Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Modele ekstrapolacyjne # 2

Natalia Nehrebecka

 # 5

Plan zajęć

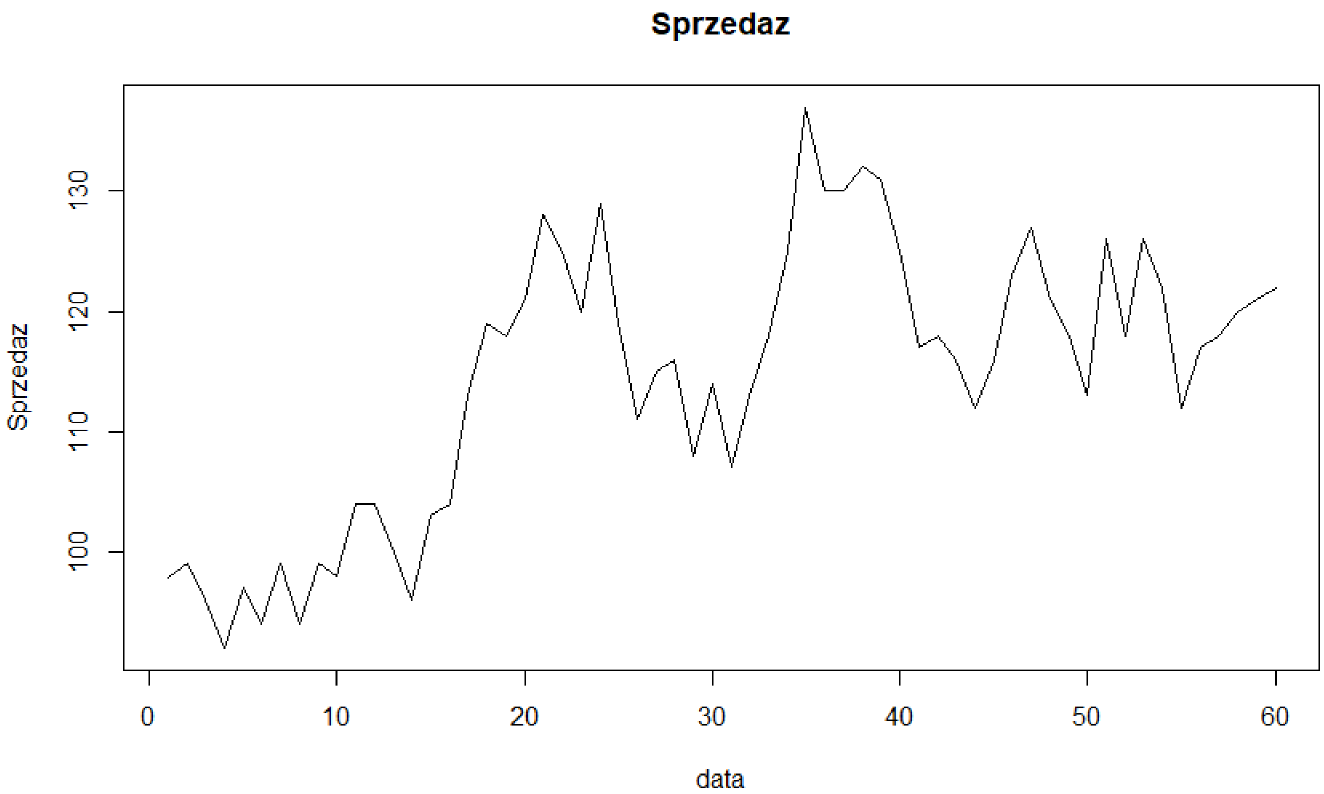
1. Metody naiwne
2. Metoda średniej ruchomej
   - prostej
   - ważonej
3. Wygładzanie wykładnicze
   - Prosty model wygładzania wykładniczego
   - Model liniowy Holta
   - Model Wintersa
     - mulitplikatywny
     - addytywny

Plan zajęć

1. Metody naiwne
2. Metoda średniej ruchomej
   - prostej
   - ważonej
3. Wygładzanie wykładnicze
   - Prosty model wygładzania wykładniczego
   - Model liniowy Holta
   - Model Wintersa
     - mulitplikatywny
     - addytywny

