Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Ispitni rok iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 19. veljače 2014.

Obavezno pročitati prije početka rješavanja ispitnih zadataka!

Trajanje ispita iznos 150 minuta. Student na ispitu smije koristiti sljedeće:

1) prazne listove papira formata A4 za rješavanje zadataka,
2) pribor za pisanje (olovka, gumica),
3) kalkulator (nije dozvoljeno korištenje mobilnih telefona, tableta, laptopa i sličnih uređaja),
4) jedan arak papira formata A4 s matematičkim izrazima, može biti kreiran ručno ili na računalu.

Ako student bude primijećen kako koristi nedozvoljena sredstva na ispitu, bit će isključen iz procesa bodovanja i ocjenjivanja ispita. Za vrijeme trajanja ispita nije dozvoljeno uzajamno posuđivanje listova papira, pribora za pisanje, kalkulatora ili papira s matematičkim izrazima.

Radi lakšeg i točnijeg ispravljanja ispita student treba obratiti pozornost na sljedeće:

a) prilikom bodovanja ispita u razmatranje ćemo uzeti isključivo zadatke koji imaju točan postupak rješavanja i konačno rješenje,
b) na kraju svakog zadatka potrebno je istaknuti konačno rješenje (osim brojčanog iznosa točno rješenje mora imati i odgovarajuću mjernu jedinicu tamo gdje to ima smisla),
c) svaki zadatak je potrebno rješavati na zasebnom listu papira,
d) zadatke je potrebno rješavati pregledno i čitko jer o tome ovisi i preciznost ispravljanja (neuredne i nepregledne postupke rješavanja izuzet ćemo iz postupka bodovanja),
e) prilikom predaje ispita posložite zadatke po broju od najmanjeg prema najvećem i **obavezno** predajte i papiri sa zadacima koji će Vam biti dodijeljeni na početku ispita.

Niže stavljenim potpisom potvrđujem da sam pročitao/pročitala gore navedena pravila te da sam svjestan/svjesna da će ona biti primijenjena prilikom izvedbe i bodovanja ispita

Potpis studenta

Pravilo za bodovanje zadataka

Svaki točno riješen zadatak boduje se sa šest (**6**) bodova, zadatak koji nije rješavan s nula (**0**) bodova, a svaki netočno riješen zadatak boduje se s tri negativna boda (**-3**). Na ispitu je potrebno ostvariti barem **30** bodova (od mogućih **60**).

ZADACI

1. zadatak. Zadan je skup simbola na izvoru komunikacijskog kanala, $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Svakom simbolu pridijeljena je apriorna vjerojatnost pojavljivanja $p(x_i)$, $i = 1, ..., n$. Nadalje, pretvorimo svaki simbol x_i u dva nova simbola, y_{2i-1} i y_{2i}, pri čemu za apriorne vjerojatnosti pojavljivanja simbola y_j, $j = 1, ..., 2n$, vrijedi sljedeće pravilo: $p(y_{2i-1}) = p(y_{2i}) = p(x_i)/2$, $\forall\ i = 1, ..., n$ Razlika između entropija ova dva skupa simbola, $H(X) - H(Y)$, iznosi

a) 0 bit/simbol

b) 1 bit/simbol

c) 2 bit/simbol

d) –1 bit/simbol

Postupak rješavanja:

Entropija skupa simbola X dana je izrazom:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\log_2\left[p(x_i)\right][\text{bit/simbol}]$$

Entropija skupa simbola Y dana je izrazom:

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{2n} p(y_j)\log_2\left[p(y_j)\right] = -2\sum_{i=1}^{n}\frac{p(x_i)}{2}\log_2\left[\frac{p(x_i)}{2}\right] = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\left\{\log_2\left[p(x_i)\right] - \log_2(2)\right\}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\log_2\left[p(x_i)\right] + \log_2(2)\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = H(X) + 1[\text{bit/simbol}]$$

Dakle, razlika entropija $H(X) - H(Y)$ iznosi –1 bit/simbol (rješenje označeno slovom d).

