Logica e Formalismo matematico

1. Scrivere le negazioni delle seguenti proposizioni. Tradurle in simboli utilizzando il formalismo matematico.

    - Sia $f : X \to Y$ una mappa. Per ogni $x \in X$ esiste $y \in X$ tale che $f(x) \neq f(y)$.
    - Se esiste $a \in A$ allora esiste $b \in B$ tale che la proprietà $P(b)$ è soddisfatta.

    Soluzione:

    - Possiamo scrivere la prima in termini matematici come:

      ∀x∈X,∃y∈X \quad \text{ tale che } \quad f(x) \ne f(y)

      La sua negazione sarà:

      ¬(∀x∈X,∃y∈X | f(x) \ne f(y))

      ossia:

      ∃x∈X | ∀y∈X,f(x)=f(y).

    - Formalmente possiamo riscriverla come:

      (∃a∈A)⟶(∃b∈B | P(b))

      Ricordiamo che: $P \to Q$ è $P \wedge \neg Q$, negando viene:

      $$\begin{aligned} &\neg((\exists a \in A) \to (\exists b \in B && nbsp; | nbsp; P(b))) \\ &= (\exists a \in A) \wedge \neg(\exists b \in B && nbsp; | nbsp; P(b)) \\ &= (\exists a \in A) \wedge (\forall b \in B, \neg P(b)) \end{aligned}$$

      Quindi, la negazione dice che esiste un $a \in A$, ma per ogni $b \in B$, la proprietà $P(b)$ non è soddisfatta.

2. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Qual è la differenza tra le frasi:

    - Per ogni $n \in N$ esiste una costante $M \in N$ tale the $f(n) \geq M$.
    - Esiste una costante $M \in N$ tale che $f(n) \geq M$ per ogni $n \in N$.

    Soluzione:

    - $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists M \in \mathbb{N} : f(n) \geq M$
    - $\exists M \in \mathbb{N} : f(n) \geq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Insiemi, Relazioni, e Mappe

3. Mostrare le seguenti proprietà delle operazioni tra insiemi

    - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
    - $(A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C)$.

    Soluzione:
    - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
      $x \in A \cap (B \cup C) \iff x \in A, A \cup C$ e $x \in A$ e uno tra A e B.
      $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \iff x \in (A \cap B)$ oppure $(A \cap C)$.
    - $(A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C)$
      Ricordiamo che $A - b = x \in A, x \notin B$
      $x \in (A - B) \cap C \iff x \in C, x \in A, x \notin B$
      $x \in (A \cap C) - (B \cap B) \iff x \in (A \cap C)$ e $x \notin (B \cap C)$
4. Dare un esempio di due mappe non costanti f, g tale che $g \circ f$ è costante.

    Soluzione: non svolto
5. Mostrare che la relazione tra i sottoinsiemi di un determinato insieme universo U data da $A \sim B$ se esiste $f : A \to B$ biiettiva è una relazione di equivalenza.

    Soluzione:
    - *Riflessività:* $A \sim B$? Si: mappa identità $f : A \in A$ ossia $a \in f(a) = a$ (funzione identità)
    - *Simmetria:* se $A \sim B \implies B \sim A$? Si:$existsg : B \in A|$ g è biiettiva, dunque $B \sim A$
    - *Transitività:* $A \sim B$ e $B \sim C \implies A \sim C$. $A \to B \to C \implies f : g^{\circ} f : A \to C$
6. Sia X un insieme con almeno 3 elementi. Mostrare che esistono $f, g : X \to X$ biiettive tali che $f \circ g \neq g \circ f$.

    Soluzione: non svolto

Aritmetica: N

7. Sia $(N, 0, \sigma)$ una terna di Peano. Siano $+$, $*$ le operazioni di somma e prodotto introdotte a lezione. Ricordo che:

    - Somma:

$$\begin{cases} n + 0 := n & \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \\ n + \sigma(m) := \sigma(n + m) & \text{per ricorsione} \end{cases}$$

- Prodotto

$$\begin{cases} n \cdot 0 := 0 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \\ n \cdot \sigma(m) := n \cdot m + n \quad \text{per ricorsione} \end{cases}$$