Prosty model wygładzania wykładniczego

- Exponential Weighted Moving Average (EWMA)



Prosty model wygładzania wykładniczego

- Jedno równanie (bez trendu i sezonowości)
- Model jest stosowany w przypadku występowania wahań przypadkowych oraz stałego poziomu zmiennej prognozowanej:

$$y_t^* = \alpha y_{t-1} + (1-\alpha) y_{t-1}^*$$

lub

$$y_t^* = y_{t-1}^* + \alpha (y_{t-1} - y_{t-1}^*)$$

- **α** – tzw. parament wygładzania, czyli waga dla ostatniej (najnowszej) obserwacji zmiennej
- $(\boldsymbol{y_{t-1}} - \boldsymbol{y}*_{t-1})$ – błąd ex post średniej kroczącej wyznaczony dla okresu *t-1*

$\alpha \in [0,1]$.

Prosty model wygładzania wykładniczego

$$y_t^* = \alpha y_{t-1} + (1-\alpha) y_{t-1}^*$$

$$y_t^* = \alpha y_{t-1} + (1-\alpha)[\alpha y_{t-2} + (1-\alpha) y_{t-2}^*] =$$

$$= \alpha y_{t-1} + \alpha(1-\alpha) y_{t-2} + (1-\alpha)^2 y_{t-2}^*$$

Podstawiając rekurencyjnie otrzymujemy:

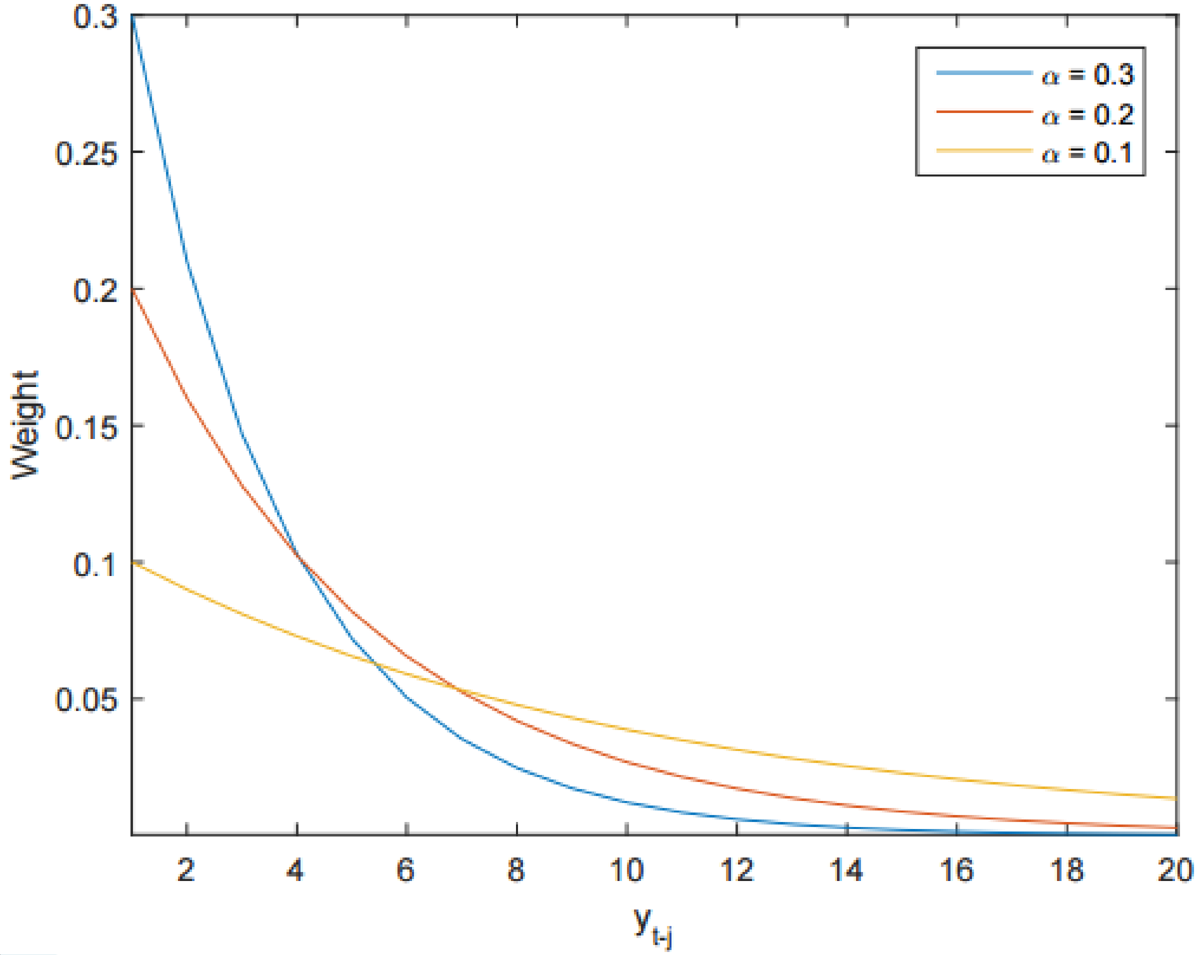
$$y_t^* = \alpha y_{t-1} + \alpha(1-\alpha) y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-3} + (1-\alpha)^3 y_{t-3}^*$$

