LTI-sustava pa da autokovarijanca slučajnog procesa $Y(t)$, $C_Y(t_1, t_2)$, ima iznos 0 za slučaj kad je $t_2 = t_1$.

a) f_g = 1000 Hz, P = 1 W

b) f_g = 500 Hz, P = 0,25 W

c) f_g = 500 Hz, P = 0,0625 W

d) f_g = 1000 Hz, P = 0,25 W

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Očekivanje i spektralna gustoća snage slučajnog procesa $Y(t)$ na izlazu LTI-sustava određeni su sljedećim izrazima:

$$E\left[Y(t)\right]=E\left[X(t)\right]\cdot H(0),\quad S_Y(t)=S_X(t)\cdot\left|H(f)\right|^2.$$

Izraz za autokovarijancu C_Y slučajnog procesa $Y(t)$ glasi:

$$C_Y(t_1,t_2)=E\left\{\left[Y(t_1)-\mu_Y(t_1)\right]\left[Y(t_2)-\mu_Y(t_2)\right]\right\}=R_Y(t_1,t_2)-E\left[Y(t_1)\right]E\left[Y(t_2)\right],$$

pri čemu vrijedi $\mu_Y(t) = E[Y(t)]$. S obzirom da je proces $Y(t)$ također stacionaran u širem smislu, vrijedi:

$$C_Y(t_1,t_2)=R_Y(\tau)-\left(E\left[Y(t)\right]\right)^2,\tau=t_2-t_1,$$

a u posebnom slučaju kad je $t_1 = t_2$ vrijedi:

$$C_Y(t_1,t_1)=R_Y(0)-\left(E\left[Y(t)\right]\right)^2$$

Nadalje, izraz za impulsni odziv promatranog LTI-sustava moguće je preuredit u oblik $\sin(x)/x$:

$$h(t)=\frac{\sin\left[2\pi f_g t\right]}{2\pi t}=f_g\frac{\sin\left[2\pi f_g t\right]}{2\pi f_g t}$$

Općenito, ako je prijenosna funkcija idealnog niskopropusnog sustava definirana kao

$$H(f)=\begin{cases}1, & |f|\le f_g\\ 0, & |f|>f_g\end{cases}$$

tada takav sustav ima impulsni odziv definiran izrazom

$$h(t)=2f_g\frac{\sin\left[2\pi f_g t\right]}{2\pi f_g t}$$

Usporedbom ova dva izraza za impulsni odziv zaključujemo da je prijenosna funkcija promatranog LTI-sustav definirana sljedećim izrazom:

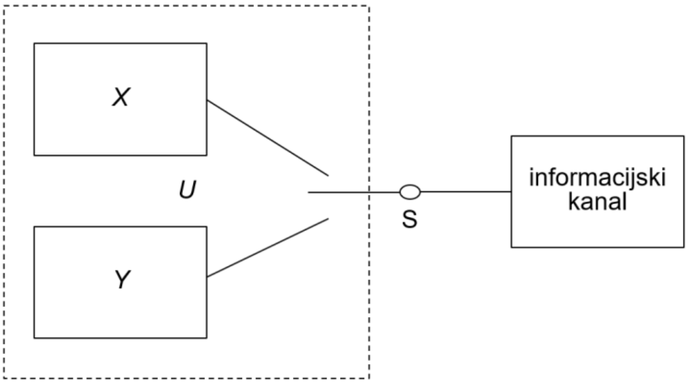
$$H(f)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |f|\le f_g\\ 0, & |f|>f_g\end{cases}$$

Dakle, vrijedit će: $E[Y(t)] = 1/2\cdot E[X(t)] = 1/2$ V i $S_Y(f) = 1/4\cdot S_X(f) = 1/8$ mW/Hz, $|f| \le f_g$ kHz. Temeljem navedenog moguće je odrediti iznos autokovarijance $C_Y(t_1, t_1)$

$$C_Y(t_1,t_1)=\int_{-f_g}^{f_g}\frac{1}{8}10^{-3}df-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}f_g10^{-3}-\frac{1}{4}$$

Ako se taj izraz izjednači s nulom, dobivamo konačni rezultat da je $f_g = 1000$ Hz, a srednja snaga signala $Y(t)$ jednaka je $R_Y(0) = 0,25$ W.

Zadatak 5: Dva informacijska izvora, X i Y, povezana su sklopkom na zajednički izlaz prema kanalu (vidi sliku) te tvore jedinstveni izvor U.



