NUMERI RAZIONALI

Non tutte le equazioni della forma $aX = b$ con $a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$ sono risolubili in $\mathbb{Z}$. Per cui, per renderla risolubile bisogna lavorare in *un insieme più ampio* di quello degli interi. Per questo motivo viene *introdotto* l'insieme $\mathbb{Q}$ dei **numeri razionali**.

L'insieme $\mathbb{Q}$ è l'insieme quoziente di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\cdot}$ modulo una relazione di equivalenza ρ. In particolare:

$$\text{In } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\cdot} \text{ [con } \mathbb{Z}^{\cdot} = \mathbb{Z} - \{0\} \text{] :}$$
$$(a,b)\ \rho\ (c,d) \iff ad = bc, \forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\cdot}$$

Esempio di numeri razionali

$(2,6) \sim (3,9) \iff 2 \cdot 9 = 6 \cdot 3 = 18$
$(8,2) \sim (16,4) \iff 8 \cdot 8 = 2 \cdot 16$

Dimostriamo che questa relazione sia di equivalenza.

- È **riflessiva**: $(a,b)\ \rho\ (a,b) \iff ab = ab$
- È **simmetrica**: $(a,b)\ \rho\ (c,d) \implies (c,d)\ \rho\ (a,b) : cb = ad$ e $ad = cb$ per ipotesi
- È **transitiva**: $(a,b)\ \rho\ (c,d)$ e $(c,d)\ \rho\ (e,f) \implies (a,b)\ \rho\ (e,f)$:

$$\begin{cases} ad = bc \\ cf = de, \end{cases} \implies \begin{cases} adf = bcf \\ bcf = bde \end{cases}$$
$$\implies adf = bde \implies af = be \implies (a,b)\ \rho\ (e,f)$$

L'insieme quoziente $\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\cdot}/\rho$ è detto **insieme dei numeri razionali**. Un numero razionale è quindi *una classe di equivalenza modulo* ρ :

$$[a,b] := [(a,b)]_\rho = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\cdot} : ay = bx\}$$

dove $[a,b]$ è denotato $\dfrac{a}{b}$.

Un'altra denotazione particolare è la seguente:

$$[(a,b)] = [(a,1)] \cdot [(1,b)] = a \cdot b^{-1}$$

La classe $\dfrac{a}{b} := [a,b] \in \mathbb{Q}$ può essere visualizzata nel piano $\mathbb{R}^2$ come **luogo dei punti a coordinate intere** (ma non entrambe nulle) della retta *passante per l'origine* $(0,0)$ e *per il punto* (a,b) (di equazione $bX = aY$).

Le Operazioni

Addizione

La **somma** in $\mathbb{Q}$ è definita come $+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tale che:

$$[(a,b) + (c,d)] = [(ad+bc, bd)], \ \ \forall [a,b],[c,d] \in \mathbb{Z}.$$

Che viene tradotta nel modo come la conosciamo:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \quad \forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}.$$

Esempio di addizione

$$[6,4] + [4,3] = [18+16\ ,\ 12] = [34,12] = [17,6]$$

L'Addizione ha il suo **elemento neutro**, definito come:

$$0 := [(0,1)] = [(0,a)] \quad \forall a \neq 0$$

Inoltre gode delle proprietà **commutativa**, **associativa**, e dotata di **opposto** ($-\frac{a}{b}$ di ogni elemento $\frac{a}{b}$).

Moltiplicazione

Il **prodotto** in $\mathbb{Q}$ è definita come $\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tale che:

$$[(a,b) \cdot (c,d)] = [(ac, bd)], \ \ \forall [a,b],[c,d] \in \mathbb{Z}.$$

Che viene tradotta nel modo come la conosciamo:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad \forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}.$$

Esempio di moltiplicazione

$$[9,4] \cdot [8,3] = [9 \cdot 8\ ,\ 4 \cdot 3] = [34,12] = [17,6]$$

La moltiplicazione ha il suo **elemento neutro**, definito come:

$$1 := [(1,1)] = [(a,a)] \ \ \forall a \neq 0$$

Inoltre gode delle proprietà **commutativa**, **associativa**, **distributiva rispetto alla somma**, e dotata di **inverso** ($\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$ di ogni elemento $\frac{a}{b}$).

Proposizione 1 - le operazioni sono ben definite nei razionali

Queste operazioni sono **ben definite**, ovvero non dipendono dalle scelte dei rappresentanti delle classi, quindi se $[(a,b)] = [(c,d)]$ e $[(a',b')] = [(c',d')]$, si avrà che:

$$[(a,b)] + [(a',b')] = [(c,d)] + [(c',d')] \longrightarrow (ab' + ba') \cdot dd' = bb' \cdot (cd' + dc').$$

Proposizione 2 - $\mathbb{Z}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Z}$ si identifica come un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$, con un'applicazione φ In particolare:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Q} : \quad a \longrightarrow [(a,1)]$$

Dove φ:

- È iniettiva
- $\varphi(a) = [(a,1)]$
- $\varphi(a \underset{\mathbb{Z}}{+} \tilde{a}) = \varphi(a) + \varphi(\tilde{a}) = [(a,1)] + [(\tilde{a},1)] = [(a \cdot 1 + \tilde{a} \cdot 1\ ,\ 1 \cdot 1)]$
  Quindi $\mathbb{Z}$ è in **bigezione** con un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$, ovvero $\{[a,1], a \in \mathbb{Z}\}$, che è un anello.