Probabilità “classiche (o uniformi)” e calcolo combinatorio

Fare riferimento al cap 3 di APPUNTI-SN.pdf

3.1 Probabilità “classiche (o uniformi) ”

Qui ci soffermiamo a trattare alcuni casi particolari, ma molto rilevanti, di spazi di probabilità finiti. Sia dunque : $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$, e supponiamo che si voglia porre $p(\omega_i) = K$, $\forall \omega_i \in \Omega$ per un’opportuna costante positiva K. Si vuole cioè imporre che tutti i risultati elementari siano, fra di loro, ***equiprobabili***.

Ci riferiremo a tale caso dicendo che si ha una distribuzione di **probabilità uniforme sugli eventi elementari**.

$$p(\omega_i) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{N}, \quad i = 1, \ldots, N \tag{1}$$

e quindi

$$\mathbb{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{|E|}{N}, \quad \forall E \in \mathcal{P}(\Omega) \tag{2}$$

Esempio: L’addetto ad un guardaroba restituisce a caso n ombrelli che gli sono stati consegnati; qual è la probabilità che il secondo cliente abbia indietro il suo proprio ombrello?

Si ha che Ω e costituito dalle permutazioni 4 di n elementi; dunque $|\Omega| = n!$. L’evento $E = \{\text{Il secondo cliente riceve indietro il suo ombrello}\}$ è un evento composto, costituito da tutte le permutazioni che tengono fisso il secondo elemento; tali permutazioni sono in numero di $(n-1)!$, corrispondente al numero delle possibili permutazioni dei restanti $(n-1)$ elementi.

L’espressione “a caso” vuole significare che tutte le permutazioni sono da considerare equiprobabili fra di loro. Dunque

$$\mathbb{P}(E) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Nel caso in cui tutti gli eventi elementari di uno spazio finito sono equiprobabili, la probabilità di un generico evento composto si calcola quale rapporto fra casi favorevoli e casi possibili.

Nel caso in cui si imponga la condizione (1), il calcolo della probabilità di un evento composto E si riduce al problema, combinatorio, di individuare $N = |\Omega|$ e $|E|$.

3.2 Calcolo combinatorio: primi elementi

Le formule che verranno presentate si ricavano facilmente tramite applicazione del *principio di induzione finita*.

Iniziamo innanzitutto ricordando due fatti fondamentali:

- Due insiemi finiti hanno la stessa cardinalità se e solo se fra essi è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca.
- Dati due arbitrari insiemi A e B, si definisce prodotto cartesiano di A per B l'insieme costituito dalle coppie ordinate (a, b) dove $a \in A$ e $b \in B$; indichiamo tale insieme con il simbolo $A \times B$. Nel caso in cui A e B sono insiemi finiti, risulta $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Disposizioni con ripetizione di classe k di n elementi

Una disposizione con ripetizione di classe k degli n elementi di A non e altro che una k-upla ordinata degli elementi stessi n^k.

Disposizioni senza ripetizione di classe k di n elementi e permutazioni di n elementi

Le disposizioni senza ripetizione di classe k degli n elementi sono le k-uple ordinate costituite da elementi di A, tutti diversi fra loro (quindi necessariamente $k \leq n$).

Tali disposizioni costituiscono un sottoinsieme, dell'insieme A^k .

$$D = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Nel caso in cui si ponga $k = n$, si ottengono le permutazioni degli elementi di A. Di conseguenza il numero delle permutazioni di n elementi è $n!$.

Combinazioni di classe k di n elementi

Ci sono diversi modi di darne la definizione. Le combinazioni di classe k di n elementi sono le k-uple non ordinate costituite da elementi di A, tutti diversi fra loro (quindi necessariamente $k \leq n$).
Alternativamente una combinazione di classe k di n elementi si può definire come un sottoinsieme di cardinalità k di un insieme di cardinalità n.

Se C_n^k indica il numero delle **combinazioni** di classe k di n elementi, D_n^k indica il numero delle **disposizioni** senza ripetizione di classe k di n elementi, e P_k indica il numero delle permutazioni di k elementi, e immediato che $C_0^n = C_n^n = 1$, inoltre e facile convincersi che

$$D_n^k = C_n^k * P_k = \frac{1}{k!} * \frac{n!}{(n-k)!}$$

Come usuale si pone

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

3.5 Alcune proprietà dei coefficienti binomiali

Supponiamo di avere la seguente situazione: una segretaria ha n lettere indirizzate a n persone distinte ed n buste con già scritti gli n indirizzi: le cadono tutte le n lettere e quindi mette le n lettere a caso nelle n buste.

- Quanto vale la probabilità $p(n)$ che nessuna lettera sia nella busta corrispondente?
- Quanto vale la probabilità $q(n)$ che ci sia almeno una lettera nella busta corrispondente?

In altre parole, se diciamo che c'è una concordanza quando una lettera viene messa nella busta corrispondente $p(n)$ e la probabilità che non ci siano concordanze, e $q(n)$ e la probabilità che ci sia almeno una concordanza.
La probabilità in (i) e quindi il complemento a 1 della probabilità in (ii), ossia

$$p(n) = 1 - q(n)$$

Possiamo definire come:

$$q(n) = \frac{(n-k)!}{k!}$$
$$p(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$