Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Modele autoregresyjne ze średnią ruchomą ARMA(p,q)

8

Natalia Nehrebecka

Plan zajęć

- Procesy AR, MA, ARMA, ARIMA i ARIMAX
- Procedura Boxa-Jenkinsa
- Prognozy

Plan zajęć

- Procesy AR, MA, ARMA, ARIMA i ARIMAX
- Procedura Boxa-Jenkinsa
- Prognozy

Wprowadzenie

- modele ARMA - geneza w pracach Boxa i Jenkinsa w latach 70. XX w.

- **jednowymiarowa analiza szeregów czasowych:** wiedza o przyszłości szeregu „zaklęta” w jego przeszłości :-)

- podstawowe zastrzeżenia:
  - tylko do szeregów stacjonarnych
  - tylko do prognoz **krótkookresowych**
  - model ateoretyczny

Model AR(p)

- AR (ang. $autoregresion$):
  - w procesie autoregresyjnym bieżąca wartość zmiennej zależnej y_t zależy tylko od swoich opóźnionych wartości oraz błędu losowego.

$$\boldsymbol{AR(p)}: y_t = \mu + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \cdots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t,$$

gdzie: $\varepsilon_t \sim WN$

Notacja wielomianu charakterystycznego:

$$\underbrace{\left(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \cdots - \alpha_p L^p\right)}_{A(L)} y_t = \mu + \varepsilon_t$$

gdzie: $A(L) - \text{wielomian opóźnień}$

Badanie stopnia zintegrowania

- Wyznaczenie pierwiastków wielomianu charakterystycznego procesu [jeżeli znany jest proces generujący dane]

- ***Testy pierwiastka jednostkowego*** / testy stacjonarności

Model AR(1)

Badanie stacjonarności za pomocą pierwiastków wielomianu charakterystycznego

Wielomian charakterystyczny procesu AR(1):
$1 - \alpha_{\mathbf{1}} z = 0$
$z = \frac{\mathbf{1}}{\alpha_{\mathbf{1}}}$ - pierwiastek równania charakterystycznego
Proces AR(1) jest stacjonarny, jeżeli $|\alpha_{\mathbf{1}}| < 1$, a więc jeśli pierwiastek wielomianu charakterystycznego $|\frac{\mathbf{1}}{\alpha_{\mathbf{1}}}| > 1$.

Model AR(1)

Przykład: AR(1)

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_t - \alpha_1 y_{t-1} = \varepsilon_t$$

$$y_t(1 - \alpha_1 L) = \varepsilon_t$$

$$y_t = \underbrace{\frac{1}{1 - \alpha_1 L}}_{\text{suma nieskończonego szeregu}} \varepsilon_t$$

A więc:

$$y_t = \varepsilon_t + \alpha_1 L \varepsilon_t + \alpha_1^2 L^2 \varepsilon_t + \alpha_1^3 L^3 \varepsilon_t + \dots$$

$$y_t = \varepsilon_t + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \alpha_1^2 \varepsilon_{t-2} + \alpha_1^3 \varepsilon_{t-3} + \dots$$

Warunki stacjonarności dla procesu AR(p)

- Proces AR(p) jest stacjonarny jeśli wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego:

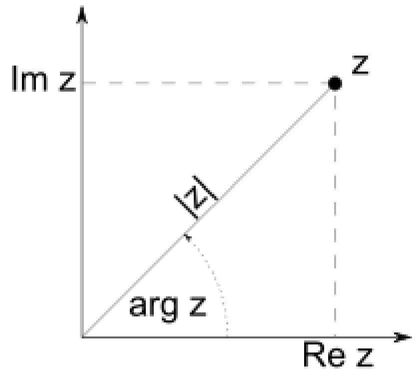
$$1 - \alpha_1 L - \cdots - \alpha_p L^p = 0$$

leżą poza kołem jednostkowym, tzn. są co do modułu > 1.

- **Stacjonarny proces AR(p) można przedstawić jako MA(∞).**
  - W modelu AR bieżąca wartość szeregu zależy od ***p*** poprzednich, a na poprzednie składa się nieskończona liczba opóźnionych szoków (ε).
  - W modelu MA tych szoków model „widzi" tylko ***q***.

Czym jest koło jednostkowe?

- Pierwiastki wielomianu mogą być liczbami zespolonymi, tzn. mieć część rzeczywistą ***a*** i urojoną ***b*** ***(a + bi)***.
- Można je przedstawić na płaszczyźnie jako punkt w przestrzeni dwuwymiarowej o współrzędnych ***(a,b)***.
  - $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$



- więc warunek stacjonarności/odwracalności $|a + bi|$ >1 oznacza
  - $a^2 + b^2 > 1^2$ (pole poza okręgiem o środku (0; 0) i promieniu 1, czyli „kołem jednostkowym”).

