

3.6.1 Спектральный анализ электрических сигналов.

Александр Романов Б01-107

1 Введение

1.1 Цель работы

Изучить спектральный состав периодических электрических сигналов.

1.2 В работе используются

Анализатор спектра, генератор прямоугольных импульсов и сигналов специальной формы, осциллограф.

1.3 Идеи

1.3.1 Разложение сложных сигналов в ряд Фурье

При изучении линейных систем возникает необходимость представления произвольного сигнала $f(t)$ в виде ряда Фурье:

$$f(t) = \sum_n c_n e^{i\omega_n t}$$

Получим коэффициенты разложения в ряд Фурье для периодического колебательного процесса общего вида $f(t) = f(t + T)$, где T - период процесса. Покажем, что этом случае функция $f(t)$ может быть представлена бесконечной суммой гармонических колебаний с кратными частотами:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad (1)$$

Нетрудно видеть, что все слагаемые в этой сумме – периодические функции с периодом, кратным T и они полностью исчерпывают набор гармонических функций, удовлетворяющих $f(t) = f(t+T)$. Таким образом периодическая функция имеет дискретный спектр с кратными частотами. Спектр – то есть набор коэффициентов $\{c_n\}$ – можно найти следующим образом: домножим обе части равенства (1) на $e^{-im\omega_0 t}$ и проинтегрируем по времени t за период (Например, от 0 до T). Получим

$$\int_0^T f(t) e^{-im\omega_0 t} dt \sum_n c_n \int_0^T e^{i(n-m)\omega_0 t} dt$$

Вычислим интеграл в правой части:

$$\int_0^T e^{i(n-m)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq m \\ T & \text{if } n = m \end{cases}$$

Таким образом получаем

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega_0 t} dt. \quad (2)$$

1.3.2 Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

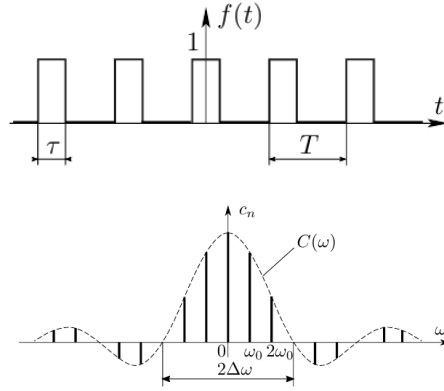


Рис. 1: Периодическая последовательность прямоугольных импульсов и её спектр (Для $\tau = \frac{T}{3}$).

Рассмотрим сигнал на рис 1 и найдём его спектр. Используя (2) на интервале интегрирования $-T/2 \leq t \leq T/2$, с учётом того, что функция $f(t)$ отлична от нуля только лишь в области $|t| < \tau/2$ находим

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2} = \frac{\sin(\pi n\tau/T)}{\pi n} \quad (3)$$

Пунктиром изображена огибающая кривая

$$C(\omega) = \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2}$$

Полуширина $\Delta\omega$ главного максимума этой функции определяется условием $\sin \omega\tau/2 = 0$:

$$\Delta\omega \cdot \tau = 2\pi$$

1.3.3 Периодическая последовательность цугов гармонических колебаний

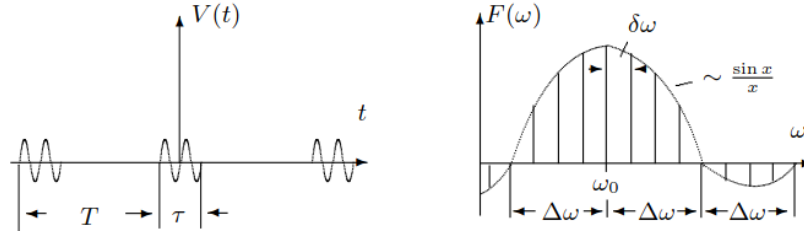


Рис. 2: Периодическая последовательность синусоидальных цугов и её спектр. (Здесь $T/\tau = 4$)

Рассмотрим сигнал на рис 2. Это - цуги колебания $V_0 \sin \omega_0 t$. Из (2) найдём c_n и для них:

$$c_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1 t) dt =$$

$$= V_0 \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} \right) \quad (4)$$

Тогда Спектры последовательности идентичны прямоугольным импульсам, но сдвинуты на ω_0 .