oraz:

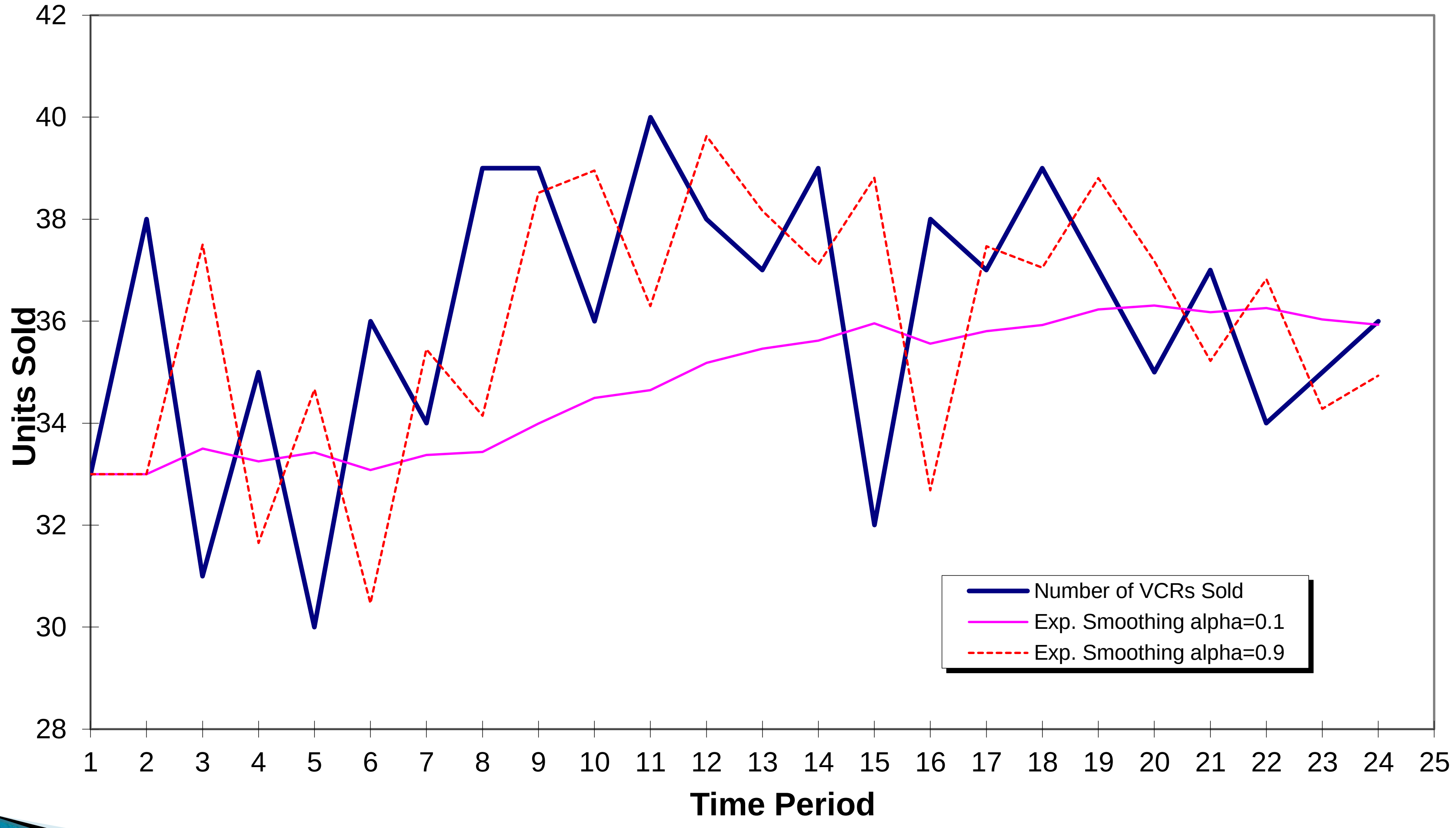
$$y_t^* = \alpha y_{t-1} + \alpha(1-\alpha) y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-3} + \alpha(1-\alpha)^3 y_{t-4}$$