Izvori X i Y generiraju simbole prema sljedećim razdiobama:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \\ P(x_1) & \dots & P(x_m) \end{pmatrix}, \quad Y \sim \begin{pmatrix} y_{m+1} & \dots & y_{m+n} \\ P(y_{m+1}) & \dots & P(y_{m+n}) \end{pmatrix}$$

Kroz jako dugačko promatrano vrijeme (pretpostavka $t \to \infty$) sklopka prema potpuno slučajnom obrascu prelazi iz položaja X – S u Y – S i obratno. Uslijed toga vjerojatnost da je sklopka u bilo kojem trenutku u položaju X – S iznosi q_1, a vjerojatnost da je u položaju Y – S iznosi q_2, te vrijedi $q_1 + q_2 = 1$. Odredite maksimalnu vrijednost entropije informacijskog izvora U, kojeg zajedno tvore izvori X i Y, u ovisnosti o entropijama $H(X)$ i $H(Y)$.

Napomena: zanemarite vrijeme trajanja prebacivanja sklopke iz jednog u drugi položaj

a) $\log_2(1+2^{H(Y)-H(X)})+H(X)$ bit/simbol

b) $\log_2(1+2^{H(Y)-H(X)})+H(Y)$ bit/simbol

c) $\log_2(1+2^{H(Y)})+H(X)$ bit/simbol

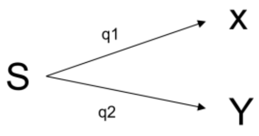
d) $\log_2(1+2^{H(X)})+H(Y)$ bit/simbol

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{m} P(x_i)\log_2 P(x_i)$$

$$H(Y) = -\sum_{i=m+1}^{m+n} P(y_i)\log_2 P(y_i)$$



$$1 = q_1 + q_2$$

$$H(U) = -q_1\sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 q_1 p_i - (1-q_1)\sum_{i=m+1}^{n} p_i \log_2 (1-q_1) p_i$$

$$= -q_1\sum_{i=1}^{m} p_i (\log_2 q_1 + \log_2 p_i) - (1-q_1)\sum_{i=m+1}^{n} p_i (\log_2 (1-q_1) + \log_2 p_i)$$

$$= -q_1\sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 q_1 - q_1\sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 p_i - (1-q_1)\sum_{i=m+1}^{n} p_i \log_2 (1-q_1) - (1-q_1)\sum_{i=m+1}^{n} p_i \log_2 p_i$$

$$= -q_1 \log_2 q_1 - (1-q_1)\log_2(1-q_1) + q_1 H(X) + (1-q_1)H(Y)$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

$$\sum_{i=m+1}^{n} p_i = 1$$

$$H(U)_{\max} = \frac{\partial H(U)}{\partial q_1} = 0$$

$$H(U)_{\max} = \frac{\partial^2 H(U)}{\partial {q_1}^2} < 0$$

$$\frac{\partial H(U)}{\partial q_1} = \log(1-q_1) - \log(q_1) + H(X) - H(Y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 H(U)}{\partial q_1} = -\frac{1}{q_1(1-q_1) * \ln(2)} < 0$$

$$q_1 = \frac{2^{H(X)}}{2^{H(X)} + 2^{H(Y)}} = \frac{1}{1+2^{H(Y)-H(X)}}$$

$$H(U)_{\max} = -q_1 \log_2 \frac{1}{1+2^{H(Y)-H(X)}} - (1-q_1)\log_2 \frac{2^{H(Y)-H(X)}}{1+2^{H(Y)-H(X)}} + \frac{1}{1+2^{H(Y)-H(X)}} H(X)$$

$$+ \frac{2^{H(Y)-H(X)}}{1+2^{H(Y)-H(X)}} H(Y)$$

$$= \log_2(1+2^{H(Y)-H(X)}) - (H(Y)-H(X)) \frac{2^{H(Y)-H(X)}}{1+2^{H(Y)-H(X)}} +$$

$$\frac{1}{1+2^{H(Y)-H(X)}} (H(X)-H(Y)) + H(Y)$$

$$= \log_2(1+2^{H(Y)-H(X)}) + H(X) - H(Y) + H(Y) = \log_2(1+2^{H(Y)-H(X)}) + H(X)$$

$$H(U)_{\max} = \log_2(1+2^{H(Y)-H(X)}) + H(X) \text{ bit/simbol}$$