1.3.4 Амплитудно-модулированные колебания

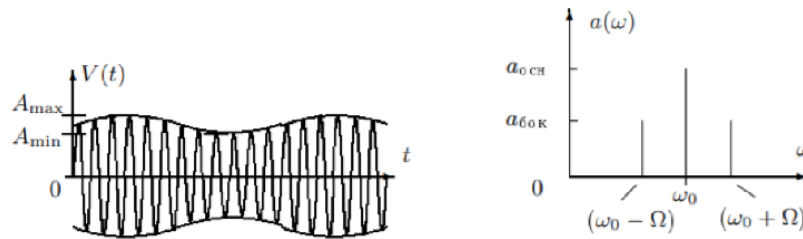


Рис. 3: Амплитудно-модулированный сигнал и его спектр.

Рассмотрим рис. 3 гармонические колебания высокой частоты ω_0 , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой $\Omega \ll \omega$.

$$s(t) = A_0 [1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_0 t$$

Коэффициент m называется *глубиной модуляции*. При $m < 1$ амплитуда меняется от минимальной $A_{min} = A_0(1 - m)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1 + m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}.$$

Легко переписать уравнение сигнала как:

$$f(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{A_0 m}{2} \cos (\omega_0 + \Omega) t + \frac{A_0 m}{2} \cos (\omega_0 - \Omega) t. \quad (5)$$

Спектр таких колебаний содержит 3 составляющие. Основная компонента представляет собой исходное немодулированное с несущей частотой ω_0 и амплитудой $A_{cen} = A_0$ – первое слагаемое в (5); Боковые компоненты спектра соответствуют гармоническим колебания с частотами $(\omega_0 + \Omega)$ и $(\omega_0 - \Omega)$ – второе и третье слагаемые (5). Амплитуды этих колебаний одинаковы и составляют $m/2$ от амплитуды немодулированного колебания $A_{side} = A_0 m/2$

1.3.5 Соотношения неопределённости

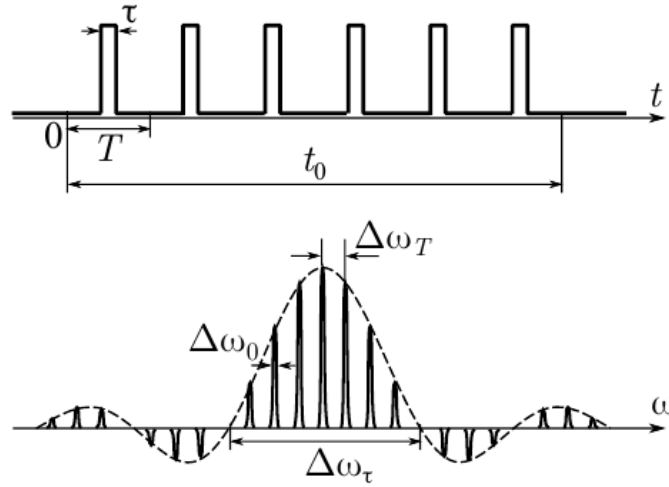


Рис. 4: Связь характерных масштабов спектра с характерными временами сигнала.

При рассмотрении примеров мы получили соотношение, связывающее между собой длительность Δt сигнала с шириной $\Delta \omega$ его спектра:

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \sim 2\pi \quad (6)$$

Оказывается, это соотношение имеет весьма универсальный характер. Оно остаётся справедливым по порядку величины для произвольного сигнала $f(t)$. Например, рассмотрим ограниченную последовательность периодических импульсов с полной длительностью t_0 , периодом $T \ll t_0$ и длительностью каждого импульса $\tau \ll T$. Сигнал и его спектр представлены на рис. 4. На спектре видно три характерных масштаба частоты: масштаб $\Delta\omega\tau = 2\pi/\tau$ – это характерная ширина спектра, масштаб $\Delta\omega T = 2\pi/T$ – расстояние между соседними спектральными пиками, и наконец наименьший масштаб частоты, соответствующий наибольшему характерному времени t_0 , определяет ширину каждого пика $\Delta\omega_0 = 2\pi/t_0$.

2 Работа

2.1 А. Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

Устанавливаем на генераторе прямоугольные импульсы с $\nu_{rep} = 1kHz$ и длительностью импульса $\tau = 100\mu S$. Получаем на экране спектр сигнала и, изменяя поочередно τ и ν_{rep} будем наблюдать как изменяется спектр.

