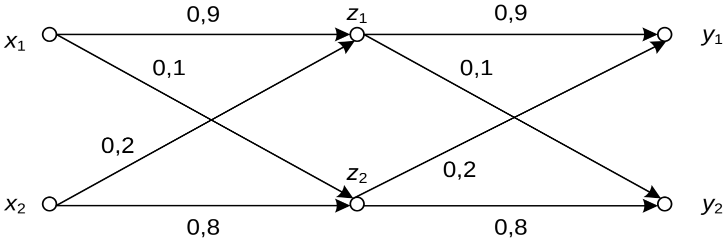
Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Ispitni rok iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 6. srpnja 2017.

1. zadatak (10 bodova): Dva binarna kanala serijski su povezana kako je to predočeno na slici 1. Odredite srednji uzajamni sadržaj informacije u sustavu kanala ako je $p(x_1) = p(x_2) = 0{,}5$.



Slika 1: Serijski spoj kanala

Postupak rješavanja:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{2} p(x_i)\,\log_2\left[p(x_i)\right] = -\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}\,\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2(2) = 1\,\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

Sa slike je vidljivo sljedeće:

$$\left[p\left(z_k|x_i\right)\right] = \left[p\left(y_j|z_k\right)\right] = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$

Nadalje vrijedi:

$$\left[p(x_i,z_k)\right] = \left[p(x_i)\right]\left[p(z_k|x_i)\right] = \begin{bmatrix} 0{,}45 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}4 \end{bmatrix} \rightarrow \left[p(z_k)\right] = \left[0{,}55 \quad 0{,}45\right]$$

$$\left[p(z_k,y_j)\right] = \left[p(z_k)\right]\left[p(y_j|z_k)\right] = \begin{bmatrix} 0{,}495 & 0{,}055 \\ 0{,}09 & 0{,}36 \end{bmatrix} \rightarrow \left[p(y_j)\right] = \left[0{,}585 \quad 0{,}415\right]$$

Dakle,

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{2} p(y_j)\log_2 p(y_j) = -\left[0{,}585\cdot\log_2(0{,}585) + 0{,}415\cdot\log_2(0{,}415)\right] = 0{,}979\,\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

$$\left[p(y_j)\right] = \left[p(z_k)\right]\left[p(y_j|z_k)\right] = \left[p(x_i)\right]\left[p(z_k|x_i)\right]\left[p(y_j|z_k)\right] = \left[p(x_i)\right]\left[p(y_j|x_i)\right]$$

$$\left[p(y_j|x_i)\right] = \left[p(z_k|x_i)\right]\left[p(y_j|z_k)\right] = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}83 & 0{,}17 \\ 0{,}34 & 0{,}66 \end{bmatrix}$$

$$\left[p(x_i,y_j)\right] = \left[p(x_i)\right]\left[p(y_j|x_i)\right] = \begin{bmatrix} 0{,}415 & 0{,}085 \\ 0{,}17 & 0{,}33 \end{bmatrix}$$

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(x_i,y_j)\log_2 p(x_i,y_j) = 1{,}791\,\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

Konačno, srednji uzajamni sadržaj informacije u sustavu kanala iznosi

$$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) = 1 + 0{,}979 - 1{,}791 = 0{,}188\,\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

2. zadatak (10 bodova): Dana je diskretna slučajna varijabla Z koja poprima vrijednosti 0 i 1 s vjerojatnostima 1 - p i p, slijedno gledano. Neka slučajna varijabla X, neovisna od Z, poprima vrijednosti $1,2,...,n$ s vjerojatnostima $q = [q_1, q_2, ..., q_n]$ i neka je $Y = XZ$. Odredite $H(Y)$ u ovisnosti o $H(X)$ i $H(Z)$.

Postupak rješavanja:

$$Z = \left[(1-p), p\right]$$

$$X = \left[q_1, q_2, ..., q_n\right]$$

$$Y = XZ$$

Obzirom da Z ima vrijednosti 0 i 1, pomnožen sa X koji ima $(1,2,...,n)$ daje vrijednosti $(0,1,...,n)$

$$Y = \left[[(1-p)\sum_{i=1}^{n} q_i], pq_1, pq_2, ..., pq_n \right]$$

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} q_i \log_2 q_i$$

$$H(Z) = -[p\log_2 p + (1-p)\log_2(1-p)]$$

$$H(Y) = -\sum_{j=0}^{n} y_j \log_2 y_j$$

$$H(Y) = -\left[\left((1-p)\sum_{i=1}^{n} q_i \log_2((1-p)\sum_{i=1}^{n} q_i) \right) + p\sum_{i=1}^{n} q_i \log_2 pq_i \right]$$

