Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Ispitni rok iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 8. rujna 2014.

Obavezno pročitati prije početka rješavanja ispitnih zadataka!

Ispit traje 150 minuta. Student na ispitu smije koristiti sljedeće:

1) prazne listove papira formata A4 za rješavanje zadataka,
2) pribor za pisanje (olovka, gumica),
3) kalkulator (nije dozvoljeno korištenje mobilnih telefona, tableta, laptopa i sličnih uređaja),
4) jedan arak papira formata A4 s matematičkim izrazima, može biti kreiran ručno ili na računalu.

Ako student bude primijećen kako koristi nedozvoljena sredstva na ispitu, bit će isključen iz procesa bodovanja i ocjenjivanja ispita. Za vrijeme trajanja ispita nije dozvoljeno uzajamno posuđivanje listova papira, pribora za pisanje, kalkulatora ili papira s matematičkim izrazima.

Radi lakšeg i točnijeg ispravljanja ispita student treba obratiti pozornost na sljedeće:

a) prilikom bodovanja ispita u razmatranje ćemo uzeti isključivo zadatke koji imaju točan postupak rješavanja i konačno rješenje,
b) na kraju svakog zadatka potrebno je istaknuti konačno rješenje (osim brojčanog iznosa točno rješenje mora imati i odgovarajuću mjernu jedinicu tamo gdje to ima smisla),
c) svaki zadatak je potrebno rješavati na zasebnom listu papira,
d) zadatke je potrebno rješavati pregledno i čitko jer o tome ovisi i preciznost ispravljanja (neuredne i nepregledne postupke rješavanja izuzet ćemo iz postupka bodovanja),
e) prilikom predaje ispita posložite zadatke po broju od najmanjeg prema najvećem i **obavezno** predajte i papiri sa zadacima koji će Vam biti dodijeljeni na početku ispita.

Niže stavljenim potpisom potvrđujem da sam pročitao/pročitala gore navedena pravila te da sam svjestan/svjesna da će ona biti primijenjena prilikom izvedbe i bodovanja ispita

Potpis studenta

Pravilo za bodovanje zadataka

Svaki točno riješen zadatak boduje se sa šest (**6**) bodova, zadatak koji nije rješavan s nula (**0**) bodova, a svaki netočno riješen zadatak boduje se s tri negativna boda (**-3**). Na ispitu **nema** bodovnog praga za prolaz.

ZADACI

1. zadatak. Odredite količinu informacije sadržane u slici koja se sastoji od 500 redaka i 500 točaka u svakom retku. Intenzitet svjetline svake točke može imati osam stupnjeva. Pojave različitih gradacija svjetline su jednako vjerojatne, a svjetline pojedinih točaka međusobno su neovisne.

a) 3 Mbit/slici

b) 2 Mbit/slici

c) 0,75 Mbit/slici

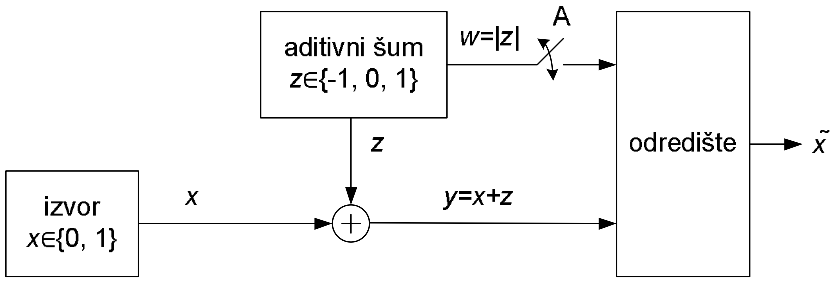
d) 0,25 Mbit/slici

Postupak rješavanja:

S obzirom da svaka slika ima osam stupnjeva svjetline koji us međusobno jednako vjerojatni, u svakom je pikselu sadržan prosječni sadržaj informacije $H(X) = \log_2(8) = 3$ bit/piksel. Kako slika ima 500×500 = 250.000 piksela, ukupna količina informacije sadržana u slici iznosi 250.000×3 = 750.000 bit/slika.