$$+\alpha(1-\alpha)^4 y_{t-5} + \cdots + (1-\alpha)^{t-1} y_1^*$$

Prosty model wygładzania wykładniczego



Prosty model wygładzania wykładniczego



Prosty model wygładzania wykładniczego

- $\alpha\ - parametr\ wygładzania$
  - wartość wyznacza się eksperymentalnie, aby minimalizowała średni błąd dopasowania
- $y_1^* -$ najczęściej podstawia się
  - y_1
  - lub średnia arytmetyczna kilku pierwszych obserwacji

Prosty model wygładzania wykładniczego

- Szereg obserwujemy w następujących okresach:
  - $t = 1, \dots, T-1$

$$y_t^* = \alpha y_{t-1} + (1-\alpha) \cdot y_{t-1}^*$$

- Prognoza:
  - $t = T$

$$y_T^* = \alpha y_{T-1} + (1-\alpha) \cdot y_{T-1}^*$$

  - $T = T + 1$

$$y_{T+1}^* = \alpha y_T + (1-\alpha) \cdot y_T^*$$

$$y_{T+1}^* = \alpha y_T^* + (1-\alpha) \cdot y_T^*$$

$$y_{T+1}^* = y_T^*$$

Nie obserwujemy!

- $y_{T+k}^* = y_T^*$ dla wszystkich $k > 0$

Prosty model wygładzania wykładniczego

- *Jeżeli w szeregu występuje trend liniowy, to stosowane jest podwójne wygładzanie wykładnicze (DEWMA)*

  - Pierwszy filtr

$$y_t^* = \alpha y_{t-1} + (1-\alpha) y_{t-1}^*$$

  - Drugi filtr

$$y_t^{**} = \alpha y_{t-1}^* + (1-\alpha) y_{t-1}^{**}$$

- *Jeżeli w szeregu występuje trend kwadratowy, to stosowane jest potrójne wygładzanie wykładnicze*

Plan zajęć

1. Metody naiwne
2. Metoda średniej ruchomej
   - prostej
   - ważonej
3. Wygładzanie wykładnicze
   - Prosty model wygładzania wykładniczego
   - Model liniowy Holta
   - Model Wintersa
     - mulitplikatywny
     - addytywny

Model liniowy Holta

- Stosowany w sytuacji, gdy zmienna zależna zawiera trend liniowy:

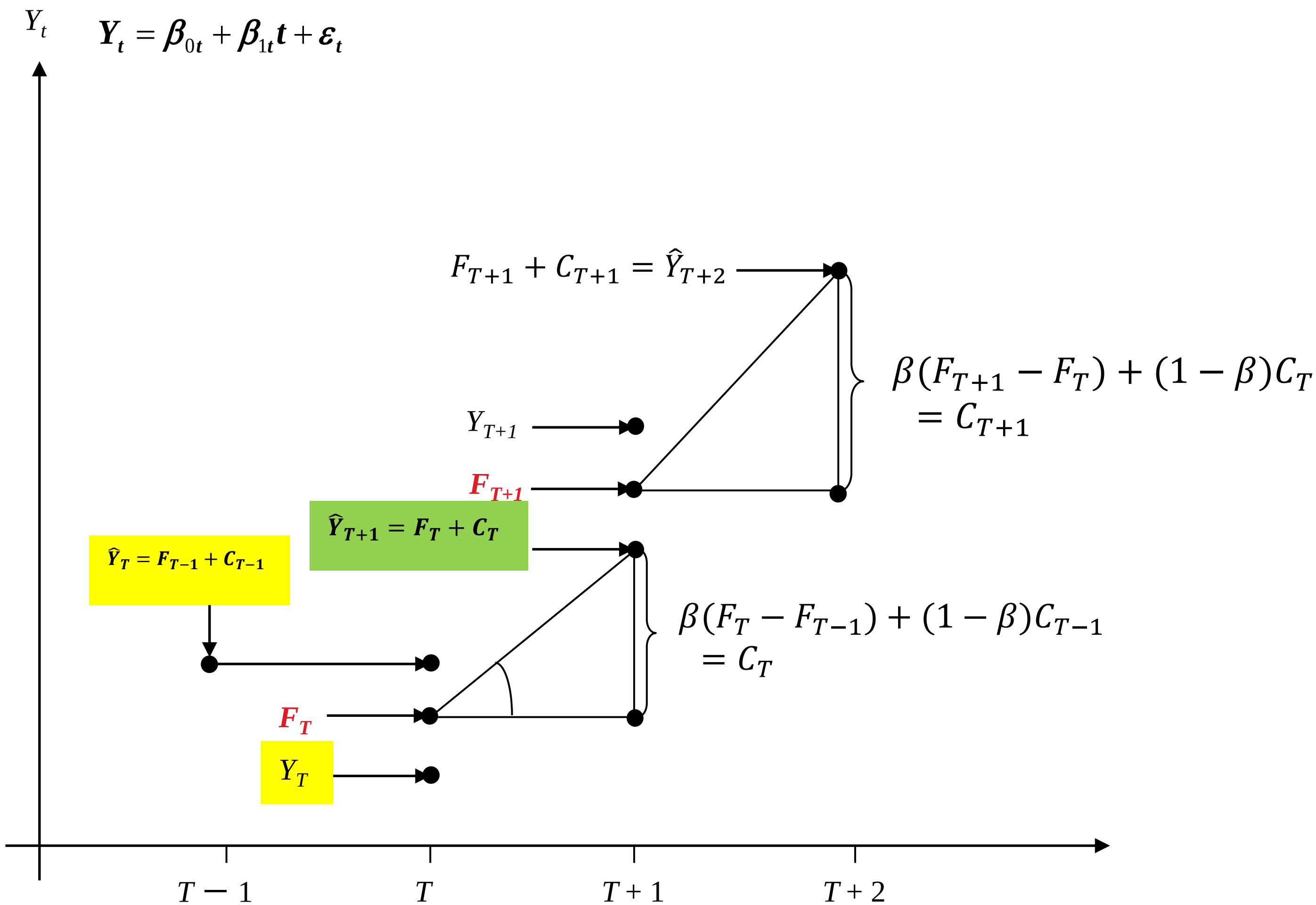
$$F_t = \alpha y_t + (1-\alpha)(F_{t-1} + C_{t-1})$$

$$C_t = \beta(F_t - F_{t-1}) + (1-\beta)C_{t-1}$$

- gdzie:
  - F_t – wygładzona wartość zmiennej zależnej na moment t,
  - C_t – wygładzona wartość przyrostu trendu w momencie t,
  - α, β – parametry wygładzania należące do przedziału [0; 1], obliczane zwykle tak, aby minimalizować błąd średniokwadratowy.
- Prognozy są formułowane jako:

$$y^*_{t+\boldsymbol{k}} = F_t + \boldsymbol{k}C_t$$

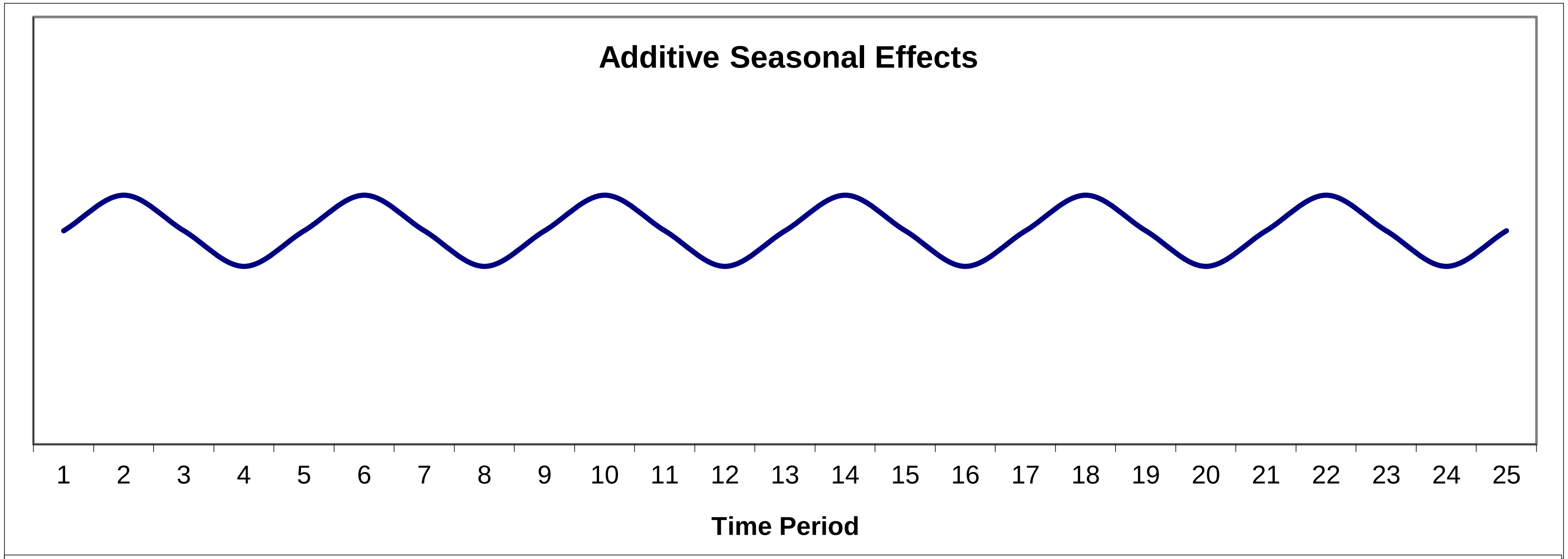
Model liniowy Holta

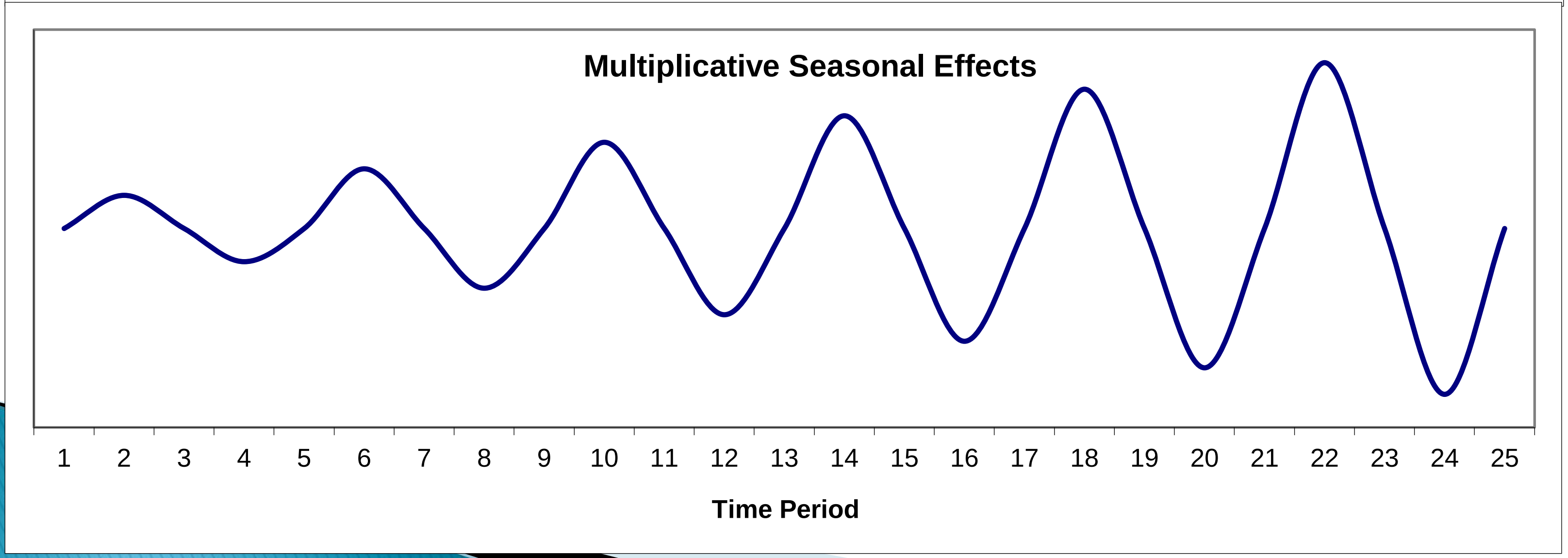


Plan zajęć

1. Metody naiwne
2. Metoda średniej ruchomej
   - prostej
   - ważonej
3. Wygładzanie wykładnicze
   - Prosty model wygładzania wykładniczego
   - Model liniowy Holta
   - Model Wintersa
     - addytywny
     - mulitplikatywny

Model Wintersa





Addytywny model Wintersa

- Stosowany w sytuacji, gdy zmienna zależna zawiera jednocześnie trend, wahania losowe oraz wahania sezonowe:

$$F_t = \alpha(y_t - S_{t-s}) + (1-\alpha)(F_{t-1} + C_{t-1})$$
$$C_t = \beta(F_t - F_{t-1}) + (1-\beta)C_{t-1}$$
$$S_t = \gamma(y_t - F_t) + (1-\gamma)S_{t-s}$$

gdzie:

- F_t — wygładzona wartość zmiennej zależnej na moment t,
- S_t — wygładzona wartość przyrostu trendu w momencie t,
- C_t — czynnik sezonowy w momencie t,
- s — długość cyklu sezonowego,
- α, β, γ – parametry wygładzania należące do przedziału [0; 1], obliczane zwykle tak, aby minimalizować błąd średniokwadratowy.

- Prognozy formułowane są jako: $y^*_{t+k} = F_t + \boldsymbol{k}C_t + S_{t+k-s}$

Multiplikatywny model Wintersa