Znamo da je $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$

$$H(Y) = -\left[(1-p)\log_2(1-p) + p\sum_{i=1}^{n} q_i \left(\log_2 p + \log_2 q_i\right) \right]$$

$$H(Y) = -\left[(1-p)\log_2(1-p) + p\log_2 p + p\sum_{i=1}^{n} q_i \log_2 q_i \right]$$

$$H(Y) = H(Z) + pH(X)$$

3. zadatak (10 bodova): Koristeći algoritam LZ77 kodirajte poruka aaaabbbccd*, uzimajući pri tome da je maksimalna duljina posmičnog prozora 6, a prozora za kodiranje 5 simbola. **Napomena:** znak "*" označava kraj slijeda.

Postupak rješavanja:

*aaaab*bbccd*	(0,0,a)
a*aaabb*bccd*	(1,3,b)
aaaab*bbccd**	(1,2,c)
aa**aabbbc***cd**	(1,1,d)

aaaa**bbbccd***_	(0,0,*)

4. zadatak (10 bodova): Dan je binarni kôd $[n, k] = [6, 3]$ čije su kodne riječi oblika $d_1d_2d_3c_4c_5c_6$ i gdje su d_i-ovi i c_i-ovi bitovi poruke, odnosno, bitovi zaštite. Bitovi zaštite proračunavaju se na sljedeći način:

$$c_4 = d_1 \oplus d_2 \oplus d_3$$
$$c_5 = d_1 \oplus d_3$$
$$c_6 = d_2 \oplus d_3$$

Ako je primljena kodna riječ $\mathbf{c}' = [010111]$, odredite kodnu riječ koja je poslana.

Postupak rješavanja:

$$[n,\ k] = [6,\ 3]$$

$$\mathbf{c}' = [010111]$$

$$\mathrm{S}(\mathbf{c}') = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{G} = [\ \mathbf{I}_{\mathrm{k}}\ |\ \mathbf{A}\ ]$$

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{H} = [\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\ |\ \mathbf{I}_{\mathrm{n\text{-}k}}]$$

$$\mathbf{H} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathrm{S}(\mathbf{c}') = [010111] \cdot \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = [010]$$

Iz sindroma vidimo da je greška na 5. bitu, dakle, kodna riječ koja je poslana je 010101.

5. zadatak (20 bodova): Zadan je linearni binarni blok kôd K s oznakom $[n, k]$, pri čemu su n i k prirodni brojevi. Odredite koliko ima vektora u prostoru $V(n)$ koji nisu članovi niti koda K niti njemu dualnog koda $K^{\perp}$, ako generirajuća matrica koda $K^{\perp}$ ima 4 retka, a kodne riječi duljinu 10 bita.

Postupak rješavanja:

Ako je kôd K linearno binarni blok kôd s oznakom $[n, k]$, tada je njemu dualni kôd, $K^{\perp}$, linearno binarni blok kôd s oznakom $[n, n-k]$. To znači da generirajuća matrica dualnog koda, tj. matrica za provjeru pariteta ima $n - k$ redaka, Što u ovom konkretnom slučaju znači da je $n - k = 4$. Nadalje, ako kodne riječi imaju duljinu 10 bita, tada vrijedi: $n = 10$. Znači, $k = n - (n - k) = 10 - 4 = 6$. Dakle, kod K je linearni kôd s oznakom [10, 6]. Sukladno tome, kod K ima 2^6 kodnih riječi, a kod $K^{\perp}$ ima 2^4 kodnih riječi. Konačno, u prostoru $V(10)$ sadržano je 2^{10} kodnih riječi. Međutim, neke kodne riječi koje se javljaju u kodu K, mogu se pojaviti i u kodu $K^{\perp}$ pa je, u općenitom slučaju, nemoguće točno odrediti broj kodnih riječi iz $V(10)$ koje nisu sadržane ni u kodu K niti u njemu dualnom kodu. Broj takvih riječi se kreće u intervalu [945, 960]. Ako kôd K i njemu dualni kôd, nemaju zajedničkih riječi osim riječi 0000000000, tada bi traženi broj riječi iz $V(10)$ iznosio 945. Međutim, moguće je da se kôd K i njemu dualni kôd jednaki. U tom slučaju bi traženi broj riječi iz $V(10)$ iznosio 960.

