

Obavezno pročitati prije početka rješavanja ispitnih zadataka!

Ispit traje 120 minuta. Student na ispitu smije koristiti sljedeće:

- 1) prazne listove papira formata A4 za rješavanje zadataka,
- 2) pribor za pisanje (olovka, gumica),
- 3) kalkulator (nije dozvoljeno korištenje mobilnih telefona, tableta, laptopa i sličnih uređaja),
- 4) jedan arak papira formata A4 s matematičkim izrazima, može biti kreiran ručno ili na računalu.

Ako student bude primijećen kako koristi nedozvoljena sredstva na ispitu, bit će isključen iz procesa bodovanja i ocjenjivanja ispita. Za vrijeme trajanja ispita nije dozvoljeno uzajamno posuđivanje listova papira, pribora za pisanje, kalkulatora ili papira s matematičkim izrazima.

Radi lakšeg i točnijeg ispravljanja ispita student treba obratiti pozornost na sljedeće:

- a) prilikom bodovanja ispita u razmatranje ćemo uzeti isključivo zadatke koji imaju točan postupak rješavanja i konačno rješenje,
- b) na kraju svakog zadatka potrebno je istaknuti konačno rješenje (osim brojčanog iznosa točno rješenje mora imati i odgovarajuću mjernu jedinicu tamo gdje to ima smisla),
- c) svaki zadatak je potrebno rješavati na zasebnom listu papira,
- d) zadatke je potrebno rješavati pregledno i čitko jer o tome ovisi i preciznost ispravljanja (neuredne i nepregledne postupke rješavanja izuzet ćemo iz postupka bodovanja),
- e) prilikom predaje ispita posložite zadatke po broju od najmanjeg prema najvećem i **obavezno** predajte i papire sa zadacima koji će Vam biti dodijeljeni na početku ispita.

Potpisom potvrđujem da sam pročitao/pročitala gore navedena pravila te da sam svjestan/svjesna da će ona biti primijenjena prilikom izvedbe i bodovanja ispita

Potpis studenta

ZADACI

1. zadatak (20 bodova): Neka su X i Y diskretne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti iz diskretnih skupova \mathcal{X} , odnosno \mathcal{Y} . Neka je $H(X) = 11$ bit/simbol i neka je $H(Y|X) = H(X|Y)$. Odredite najmanji mogući broj elemenata skupa \mathcal{Y} .

Postupak rješavanja:

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

Nadalje, dobivamo

$$H(Y) = H(X) - H(X|Y) + H(Y|X)$$

odnosno uz $H(Y|X) = H(X|Y)$

$$H(Y) = H(X) = 11 \text{ bit/simbol}$$

Najmanji broj elemenata skupa \mathcal{Y} dobije se iz uvjeta da je maksimalna entropija na diskretnom skupu ostvariva uz jednoliku razdiobu vjerojatnosti pojavljivanja simbola, tj.:

$$H(Y) \leq \log_2 |\mathcal{Y}|$$

odnosno

$$|Y| \geq 2^{11} = 2048.$$

2. zadatak (20 bodova): Dano je diskretno bezmemorijsko izvorište koje generira simbole {a, b, n, o, y} čije su frekvencije pojavljivanja {5, 4, 3, 2, 1} slijedno gledano. Kodirajte dani skup simbola Shannon-Fanoovom metodom kodiranja, a potom dekodirajte sljedeći slijed: 011101110010.

Postupak rješavanja:

Simbol	Frekvencija	Korak 1	Korak 2	Korak 3	Kodna riječ
a	5	0	0		00
b	4	0	1		01
n	3	1	0		10
o	2	1	1	0	110
y	1	1	1	1	111

Dekodirani slijed riječi je: *boyan*

3. zadatak (10 bodova): Dan je linearni binarni ciklični kôd K , $[n, k] = [?, 11]$. Poznato je da kodne riječi [00111111111000] i [11111111111111] pripadaju danom kodu. Odredite kodnu brzinu danog koda.

Postupak rješavanja:

$$n = 15 \rightarrow [n, k] = [15, 11] \rightarrow R = k/n = 0,7333.$$

4. zadatak (20 bodova): Izmjerena informacija o stanju upravljane veličine ima oblik električnog signala $x(t)$ koji u bilo kojem trenutku mjerenja može poprimiti bilo koju vrijednost između -1,6 i 1,6 volta. Funkcija gustoće vjerojatnosti koja opisuje vjerojatnost nastupa pojedinih vrijednosti $x = x(t)$ ima oblik $f(x) = e^{-2|x|}$. Izračunajte entropiju slučajnog signala $x(t)$.

Postupak rješavanja:

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log f(x) dx$$

$$f(x) = e^{-2|x|}$$

Granice : [-1,6 , 1,6]

$$H(X) = - \int_{-1.6}^{1.6} e^{-2|x|} \log(e^{-2|x|}) dx = \dots = 1.1957 \text{ bit/simbol}$$

5. zadatak (20 bodova): Promatrajte AWGN kanal širine prijenosnog pojasa B Hz. Na ulazu kanala djeluje signal $x(t)$ srednje snage S [W], a šum u kanalu ima spektralnu gustoću snage $S_N(f) = N_0/2 \forall f \in \mathbf{R}$. Odredite u kojim bi se granicama kretao kapacitet tog kanala ako se širina prijenosnog pojasa mijenja od 0 Hz do beskonačnog iznosa.

Postupak rješavanja:

$$y(t) = x(t) + n(t)$$

Relacija za kapacitet kanala širine prijenosnog pojasa B , uz spektralnu gustoću šuma definiranu kao

$$S_N(f) = \frac{N_0}{2}, \forall f \in \mathbf{R}$$

uz srednju snagu signala S [W] je:

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N_0 B} \right) \text{ [bit/s]}$$

Promatrat ćemo kapacitet kanala kao funkciju širine kanala $C(B)$ i ispitati ćemo rubne točke (limes za 0 i za beskonačno).

Za širinu prijenosnog pojasa $B = 0$ Hz intuitivno zaključujemo da je tada kapacitet kanala jednak nuli, ali i matematički zaključujemo:

$$C_0 = \lim_{B \rightarrow 0} B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N_0 B} \right) = 0$$

Jer je $\lim_{B \rightarrow 0} \left(1 + \frac{S}{N_0 B} \right)^B = 1$, a $\log_2(1) = 0$ (L' Hospitalovo pravilo)

Za širinu kanala $B = \infty$ Hz slijedi:

$$C_\infty = \lim_{B \rightarrow \infty} B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N_0 B} \right) = \lim_{B \rightarrow \infty} \log_2 \left(1 + \frac{S}{N_0 B} \right)^B$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

Susstitucija $x = \frac{N_0 B}{S}$

$$C_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \left[\left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{N_0 B}{S}} \right]^{\frac{S}{N_0}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \left[\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right]^{\frac{S}{N_0}} = \log_2 e^{\frac{S}{N_0}}$$

$$C_\infty = \frac{S}{N_0} \log_2 e = \frac{S}{N_0} \frac{\ln e}{\ln 2} = \frac{S}{N_0 \ln 2} \text{ [bit/s]}$$

Za AWGN kanal širine prijenosnog pojasa od 0 Hz do beskonačnosti, kapacitet kanala se kreće od 0 do $\frac{S}{N_0 \ln 2}$ [bit/s]