Modele ekstrapolacyjne

Natalia Nehrebecka

4

Plan zajęć

1. Metody naiwne
2. Metoda średniej ruchomej
   - Prostej
     A. **Prognozowanie**
   - ważonej
3. Wygładzanie wykładnicze
   - Prosty model wygładzania wykładniczego
   - Model liniowy Holta
   - Model Wintersa
     - mulitplikatywny
     - addytywny

Interpolacja i ekstrapolacja

- Interpolacja polega na wyznaczeniu na podstawie danych o zjawisku jego wartości pośrednich (przebiegu funkcji) z wykorzystaniem metod matematycznych.

- W metodologii badan ekstrapolacja to inaczej prognozowanie na podstawie poznanych przypadków na całą populację.

- Ekstrapolacja polega na określaniu wartości zjawiska (przebiegu funkcji), dla wartości argumentu wychodzącego poza jego dziedzinę.

Ekstrapolacja

- Model ekstrapolacyjne są głównie stosowane do:

- **wygładzania szeregów czasowych**
  - oryginalne wartości $\boldsymbol{y_t}$ są zastąpione przez wartości wygładzone $\boldsymbol{y_t^*}$ w całym okresie próby (ang. **in-sample period**).

- **prognozowania szeregów czasowych**
  - prognozy $\boldsymbol{y_{t+1}}$ budowane są na podstawie wartości wygładzonych $\boldsymbol{y_{t+1}^*}$ w okresie prognozy (ang. **out-of-sample period**)

Plan zajęć

1. Metody naiwne
2. Metoda średniej ruchomej
   - prostej
   - ważonej
3. Wygładzanie wykładnicze
   - Prosty model wygładzania wykładniczego
   - Model liniowy Holta
   - Model Wintersa
     - mulitplikatywny
     - addytywny

Metody naiwne

- Oparte na przesłankach **braku zmian w zachowaniu czynników oddziałujących na zmienną prognozowaną**.
- Stosowane w przypadku niedużych wahań przypadkowych zmiennej zależnej.
- **Zalety:**
  - Łatwe w zrozumieniu, szybkie i tanie w zastosowaniu.
- **Wady:**
  - Umożliwiają prognozowanie na jeden okres na przód:

$$t = T_s + 1$$

  - Charakteryzuje je na ogół **niska jakość prognoz**.

Metody naiwne

- Prosta metoda naiwna:

$$y^*_{t+1} = y_t$$

gdzie:

- y^*_{t+1} - wygładzona wartość y_{t+1} na moment $(t+1)$
- y_t - wartość zmiennej zależnej na moment (t)

Plan zajęć

1. Metody naiwne
2. Metoda średniej ruchomej
   - prostej
   - ważonej
3. Wygładzanie wykładnicze
   - Prosty model wygładzania wykładniczego
   - Model liniowy Holta
   - Model Wintersa
     - mulitplikatywny
     - addytywny

Metody średniej ruchomej

- Modele średniej ruchomej (ang. *moving average*) wykorzystywane są do:

- **wyrównania (wygładzania)** przebiegu szeregu czasowego
  - zastąpienie pierwotnych wartości zmiennej średnimi arytmetycznymi

- **prognozowania szeregu czasowego**
  - Stosowane są w przypadku występowania jedynie **małych wahań przypadkowych zmiennej zależnej!**

