Introduzione

Probabilità di un evento

La probabilità di un evento viene indicata da un numero reale e spesso si usa p e per convenzione è sempre un numero tra 0 e 1.

Si parla di Probabilità classica (Uniforme) quando i casi possibili sono un numero finito e la probabilità di un evento è valutata come il numero dei casi favorevoli sul numero dei casi possibili. La **probabilità cambia** con l'informazione che abbiamo a disposizione.

Eventi come insiemi

Ogni evento viene descritto da un sottoinsieme di un insieme Ω, ovvero da un elemento dell'insieme delle parti di esso, che denotiamo come $\mathcal{P}(\Omega)$.
L'insieme $\Omega = \{\omega 1, \ldots, \omega N\}$ rappresenta i **casi possibili** nell'esperimento che ci interessa e viene definito come spazio campione. Un **evento** viene descritto da un sottoinsieme di omega, ossia da un elemento dell'insieme delle parti esso $\mathbf{P(\Omega)}$.

Dati due eventi $E1, E2$ rappresentati da due sottoinsiemi $A1, A2$ di Ω:

- L'evento (E1 ''oppure'' E2) si verifica se e solo se si verifica un evento elementare ωi che appartiene ad almeno uno dei due insiemi A1 o A2, ossia se appartiene all'insieme $A1 \cup A2$
- L'evento (E1 e E2) si verifica se e solo se si verifica un evento elementare ωi che appartiene sia ad A1 che ad A2, ossia ad $A1 \cap A2$.
- L'evento (''negazione'' di E1) si verifica se e solo se si verifica un evento elementare ωi che non appartiene ad A1, ossia che appartiene ad A1, il **complementare di A1**.

$A \subseteq B$ significa che ogni evento elementare che rende verificato A rende verificato anche B e dunque interpretiamo la relazione $A \subseteq B$ come "A implica B".

Ω è un evento vero qualunque evento elementare si verifichi, in quanto esso contiene tutti gli eventi elementari e dunque interpretiamo Ω come **l'evento certo**.

$\emptyset$, l'insieme vuoto, non contenendo alcuno degli eventi elementari possibili, è un evento che non è mai verificato; dunque interpretiamo $\emptyset$ come **l'evento impossibile**.

$A \cup B = \Omega$ significa che l'evento costituito dal verificarsi di almeno uno dei due eventi A o B coincide con l'evento certo Ω; dunque interpretiamo tale condizione come A e B sono *esaustivi* (è certo che se ne verifichi almeno uno dei due).

$A \cap B = \emptyset$ significa che l'evento costituito dal verificarsi di entrambi gli eventi A e B coincide con l'evento impossibile $\emptyset$; dunque interpretiamo la condizione $A \cap B = \emptyset$ come A e B sono *incompatibili* (è certo che se ne verifichi al più uno dei due, ovvero che se ne verifichi al massimo uno dei due).

Consideriamo una collezione di sottoinsiemi dello spazio Ω
$\mathcal{H} = \{H1, \ldots, H_m\}$, con $H_\ell \in \mathcal{P}(\Omega),\ \ell = 1, \ldots, m.$

Tale collezione costituisce una **partizione** di Ω se e solo se
$H_{\ell 1} \cap H_{\ell 2} = \emptyset$ \$ per $\ell 1 \neq \ell 2$ ossia:

$$\bigcup_{\ell=1}^{m} H_\ell = \Omega$$

$H_1, \ldots, H_m$ sono degli eventi e sono a due a due incompatibili (non se ne possono verificare due contemporaneamente), ma sono esaustivi (sicuramente se ne verifica uno). Questo significa che è certo che si verifichi uno ed uno soltanto tra $H_1, \ldots, H_m$.

Gli insiemi/eventi H_l sono detti **elementi della partizione**.

Proprietà basilari delle operazioni booleane su insiemi

- Doppia negazione:

$$\bar{\bar{A}} = A$$

- Proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

  Estensione:

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap C = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap C)$$

- Proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

  Estensione:

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cup C = \bigcup_{i \in I} (A_i \cup C)$$

- Legge di De Morgan:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \text{equivalente ad} \quad A \cap B = \overline{(\bar{A} \cup \bar{B})}$$

  Estensione:

$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i \quad \text{oppure} \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \overline{\bigcup_{i \in I} \bar{A}_i}$$

  Quindi, segare il verificarsi di A e B equivale a richiedere il verificarsi una tra la negazione di A e la negazione di B.

