Non Determinismo

DEF: l'***alfabeto epsilon*** è definito da un alfabeto $\sum$ unito all'insieme formato con epsilon ossia: $\sum_\epsilon = \sum \cup \{\epsilon\}$

> **Deterministic Finite Automaton (DFA)**
>
> E' una quintupla $(\,Q,\ \sum,\ \delta,\ q_0,\ F\,)$ dove:
>
> - Q è l'insieme finito degli *stati dell'automa*
> - $\sum$ è l'*alfabeto*
> - $\delta\ :\ Q \times \sum_\epsilon \to \mathcal{P}(Q)$ è la *funzione di transizione* degli stati
> - q_0 è lo *stato iniziale* dell'automa
> - $F \subseteq Q$ è l'insieme degli *stati accettanti* dell'automa.
>
> Definiamo $\mathcal{P}(Q)$ come l'insieme delle parti di Q, ossia l'insieme contenente tutti i sottoinsiemi possibili

Quando ho un ϵ-**arco** lo attraverso in ogni caso per passare da uno stato all'altro senza necessità di leggere un carattere in input.

DEF: sia $N := (\,Q,\ \sum,\ \delta,\ q_0,\ F\,)$ un DFA. Data una stringa $w := w_0 \dots w_k \in \sum^*$ dove $w_0 \dots w_k \in \sum_\epsilon$, si dice che w è ***ACCETTATA*** da N se esiste una sequenza di stati $r_0 \dots r_{k+1} \in Q$ tali che:

- $r_0 = q_0$ ossia che la sequenza di stati comincia da quello attuale
- $\forall i \in [0,k] r_{i+1} \in \delta(r_i, w_i)$, per ogni w_i della stringa, si può passare da r_i a r_{i+1} tramite la funzione di transizione δ. Siccome l'automa non è deterministico, δ può restituire più stati possibili: basta che ne esista uno che permette la continuazione.
- $r_{k+1} \in F$: alla fine della lettura, lo stato in cui ci si trova deve essere uno stato finale (accettante).

EQUIVALENZA TRA NFA E DFA

DEF: dato un alfabeto $\sum$, definiamo come ***classe dei linguaggi di*** $\sum$ ***riconosciuti da un DFA*** il seguente insieme:

$$\mathcal{L}(DFA) = \{L \subseteq \sum^* \mid \exists\ DFA\ D\ t.c\ L = L(D)\}$$

Ossia $\mathcal{L}(DFA)$ è la classe di tutti e soli linguaggi che possono essere riconosciuti da qualche DFA. Quindi $L \subseteq \sum^*$ se e solo se esiste un DFA che accetta esattamente tutte le stringhe di L.

DEF: dato un alfabeto $\sum$, definiamo come ***classe dei linguaggi di*** $\sum$ ***riconosciuti da un NFA*** il seguente insieme:

$$\mathcal{L}(NFA) = \{L \subseteq \sum^* \mid \exists\ DFA\ N\ t.c\ L = L(N)\}$$

TEOREMA

Date le due classi dei linguaggi $\mathcal{L}(DFA)$ e $\mathcal{L}(NFA)$ si ha che: $\mathcal{L}(DFA) = \mathcal{L}(NFA)$.
Dimostrazione:

- Prima implicazione:
  - Dato $L \in \mathcal{L}(DFA)$, sia $D := (\,Q,\ \sum,\ \delta,\ q_0,\ F\,)$ il DFA tale che $L = L(D)$
  - Poiché il NFA è una generalizzazione del concetto di DFA, ne deriva che D sia anche un NFA, implicando che $L \in \mathcal{L}(NFA)$ e che quindi

$$\mathcal{L}(DFA) \subseteq \mathcal{L}(NFA)$$

- Seconda Implicazione:
  - Sia $L \in \mathcal{L}(NFA)$ e $N := (Q_N,\ \sum,\ \delta_N,\ q_{0N},\ F_N)$ il NFS tale che $L = L(N)$.
  - Consideriamo il DFA $D := (Q_D,\ \sum,\ \delta_D,\ q_{0D},\ F_D)$ costruito tramite N stesso:
    1. Insieme degli stati: $Q_D = \mathcal{P}(Q_N)$, ossia tutti i sottoinsiemi di stati di N.
    2. Funzione di ϵ-chiusura:
       - Per un insieme di stati $R \subseteq Q_N$, definiamo:

         $$E(R) = \{q \in Q_N | q\ \grave{e}\ raggiungibile\ da\ quale\ p \in R\ tramite\ solo\ transizioni\ \epsilon\}$$

         Ossia l'insieme di stati raggiungibili usando archi ϵ a partire da quegli stati.
    3. Stato iniziale: $q_{0D} = E(\{q_{0N}\})$, cioè tutti gli stati raggiungibili dallo stato iniziale di N tramite ϵ-transazioni.
    4. Stati finali: $F_D = \{R \in Q_D | R \cap F_N \notin \emptyset\}$, quindi R è finale se contiene almeno uno stato finale dell'NFA.
    5. Per $R \in Q_D$ e $a \in \sum$:

       $$\delta_D(R, a) = \bigcup_{r \in R} E(\delta_N(r, a))$$

       Cioè: dal sottoinsieme R, leggendo a, guardo dove vanno i singoli stati $r \in R$, poi applico la chiusura ϵ.
  - Con questa costruzione, per ogni parola $w \in \sum^* : w \in L(N) \iff w \in L(D)$. Infatti il DFA simula "in parallelo" tutti i cammini possibili dell'NFA, memorizzando nel suo stato corrente l'insieme degli stati raggiungibili dell'NFA.
  - Quindi D riconoscere lo stesso linguaggio di N.
  - In conclusione $L(NFA) \subseteq L(DFA)$.

DEF: l'insieme dei ***linguaggi regolari*** di $\sum$, indicato con REG, è l'insieme delle classi dei linguaggi riconosciuti da un DFA: $REG := \mathcal{L}(DFA)$.