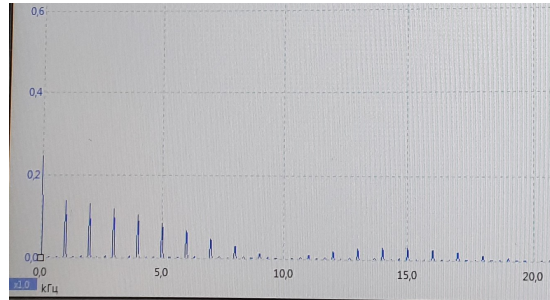


Рис. 5: Спектр при $\nu_{rep} = 1kHz$, $\tau = 100\mu S$

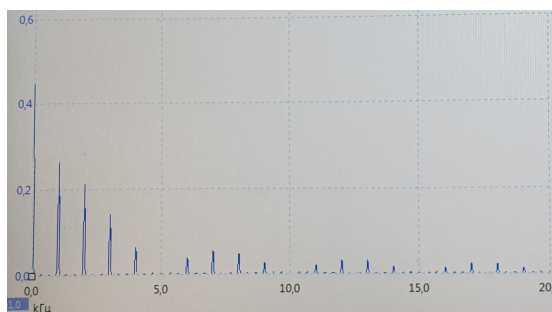


Рис. 6: Спектр при $\nu_{rep} = 1kHz$, $\tau = 200\mu S$

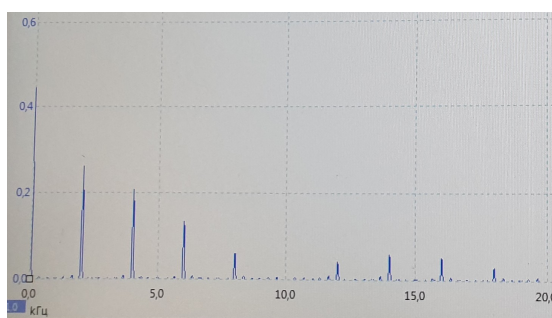


Рис. 7: Спектр при $\nu_{rep} = 2kHz$, $\tau = 100\mu S$

Проведём изерения зависимости ширины спектра от длительности импульса при частоте повторения $\nu_{rep} = 1kHz$

τ , μS	$\Delta\nu$, kHz
40	25
60	16
80	13
100	10
120	8
140	7
160	6
180	5.5
200	5

Получим отсюда таблицу $\Delta\nu(1/\tau)$:

$1/\tau$, kHz	$\Delta\nu$, kHz
25	25
16.67	16
12.5	13
10	10
8.33	8
7.14	7
6.25	6
5.56	5.50
5	5

Построим график получившейся зависимости:

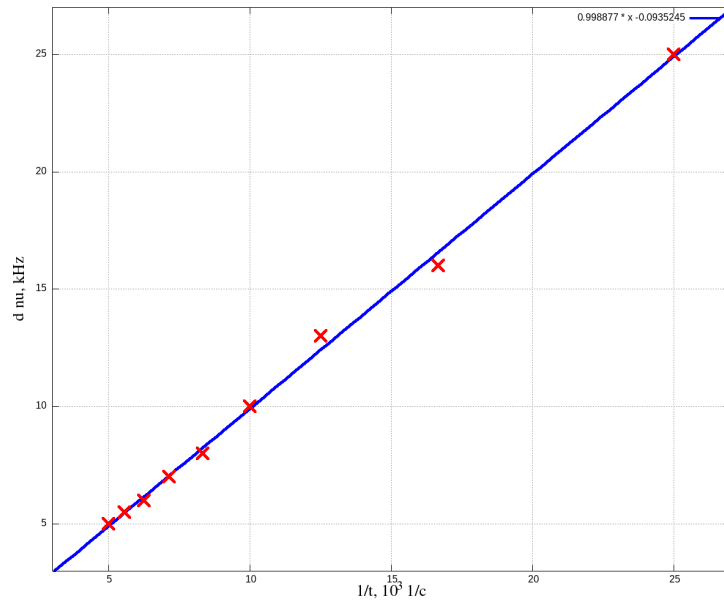


Рис. 8: График $\Delta\nu(1/\tau)$ для прямоугольных импульсов с $\nu_{rep} = 1\text{kHz}$

Зависимость:

$$\Delta\nu = k \cdot \frac{1}{\tau} + b$$

$$k = (0.998 \pm 0.016)$$

$$b = (0.094 \pm 0.098)\text{kHz}$$

Мы видим, что действительно выполняется соотношение определённости:

$$\Delta\nu \cdot \tau \simeq 1$$

2.2 В. Исследование спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний

Установим частоту несущей $\nu_0 = 25\text{kHz}$ и получим на экране осциллографа устойчивую картину цугов.

