Chiusura dell'unione in REG

L’operatore unione è chiuso in REG, ossia:

$$\forall L1, L2 \in REG,\ L1 \cup L2 \in REG$$

Dimostrazione

- Dati $L_1,\ L_2 \in REG$, siano $D_1 := (Q_1,\ \Sigma,\ \delta_1,\ q_1,\ F_1)$ e $D_2 := (Q_2,\ \Sigma,\ \delta_2,\ q_2,\ F_2)$ due DFA tali che $L_1 = L(D_1)$ e $L_2 = L(D_2)$.
- Definiamo allora il DFA $D := (Q,\ \Sigma,\ \delta,\ q_0,\ F)$ come:
  - $q_0 = (q_1, q_2)$
  - $Q = Q_1 \times Q_2$
  - $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2) = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in F_1 \vee r_2 \in F_2\}$
  - $\forall (r_1, r_2) \in Q,\ a \in \Sigma$ si ha che

    $$\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$$

- A questo punto, per costruzione stessa di D ne segue che: $w \in L_1 \cup L_2 \iff w \in L(D)$

Dunque $L_1 \cup L_2 = L(D) \in REG$ $\square$

La dimostrazione dell'***intersezione*** è identica.

Chiusura del Complemento in REG

L’operatore complemento è chiuso in REG, ossia:

$$\forall L \in REG,\ \neg L \in REG$$

Dimostrazione

- Dato $L \in REG$, sia $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ il DFA tale che $L = L(D)$.
- Definiamo quindi il DFA $D' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$, cioè lo stesso DFA di D ma con gli stati accettanti invertiti.
- Per costruzione stessa di D' si ha che:

  $$w \in L \iff w \notin L(D')$$

  Dunque $\overline{L} = L(D') \in REG$ $\square$

Chiusura della concatenazione in REG

L’operatore concatenazione è chiuso in REG, ossia:

$$\forall L1, L2 \in REG,\ L1 \circ L2 \in REG$$

Dimostrazione

- Dati $L_1, L_2 \in REG$, siano $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ i due NFA tali che $L_1 = L(N_1)$ e $L_2 = L(N_2)$.
- Definiamo quindi l’NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tale che:
  1. $q_0 = q_1$
  2. $Q = Q_1 \cup Q_2$
  3. $F = F_2$
  4. $\forall q \in Q,\ a \in \Sigma$ si ha che:

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & \text{se } q \in Q_1 \setminus F_1 \\ \delta_1(q,a) & \text{se } q \in F_1 \wedge a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,a) \cup \{q_2\} & \text{se } q \in F_1 \wedge a = \varepsilon \\ \delta_2(q,a) & \text{se } q \in Q_2 \end{cases}$$

- A questo punto, per costruzione stessa di N ne segue che:
  $w \in L_1 \circ L_2 \iff w \in L(N)$

Dunque $L_1 \circ L_2 = L(N) \in REG$ □

Chiusura dell'operatore star in REG

L’operatore star è chiuso in REG, ossia:

$$\forall L \in REG,\ L^* \in REG$$

Dimostrazione

- Dato $L \in REG$, sia $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ l'NFA tale che $L = L(N)$.
- Definiamo quindi l'NFA $N' = (Q', \Sigma, \delta', q_0^*, F')$ tale che:
  1. q_0^* è un nuovo stato iniziale aggiunto
  2. $Q' = Q \cup \{q_0^*\}$
  3. $F' = F \cup \{q_0^*\}$
  4. $\forall q \in Q',\ a \in \Sigma$ si ha che:

$$\delta'(q,a) = \begin{cases} \delta(q,a) & \text{se } q \in Q \setminus F \\ \delta(q,a) & \text{se } q \in F \land a \neq \varepsilon \\ \delta(q,a) \cup \{q_0\} & \text{se } q \in F \land a = \varepsilon \\ \{q_0\} & \text{se } q = q_0^* \land a = \varepsilon \\ \emptyset & \text{se } q = q_0^* \land a \neq \varepsilon \end{cases}$$

- A questo punto, per costruzione stessa di N' ne segue che:
  $w \in L^* \iff w \in L(N')$

Dunque $L^* = L(N') \in REG$ $\square$