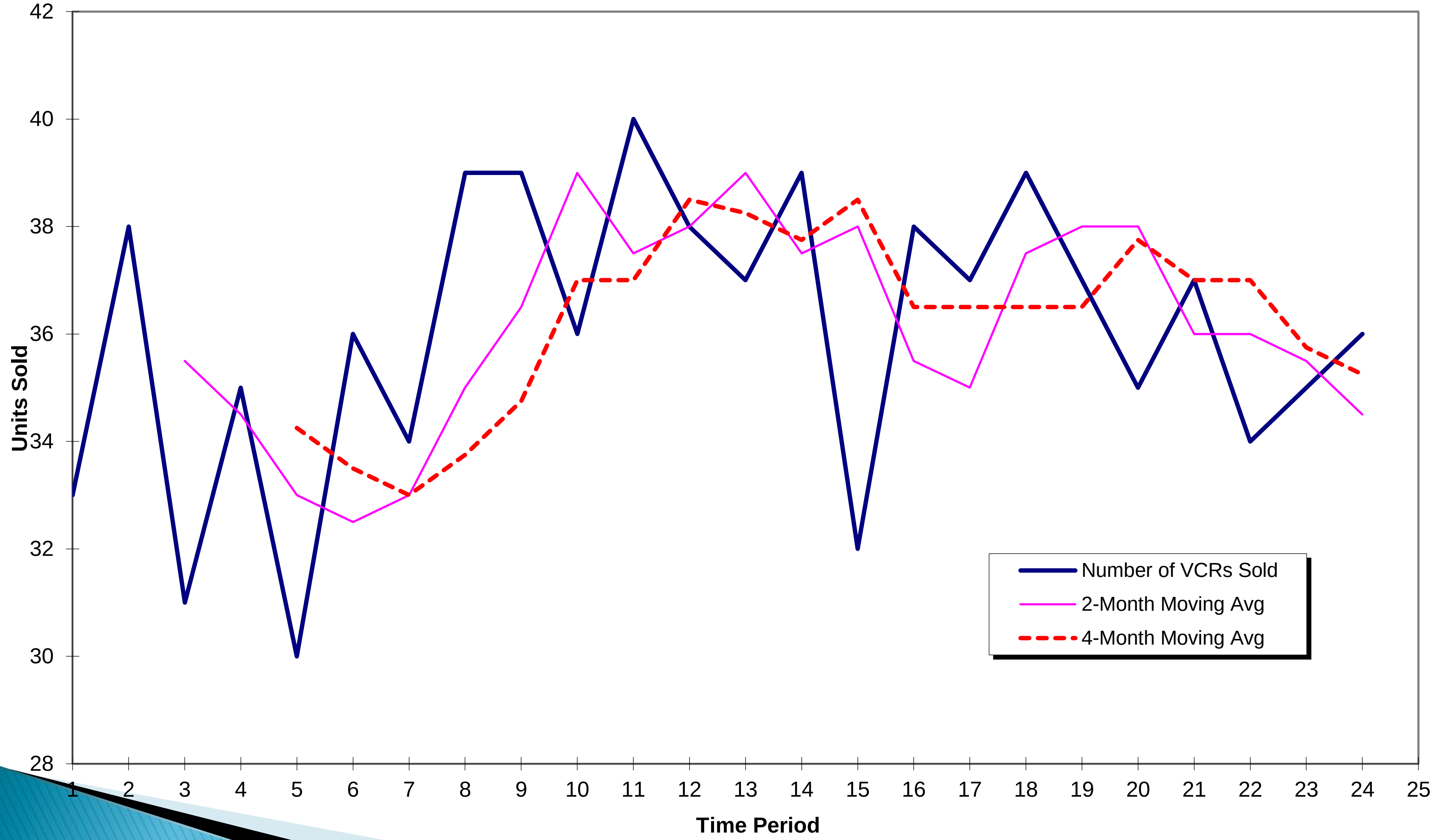
  - wartość prognozy jest równa średniej arytmetycznej z *k* ostatnich wartości tej zmiennej

$$y^*_{t+1} = \frac{y_t + y_{t-1} + \ldots + y_{t-k+1}}{k}$$

gdzie:

- k – czynnik wygładzania

Prosta średnia ruchoma



Agenda

- Prognozowanie
  - Wprowadzenie
  - Ocena jakości prognoz
  - Praktyka

Czemu służą prognozy?

- Prognoza = próba przewidzenia rozwoju analizowanego zjawiska w przyszłości
  - (*kierunek* i/lub *wielkość* zmiany).

- Prognozuje się, ponieważ jest to użyteczne.
  - Czasem wystarczy przewidzieć *kierunek zmiany*, żeby dużo zarobić, np. wzrost kursu akcji następnego dnia – nie istnieje model doskonały.