Spazi di probabilità finiti

Uno spazio finito di probabilità è una terna $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ dove:

- Ω è un insieme finito
- $\mathcal{P}(\Omega)$è la famiglia delle parti di Ω
- Pè una misura di probabilità, ossia una probabilità su $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, Ossia è una funzione che soddisfa i seguenti assiomi:
  - $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$
  - $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ **(condizione di normalizzazione)**
  - Per $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ allora $\mathbb{P}(E1 \cup E2) = \mathbb{P}(E1) + \mathbb{P}(E2)$ **(proprietà di additività finita).** Possiamo dire che se E_1 ed E_2 sono eventi incompatibili (non si possono verificare insieme), allora $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2)$ (si verifica almeno uno tra E_1 ed E_2).

L'evento impossibile ha proprietà nulla

Siano $E_1 = E_2$ allora $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ e quindi, per la proprietà di additività finita:

$$\begin{gathered} \mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) \\ \Updownarrow \\ \mathbb{P}(\emptyset \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) \\ \Updownarrow \\ \mathbb{P}(\emptyset) = 2\mathbb{P}(\emptyset) \\ \Updownarrow \\ \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \end{gathered}$$

Proprietà di additività finita

La proprietà iii) di additività si generalizza alla seguente: Siano $E_1, \ldots, E_n \in P(\Omega)$ disgiunti a due a due, ovvero tali che:

$$E_i \cap E_j = \emptyset \quad \text{per} \quad i, j \in \{1, 2, \cdot \cdot \cdot, n\}, \quad \text{con} \quad i \not= j;$$

Allora si ha:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i)$$

- La probabilità dell'unione dei sottoinsiemi di Ω è uguale alla sommatoria delle probabilità dei sottoinsiemi di omega.

La dimostrazione si ottiene facilmente per induzione su n: caso n=3

$$E1 \cap E2 = \emptyset, E1 \cap E3 = \emptyset \text{ e } E2 \cap E3 = \emptyset$$
$$(E1 \cup E2) \cap E3 = (E1 \cap E3) \cup (E3 \cap E3) = \emptyset$$

$$\mathbb{P}(E1 \cup E2 \cup E3) = \mathbb{P}(E1 \cup E2) \cup E3 = \mathbb{P}(E1 \cup E2) + \mathbb{P}(E3) =$$

$$\mathbb{P}(E1) + \mathbb{P}(E2) + \mathbb{P}(E_3)$$

Prime proprietà della probabilità

Proprietà di Base

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B})$$

e

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$$

Proprietà del Complementare

$$\mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - \mathbb{P}(E)$$

Verifica: basta prendere $A = \Omega$ e $B = E$ nella proprietà di base, per cui

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \cap E) + \mathbb{P}(\Omega \cap \bar{E}) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(\bar{E})$$

Facendo un esempio pratico, basta pensare ad 1 come il 100%. Se $\mathbb{P}(E) = 30\%$ allora per ricavare il suo complementare basta fare $100\% - 30\%$ ossia: $1 - \mathbb{P}(E)$ ottenendo il 70%.

Proprietà di Monotonia

Se $A \subseteq B$ allora risulta $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

Verifica: si osserva che se $A \subseteq B$, allora $A \cap B = A$ e quindi, dalla precedente proprietà

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) \geq \mathbb{P}(A)$$

Dove:

- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(\bar{A} \cap B) \geq 0$

Probabilità di B\A

Ricordando che $B \setminus A = B \cap \bar{A}$ sempre dalla proprietà di base si ha

$$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B \cap \bar{A}) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Se inoltre $A \subset B$ allora $A \cap B = A$, e quindi:

$$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$$

Formula di inclusione ed esclusione per due eventi

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Verifica da una parte: $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B) \cup (B \cap A)$
e quindi $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A})$

Dall'altra parte, per la proprietà di base:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \\ \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) - \mathbb{P}(A \cap B) \end{aligned}$$

Proprietà delle partizioni (dell'evento certo)

Sia $\mathcal{H} = \{H1, \ldots, Hn\}$ una partizione, ossia:

$$\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega \qquad H_i \cap H_j = \emptyset \quad \text{per} \quad i \neq j$$

Allora si ha:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i = 1)$$

Verifica:

$$1 = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} H_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i)$$

Dove la prima uguaglianza vale per la proprietà di normalizzazione, e l'ultima per l'additività finita in quanto gli eventi H_i sono incompatibili a due a due.

