Probabilità Condizionate

Fare riferimento al cap 4 di APPUNTI-SN.pdf

FORMULARIO

- ***Probabilità condizionata*** di A dato B:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad (\mathbb{P}(B) > 0)$$

- ***Formula delle probabilità composte***:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)$$

  Generalizzazione: dati n eventi $E1, \dots, E_n$

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) \\ =&\mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2|E_1) \cdot \mathbb{P}(E_3|E_1 \cap E_2) \cdots \\ &\mathbb{P}(E_n|E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{n-1}) \end{aligned}$$

- ***Formula delle probabilità totali***

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(A|\overline{B})$$

  Generalizzazione: data una partizione $\mathcal{H} = H_1, H_2, \dots, H_m$

$$\mathbb{P}(H_j) > 0, \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A|H_j)$$

- ***Formula di Bayes*** o delle probabilità inverse:

$$P(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(A)}$$

  Generalizzazione: data una partizione $\mathcal{H} = H_1, H_2, \dots, H_m$, con $P(H_j) > 0$,

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i)}{\sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A|H_j)}$$

Definizione (Probabilità condizionata)

Siano E ed H due eventi, con $P(H) > 0$. Viene detta probabilità condizionata di E dato H, ed indicata con il simbolo $P(E|H)$, la quantità:

$$P(E|H) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)}$$

Esempio con le carte napoletane

Supponiamo di estrarre una carta da un mazzo di carte napoletane composto da 40 carte, con 10 carte per ogni seme (denari, coppe, bastoni, spade).

Se l'evento (Ab) rappresenta l'Asso di bastoni, la probabilità di estrarlo dal mazzo è:

$$P(Ab) = \frac{1}{40}$$

Similmente, la probabilità di estrarre l'Asso di denari è:

$$P(Ad) = \frac{1}{40}$$

Supponiamo ora di sapere che la carta estratta appartiene al seme di bastoni. La probabilità che la carta sia l'Asso di bastoni diventa:

$$P_B(Ab) = \frac{1}{10}$$

La probabilità che la carta sia l'Asso di denari diventa invece:

$$P_B(Ad) = 0$$

Verifica della formula della probabilità condizionata

Verifichiamo che la formula per la probabilità condizionata sia coerente:

$$P_B(Ab) = P(Ab|B) = \frac{P(Ab \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{10}{40}} = \frac{1}{10}$$

Allo stesso modo:

$$P_B(Ad) = P(Ad|B) = \frac{P(Ad \cap B)}{P(B)} = 0$$

Probabilità composte per due eventi

Se $P(H) > 0$, allora:

$$P(E \cap H) = P(H) \cdot P(E|H)$$

Questa formula si usa quando è più facile o conveniente calcolare separatamente $P(H)$ e $P(E|H)$ rispetto a $P(E \cap H)$.

Esempio: Urne con palline

Una prima urna contiene 3 palline bianche e 4 rosse, una seconda urna contiene 2 palline bianche e 5 rosse. Si sceglie una delle due urne con probabilità $p_1 = \frac{1}{3}$ per la prima urna e $p_2 = \frac{2}{3}$ per la seconda urna. Successivamente si estrae una pallina dall'urna scelta.

Calcolo della probabilità

La probabilità che venga scelta la prima urna e si estragga una pallina bianca è:

$$P(H_1 \cap B) = P(H_1) \cdot P(B|H_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$$

Analogamente, per la seconda urna:

$$P(H_2 \cap B) = P(H_2) \cdot P(B|H_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{21}$$

Formula delle probabilità totali

Supponiamo di conoscere $P(H)$, la probabilità a priori di H, e $P(E|H)$, la verosimiglianza di E dato H. Allora:

$$P(E) = P(H)P(E|H) + P(\bar{H})P(E|\bar{H})$$

Esempio: Estrazione da un'urna con composizione incognita

Abbiamo due urne, la prima con 3 palline bianche e 4 rosse, la seconda con 2 palline bianche e 5 rosse. La probabilità che venga scelta la prima urna è $p_1 = \frac{1}{3}$ e la seconda $p_2 = \frac{2}{3}$.

Sapendo che la pallina estratta è bianca, calcoliamo la probabilità che sia stata scelta la prima urna.

Soluzione

Posto:

$$B = \{\text{viene estratta una pallina bianca}\}$$

$$H_1 = \{\text{viene scelta l'urna 1}\}, H_2 = \{\text{viene scelta l'urna 2}\}$$

Si ha:

$$P(B|H_1) = \frac{3}{7}, \quad P(B|H_2) = \frac{2}{7}$$

Utilizzando la formula di Bayes:

$$P(H_1|B) = \frac{P(H_1)P(B|H_1)}{P(H_1)P(B|H_1) + P(H_2)P(B|H_2)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7}} = \frac{3}{7}$$

Analogamente:

$$P(H_2|B) = 1 - P(H_1|B) = \frac{4}{7}$$

Formula di Bayes per partizioni

Per una partizione finita $H = \{H_1, H_2, \ldots, H_m\}$ con $P(H_i) > 0$, per ogni evento E con $P(E) > 0$:

$$P(H_j|E) = \frac{P(H_j)P(E|H_j)}{\sum_{i=1}^{m} P(H_i)P(E|H_i)}$$

Test medici ed errori

Consideriamo un test medico con i seguenti eventi:

- $ H : essere malato
- $\overline{H}$: non essere malato
- E^+ : test positivo
- E^-: test negativo

Un falso negativo è l'evento $E^- \cap H$, un vero negativo è $E^- \cap \overline{H}$, un falso positivo è $E^+ \cap \bar{H}$, e un vero positivo è $E^+ \cap H$.

Le probabilità a priori di falsi negativi e falsi positivi sono importanti, ma è altrettanto importante conoscere la probabilità di errore condizionata al risultato del test. Ad esempio, la probabilità condizionata di essere malati dato un risultato negativo:

$$P(H|E^-)$$

Allo stesso modo, è importante che la probabilità condizionata di non essere malati dato un risultato positivo sia bassa:

$$P(\bar{H}|E^+)$$

Generalizzazioni: Probabilità composte per n eventi

Per n eventi:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) = & P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) \cdot P(E_3|E_1 \cap E_2) \cdot \cdots \cdot \\ & P(E_n|E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{n-1}) \end{aligned}$$

Generalizzazioni: Formula delle probabilità totali per partizioni numerabili

Per una partizione numerabile $H = \{H_n, n \geq 1\}$, la probabilità totale è:

$$P(E) = \sum_{n=1}^{\infty} P(H_n)P(E|H_n)$$

Formula di Bayes per partizioni numerabili

Per una partizione numerabile $\mathcal{H} = \{H_n, n \geq 1\}$. Per ogni $j \geq 1$ e per ogni evento E con $P(E) > 0$ si ha la probabilità condizionata è:

$$P(H_j|E) = \frac{P(H_j)P(E|H_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(E|H_i)}$$