CARDINALITA' DEGLI INSIEMI

DEF: Si dice che due insiemi A e B hanno la stessa *cardinalità* o sono *equipotenti* se è possibile stabilire tra di essi una corrispondenza biunivoca.

Due *insiemi equipotenti* si indicano con A~B.

DEF: Si definisce cardinalità o **potenza di un insieme** A la classe di equi-potenza a cui A appartiene. Si indica con $Card(A)$.

Nel caso di insiemi finiti la nozione di cardinalità coincide con la nozione di numero di elementi dell'insieme e la cardinalità di $I_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ viene chiamata n.
Quindi, i numeri naturali $0, 1, 2 \ldots$ diventano numeri cardinali (finiti):

- 0 è il numero cardinale dell'insieme vuoto $\emptyset$
- 1 è il numero cardinale $\{\emptyset\}$
- 2 è il numero cardinale di $\{\emptyset\{\emptyset\}\}$
  e così via...

In conclusione i numeri naturali non sono altro che particolari cardinalità. La potenza dell'insieme $\mathbb{N}$ di tutti in numeri naturali prende il nome di N_0 e dicesi la ***potenza del numerabile***.

DEF: Un insieme si dice la potenza *del numerabile* se si può porre in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$.

Il seguente teorema ci offre la possibilità di trovare molti insiemi numerabili.

TEOREMA: l'unione di un numero finito di una infinità numerabile di insiemi numerabili ha la potenza del numerabile.

COROLLARIO: L'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi è numerabile, e così anche $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

DEF: si dice che un insieme A ha cardinalità inferiore o uguale a quella di un insieme B se esiste un'applicazione iniettiva $f : A \to B$. Si scrive allora che

$$Card(A) \leq Card(B)$$

Il problema ora è vedere se esistono cardinalità superiori al numerabile. La risposta è positiva, come ci dice il seguente teorema:
TEOREMA: dato comunque un insieme numerabile A, risulta:

$$Card(A) \leq Card(\mathcal{P}(A))$$

DEF: Dicesi *potenza del continuo* la potenza dell'insieme $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$

Per quanto visto ora, la potenza del continuo è *strettamente maggiore* della potenza del numerabile. Essa coincide con la potenza dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.
La cosiddetta **ipotesi del continuo** afferma che non esistono potenze intermedie tra la potenza del numerabile e quella del continuo.

E' stato provato che l'ipotesi del continuo è indipendente dagli altri postulati sui quali si basa la teoria degli insiemi, il che significa che a partire dagli assiomi ordinari della teoria degli insiemi non si riuscirà né a dimostrare che la congettura è vera né a dimostrare che è falsa. L'insieme delle parti di un insieme che abbia la potenza del continuo è un insieme che ha una potenza strettamente superiore a quella del continuo.

Con successivi passi si possono costruire insiemi di potenza via via crescente. Analogamente l'ipotesi generalizzata del continuo afferma che per ogni insieme $\boldsymbol{X}$ non esistono insiemi di potenza intermedia quella di $\boldsymbol{X}$ e quella di $\mathcal{P}(\boldsymbol{X})$.