Un altro modo per definire la *proprietà delle partizioni* si ha avendo $\mathcal{H} = \{H1, \ldots, Hn\}$ una partizione, ossia:

$$\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega \quad H_i \cap H_j = \emptyset \quad \text{per} \quad i \neq j$$

allora per ogni evento E si ha

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i \cap E)$$

Verifica:

$$E = E \cap \Omega = E \cap \bigcup_{i=1}^{n} H_i = \bigcup_{i=1}^{n} (E \cap H_i)$$

per la proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione:

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (E \cap H_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E \cap H_i)$$

per additività finita: gli eventi $E \cap H_i$ sono incompatibili a due a due, in quanto sottoinsiemi di eventi incompatibili a due a due.

Una partizione particolare

In particolare, si può considerare la partizione

$$\mathcal{H} = \{H_i = \{\omega_i\}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, N\}$$

e quindi, posto $p(\omega_i) := \mathbb{P}(\omega_i), \quad i = 1, \ldots, N$ risulta

$$p(\omega_i) \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{N} p(\omega_i) = 1$$

Una probabilità $E \to P(E)$ è una funzione su $P(\Omega)$, l'insieme delle parti di Ω. Se $\Omega = \omega 1, \ldots, \omega N$, allora la cardinalità di Ω e di $P(\Omega)$ valgono:

$$|\Omega| = N \quad |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^N$$

Calcolo di $\mathbb{P}(E)$

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i:\omega\in E} p(\omega_i) = \sum_{\omega\in E} p(\omega)$$

in quanto, se $E = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{i_k}\} = \{\omega_{i_1}\} \cup \{\omega_{i_2}\} \cup \dots \cup \{\omega_{i_k}\}$ e quindi
$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(\{\omega_{i_1}\}) + \mathbb{P}(\{\omega_{i_2}\}) + \dots + \mathbb{P}(\{\omega_{i_k}\}) = p(\omega_{i_1}) + p(\omega_{i_2}) + \dots + p(\omega_{i_k})$

In parole semplici, la probabilità di un evento è la somma della probabilità di tutti i suoi eventi elementari.

Quindi, possiamo ricavarci la probabilità dell'evento partendo dalla probabilità dell'evento elementare.
Abbiamo appena visto che, data $\mathbb{P}$, si ricava la funzione $p : \Omega \to [0, 1]$, definita come $p(\omega) = P(\omega)$, dalla quale a sua volta si può di nuovo ricavare $E \to P(E)$.
Può essere conveniente fare il percorso inverso, ossia, partire da una funzione $\omega \in \Omega \to p(\omega)$ con le proprietà

$$p(\omega_i) \geq 0, i = 1, 2, \dots, N \quad \sum_{i=1}^{N} p(\omega_i) = 1$$

e definire una funzione $\mathbb{P}$ su $\mathcal{P}(\Omega)$).

$$E \to \mathbb{P}(E) = \sum_{i:\omega\in E} p(\omega_i) = \sum_{\omega\in E} p(\omega)$$

E facile convincersi che grazie alle proprietà

$$p(\omega_i) \geq 0, i = 1, 2, \dots, N \quad \sum_{i=1}^{N} p(\omega_i) = 1$$

la funzione

$$E \to \mathbb{P}(E) := \sum_{\omega\in E} p(\omega)$$

è una ***Probabilità*** che soddisfa i tre assiomi.
Le prime due proprietà sono banali, mentre la terza(additività) deriva da: se
$E = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \dots, \omega_{j_k}\} \subset \Omega$ ed $F = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \dots, \omega_{j_k}\}$ e $E \cap F = \emptyset$
allora possiamo dire che:
$P(E \cup F) = \{p(\omega_{j_1}) + p(\omega_{j_2}) + \dots + p(\omega_{j_m})\} + \{p(\omega_{k_1}) + p(\omega_{k_2}) + \dots + p(\omega_{k_r})\}$Che è pari a:

$$\mathbb{P}(E \cup F) = \sum_{h=1}^{m} = p(\omega_{j_h}) + \sum_{\ell=1}^{r} = p(\omega_{k_\ell}) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F)$$

