INSIEMI, RELAZIONI E FUNZIONI

Insiemi

Un insieme è la collezione di oggetti distinti: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Proprietà basiche degli insiemi

- Intersezione: $A \cap B \to \{x | x \in A \land x \in B\}$
- Unione: $A \cup B \to \{x | x \in A \lor x \in B\}$
- Sottoinsieme: $A \subset B \to \{x \in A \implies x \in B\}$
- Insieme complementare: $A^c_{inB} \to \{x \in B | x \notin A\}$

Proprietà fondamentali degli insiemi

- Associativa:

  $$(A \cap B) \cap C = (C \cap B) \cap A$$

  oppure

  $$(A \cup B) \cup C = (C \cup B) \cup A$$

- De Morgan:

  $$A, B \subseteq C \quad allora \quad \overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

  oppure

  $$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

- Distributiva:

  $$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap B)$$

  oppure

  $$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

  Un insieme associato ad un dato insieme A è l'***insieme delle parti*** di A ed è l'insieme di tutti i possibili sotto-insiemi di A. Si indica con:

  $$\mathcal{P}(A) = \{B | B \subseteq A\}$$

Un ***Prodotto Cartesiano*** è, invece, un insieme di tutte le coppie ordinate, su due insiemi A e B , dove il primo elemento appartiene ad A e il secondo elemento a B.

$$A \times B = \{(a,b)|a \in B, b \in B\}$$

Relazioni

Una relazione ρ da un insieme A ad un insieme B, è un sotto-insieme del prodotto cartesiano $A \times B$.

$$\rho \subset A \times B, \quad se \quad (a,b) \in \rho \quad \text{si scrive} \quad a\rho b$$

Il dominio di tal relazione p è quindi:

$$\mathcal{D}(\rho) = \{a \in A|\exists b \in B\} \quad \text{per il quale risulti} \quad a\rho b$$

La sua immagine ρ risulta essere:

$$Im(\rho) = \{b \in B|\exists a \in A\} \quad \text{per il quale risulti} \quad a\rho b$$

Per una relazione p, se il suo dominio risulta essere tutto A e $\forall a \in A \exists!\, b \in B|a\rho b$ allora tale ρ è una **funzione**.

DEF: se ρ è una relazione da A a B, la relazione inversa ρ^{-1} è la relazione da B ad A da:

$$b\rho^{-1}a \iff a\rho b$$

Relazioni di equivalenza

Una relazione ρ definita su un insieme A, quindi $\rho \subseteq A \times A$, è detta **relazione di equivalenza** se soddisfa i seguenti requisiti :

- ρ è riflessiva, ossia è vero che : $a\rho a \forall a \in A$
- ρ è simmetrica, ossia è vero che se esiste $a\rho b$ allora esiste $b\rho a$
- ρ è transitiva, se esistono $a\rho b$ e $b\rho c$, allora esiste $a\rho a$

Un ***esempio*** di relazione di equivalenza è la relazione di avere la stessa età su un insieme di studenti, difatti soddisfa tutti e 3 i requisiti :

- è riflessiva perchè ognuno ha la stessa età di se stesso.
- è simmetrica perchè se Tizio ha la stessa età di Caio, Caio ha la stessa età di Tizio.
- è transitiva perchè se Tizio ha la stessa età di Caio e Caio ha la stessa età di sempronio, Tizio ha la stessa età di Sempronio.

Un esempio di relazione non di equivalenza è la relazione di genitorialità, ad esempio non è simmetrica, perchè se Tizio è padre di Caio, Caio non è assolutamente padre di Tizio.

Le classi di Equivalenza

Sia ρ una relazione di equivalenza definita su A. Si definisce classe di equivalenza di un elemento $a \in A$, che si denota con $[a]$, l'insieme di tutti gli elementi di A che sono equivalenti (ossia in relazione di equivalenza) ad a:

$$[a] = b \in A | b\rho a$$

Ad ***esempio***, sulla relazione di avere la stessa età, in ogni classe di equivalenza ci sono tutte le persone che hanno la stessa età : ogni classe può essere quindi un etichetta con il numero corrispondente all'età.