  - Z drugiej strony model przewidujący np., że indeks cen (CPI) wzrośnie z miesiąca na miesiąc jest bezużyteczny – przez ostatnie 40 lat spadek cen zanotowano w 1% przypadków.

Przykładowe nietrafione prognozy

- **„Wszystko co było do wynalezienia zostało już wynalezione.”**

– Dyrektor Amerykańskiego Biura Patentowego, 1899.

- **„Ceny akcji osiągnęły jak się wydaje dość wysoki, stabilny poziom.”** – prof. Irving Fisher, Yale University, 16.10.1929.
- **„Myślę, że na całym świecie może być zapotrzebowanie na jakieś 5 komputerów.”** – członek Zarządu IBM, 1943.
- **„Komputery w przyszłości mogą ważyć nie więcej niż 1,5 tony.”** – Popular Mechanics, prognoza nieustającego postępu nauki, 1949.
- **„640 kB powinno wystarczyć każdemu.”** – Bill Gates, 1981

Koncepcja trafności prognozy

- Nie ma prognoz doskonałych, każda jest obarczona **błędem**

- Mogą być one jednak użyteczne jeśli zapewniają ***lepsze odpowiedzi na zadane pytania*** niż metody alternatywne, czy proste zgadywanie

- Testem trafności prognozy nie jest więc jej bezbłędność, ale porównanie jej dokładności z prognozami alternatywnymi

Pułapki w trakcie prognozowania

- Nawet jeśli wszystkie założenia modelu są spełnione i wszystkie procedury statystyczne poprawnie zastosowane – *pojawia się błąd losowy prognozy.*

- **Wielkość oczekiwanego błędu prognozy można oszacować.**
- W praktyce empirycznej rzeczywisty błąd prognozy jest większy niż spodziewany.

- **Paradoks:** model niespełniający założeń może być użyteczny do prognozowania.

Błąd prognozy ex post

- Z okresu, dla którego dysponujemy obserwacjami $[1, T]$, wydzielamy okres próby (okres ***in-sample*** **-** $[1, T_s]$).
  - Na wydzielonej części próby szacujemy parametry modelu.

- Wykonujemy prognozę na okres ***out-of-sample*** $[T_{s+1}, T]$.
  - Obliczamy błąd prognozy ex-post w okresie ***out-of-sample***.

Błąd prognozy ex post

- Błąd prognozy:

$$e_t = y_t - y_t^*$$

gdzie:

- zmienna prognozowana y_t
- prognoza zmiennej y_t^*

Błąd prognozy ex post

- MAE – *Mean Absolute Error*, średni **bezwzględny** błąd prognozy

$$\frac{1}{T - T_s} \sum_{t=T_s+1}^{T} |e_t|$$

  - Nie spełnia warunku unormowania

- MSE – *Mean Square Error*, średni kwadratowy błąd prognozy

$$\frac{1}{T - T_s} \sum_{t=T_s+1}^{T} (e_t)^2$$

  - Nie spełnia warunku unormowania

Błąd prognozy ex post

- MAPE – *Mean Absolute Percentage Error*, średni względny błąd prognozy

$$\frac{100\%}{T - T_s} \sum_{t=T_s+1}^{T} \left| \frac{e_t}{y_t} \right|$$

  - Jaki procent rzeczywistej wartości zmiennej ***y*** stanowiło przeciętne w przedziale weryfikacji bezwzględne odchylenie prognoz od danych rzeczywistych.

- AMAPE – *Adjusted MAPE*, skorygowany średni względny błąd prognozy

$$\frac{100\%}{T - T_s} \sum_{t=T_s+1}^{T} \left| \frac{e_t}{y_t + y_t^*} \right|$$

Błąd prognozy ex post

- MAPE – Mean Absolute Percentage Error, średni **względny** błąd prognozy

$$\frac{100\%}{T-T_s}\sum_{t=T_s+1}^{T}\left|\frac{e_t}{y_t}\right|$$

  - *Nie spełnia warunku symetrii*, tj. wyżej ocenia przeszacowanie prognoz niż ich niedoszcowanie

$$y_{T_s+1}=120;\quad \hat{y}_{T_s+1}=80;\quad MAPE=33{,}3\%$$
$$y_{T_s+1}=80;\quad \hat{y}_{T_s+1}=120;\quad MAPE=50\%$$