Esempio Pratico

Sia $\Omega = a, b, c, d$ (possiamo pensare $\omega 1 = a, \omega 2 = b, \omega 3 = c, \omega 4 = d$) e siano $p(a) = 1/8, p(b) = 1/4, p(c) = 1/2 p(d) = 1/8$. Chiaramente $p(a), p(b), p(c), p(d) \geq 0$ e $p(a) + p(b) + p(c) + p(d) = 1$.
Allora la probabilità definita sull'insieme delle parti di $\Omega = a, b, c, d$ tramite la formula

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{\omega \in E} = p(\omega)$$

è data dalla funzione che è specificata nella seguente tabella.

$$\begin{aligned}
&\emptyset \to \mathbb{P}(\emptyset) = 0\\
&\{a\} \to \mathbb{P}(\{a\}) = p(a) = 1/8\\
&\{b\} \to \mathbb{P}(\{b\}) = p(b) = 1/4\\
&\{c\} \to \mathbb{P}(\{c\}) = p(c) = 1/2\\
&\{d\} \to \mathbb{P}(\{d\}) = p(d) = 1/8\\
&\{a, b\} \to \mathbb{P}(\{a, b\}) = p(a) + p(b) = 1/8 + 1/4 = 3/8\\
&\{a, c\} \to \mathbb{P}(\{a, c\}) = p(a) + p(c) = 1/8 + 1/2 = 5/8\\
&\{a, d\} \to \mathbb{P}(\{a, d\}) = p(a) + p(d) = 1/8 + 1/8 = 1/4\\
&\{a, b\} \to \mathbb{P}(\{b, c\}) = p(b) + p(c) = 1/4 + 1/2 = 3/4\\
&\{b, d\} \to \mathbb{P}(\{b, d\}) = p(b) + p(d) = 1/4 + 1/8 = 3/8\\
&\{c, d\} \to \mathbb{P}(\{c, d\}) = p(c) + p(d) = 1/2 + 1/8 = 5/8\\
&\{a, b, c\} \to \mathbb{P}(\{a, b, c\}) = p(a) + p(b) + p(c) = 1/8 + 1/4 + 1/2 = 7/8\\
&\{a, b, d\} \to \mathbb{P}(\{a, b, d\}) = p(a) + p(b) + p(d) = 1/8 + 1/4 + 1/8 = 1/2\\
&\{a, c, d\} \to \mathbb{P}(\{a, c, d\}) = p(a) + p(c) + p(d) = 1/8 + 1/2 + 1/8 = 3/4\\
&\{b, c, d\} \to \mathbb{P}(\{b, c, d\}) = p(b) + p(c) + p(d) = 1/4 + 1/2 + 1/8 = 7/8\\
&\{a, b, c, d\} \to \mathbb{P}(\{a, b, c, d\}) =\\
&p(a) + p(b) + p(c) + p(d) = 1/8 + 1/4 + 1/2 + 1/8 = 1
\end{aligned}$$

Come definire una funzione p : Ω → [0, 1]

Sempre nel caso in cui Ω è finito, la funzione può essere definita a meno di un ***fattore di proporzionalità*** , ovvero dati N numeri non negativi (e non tutti nulli) $g(i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, si pone $p(\omega_i)$ proporzionale a $g(i)$:

$$p(\omega_i) \propto g(i) \Leftrightarrow \exists K \quad \text{tale che} \quad \forall i = 1, 2, \ldots, N \quad \text{si ha} \quad p(\omega_i) = K g(i)$$

In tale caso

$$\sum_i = 1^N p(w_i) = 1 \iff \sum_{j=1}^{N} K g(i) = 1 \iff K = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} g(i)}$$

Esempio

Sia $\Omega = a, b, c, d$, ovvero $\omega 1 = a, \omega 2 = b, \omega 3 = c, \omega 4 = d$, e sia $g(1) = 1, g(2) = 2, g(3) = 4, eg(4) = 1$, allora:

$$K = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} g(i)} = K = \frac{1}{1+2+4+1} = \frac{1}{8}$$

e quindi $p(a) = 1/8, p(b) = 1/4, p(c) = 1/2p(d) = 1/8$, come nel precedente esempio.