2. zadatak. Zadan je diskretni binarni kanal. Na izvoru informacije pojavljuju se simboli x_1 i x_2, a na odredištu simboli y_1 i y_2. Matrica šuma u kanalu koji povezuje izvor i odredište, $[P(Y|X)]$, zadana je kao

$$P[Y|X] = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

Odredite za koliko se kapacitet takvog kanala razlikuje od maksimalnog mogućeg kapaciteta binarnog simetričnog kanala (traži se apsolutna vrijednost razlike).

a) 0 bit/simbol

b) 1 bit/simbol

c) 0,08 bit/simbol

d) 0,92 bit/simbol

Postupak rješavanja:

U zadanom kanalu vjerojatnost pogrešnog prijenosa simbola je p_g = 1/3. Kapacitet binarnog simetričnog kanala dan je izrazom:

$$C = 1 + p_g\log_2(p_g) + (1-p_g)\log_2(1-p_g)[\text{bit/simbol}]$$

Ako u izraz uvrstimo p_g = 1/3, dobit ćemo C = 0,08 bit/simbol. Maksimalan mogući kapacitet binarnog simetričnog kanala, C_{max}, iznosi 1 bit/simbol. Sukladno tome, apsolutna vrijednost razlike između C_{max} i C iznosi 0,92 bit/simbol (rješenje označeno slovom d).

3. zadatak. Abeceda izvora M sadrži 9 simbola, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8 i m_9, s pripadajućim vjerojatnostima pojavljivanja simbola od $p(m_1)$ do $p(m_9)$ kako slijedi: 0.49, 0.14, 0.14, 0.07, 0.07. 0.04, 0.02, 0.02, 0.01. Koder informacije koristi tehniku Shannon-Fano i svaki simbol kodira određenim brojem binarnih simbola iz abecede {0, 1}. Odredite efikasnost kôda.

a) 0,938

b) 0,993

c) 0,975

d) 0,959

Postupak rješavanja:

Ako provedemo kodiranje zadanog skupa simbola tehnikom Shannon-Fano, dobit ćemo sljedeće kodne riječi (kodiranje provedeno sukladno primjeru u udžbeniku "Uvod u teoriju informacije i kodiranje", 2. izdanje, Tablica 5.4, stranica 254):

simbol m_i	kodna riječ	duljina l_i
m_1	0	1
m_2	100	3
m_3	101	3
m_4	1100	4
m_5	1101	4
m_6	1110	4
m_7	11110	5
m_8	111110	6
m_9	111111	6

Sukladno tome, prosječna duljina kodne riječi iznosi:

$$\overline{L}=\sum_{i=1}^{9} l_i\, p\left(m_i\right)=2{,}33\,\text{bit/simbol}$$

Entropija skupa simbola M iznosi:

$$H\left(M\right)=-\sum_{i=1}^{n} p\left(m_i\right)\log_2\left[p\left(m_i\right)\right]=2{,}315\left[\text{bit/simbol}\right].$$

Konačno, efikasnost kôda iznosi:

$$\varepsilon=\frac{H\left(M\right)}{\overline{L}}=0{,}993\,\text{(rješenje označeno slovom b).}$$

4. zadatak. Izvor informacije generira 5 simbola, m_1, m_2, m_3, m_4 i m_5, s pripadajućim vjerojatnostima pojavljivanja simbola od $p(m_1)$ do $p(m_5)$ kako slijedi: 0.3, 0.26, 0.2, 0.15, 0.09. Koder informacije u predajniku koristi Huffmanovo kodiranje pomoću kvaternarnih simbola iz abecede {0, 1, 2, 3}. Dekoder informacije u prijemniku poznaje sve apriorne vjerojatnosti $p(m_i)$, i = 1, ..., 5. Pretpostavimo da dekoder informacije primi ograničen slijed kvaternarnih simbola 222 i pretvara taj slijed u ispravan niz simbola. Koliku je količinu informacije odredište primilo nizom simbola 222?