Будем наблюдать, как изменяется вид спектра:

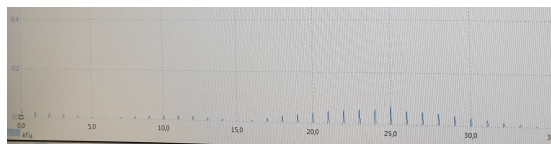


Рис. 9: Спектр при $\nu_{rep} = 1\text{kHz}$, $\nu_0 = 25\text{kHz}$, $\tau = 100\mu\text{S}$

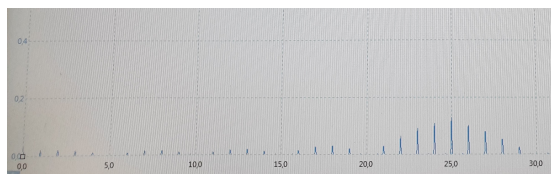


Рис. 10: Спектр при $\nu_{rep} = 1\text{kHz}$, $\nu_0 = 25\text{kHz}$, $\tau = 200\mu\text{S}$

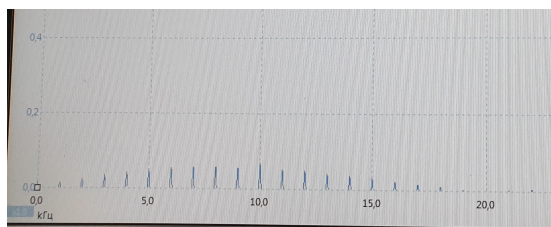


Рис. 11: Спектр при $\nu_{rep} = 1\text{kHz}$, $\nu_0 = 10\text{kHz}$, $\tau = 100\mu\text{S}$

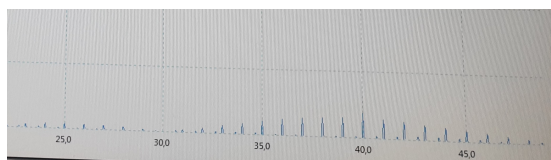


Рис. 12: Спектр при $\nu_{rep} = 1\text{kHz}$, $\nu_0 = 40\text{kHz}$, $\tau = 100\mu\text{S}$

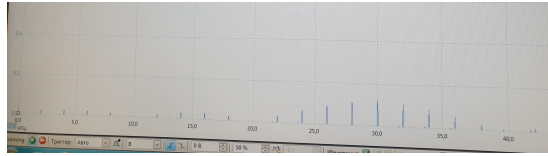


Рис. 13: Спектр при $\nu_{rep} = 2\text{kHz}$, $\nu_0 = 30\text{kHz}$, $\tau = 100\text{uS}$

Исследуем зависимость $\delta\nu(\nu_{rep})$ при $\tau = 100\text{ uS}$ и $\nu_0 = 25\text{ kHz}$:

$\delta\nu$, kHz	ν_{rep} , kHz
0.5	0.5
1	1
2	2
4	4
5	5

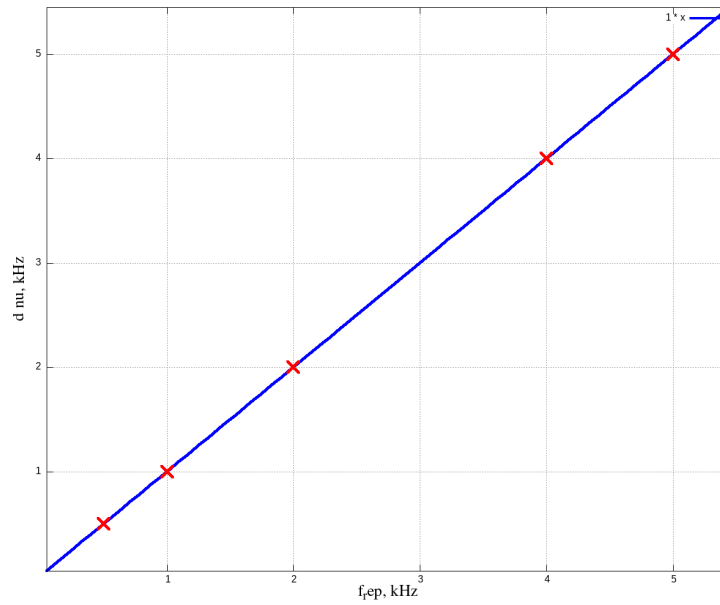


Рис. 14: График $\delta\nu(\nu_{rep})$ для прямоугольных импульсов с $\nu_0 = 25\text{ kHz}$ и $\tau = 100\text{ uS}$