2. zadatak. Zadan je diskretni komunikacijski sustav prikazan na donjoj slici. Informacijski izvor (opisan slučajnom varijablom X) generira binarne simbole iz skupa {0, 1}. Vjerojatnosti pojavljivanja simbola na izvoru su sljedeće: $p(x = 0) = p_0$, odnosno $p(x = 1) = p_1$ i vrijedi $p_0 + p_1 = 1$. Simboli se potom prenose bezmemorijskim kanalom uz djelovanje aditivnog šuma opisanog slučajnom varijablom Z, koja je neovisna o X i poprima vrijednosti iz skupa {-1, 0, 1}. Pri tome vrijedi $p(Z = -1) = p(Z = 0) = p(Z = 1)$. Nadalje, neka se na odredištu pojavljuju simboli $y = x + z$. Također, sklopkom A moguće je dobiti podatak o apsolutnom iznosu aditivnog šuma u kanalu, tj. $w = |z|$. Odredite kapacitet danog kanala kada je sklopka A zatvorena, tj. kad odredište ima informaciju o apsolutnom iznosu aditivnog šuma.

Napomena: Ukupnu transinformaciju računajte prema izrazu:
$I(X;Y|W) = \sum_w I(X;Y|W = w)\, p(W = w)$.



a) 1/3 bit/simbol

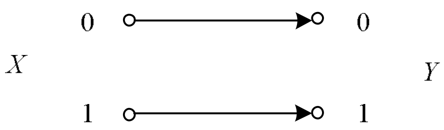
b) 2/3 bit/simbol

c) 1 bit/simbol

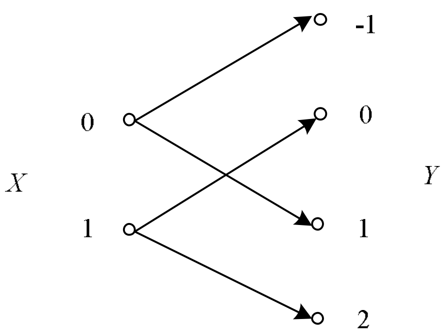
d) 1/2 bit/simbol

Postupak rješavanja:

Ako je $w = 0$, $p(W = 0) = 1/3$, dobivamo sljedeći kanal:



Ako je $w = 1$, $p(W = 1) = 2/3$, dobivamo sljedeći kanal:

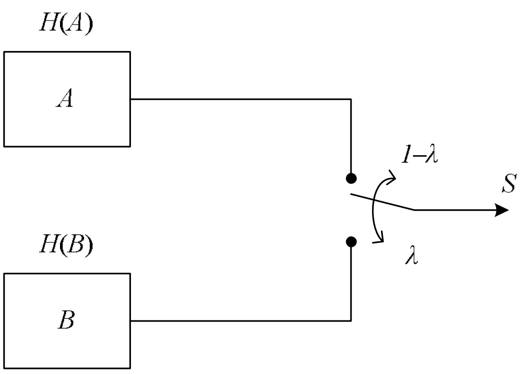


U oba slučaja jasno je vidljivo iz primljenog simbola koji je simbol poslan, tj. $I(X;Y) = 1$ bit/simbol. Nadalje,

$$I(X;Y|W) = \sum_{w} I(X;Y|W=w)\,p(W=w)$$
$$= I(X;Y|W=0)p(W=0) + I(X;Y|W=1)p(W=1) = 1\frac{1}{3} + 1\frac{2}{3}$$
$$= 1\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}.$$

Dakle, kapacitet iznosi $C = 1$ bit/simbol.