a) 12 bita

b) 5,82 bita

c) 10,41 bit

d) 13,28 bita

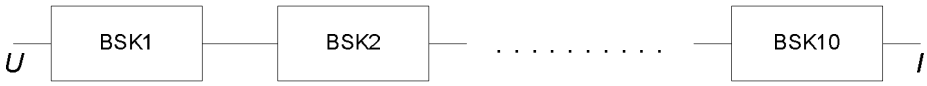
Postupak rješavanja:

U prvom koraku potrebno je provesti kodiranje zadanog skupa od 5 simbola Huffmanovim kodom (kodiranje provedeno sukladno primjeru u zbirci zadataka "Teorija informacije i kodiranje", 2. izdanje, stranica 76, slika 2.4). Napomena: da bi kodiranje bilo moguće provesti, potrebno je nadopuniti skup simbola s dva "prazna" simbola čija je vjerojatnost pojavljivanja jednaka nuli. Kodiranjem dobijemo sljedeće kodne riječi:

simbol m_i	kodna riječ
m_1	3
m_2	2
m_3	0
m_4	13
m_5	12

Dakle, ako odredište primi slijed ternarnih simbola 222, očito je da je primilo slijed simbola $m_2m_2m_2$ (za primljeni slijed 222 nije moguća niti jedna druga kombinacija simbola m_i). Svaki simbol m_2, sukladno svojoj vjerojatnosti pojavljivanja $p(m_2)$ = 0,26 nosi u sebi količinu informacije $I(m_2) = -\log_2[p(m_2)]$ (to je vlastiti sadržaj informacije simbola m_2). $I(m_2)$ = 1,94 bita, pa odredište primitkom slijeda 222 primi količinu informacije $3 \cdot I(m_2)$ = 5,82 bita (rješenje označeno slovom b).

5. zadatak. Neka je 10 identičnih binarnih simetričnih kanala (BSK), svaki s vjerojatnošću pogrešnog prijenosa simbola p = 0,01, vezano u seriju (vidi donju sliku). Odredite vjerojatnost ispravnog prijenosa s ulaza U na izlaz I serijskog slijeda kanala. Napomena: izraz za traženu vjerojatnost ispravnog prijenosa potrebno je izvesti.



a) 0,906

b) 0,091

c) 10^{-20}

d) $1 - 10^{-20}$

Postupak rješavanja:

Ako je n binarnih simetričnih kanala vezano u seriju, vjerojatnost ispravnog prijenosa simbola s ulaza U na izlaz I dana je općenitim izrazom:

$P_{\mathrm{i}} = (1/2)\cdot[1 + (1 - 2p)^n]$ (vidi zbirku zadataka "Teorija informacije i kodiranje", 2. izdanje, zadatak 1.14., stranica 51).

Ovdje radi preglednosti neće biti naveden izvod tog izraza već samo konačan rezultat ostvaren tim izrazom:

za n = 10 P_{i} = 0,906 (rješenje označeno slovom a).

6.zadatak. Razmatrajte sistematičan linearan binarni blok kôd [6,3]. Na ulazu kodera kanala koji koristi takav kôd dolaze poruke u obliku [d_1 d_2 d_3], pri čemu su d_1, d_2 i d_3 binarne znamenke. Koder kanala svaku poruku [d_1 d_2 d_3] pretvara u kodnu riječ [c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6] pri čemu vrijedi:

$$c_1 = d_1,\ c_2 = d_2,\ c_3 = d_3,\ c_4 = d_1 \oplus d_3\ ,\ c_5 = d_1 \oplus d_2 \oplus d_3\ ,\ c_6 = d_1 \oplus d_2$$

Pretpostavite da je dekoder kanala koji koristi identičan sistematičan linearan binarni blok kôd [6,3] primio kodnu riječ [011011]. Odredite kodnu riječ koja je poslana, tj. kodnu riječ na izlazu kodera kanala.

a) [011011]

b) [100111]

c) [010011]

d) [011101]

Postupak rješavanja:

S obzirom na navedene jednakosti

$$c_1 = d_1,\ c_2 = d_2,\ c_3 = d_3,\ c_4 = d_1 \oplus d_3\ ,\ c_5 = d_1 \oplus d_2 \oplus d_3\ ,\ c_6 = d_1 \oplus d_2$$

generirajuća matrica u standardnom obliku ima oblik

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\mathbf{I}_3 \middle| \mathbf{A}\right]$$

Da matrica **G** doista ima ovakav oblik vidi se iz jednakosti

$$\left[d_1\, d_2\, d_3\right] \cdot \mathbf{G} = \left[c_1\, c_2\, c_3\, c_4\, c_5\, c_6\right]$$

Nadalje, transponirana matrica provjere pariteta $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ ima sljedeći oblik:

$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

S obzirom da je primljena kodna riječ c' = [011011], tada za njen sindrom vrijedi:

$$S(\mathbf{c}') = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}} = [110]$$

Dobiveni rezultat odgovara trećem retku matrice $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ što znači da je pogreška nastala na trećem bitu poslane poruke **c**. Konačno, poslana je poruka **c** = [010011] (rješenje označeno slovom c).

7. zadatak. Koder kanala u nekom komunikacijskom sustavu koristi Hammingov kôd zadan matricom provjere pariteta Ham(r). Odredite koliko najmanje mora iznositi r pa da kodna brzina ovako zadanog linearnog binarnog blok koda bude veća od 0,904.

a) 6 bita

b) 5 bita

c) 10 bita

d) 7 bita

Postupak rješavanja:

Hammingov kôd definiran matricom Ham(r) koristi r zaštitnih bita koji štite m bita poruke. Kodna brzina $R(K)$ definirana je kao omjer broja bita poruke, m, prema ukupnom broju bita u kodnoj riječi (zbroj broja bita poruke i broja zaštitnih bita), $m + r$. Nadalje, vrijedi relacija:

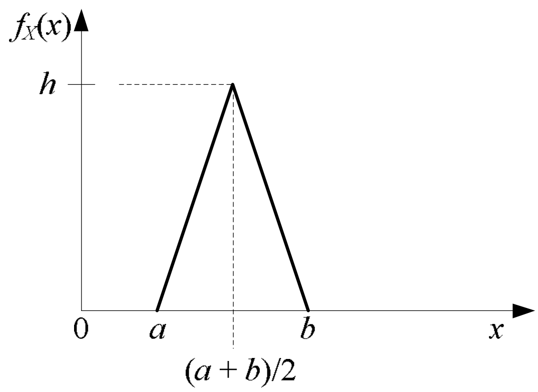
$m + r \leq 2^r - 1$. Dakle, kodna brzina uz zadani broj zaštitnih bita bit će maksimalna kad vrijedi

$m + r = 2^r - 1$. Sukladno tome, kodna brzina ovog koda Ham(r) bit će jednaka:

$$R(K)=\frac{2^r-1-r}{2^r-1}=1-\frac{r}{2^r-1}$$

Uzevši u obzir uvjet $R(K) > 0{,}904$ i ponuđena rješenja dobivamo da je uvjet ispunjen uz $r = 6$ bita.

8. zadatak. Slučajna varijabla X ima funkciju gustoće vjerojatnosti zadanu slikom. Odredite entropiju slučajne varijable X ako je zadano $a = 1$ i $b = 2$.



a) 1,121

b) –0,193

c) 0,548

d) –0,271

Postupak rješavanja:

Izraz za $f_X(x)$ određuje se pomoću jednadžbi pravaca kroz dvije točke. Funkcija $f_X(x)$ određena je sljedećim izrazom:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2h}{b-a}(x-a) & \text{za } a\leq x\leq\frac{a+b}{2}\\ \frac{2h}{b-a}(b-x) & \text{za } \frac{a+b}{2}\leq x\leq b\end{cases}$$