6. zadatak (20 bodova): Na ulazu niskopropusnog komunikacijskog kanala (širina prijenosnog pojasa B [Hz]), konstantnog amplitudnog odziva jednakog 1 unutar pojasa propuštanja, dovodi se signal čija je autokorelacijska funkcija $R_X(\tau) = \delta(\tau)$. Odredite autokorelacijsku funkciju signala na izlazu iz kanala.

Napomena: Kanal se može promatrati kao linearan i vremenski nepromjenjiv.

Postupak rješavanja:

Spektralna gustoća snage signala na ulazu:

$$R_X(\tau) = \delta(\tau)$$

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau = e^{-j2\pi f \cdot 0} = 1$$

Amplitudni odziv prijenosne funkcije:

$$|H(f)| = \begin{cases} 1, |f| < B \\ 0, |f| > B \end{cases}$$

$$|H(f)| = \mathrm{sgn}(f+B) - \mathrm{sgn}(f-B)$$

Spektralna gustoća snage signala na izlazu:

$$S_Y(f) = S_X(f) \cdot |H(f)|^2 = |H(f)|^2 = H(f)^2$$
$$S_Y(f) = H(f)$$

Autokorelacijska funkcija signala na izlazu:

$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f) \cdot e^{j2\pi f \tau} df$$
$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \cdot e^{j2\pi f \tau} df = \int_{-B}^{B} e^{j2\pi f \tau} df = \left. \frac{e^{j2\pi f \tau}}{j2\pi\tau} \right|_{-B}^{B}$$
$$R_Y(\tau) = \frac{e^{j2\pi B\tau}}{j2\pi\tau} - \frac{e^{-j2\pi B\tau}}{j2\pi\tau} = \frac{1}{\pi\tau} \cdot \frac{e^{j2\pi B\tau} - e^{-j2\pi B\tau}}{2j}$$
$$R_Y(\tau) = \frac{1}{\pi\tau} \sin(2\pi B\tau)$$

7. zadatak (20 bodova): Na ulaz linearnog i vremenski nepromjenjivog sustava čija je karakteristika $H(f) = 0{,}1 \cdot e^{j\pi/4}$, $\forall f \in \mathbf{R}$ dovodimo pravokutni impuls energije 0,1 mWs. Pravokutni impuls definiran je sljedećim izrazom:

$$x(t - t_0) = \begin{cases} A \text{ za } 0 \le |t - t_0| < \dfrac{\tau}{2} \\ 0 \text{ za } |t - t_0| > \dfrac{\tau}{2} \end{cases}, \mathrm{t} \in \mathrm{R}$$

Odredite koliko iznosi energija signala na izlazu zadanog sustava.

Postupak rješavanja

$$E(X) = 0{,}1\ mWs$$
$$H(f) = 0{,}1 \cdot e^{j\pi/4}, \forall f \in \mathrm{R}$$

$$x(t - t_0) = \begin{cases} A \text{ za } 0 \le |t - t_0| < \dfrac{\tau}{2} \\ 0 \text{ za } |t - t_0| > \dfrac{\tau}{2} \end{cases}, \mathrm{t} \in \mathrm{R}$$

$$E(Y) = ?$$
$$Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi \cdot f(t)} dt = A \cdot \tau \cdot \frac{\sin\left(2\pi \cdot f \cdot \frac{\tau}{2}\right)}{2\pi \cdot f \cdot \frac{\tau}{2}}$$

Amplitudni spektar signala *x(t)* jednak je amplitudnom spektru signala $x(t-t_0)$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|X(f)\right|^2 df = A^2\cdot\tau = 0{,}1\ \mathrm{mWs}$$

$$\mathrm{Y}(f)=X(f)\cdot H(f)=0{,}1\cdot e^{j\pi/4}\cdot A\cdot\tau\cdot\frac{\sin\left(2\pi\cdot f\cdot\frac{\tau}{2}\right)}{2\pi\cdot f\cdot\frac{\tau}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\sin(a\cdot x)}{a\cdot x}\right|^2 dx=\frac{\pi}{a} \qquad \left|e^{j\cdot a}\right|=1$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|Y(f)\right|^2 df$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}0{,}1^2\cdot\left|e^{j\pi/4}\right|^2\cdot A^2\cdot\tau^2\cdot\left|\frac{\sin(\pi\cdot f\cdot\tau)}{\pi\cdot f\cdot\tau}\right|^2 df$$

$$=0{,}1^2\cdot 1\cdot A^2\cdot\tau^2\cdot\frac{\pi}{\pi\cdot\tau}$$

$$=0{,}01\cdot A^2\cdot\tau$$

$$=0{,}01\cdot E(X)$$

$$E(Y)=1\mu Ws$$