Błąd prognozy ex post

- AMAPE – Adjusted MAPE, skorygowany średni **względny** błąd prognozy

$$\frac{100\%}{T-T_s}\sum_{t=T_s+1}^{T}\left|\frac{e_t}{y_t+y_t^*}\right|$$

  - Wartość tego błędu należy do przedziału [0,100%]
  - Spełnia warunek symetrii

Wady i zalety poszczególnych miar jakości prognoz ex-post

- Miary bezwzględne (**MSE,MAE**) mają lepsze właściwości dla szeregów o wartościach większych co do modułu od 1, dla szeregów których wyrazy są **mniejsze co do modułu od 1** preferowane są miary względne (**MAPE, AMAPE**).
- Dla szeregów które przyjmują zarówno **dodatnie jak i ujemne wartości** lepsze są *miary absolutne*.
  - Zatem MSE jest dobrą miarą dla szeregów o wartościach większych od 1, MAE jest dobrą miarą dla szeregów o wartościach absolutnych większych od 1. Dodatkowo jest bardziej odporna na występowanie obserwacji nietypowych.

- MAPE może być interpretowany jako błąd procentowy, jest ograniczony z dołu przez 0,
- AMAPE *koryguje problem asymetrii* między wartościami rzeczywistymi a prognozami.

Plan zajęć

1. Metody naiwne
2. Metoda średniej ruchomej
   - prostej
   - ważonej
3. Wygładzanie wykładnicze
   - Prosty model wygładzania wykładniczego
   - Model liniowy Holta
   - Model Wintersa
     - mulitplikatywny
     - addytywny

Metody średniej ruchomej

- Modele średniej ruchomej (ang. *moving average*) wykorzystywane są do:

- **wyrównania (wygładzania)** przebiegu szeregu czasowego
  - zastąpienie pierwotnych wartości zmiennej średnimi arytmetycznymi

- **prognozowania szeregu czasowego**
  - Stosowane są w przypadku występowania jedynie **małych wahań przypadkowych zmiennej zależnej!**

  - wartość prognozy jest równa średniej arytmetycznej z *k* ostatnich wartości tej zmiennej

$$y^*_{t+1} = \frac{y_t + y_{t-1} + \ldots + y_{t-k+1}}{k}$$

gdzie:

- k – czynnik wygładzania

Jak wyznaczyć stałą *k* ?

- Można wykorzystać błędy prognozy *ex post*, np.

$$\frac{1}{T-k}\sum_{t=k+1}^{T}(e_t)^2$$

- Wybieramy tę wartość k, dla którego *MSE* jest najmniejsze.

- Dla $k = 1$ model sprowadza się do metody naiwnej.

Prosta średnia ruchoma

- **Wadą** średniej ruchomej jest przypisywanie takiego samego znaczenia obserwacjom *odległym w czasie* i *najnowszym*

$$y_{t+1}^{*} = \frac{1}{k} y_t + \frac{1}{k} y_{t-1} + \cdots + \frac{1}{k} y_{t-k-1}$$

Ważona średnia ruchoma

- Ważona średnia ruchoma daje większe wagi obserwacjom *najnowszym*

- Typowy przykład:

$$y_{t+1}^{*} = \frac{1}{21}\sum(\mathbf{6}y_t + \mathbf{5}y_{t-1} + \mathbf{4}y_{t-2} + \mathbf{3}y_{t-3} + \mathbf{2}y_{t-4} + \mathbf{1}y_{t-5})$$

Ważona średnia ruchoma

- Ogólnie:

$$y_{t+1}^{*} = \sum_{i=t-k+1}^{t} y_i \, w_{i-t+k}$$

- Wagi muszą spełniać następujące warunki:
  - $0 < w_1 < w_2 < \cdots < w_k \leq 1$
  - $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$

Dziękuję za uwagę