3. zadatak. Dva informacijska izvora, A i B, čije su entropije $H(A)$, odnosno $H(B)$, povezana su s informacijskim kanalom pomoću sklopke kako je to predočeno na donjoj slici. Sklopka slučajno odabire izvor A s vjerojatnošću $1 - \lambda$, a izvor B s vjerojatnošću λ. Odredite entropiju skupa simbola S na izlazu sklopke u ovisnosti o $H(A)$, $H(B)$ i λ.



a) $\lambda H(B) + (1 - \lambda)\, H(A) + H(\lambda)$

b) $\lambda H(A) + (1 - \lambda)\, H(B) + H(1 - \lambda)$

c) $\lambda H(A) + (1 - \lambda)\, H(B) + H(\lambda)$

d) $\lambda H(B) + (1 - \lambda)\, H(A) + H(1 - \lambda)$

Postupak rješavanja:

Neka $p_{i,A}$ i n_A označavaju vjerojatnost pojavljivanja i-tog simbola na izvoru A, odnosno broj simbola izvora A. Sukladno tome, za izvor B koristimo označavanje $p_{i,B}$ i n_B, a sličnu notaciju koristimo i za S, tj. $p_{i,S}$ i $n_S = n_A + n_B$. Pomoću definicije entropije dobivamo:

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{n_S} p_{i,S}\log_2(p_{i,S})$$
$$= -\sum_{i=1}^{n_B} \lambda p_{i,B}\log_2(\lambda p_{i,B}) - \sum_{i=1}^{n_A}(1-\lambda)p_{i,A}\log_2\left((1-\lambda)p_{i,A}\right)$$
$$= -\lambda\sum_{i=1}^{n_A} p_{i,B}(\log_2 p_{iB} + \log_2\lambda) - (1-\lambda)\sum_{i=1}^{n_B} p_{i,A}\left(\log_2 p_{i,A} + \log_2(1-\lambda)\right)$$
$$= \lambda H(B) + (1-\lambda)H(A) - \lambda\log_2\lambda - (1-\lambda)\log_2(1-\lambda)$$
$$= \lambda H(B) + (1-\lambda)H(A) + H(\lambda)$$

4. zadatak. Bezmemorijsko izvorište generira simbole iz skupa X = {a, b, c, d, e, f, g} s vjerojatnostima pojavljivanja p(a) = 0,22, p(b) = 0,35, p(c) = 0,15, p(d) = 0,09, p(e) = 0,09, p(f) = 0,05, p(g) = 0,05. Dani skup simbola kodiran je Shannon-Fanoovom metodom (binarno kodiranje). Odredite efikasnost koda. Rezultat zaokružite na dvije decimale.

a) 0,97

b) 0,99

c) 0,98

d) 0,96

Postupak rješavanja:

Provedbom Shannon-Fanoovg kodiranja dobivamo sljedeće kodne riječi:

a	00
b	01
c	100
d	101
e	110
f	1110
g	1111

Iz kodnih riječi iščitavamo duljine kodnih riječi i dobivamo

$$L = \sum_{i=1}^{n} p_i l_i = 2.53 \frac{bit}{simbol}$$

Efikasnost koda određena je izrazom

$$\varepsilon = \frac{H(X)}{L}$$

S obzirom da vrijedi

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\log_2 p(x_i) = 2.48 \frac{bit}{simbol}$$

dobivamo da je $\varepsilon = 0{,}9797 \approx 0{,}98$

5. zadatak. Binarni izvor generira dva simbola iz abecede $X = \{x_1, x_2\}$ s pripadajućim vjerojatnostima pojavljivanja $p(x_1) = 2/3$ i $p(x_2) = 1/3$. Nadalje, pretpostavimo da isti izvor kombinira simbole x_1 i x_2 u združene simbole abecede $Y = \{x_1x_1, x_1x_2, x_2x_1, x_2x_2\}$, $p(x_i,x_j) = p(x_i)\cdot p(x_j)$, $\forall\, i, j \in \{1, 2\}$. Odredite omjer efikasnosti kôda ako se Huffmanov kôd primijeni nad proširenom abecedom Y u odnosu na njegovu primjenu na početnu abecedu X.

a) 18/19

b) 36/35

c) 36/37

d) 18/17

Postupak rješavanja:

Entropija skupa X određena je poznatim izrazom i označimo je kao $H_1(X)$, srednja duljina kodne riječi iznosi 1 bit/simbol (jer postoje samo dva simbola u abecedi i primjenjuje se Huffmanovo kodiranje). Dakle, efikasnost koda u prvom slučaju određena je kao

$$\varepsilon_1 = H_1(X) / \overline{L_1} = H_1(X)$$

Ako združujemo istovrsne simbole u novu abecedu Y, entropija se udvostručuje (dokaz jednostavan, prikazan na predavanjima). Ako provedemo Huffmanovo kodiranje nad abecedom Y, dobivamo sljedeći kod

x_1x_1 0

x_1x_2 10

x_2x_1 111

x_2x_2 110

Sam kod nije bitan, nego prosječna duljina kodne riječi koja iznosi 17/9 bit/simbol. Dakle,

$$\varepsilon_2 = H_2(X) / \overline{L_2} = 2H_1(X) / \overline{L_2}$$

Konačno

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{2H_1(X)/\overline{L_2}}{H_1(X)} = \frac{2}{\overline{L_2}} = \frac{18}{17} bit/simbol$$

6.zadatak. Zadana je je funkcija gustoće vjerojatnosti razina signala $x(t)$ kao

$$f_X(x) = \begin{cases} 0{,}5 - 0{,}25 \cdot |x| & \text{za} -2\text{ V} \leq x \leq 2\text{ V} \\ 0 & \text{inače} \end{cases}.$$

Uzorci signala dovode se na ulaz kvantizatora koji koristi četiri kvantizacijske razine ($L = 4$). Kvantizirani uzorci signala kodiraju se Huffmanovim kodom. **Napomena:** kvantizator provodi jednoliko kvantiziranje i amplitude uzoraka nalaze se u intervalu [–2 V, +2 V]. Odredite srednju duljinu kodne riječi Huffmanovog kodiranja.

a) 2 bit/razina

b) 2,5 bit/razina

c) 2,25 bit/razina

d) 1,875 bit/razina

Postupak rješavanja:

Sukladno zadanome, postoje četiri kvantizacijske razine i to: a između –2 V i –1 V; b između –1 V i 0 V; c između 0 V i +1 V te d između +1 V i +2 V. Također iz $L = 4 \rightarrow \Delta = 1$ V. Odredimo vjerojatnosti da je vrijednost signala unutar pojedine kvantizacijske razine koristeći zadanu funkciju $f_X(x)$. Zadana funkcija je simetrična (gledajući na y-os) te su vjerojatnosti $p(a)$ i $p(d)$ jednake, kao i $p(b)$ i $p(c)$.

Nadalje, $p(d) = \int_1^2 f_X(x)dx = \cdots = \frac{1}{8}$ $\rightarrow p(a) = 1/8$. Također, $p(b) = p(c) = 3/8$.

Kodirajući dane kvantizacijske razine Huffmanovim kodom dobivaju se sljedeće duljine kodnih riječi: 1, 2, 3 i 3 bit/razina. Konačno, srednja duljina kodne riječi iznosi 1,875 bit/razina.

7. zadatak. Zadana su dva paralelna kanala u kojima djeluje aditivni bijeli Gaussov šum Z_1, odnosno Z_2 s očekivanjem nula. Isto tako, vrijedi $E[Z_1^2] = 0.5$, odnosno $E[Z_2^2] = 0.7$. Na ulazu prvog kanala djeluje signal X_1, dok na ulazu drugog kanala djeluje signal X_2. Neka je $E[X_1] = E[X_2] = 0$ te $E[X_1^2] + E[X_2^2] = 0.4$. Odredite maksimalnu dinamiku u zadanom sustava kanala (bit/simbol).

a) 0,435 bit/simbol

b) 0,87 bit/simbol

c) 1 bit/simbol

d) 0,217 bit/simbol

Postupak rješavanja:

Dinamika u sustavu paralelnih kanala jednaka je zbroju dinamika pojedinih kanala, tj.:

$$D = D_1 + D_2 = \frac{1}{2}log_2\left(1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_{Z_1}^2}\right) + \frac{1}{2}log_2\left(1 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_{Z_2}^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}log_2\left(1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_{Z_1}^2}\right) + \frac{1}{2}log_2\left(1 + \frac{0.4 - \sigma_1^2}{\sigma_{Z_2}^2}\right)$$

Maksimum dinamike nalazimo deriviranjem prethodnog izraza po σ_1^2 i izjednačavanjem istog s nulom. Dakle, iz

$$\frac{dD}{d\sigma_1^2} = 0$$

dobivamo $\sigma_1^2 = 0.3 \rightarrow \sigma_2^2 = 0.1$.

Konačno,

$$D = D_1 + D_2 = \frac{1}{2}log_2\left(1 + \frac{0.3}{0.5}\right) + \frac{1}{2}log_2\left(1 + \frac{0.1}{0.7}\right) = 0.435\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

8. zadatak. Ako se u AWGN kanalu srednja snaga signala S [W] poveća x puta, odredite za koliko se promijeni kapacitet kanala, uz pretpostavku da u kanalu djeluje bijeli Gaussov šum srednje snage šuma N [W], a kanal ima karakteristiku idealnog niskog propusta širine prijenosnog pojasa B [Hz]. Uzmite u obzir i pretpostavku da je omjer S/N puno veći od 1.

a) poveća se za $(x + 1)\cdot B$ [bit/s]

b) poveća se za $B\cdot \log_2(x)$ [bit/s]

c) poveća se za $x\cdot B$ [bit/s]

d) poveća se za $B\cdot \log_2(x + 1)$ [bit/s]

Postupak rješavanja:

Kapacitet kanala računamo po poznatoj formuli

$$C = B\log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right) \text{ [bit/simbol]}$$

Prije povećanja snage i uz uvjet da je S/N >> 1, imamo

$$C_1 = B\log_2\left(\frac{S}{N}\right) \text{ [bit/simbol]}$$

Ako se srednja snaga signala poveća x puta, kapacitet kanala se poveća

$$C_2 = B\log_2\left(\frac{x \cdot S}{N}\right) \text{ [bit/simbol]}$$

Razlika iznosi $C_2 - C_1 = B \cdot \log_2(x)$ bit/simbol.

9. zadatak. Signal $x(t) = 10\cos(600\pi t)\cos^2(1600\pi t)$ [V] uzorkuje se frekvencijom uzorkovanja 4 kHz. Odredite srednju snagu signala, $x(t)$, koja se troši na jediničnom otporu.

a) 37,5 W

b) 18,75 W

c) 9,375 W

d) 100 W

Postupak rješavanja:

$$\begin{aligned} x(t) = 10\cos(600\pi t)\cos^2(1600\pi t) &= 10\cos(600\pi t)\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(3200\pi t)\right] \\ &= 5\cos(600\pi t) + 2.5\cos(3800\pi t) + 2.5\cos(2600\pi t) \end{aligned}$$

Dakle,

$$P = 0{,}5[5^2 + 2{,}5^2 + 2{,}5^2] = 18{,}75 \text{ W}$$

10. zadatak. U nekom kanalu u kontinuiranom vremenu omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma iznosi 10^5. Odredite koliko puta će se smanjiti prijenosna brzina u tom kanalu u odnosu na kapacitet kanala uslijed korištenja neoptimalnog kodnog sustava koji unosi smanjenje omjera srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma u iznosu od 20 dB.

a) 3,14 puta

b) 1,14 puta

c) 1,35 puta

d) 1,67 puta

Postupak rješavanja:

Zadan je omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma $S/N = 10^5$ te smanjenje omjera srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma $\Gamma = 20$ dB, tj. $\Gamma = 100$. Omjer kapaciteta kanala prema prijenosnoj brzini određen je izrazom:

$$\frac{C}{R} = \frac{B \cdot \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)}{B \cdot \log_2\left(1 + \frac{S}{N\Gamma}\right)} = 1{,}67$$