Entropiju, tj. diferencijalnu entropiju slučajne varijable X računamo prema sljedećem izrazu:

$$H(X)=-\int_a^{(a+b)/2}\frac{2h}{b-a}(x-a)\ln\left[\frac{2h}{b-a}(x-a)\right]dx-\int_{(a+b)/2}^{b}\frac{2h}{b-a}(b-x)\ln\left[\frac{2h}{b-a}(b-x)\right]dx$$

Koristeći identitet

$$\int x\ln(x)dx=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{x^2}{4}$$

dobivamo:

$$H\left(X\right)=\frac{-h}{b-a}\left\{\left(x-a\right)^2\ln\left[\frac{2h}{b-a}\left(x-a\right)\right]-\frac{\left(x-a\right)^2}{2}\right\}\Bigg|_a^{(a+b)/2}+$$

$$+\frac{h}{b-a}\left\{\left(b-x\right)^2\ln\left[\frac{2h}{b-a}\left(b-x\right)\right]-\frac{\left(b-x\right)^2}{2}\right\}\Bigg|_{(a+b)/2}^{b}$$

Nakon sređivanja gornjeg izraza dobivamo:

$$H\left(X\right)=\frac{h\left(b-a\right)}{2}\left[-\ln\left(h\right)+\frac{1}{2}\right]$$

S obzirom da mora vrijediti

$\int_{-\infty}^{\infty} f_X\left(x\right)dx=1$ jer je $f_X(x)$ funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne varijable, u ovom konkretnom slučaju to implicira da je $h\cdot(b-a)/2 = 1$. Dakle, $H(X) = -\ln(h) + 1/2$. Budući da su zadani $a = 1$ i $b = 2$, mora vrijediti $h = 2$. Sukladno tome, $H(X) = -\ln(2) + 0{,}5 = -0{,}193$ (rješenje označeno slovom b).

9. zadatak. Na ulazu sklopa čiji je ulazni signal $X(t)$ povezan s njegovim izlaznim signalom izrazom $Y\left(t\right)=\int_{t-2}^{t} X\left(\tau\right)d\tau$ djeluje signal $X\left(t\right)=2\sqrt{5}\cos\left(2\pi\cdot 0{,}25t\right)+W\left(t\right)\left[\mathrm{V}\right]$, pri čemu je $2\sqrt{5}\cos\left(2\pi\cdot 0{,}25t\right)$ željeni signal, a W(t) predstavlja aditivni bijeli Gaussov šum s očekivanjem nula i spektralnom gustoćom snage $S_W(f) = 10^{-4}$ W/Hz. Odredite omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šum na izlazu zadanog sklopa. Traženi omjer mora biti izražen u decibelima.

a) 39,088 dB

b) 52,098 dB

c) 43,127 dB

d) 49,088 dB

Postupak rješavanja:

Zadani sklop je LTI sustav jer se njegov odziv $Y(t)$ može prikazati kao konvolucija ulaznog signala $X(t)$ s funkcijom impulsnog odziva koja je zadana kao:

$$h\left(t\right)=\begin{cases}1 & 0\le t\le 2\\ 0 & \text{inače}\end{cases}$$

To se vidi iz izraza za odziv

$$Y\left(t\right)=\int_{-\infty}^{\infty} X\left(\tau\right)h\left(t-\tau\right)d\tau=\int_{t-2}^{t} X\left(\tau\right)d\tau$$

temeljem čega slijedi da $h(t)$ mora biti konstanta veličine 1 u intervalu širine dva (to je vidljivo iz granica integrala). Dokaz: ako je $h(t)$ definiran gornjim izrazom, tada vrijedi:

$h\left(-t\right)=\begin{cases}1 & -2\le t\le 0\\ 0 & \text{inače}\end{cases}$, a $h(t-\tau)$ kao

$h(t-\tau)=\begin{cases}1 & \tau \le t \le \tau+2 \\ 0 & \text{inače}\end{cases}$, a to znači da se sam τ kreće u granicama od $t - 2$ do t što je u skladu s granicama integracije u izrazu za $Y(t)$. Dakle, odziv sustava na pobudu signalom $X(t)$ lako se računa prema zadanom integralu za $Y(t)$ i rezultat je signal sinusnog/kosinusnog oblika srednje snage

