I NUMERI NATURALI E IL PRINCIPIO DI INDUZIONE

La terna di Peano

Sia $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ l'insieme dei numeri naturali. Attraverso i *postulati di Peano* andremo a definire $\mathbb{N}$.

La definizione formale di $\mathbb{N}$ è la seguente:

Terna di Peano

L'insieme dei numeri naturali è costituito da una terna $(\mathbb{N}, 0, \sigma)$ dove:

1. $\mathbb{N}$ è un insieme non vuoto;
2. 0 è un elemento di $\mathbb{N}$;
3. $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è un'applicazione verificante i tre assiomi, detti *assiomi di Peano:*
   - (P_1) σ è iniettiva;
   - (P_2) $0 \notin Im(\sigma)$;
   - (P_3) Per ogni $U \subseteq \mathbb{N}$ tale che $f(x) = \begin{cases} (a) & 0 \in U, \\ (b) & \sigma(U) \in U, \end{cases}$ risulta $U = \mathbb{N}$.

   L'applicazione σ è detta *applicazione del successivo*, per cui dato un elemento $n \in \mathbb{N}$, l'elemento $\sigma(n)$ viene definito *successivo* di n. Il terzo assioma di Peano (P_3) è detto principio di **induzione matematica**.

Si può dimostrare che se $(\mathbb{A}, 0, \sigma)$ e $(\mathbb{A}', 0', \sigma')$ sono due terne che verificano i postulati precedenti, allora sono *sostanzialmente identiche*. Per cui, se una tale terna di Peano $P = (\mathbb{N}, 0, \sigma)$ esiste ed è unica, è detta **insieme dei numeri naturali**.

Ciò che si deve **postulare** (accettare senza dimostrazione) è l'esistenza di un insieme $\mathbb{N}$ verificante gli assiomi di Peano.

Le Operazioni

Viene definita **operazione binaria** in un insieme S un'applicazione da $S \times S$ in S, ossia una legge che associa *ad ogni coppia di elementi di S un ben determinato elemento di S*.

Esempio di operazione binaria:

L'unione tra sottoinsiemi di un insieme X è un'*operazione binaria* definita in $\mathcal{P}(X)$:

$$\begin{aligned} U : \mathcal{P}(x) \times \mathcal{P}(x) &\longrightarrow \mathcal{P}(x) \\ (A, B) &\longmapsto A \cup B \end{aligned}$$

Anche l'addizione tra interi è un'operazione binaria, definita in $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (a, b) &\longmapsto a + b \end{aligned}$$

Il risultato dell'operazione di addizione, ossia l'elemento $a + b \in \mathbb{Z}$, prende il nome di somma di a e b.

Somma

Si definisce **somma** di due numeri naturali n e m il numero naturale $n + m$ dove

$$n + m \overset{def}{=} \begin{cases} \underbrace{\sigma(\sigma(\dots\sigma(x)))}_{\text{m volte}} & \text{se } m > 0 \\ n & \text{se } m = 0 \end{cases}$$

Da questa definizione risulta $\sigma(n) = n + 1$ dove $1 = \sigma(0)$.

- (i) $0 + b = b$
- (ii) $\sigma(a) + b = \sigma(a + b)$

Prodotto

Si definisce **prodotto** di due numeri naturali n e m il numero naturale $n \cdot m$ dove

$$n + m \overset{def}{=} \begin{cases} \underbrace{n + n + \dots + n}_{\text{m volte}} & \text{se } m > 0 \\ 0 & \text{se } m = 0 \end{cases}$$

Tali operazioni verificano tutte le proprietà dell'aritmetica che si studiano alle scuole elementari (commutatività, associatività di addizione e moltiplicazione, distributività, esistenza di un elemento neutro rispetto, etc.)

- (i) $0 \cdot b = 0 \quad \forall b \in \mathbb{N}$
- (ii) $\sigma(a) \cdot b = (a + 1) \cdot b = a \cdot b + b$

Induzione

Il principio di induzione matematica afferma che se una proprietà P vale per 0 e se si può dimostrare che, ammesso che valga per il numero n, vale anche per $n+1$, allora P vale per qualunque numero n. Insiemisticamente valgono 2 proprietà:

- (i) $1 \in X$
- (ii) Per un generico $n \geq 1:$ se $n \in X$ allora $n+1 \in X$.

Allora è legittimo concludere che $\mathbb{N} \subseteq X$, ossia che X contiene tutti i numeri naturali.

Esempio

Proviamo a verificare che, $\forall n \geq 1:$

$$1+2+3+\ldots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

- Verifichiamo quindi il caso **base** p_1, ossia $n=1$

$$1=\frac{1(1+1)}{2}=\frac{2}{2} \quad \triangle$$

che risulta essere vero
• A questo punto, assumiamo per **ipotesi induttiva** che p_n sia vera.
• Impostiamo quindi il **passo induttivo**, ossia $p_{n+1}:$

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)\cdot(n+1+1)}{2}$$

• Notiamo come il passo induttivo contenga al suo interno *l'ipotesi induttiva stessa*, che abbiamo affermato **essere vera:**

$$\begin{aligned}
\underbrace{1+2+3+\ldots+n}_{\text{Ipotesi induttiva}}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+1+1)}{2} &\iff \\
\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2} &\iff \\
\frac{n(n+1)+2(n+2)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2} &\iff \\
\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2} &\quad \square
\end{aligned}$$

Anche il passo induttivo risulta essere vero, concludendo che la proposizione p_n sia valida $\forall n \geq 1$.

Un teorema equivalente a quello dell'induzione è il *principio del buon ordinamento*.

Principio del Buon Ordinamento

Il **principio del buon ordinamento** (o principio del valore minimo) afferma che ogni sottoinsieme non vuoto $T \subset \mathbb{N}$ contiene un elemento minimo, cioè esiste un elemento $t \in T | t \leq x \quad \forall x \in T$.

Dimostrazione

Consideriamo un insieme $X \subseteq \mathbb{N}$ che soddisfa le due proprietà: $(i) : 1 \in X$ e (ii) : per un generico $n \geq 1$, se $n \in X$ allora $n + 1 \in X$.

Supponiamo per assurdo che non valga la conclusione del Principio di Induzione, ossia supponiamo che non è vero che $\mathbb{N} \subseteq X$. Dunque l'insieme $A = (\mathbb{N} \setminus X)$ è un sottoinsieme non-vuoto di $\mathbb{N}$.

Per il Principio del Minimo Numero A contiene un minimo. Sia m il minimo di A. Si osserva che m non può essere 1, dato che $1 \in X$ e $m \notin X$. Dunque $m > 1$ e pertanto $m - 1 \geq 1$ (ossia è ancora un numero naturale). Inoltre dato che m è scelto come il minimo in $\mathbb{N}$ ma non in X, necessariamente $m - 1 \in X$.

Ma X soddisfa la proprietà (ii) e dunque se $m - 1 \in X$ allora $m \in X$. Abbiamo raggiunto una contraddizione: $m \in X$ e $m \notin X$.

Ricorsione

In una relazione ricorsiva il termine n-esimo dipenderà da un certo numero r di termini precedenti e da una funzione nota di n.

Anche se una relazione ricorsiva ci permette di trovare il valore del termine n-esimo a_n per ogni n, tuttavia è importante trovare una soluzione per una relazione ricorsiva, o una formula chiusa che esprima direttamente a_n in termini di un numero di operazioni ben note in n e non in termini dei precedenti elementi della successione.