# SPAZIO VETTORIALE

Sia $V = \{V_1, \dots, V_n\}$ uno spazio vettoriale se:

- $\exists \{e\}$ neutro $\in V \mid \{V\} \cdot \{e\} = \{V\}$
- chiuso rispetto la somma, ossia: $V_i, V_J \in V$ e $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow aV_i + bV_J \in V$

- Vettori sono indipendenti se $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i V_i = 0 \iff \alpha_i = 0$

varia in base allo spazio di riferimento

Ossia, se prendiamo $V = \{V_1, V_2, V_3\}$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$ se $V_1 a + V_2 b + V_3 c = (0, 0, 0)$, ponendo a sistema e ottenendo come risultato $a = 0,\ b = 0,\ c = 0$ possiamo definirli indipendenti.

- Una BASE è quindi un insieme di vettori indipendenti di V.
- Si dice BASE di GENERATORI se $\dim(V) = \dim(B)$, ossia se la dimensione della Base è uguale alla dimensione dello spazio vettoriale

Un'applicazione $f: V \to W$ si dice LINEARE se $f(V_i + V_J) = f(V_i) + f(V_J)$, $V_i, V_J \in V$
$f(V_i \lambda) = \lambda f(V_i)$

## IMMAGINE

Data $f: V \to W$, $\mathrm{Img}(f) = \{ w \in W \mid w = f(v) \} \subseteq W$

Ex: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x, 0)$

$e_1 = (1, 0) : (2, 0)$

$e_2 = (0, 1) : (0, 0)$

$\Rightarrow \mathrm{Img}(f) = \langle (2,0) \rangle$ solo vettori indipendenti

MATRICE ASSOCIATA: $M: (f(V_1), \dots, f(V_k))^t$ ossia è la trasposta di tutti gli elementi $f(v)$.
Bisogna ricordare che nella matrice associata le colonne $= \dim(V)$ data $f: V \to W$
le righe $= \dim(W)$

## KER

Data $f: V \to W$, viene definito nucleo: $\mathrm{Ker}(f) = \{ (v \in V) \mid f(v) = 0_W \} \subseteq V$ ossia è l'insieme degli elementi che mappano all'elemento neutro di W.

RICORDA !!!

→ Se il $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, allora $f$ è INIETTIVA

→ $\mathrm{Dim}(V) = \mathrm{Dim}(\mathrm{Img}) + \mathrm{Dim}(\mathrm{Ker})$

→ Se $\mathrm{Dim}(\mathrm{img}) = \mathrm{Dim}(W) \Rightarrow f$ è SURIETTIVA

DETERMINANTE di una matrice viene utilizzato per:

- verificare se una matrice quadrata A è invertibile $\iff \det(A) \neq 0$
- se $\det(A)$ le righe della matrice sono linearmente indipendenti

Un AUTOVALORE, data $f: V \to W$, è $\lambda \in \mathbb{R} \mid v \in \mathbb{R} \Rightarrow f(v) = W = \lambda v$
per trovare un autovalore si pone $\det(A - \lambda I) = 0$, dove A è la matrice e I la matrice identità.

gli AUTOVETTORI, che si calcolano ponendo $V_{\lambda_i} = (M_L(\mathbb{R}) - \lambda I) \cdot (x_1 \dots x_n) = 0$ servono a diagonalizzare una matrice, ossia rappresentarla in una forma più semplice.

TEOREMA SPETTRALE: sia $L: V \to W$ lineare e $M_L(\mathbb{R}) \in M_n(\mathbb{R})$, se $M_L(\mathbb{R}) = (M_L(\mathbb{R}))^t$ simmetrica e $Mg(\lambda) = Mg(\lambda_1) \Rightarrow$ spazio diagonalizzabile.

MATRICI SIMILI: $A \in M_L(\mathbb{R}) \in M_n(\mathbb{R})$, $A \sim B$ se $\exists C \in M_n(\mathbb{R}) \mid B = C^{-1} A C$

il RANGO di una matrice viene utilizzato per definire quante righe o colonne sono indipendenti. viene calcolato tramite la riduzione a scala, oppure tramite il determinante più grande non nullo della matrice.

TEOREMA ROUCHÈ/CAPELLI: viene utilizzato per verificare se un sistema lineare è compatibile. ossia sia $AX = B$ sistema lineare, se $Rg(A) = Rg(A|B) = r$ allora è compatibile. $S: \infty^{n-r}$

CAMBIAMENTO di BASE: sia V uno spazio vettoriale e $B = (b_1, \dots, b_n)$ e $\bar{B} = (b_1, \dots, b_n)$

$M_{\bar{B}}^{B}$ cambiare la base da B a $\bar{B}$

$\bar{B} = M_{\bar{B}}^{B} B$ e $B = M_{B}^{\bar{B}} \bar{B}$

per calcolare $M_{B}^{\bar{B}}$ :
1. verifichiamo che $\det(M_{\bar{B}}^{B}) \neq 0$
2. calcoliamo la trasposta
3. $\dfrac{(M_{\bar{B}}^{B})^t}{|\det|}$

PRODOTTO TRA MATRICI: la quantità di colonne della matrice A e la quantità di righe della matrice B deve essere uguale

ESEMPIO: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot(-2) & 1\cdot 6 + 2\cdot 0 & 1\cdot 7 + 2\cdot 8 \\ 4\cdot 3 + 5\cdot(-2) & 6\cdot 4 + 5\cdot 0 & 7\cdot 4 + 5\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 23 \\ 2 & 24 & 68 \end{pmatrix}$