$P = 160/\pi^2 = 16{,}21$ W

Što se tiče srednje snage slučajnog signala tj. bijelog šuma čija je spektralna gustoća snage na ulazu sklopa jednaka 0,0001 W/Hz, spektralnu gustoću snage tog šuma na izlazu sklopa, S_i, treba računati pomoću izraza

$$S_i(f)=S_W(f)\left|H(f)\right|^2$$

$H(f)$ je moguće jednostavno odrediti korištenjem Parsevalovog teorema o očuvanju energije:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|h(t)\right|^2 dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(f)\right|^2 df$$

To vrijedi jer je i $h(t)$, osim što je impulsni odziv sklopa, ujedno i signal, a $H(f)$ je, osim što je i prijenosna funkcija sklopa, ujedno i spektar impulsnog odziva. Dakle, u našem slučaju taj integral iznosi 2 Ws. Nadalje, s obzirom da je S_W konstanta po svim frekvencijama, možemo pisati

$$N_i=\int_{-\infty}^{\infty}S_i(f)\,df=\int_{-\infty}^{\infty}S_W(f)\left|H(f)\right|^2 df=S_W(f)\int_{-\infty}^{\infty}\left|h(t)\right|^2 dt=2S_W(f)$$

gdje je N_i srednja snaga šuma na izlazu sklopa. Dakle, $Ni = 0{,}0002$ W.

Ako izrazimo omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma u decibelima dobivamo:

$\frac{P_i}{N_i}=10\log_{10}\left(\frac{16{,}21}{0{,}0002}\right)=49{,}088\,\text{dB}$ (rješenje označeno slovom d).

10. zadatak. Na ulaz sklopa za uzimanje uzoraka dolazi signal $u(t) = \sin(2\pi f_0 t + \phi)$. Prilikom uzorkovanja signala zadovoljen je uvjet za frekvenciju uzorkovanja: $f_u > 2f_0$. Uzorci signala $u(t)$ dolaze na ulaz kvantizatora s jednolikom karakteristikom kvantiziranja čiji se dozvoljeni raspon amplituda ulaznog signala kreće između –5 V i +5 V. Odredite s koliko najmanje bita treba kodirati svaki kvantizirani uzorak signala $u(t)$ pa da omjer srednje snage signala $u(t)$ prema srednjoj snazi kvantizacijskog šuma bude veći od 25 dB. Napomena: broj bita po uzorku mora biti cjelobrojan.

a) 5 bit/uzorak

b) 7 bit/uzorak

c) 4 bit/uzorak

d) 6 bit/uzorak

Postupak rješavanja:

Amplituda signala $u(t)$ iznosi 1 V. Dakle, srednja snaga signala $u(t)$ jednaka je $A^2/2$, tj. 0,5 W.

Srednja snaga kvantizacijskog šuma zadovoljava jednakost:

$$Q = \frac{1}{3} m_{\max}^{2} 2^{-2r}$$

pri čemu je $m_{\max}$ = 5 V, a r je broj bita po uzorku signala. Sukladno navedenom, omjer srednje snage signala $u(t)$ prema srednjoj snazi kvantizacijskog šuma zadovoljava jednakost:

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{3} m_{\max}^{3} 2^{-2r}} = \frac{3}{2} \frac{2^{2r}}{m_{\max}^{2}}$$

Izraženo logaritamski, omjer srednje snage signala $u(t)$ prema srednjoj snazi kvantizacijskog šuma jednak je

$$10 \cdot \log\left(\frac{P}{Q}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{3}{2} \frac{2^{2r}}{m_{\max}^{2}}\right) = -12,2 + 6,02 \cdot r \left[dB\right]$$

S obzirom da omjer srednje snage signala $u(t)$ prema srednjoj snazi kvantizacijskog šuma mora bit veći od 25 dB, konačan rezultat je da je po svakom uzorku ulaznog signala $u(t)$ potrebno uzeti najmanje 7 bita (rješenje označeno slovom b).