- Mostrare che:
  - $+$ è commutativa. **Hint 1**: *(1)* Mostrare per induzione che $n + \sigma(0) = \sigma(0) + n$ per ogni $n \in N$. *(2)* Mostrare per induzione su m che $n + m = m + n$. **Hint 2**: Il passo induttivo consiste nel mostrare che $n + \sigma(m) = \sigma(m) + n$ sapendo che $n + m = m + n$. Dopo aver osservato che per definizione $n + \sigma(m) = n + (m + \sigma(0))$ possiamo concludere usando l'associatività di $+$ e il passo (1).

```
- $(a + b) · c = a · c + b · c$ per ogni $a, b, c$. **Hint 1**: Procedere per
induzione su c e usare associatività e commutatività di $+$ nel passo
induttivo. **Hint 2**: motivare tutti i passaggi di $(a+b)·σ(c)$$= (a+b)·c+
(a+b) = (a·c+b·c)+(a+b)$ $= (a·c+a)+(b·c+b).$

- * è commutatività. **Hint 1**: Come primo passo mostrare per induzione che
$n·σ(0) = σ(0)·n$ per ogni $n$. **Hint 2**: mostriamo che $n · m = m · n$ per
induzione su $m$. Nel passo induttivo motivare i seguenti passaggi n·σ(m) =
$n·m+n = m · n + n = m · n + σ(0) · n = (m + σ(0)) · n = σ(m) · n.$
```

Soluzione:
Proprietà commutativa del +
Come primo passaggio andiamo a dimostrare che: $n + 1 = 1 + n$ ossia
$n + \sigma(0) = \sigma(0) + n$

- **Caso Base (n=0):** come prima cosa sviluppiamo la *parte a sinistra* dell'uguaglianza. Si è stabilito in precedenza che $a + \sigma(b) = \sigma(a + b)$ quindi $0 + \sigma(0) = \sigma(0 + 0) = \sigma(0) = 1$. Ora sviluppiamo la *parte di destra* sapendo la definizione di somma, ossia $a + 0 = a$ quindi $\sigma(0) + 0 = \sigma(0) = 1$.
  Ricordiamo inoltre che $\sigma(0) + a = \sigma(a)$
- **Passo induttivo:** assumiamo che $n + \sigma(0) = \sigma(0) + n \; \forall n$, ora lo dimostriamo per $n + 1$. Ossia:

$$\begin{gathered} (n+1) + \sigma(0) = \sigma(0) + (n+1) \implies \\ \sigma(n) + \sigma(0) = \sigma(0) + \sigma(n) \\ \sigma(\sigma(n) + 0) = \sigma(\sigma(0) + n) \\ \sigma(\sigma(n)) = \sigma(\sigma(n)) \end{gathered}$$

Abbiamo, quindi, dimostrato che $n + 1 = 1 + n$.

Ora dimostriamo che $a + b = b + a$.

- **Caso Base (a=0):** quindi $0 + b = b + 0 \implies b = b$
- **Passo Induttivo:**

$$\begin{aligned}
\sigma(a) + b = \\
&= (a+1) + b \\
&= a + (1 + b) \\
&= a + (b + 1) \\
&= (a + b) + 1 \\
&= (b + a) + 1 \\
&= b + (a + 1) \\
&= b + \sigma(a)
\end{aligned}$$

Proprietà Associativa del + ossia $(a + b) + c = a + (b + c)$

- **Caso Base (a=0):** $(0 + b) + c = 0(b + c) \implies b + c = b + c$
- **Passo Induttivo:**

$$\begin{aligned}
(\sigma(a) + b) + c &= \sigma(a) + (b + c) \\
\sigma(a + b) + c &= \sigma(a + (b + c)) \\
\sigma((a + b) + c) &= \sigma(a + (b + c)) \\
\sigma(a + (b + c)) &= \sigma(a + (b + c))
\end{aligned}$$

(a + b) · c = a · c + b · c
non svolto

(moltiplicazione) è commutatività
Verifichiamo quindi che $a * b = b * a$

- **Caso Base:** $(a = 0)$: $0 * b = b * 0 \implies 0 = 0$
- **Passo induttivo:**

$$\begin{aligned}
(a + 1) * b &= b * (a + 1) \\
(a * b) + b &= (b * a) + b
\end{aligned}$$

Per ipotesi induttiva sappiamo che $a * b = b * a$ e quindi:

$$\begin{aligned}
(a + 1) * b &= \\
a * b + b &= \\
b * a + b &= \\
b * (a + 1)&
\end{aligned}$$

Combinatoria

8. Siano X, Y insiemi finiti con n, m elementi rispettivamente. Calcolare come funzione di n, m:

   - Il numero di funzioni $f : X \to Y$.

- Il numero di funzioni iniettive $f : X \to Y$.
- Il numero di funzioni suriettive $f : X \to Y$

Soluzione: non svolto

9. Mostrare che il numero di sottoinsiemi di un insieme con n elementi è 2^n.

Soluzione: non svolto

10. Mostrare che per ogni n vale $1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Soluzione: non svolto