Spazi di probabilità numerabili

Uno spazio numerabile di probabilità è una terna $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ dove:

- Ω è un insieme numerabile
- $\mathcal{P}(\Omega)$ è la famiglia delle parti di Ω
- $\mathbb{P}$ è una probabilità su $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, ossia:
  - è una funzione che soddisfa i seguenti assiomi
  - $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$
  - $\mathbb{P}(\Omega) = 1($ **condizione di normalizzazione**$)$
  - Se $E_n, n \geq 1$, sono eventi incompatibili a due a due, ossia $Ei \cap Ej = \emptyset$ per ogni $i \neq j$ allora:

$$\mathbb{P} = \left(\bigcup_{n \geq 1} E_n \right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(E_n)$$

Verifica: : la verifica è simile a quella del caso finito.
Sia $c := \mathbb{P}(\emptyset)$ e siano $E_n = \emptyset$, per ogni $n \geq 1$. Gli eventi E_n sono disgiunti a due a due e quindi

$$\mathbb{P} = \underbrace{\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n \right)}_{=\emptyset} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(\underbrace{E_n}_{=\emptyset})$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathbb{P}(\emptyset) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(\emptyset)$$

è una serie a termini costanti (in questo caso tutti uguali a $\mathbb{P}(\emptyset)$) è convergente se e solo se la costante è uguale a zero.

L'additività numerabile implica l'additività finita

in simboli: se $E_1, \ldots, E_n$ sono eventi incompatibili al due a due, ossia:

$$E_i \cap E_j = \emptyset, \quad \text{per ogni} \quad i \neq j, \quad i, j \in 1, 2, \ldots, n$$
$$\text{allora} \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i)$$

Verifica: Poniamo $E_j = \emptyset$ per $j > n$, in modo che $\bigcup_{j>n} E_j = \emptyset$ e quindi:

$$(\bigcup_{i=1} E_i) = (\bigcup_{i=1} E_i) \cup (\bigcup_{j>n} E_j) = \bigcup_{i\geq 1} E_i$$

da cui

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\geq 1} E_i\right)$$
$$= \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(E_i) = \sum_{i\geq 1}^{n} \mathbb{P}(E_i) + \overbrace{\sum_{i\geq n} \mathbb{P}(E_i)}^{=\mathbb{P}(\emptyset)=0} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i)$$

Dove nella seconda uguaglianza si usa l'additività numerabile, in quanto si tratta di una successione di eventi disgiunti a due a due:

- per ogni $icj, i, j \in 1, 2, \ldots, n$, si ha $Ei \cap Ej = \emptyset$, per ipotesi,
- per ogni $i \neq j, i,\ j > n$ si ha $Ei \cap Ej = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$,
- per ogni $i \neq j,\ i \in 1, 2, \ldots, n$ e $j > n$ si ha $Ei \cap Ej = Ei \cap \emptyset = \emptyset$, (e lo stesso vale per $j \in 1, 2, \ldots, n$ e $i > n$)

Proprietà degli spazi numerabili

Grazie al fatto che l'additività numerabile implica l'additività finita, tutte le proprietà che abbiamo visto in precedenza continuano a valere anche negli spazi di probabilità numerabili.

Estensioni a partizioni numerabili

Sia $\mathcal{H} = \{Hn,\ n \geq 1\}$ una partizione numerabile (dell'evento certo), ossia $\bigcup_{i\geq 1} H_i = \Omega$, $H_i \cap H_j = \emptyset$ per $i \neq j$,allora per ogni evento E si ha

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(H_i \cap E)$$

Verifica:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(E \cap \Omega) \\ &= \mathbb{P}\left(E \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(E \cap H_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E \cap H_i)\end{aligned}$$

dove si usa la proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione e l'additività numerabile in quanto gli eventi $E \cap H_i$ sono incompatibili a due a due, in quanto sottoinsiemi di eventi incompatibili a due a due.

AVVERTENZA: Per poter usare gli spazi numerabili bisogna avere un minimo di familiarità con le serie e la convergenza di serie.

- In pratica basta avere familiarità con la **serie esponenziale**: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
- con la serie geometrica, i cui termini sono una progressione: $\sum_{k=0}^{\infty} k!$
- le serie delle sue derivate prime e seconde, ossia: $\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1}$ $\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)x^{k-2}$