Warunki stacjonarności dla procesu AR(p)

- Czy poniższy proces jest stacjonarny?

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$$(1 - L)y_t = \varepsilon_t$$

- Równanie charakterystyczne to

$$1 - z = 0$$

- Pierwiastek równania wynosi $z = 1$ zatem proces jest niestacjonarny (tzw. unit root process)

Model MA(q)

- MA (ang. $moving\ average$):
  - Model MA jest liniową kombinacją procesów białego szumu, a zatem y_t zależy od bieżącej i przeszłych wartości zaburzenia losowego będącego białym szumem.

$$\boldsymbol{MA(q)}\text{: } y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

gdzie: $\varepsilon_t \sim WN$

Notacja wielomianu charakterystycznego:

$$y_t - \mu = \underbrace{\left(1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q\right)}_{B(L)} \varepsilon_t$$

gdzie: B(L) $-$ wielomian opóźnień

Własności procesu MA(q)

$$\boldsymbol{MA(q)}\text{: } y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q},$$

gdzie: $\varepsilon_t \sim WN$

- Wartość oczekiwana:

$$E(y_t) = \mu$$

- Wariancja:

$$Var(y_t) = \gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma^2$$

- Kowariancja:

$$Cov(y_t, y_{t-k}) = \gamma_k =$$

$$\begin{cases} (\theta_k + \theta_{k+1}\theta_1 + \theta_{k+2}\theta_2 + \cdots + \theta_q\theta_{q-k})\sigma^2, & k = 1,2,\ldots,q \\ 0, & k > q \end{cases}$$

Własności procesu MA(q)

- Dla skończonej wartości **q** proces **MA(q)** jest zawsze stacjonarny.
- Jeśli jest spełniony warunek odwracalności:

$$\forall_i \quad |z_i| > 1$$

  - gdzie z_i to pierwiastki równania charakterystycznego:

$$1 + \theta_1 L + \cdots + \theta_q L^q = 0$$

- Wówczas proces MA(q) można przedstawić w postaci procesu AR(∞).
- Każdy stacjonarny proces AR(p) można przedstawić w postaci procesu MA(∞).

Zadanie – praca domowa

1. Pokazać, że model $AR(1)$ można przedstawić jako $MA(\infty)$. Sformułować odpowiedni warunek.

2. Pokazać, że model $MA(1)$ można przedstawić jako $AR(\infty)$. Sformułować odpowiedni warunek.

Model ARMA(p,q) – połączenie AR(p) i MA(q)

- Proces ARMA (autoregressive moving average process)

$$y_t = \mu + \alpha_1 y_{t-1} + \cdots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$E(\varepsilon_t) = 0 \quad var(\varepsilon_t) = \sigma^2$$

- Zakładamy, że innowacje ε_t są nieskorelowane:
- $E(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0\ dla\ t \neq s$

- W modelu takim całkowity błąd losowy:
- $u_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$ - jest skorelowany

Model ARMA można wówczas przedstawić jako

$$y_t = \mu + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \ldots + \alpha_p y_{t-p} + u_t$$

Metody szacowania

- Jeśli q = 0; to model AR(p), można wyestymować MNK:
- Jeśli q≠ 0, czyli

$$y_t = \mu + \alpha_1 y_{t-1} + \cdots + \alpha_p y_{t-p} + u_t$$

- Jest to model autoregresyjny ze skorelowanym błędem losowym

$$\Downarrow$$

- Występowanie autokorelacji implikuje równoczesność i w efekcie brak zgodności estymatora MNK
- Należy zastosować estymatory MNW (Metoda Największej Wiarygodności) lub NMNK (Nieliniowa Metoda Najmniejszych Kwadratów).

Model ARIMA(p,d,q)

- Szeregi niestacjonarne...
  - **analiza wielowymiarowa** (kointegracja i model korekty błędem)
  - **analiza jednowymiarowa** - tworzymy model ARMA(p,q) na szeregu zróżnicowanym tyle razy, aby uzyskać jego stacjonarność:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$
$$\Delta^2 Y_t = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1}$$

  - **Model ARIMA(p,d,q):**

$$\Delta^d y_t = \mu + \alpha_1 \Delta^d y_{t-1} + \cdots + \alpha_p \Delta^d y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

ARMA a ARIMA

Model ARMA jest szczególnym przypadkiem modelu ARIMA (z parametrem d=0).

Model ARIMAX

- ARIMAX - model ARIMA uzupełniony o zestaw egzogenicznych regresorów:

$$\Delta^d y_t = \mu + \boldsymbol{\beta x_t} + \alpha_1 \Delta^d y_{t-1} + \cdots + \alpha_p \Delta^d y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Dziękuję za uwagę