

3.6.1 Спектральный анализ электрических сигналов.

Александр Романов Б01-107

1 Введение

1.1 Цель работы

Изучить спектральный состав периодических электрических сигналов.

1.2 В работе используются

Анализатор спектра, генератор прямоугольных импульсов и сигналов специальной формы, осциллограф.

1.3 Идеи

1.3.1 Разложение сложных сигналов в ряд Фурье

При изучении линейных систем возникает необходимость представления произвольного сигнала $f(t)$ в виде ряда Фурье:

$$f(t) = \sum_n c_n e^{i\omega_n t}$$

Получим коэффициенты разложения в ряд Фурье для периодического колебательного процесса общего вида $f(t) = f(t + T)$, где T - период процесса. Покажем, что в этом случае функция $f(t)$ может быть представлена бесконечной суммой гармонических колебаний с кратными частотами:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad (1)$$

Нетрудно видеть, что все слагаемые в этой сумме – периодические функции с периодом, кратным T и они полностью исчерпывают набор гармонических функций, удовлетворяющих $f(t) = f(t+T)$. Таким образом периодическая функция имеет дискретный спектр с кратными частотами. Спектр – то есть набор коэффициентов $\{c_n\}$ – можно найти следующим образом: домножим обе части равенства (1) на $e^{-im\omega_0 t}$ и проинтегрируем по времени t за период (Например, от 0 до T). Получим

$$\int_0^T f(t) e^{-im\omega_0 t} dt \sum_n c_n \int_0^T e^{i(n-m)\omega_0 t} dt$$

Вычислим интеграл в правой части:

$$\int_0^T e^{i(n-m)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq m \\ T & \text{if } n = m \end{cases}$$

Таким образом получаем

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega_0 t} dt. \quad (2)$$

1.3.2 Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

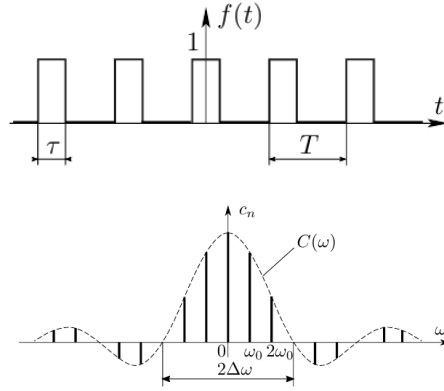


Рис. 1: Периодическая последовательность прямоугольных импульсов и её спектр (Для $\tau = \frac{T}{3}$).

Рассмотрим сигнал на рис 1 и найдём его спектр. Используя (2) на интервале интегрирования $-T/2 \leq t \leq T/2$, с учётом того, что функция $f(t)$ отлична от нуля только лишь в области $|t| < \tau/2$ находим

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2} = \frac{\sin(\pi n\tau/T)}{\pi n} \quad (3)$$

Пунктиром изображена огибающая кривая

$$C(\omega) = \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2}$$

Полуширина $\Delta\omega$ главного максимума этой функции определяется условием $\sin \omega\tau/2 = 0$:

$$\Delta\omega \cdot \tau = 2\pi$$

1.3.3 Периодическая последовательность цугов гармонических колебаний

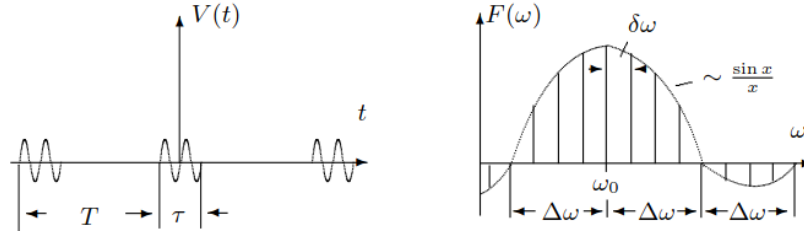


Рис. 2: Периодическая последовательность синусоидальных цугов и её спектр. (Здесь $T/\tau = 4$)

Рассмотрим сигнал на рис 2. Это - цуги колебания $V_0 \sin \omega_0 t$. Из (2) найдём c_n и для них:

$$c_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1 t) dt =$$

$$= V_0 \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} \right) \quad (4)$$

Тогда Спектры последовательности идентичны прямоугольным импульсам, но сдвинуты на ω_0 .

1.3.4 Амплитудно-модулированные колебания

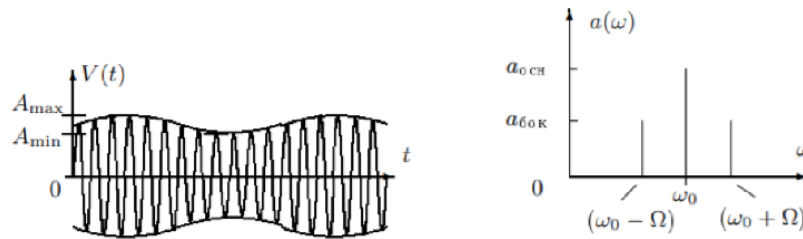


Рис. 3: Амплитудно-модулированный сигнал и его спектр.