- Stosowany w sytuacji, gdy wahania sezonowe zmieniają się wraz z trendem:

$$F_t = \alpha(y_t / S_{t-s}) + (1-\alpha)(F_{t-1} + C_{t-1})$$
$$C_t = \beta(F_t - F_{t-1}) + (1-\beta)C_{t-1}$$
$$S_t = \gamma(y_t / F_t) + (1-\gamma)S_{t-s}$$

Prognozy są formułowane jako:

$$y^*_{t+k} = (F_t + kC_t) \cdot S_{t+k-s}$$

Model Wintersa

- Za wartości początkowe parametrów modelu można przyjąć:
- F – wartość rzeczywistą zmiennej z szeregu czasowego odpowiadającą pierwszej fazie drugiego cyklu lub średnią wartość z pierwszego cyklu,
- C – różnicę średnich wartości z drugiego i pierwszego cyklu bądź przyjąć zero,
- S – wyznaczoną na podstawie szeregu czasowego *średnią różnic* (dla modelu addytywnego) lub *ilorazów* (dla modelu multiplikatywnego), odpowiadających tej samej fazie cyklu sezonowego, wartości zmiennej prognozowanej i wygładzonych wartości trendu.

Podsumowanie

- Modele ekstrapolacyjne są proste w użyciu
- Nie wymagają szacowania parametrów, więc ich aktualizacja jest łatwa
- Ale okazują się niekiedy zbyt proste i mało elastyczne
- Ponadto, prognozy nie dążą do długookresowych wartości modelowanych zmiennych

Dziękuję za uwagę