Sia A un insieme sulla quale è definita una relazione di equivalenza, l'insieme A/a è detto ***insieme quoziente***, ed è l'insieme che contiene tutte le classi di equivalenza della relazione definita su A.

$$A/a = [a], a \in A$$

Vediamo adesso un importante proprietà delle classi di equivalenza :
Teorema 1: $[a] = [b] \iff a\rho b$
Dimostrazione: Ovviamente $b \in [b]$ perché $b\rho b$.
Essendo $[a] = [b] \implies b \in [a] \implies b\rho a \implies a\rho b$. Analogamente, se $a\rho b$, se esiste $c \in [a] \implies c\rho a \implies c\rho b \implies c \in [b] \implies [a] \subseteq [b]$.
Se esiste $c \in [b] =\Rightarrow c\rho b \implies c\rho a \implies c \in [a] \implies [b] \subseteq [a]$.
Essendo $[b] \subseteq [a]$ e $[a] \subseteq [b]$, necessariamente $[a] = [b]$

Le partizioni

Si dice partizione di un insieme A una *collezione di parti* (o sotto-insiemi A_a) non vuoti di A, tali che l'unione di tutti i sotto-insiemi sia A.

$$\bigcup_{\alpha} A_\alpha = A$$

Ciò significa che $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset \implies A_\alpha = A_\alpha$, in un linguaggio meno formale, tutte le partizioni di un insieme A, non condividono nessun elemento di A.

Proposizione 1: Sia ρ una relazione di equivalenza su A, le classi di equivalenza di ρ sono partizioni di A.

Proposizione 2: Ogni partizione di un insieme A determina su A una relazione di equivalenza, per la quale i sotto insiemi della partizione sono le classi di equivalenza.

Relazioni di ordine parziale

Definizione di **relazione antisimmetrica**: sia ρ una relazione, essa si dice antisimmetrica se è vero che:

$$a\rho b \quad \text{e} \quad b\rho a \implies a = b$$

Detto ciò, possiamo definire una ***relazione di ordine parziale*** se essa è: *Riflessiva*, **Transitiva** e ***Antisimmetrica***.

Teorema: sia ρ una relazione d'ordine parziale su un insieme A, presi $a, b \in A$, diciamo che a è coperto da b e scriveremo $a \preccurlyeq b$.

Ad esempio: prendiamo l'insieme $A = \{1, 2, 3, 5, 6.10, 15, 30\}$, ossia dei numeri naturali che dividono 30. Risulta chiaro come:

- $\mathbf{2! \preccurlyeq 30}$ non è il primo valore che si fa dividere da 2, ci sono valori prima di 30 per il quale 2 è divisore.
- $\mathbf{2! \preccurlyeq 3}$ dato che 2 e 3 non sono nemmeno in relazione.
- $\mathbf{2 \preccurlyeq 6}$ perché 6 è il primo numero che 2 può dividere.

Funzioni

Def: una funzione f da un insieme A ad un insieme B è una legge che associa ad ogni elemento a di A un ben determinato elemento b di B. Si scrive:

$$f : A \to B$$

L'insieme A si chiama *dominio* della funzione f, l'insieme B si dice *codominio* di f e l'elemento $b = f(a)$ si dice **immagine** di a mediante la f.

Sia f una funzione da A a B e siano S e T due sottoinsiemi di A e B rispettivamente.
L'Immagine $f(S)$ di S mediante F è il sottoinsieme:

$$f(S) = \{b \in B | b = f(s) \quad \textbf{per qualche} \quad s \in S\}$$

L'immagine $f(A)$ si dice anche con **Im(f)**

L'**immagine inversa** o controimmagine di T mediante la F è il sottoinsieme:

$$f^{-1}(T) = \{a \in A | f(a) \in T\}$$

Def: una funzione f da A a B si dice **iniettiva** se, per ogni $a, a^{'} \in A$, $f(a) = f(a^{'})$ implica $a = a^{'}$, ossia se elementi distinti di A hanno immagini distinte in B.

- In modo espressivo si può dire che un'applicazione è iniettiva quando frecce che partono da punti distinti non colpiscono mai lo stesso bersaglio.

Def: una funzione f da A a B si dice **suriettiva** se $Imf = B$, ossia se per ogni $b \in B$ esiste un $a \in A$ tale che $f(a) = b$.

- Restando nel linguaggio delle frecce, un'applicazione è suriettiva quando ogni elemento del codominio è colpito da almeno una freccia.

Def: una funzione f da A a B si dice **biiettiva** se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva.

Def: si considerino le due applicazioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$. Si definisce **applicazione composta** di f con g l'applicazione:

$$g \circ f : A \to C \quad \text{data da} \quad (g \circ f)(a) = g(f(a)) \quad \forall a \in A$$

Ogni applicazione biiettiva f da A a B determina quindi una (unica) applicazione da B ad A, che si indica con f^{-1}, e che prende il nome di *applicazione inversa* della f, definita, per ogni $b \in B$

$$f^{-1}(b) = a \quad \text{dove a è quell'unico elemento} \in A \text{ tale che } f(a) = b$$