Рассмотрим рис. 3 гармонические колебания высокой частоты ω_0 , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой $\Omega \ll \omega$.

$$s(t) = A_0 [1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_0 t$$

Коэффициент m называется *глубиной модуляции*. При $m < 1$ амплитуда меняется от минимальной $A_{min} = A_0(1 - m)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1 + m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}.$$

Легко переписать уравнение сигнала как:

$$f(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{A_0 m}{2} \cos (\omega_0 + \Omega) t + \frac{A_0 m}{2} \cos (\omega_0 - \Omega) t. \quad (5)$$

Спектр таких колебаний содержит 3 составляющие. Основная компонента представляет собой исходное немодулированное с несущей частотой ω_0 и амплитудой $A_{cen} = A_0$ – первое слагаемое в (5); Боковые компоненты спектра соответствуют гармоническим колебания с частотами $(\omega_0 + \Omega)$ и $(\omega_0 - \Omega)$ – второе и третье слагаемые (5). Амплитуды этих колебаний одинаковы и составляют $m/2$ от амплитуды немодулированного колебания $A_{side} = A_0 m/2$

1.3.5 Соотношения неопределённости

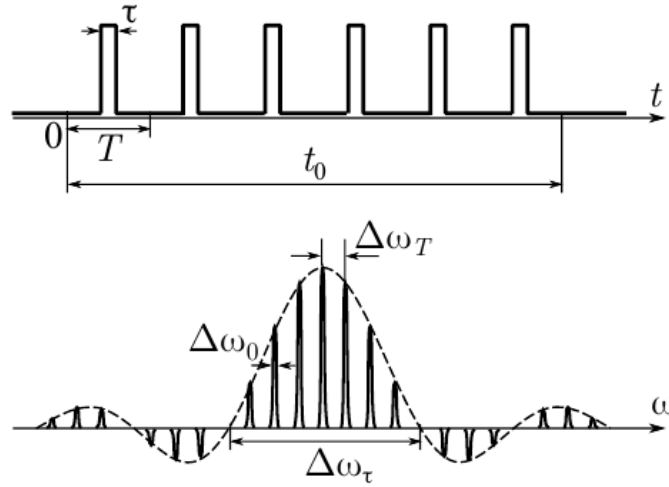


Рис. 4: Связь характерных масштабов спектра с характерными временами сигнала.

При рассмотрении примеров мы получили соотношение, связывающее между собой длительность Δt сигнала с шириной $\Delta\omega$ его спектра:

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \sim 2\pi \quad (6)$$

Оказывается, это соотношение имеет весьма универсальный характер. Оно остаётся справедливым по порядку величины для произвольного сигнала $f(t)$. Например, рассмотрим ограниченную последовательность периодических импульсов с полной длительностью t_0 , периодом $T \ll t_0$ и длительностью каждого импульса $\tau \ll T$. Сигнал и его спектр представлены на рис. 4. На спектре видно три характерных масштаба частоты: масштаб $\Delta\omega\tau = 2\pi/\tau$ – это характерная ширина спектра, масштаб $\Delta\omega T = 2\pi/T$ – расстояние между соседними спектральными пиками, и наконец наименьший масштаб частоты, соответствующий наибольшему характерному времени t_0 , определяет ширину каждого пика $\Delta\omega_0 = 2\pi/t_0$.

2 Работа

2.1 Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

Устанавливаем на генераторе прямоугольные импульсы с $\nu_{rep} = 1kHz$ и длительностью импульса $\tau = 100\mu S$. Получаем на экране спектр сигнала и, изменяя поочереди τ и ν_{rep} будем наблюдать как изменяется спектр.

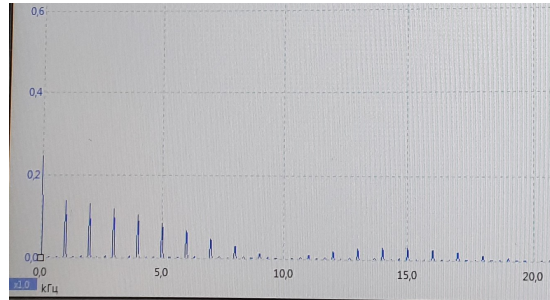


Рис. 5: Спектр при $\nu_{rep} = 1kHz$, $\tau = 100\mu S$

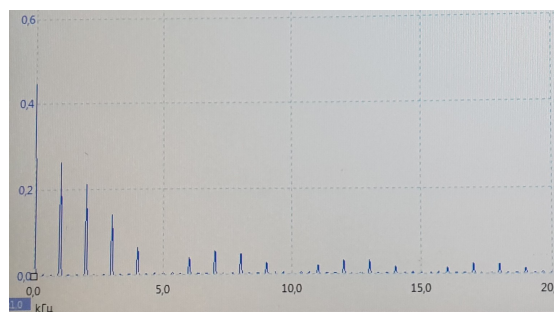


Рис. 6: Спектр при $\nu_{rep} = 1kHz$, $\tau = 200\mu S$

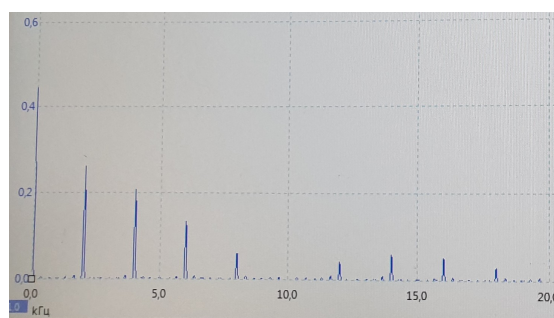


Рис. 7: Спектр при $\nu_{rep} = 2kHz$, $\tau = 100\mu S$

3 Выводы