Завивисимость:

$$\delta\nu = k \cdot \nu_{rep} + b$$

$$k = (1.0 \pm 0.1)$$

$$b = (0.0 \pm 0.1) \text{ kHz}$$

Отсюда видно, что в данном случае тоже выполняется соотношение неопределённости

$$\delta\nu \cdot T \simeq 1$$

2.3 С. Исследование спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде

Установим частоту несущей $\nu_0 = 25 \text{ kHz}$, частоту модуляции $\nu_{mod} = 1 \text{ kHz}$. Получим спектр исследуемого сигнала.

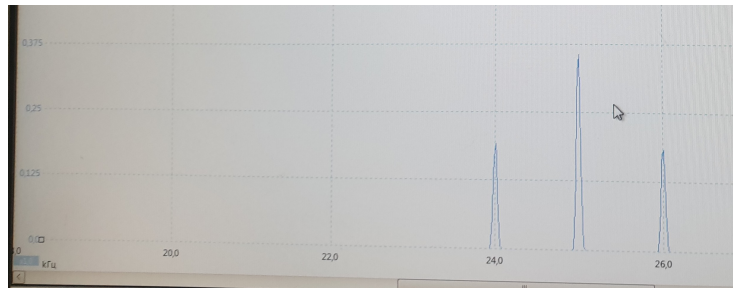


Рис. 15: Спектр модулированного сигнала при $m = 1$.

Будем изучать зависимость отношения амплитуд $k = A_s/A_m$ боковой и основной частоты от параметра $m = (A_{max} - A_{min}) / (A_{max} + A_{min})$.

$A_m, \text{ mV}$	$A_s, \text{ mV}$	m	k
322	16	0.1	0.050
322	47	0.3	0.146
322	75	0.5	0.233
322	107	0.7	0.332
322	139	0.9	0.431
322	153	1.0	0.475

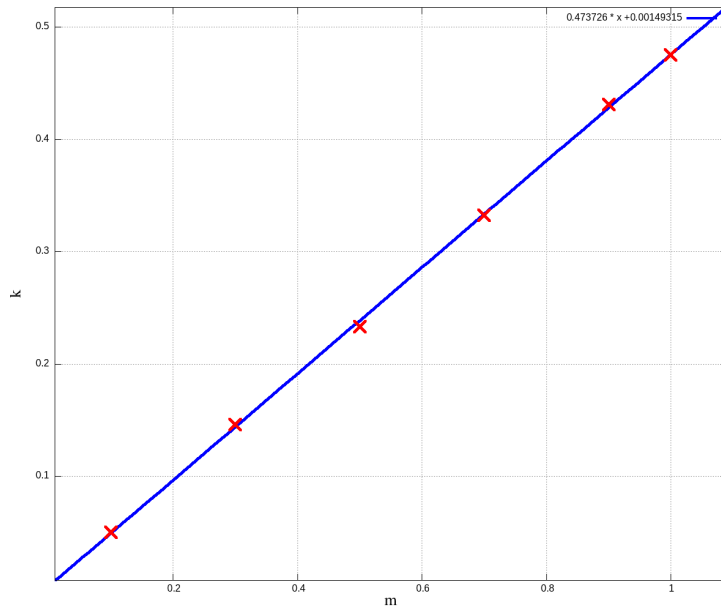


Рис. 16: График $k(m)$ для модулированного сигнала с $\nu_0 = 25$ kHz, $\nu_{mod} = 1$ kHz

Полученная зависимость:

$$k = a \cdot m + b$$

$$a = (0.474 \pm 0.004)$$

$$b = (0.001 \pm 0.001)$$

Получаем, что

$$\frac{k}{m} = 0.474 \pm 0.004$$

Что сходится с теоретическим значением 0.5

3 Выводы

В этой работе

1. Были изучены спектры и их зависимость от параметров для различных периодических сигналов: Прямоугольных сигналов, гармонических цугов и амплитудно модулированного гармонического сигнала.
2. Были экспериментально проверены соотношения неопределённости для различных видов сигналов.

3. Была проверена справедливость разложения сигналов в ряд Фурье. Все сигналы и их спектры получились именно такими, как показывали предварительные теоретические расчёты.