

## 3.6.1 Спектральный анализ электрических сигналов.

Александр Романов Б01-107

### 1 Введение

#### 1.1 Цель работы

Изучить спектральный состав периодических электрических сигналов.

#### 1.2 В работе используются

Анализатор спектра, генератор прямоугольных импульсов и сигналов специальной формы, осциллограф.

#### 1.3 Идеи

##### 1.3.1 Разложение сложных сигналов в ряд Фурье

При изучении линейных систем возникает необходимость представления произвольного сигнала  $f(t)$  в виде ряда Фурье:

$$f(t) = \sum_n c_n e^{i\omega_n t}$$

Получим коэффициенты разложения в ряд Фурье для периодического колебательного процесса общего вида  $f(t) = f(t + T)$ , где  $T$  - период процесса. Покажем, что в этом случае функция  $f(t)$  может быть представлена бесконечной суммой гармонических колебаний с кратными частотами:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad (1)$$

Нетрудно видеть, что все слагаемые в этой сумме – периодические функции с периодом, кратным  $T$  и они полностью исчерпывают набор гармонических функций, удовлетворяющих  $f(t) = f(t+T)$ . Таким образом периодическая функция имеет дискретный спектр с кратными частотами. Спектр – то есть набор коэффициентов  $\{c_n\}$  – можно найти следующим образом: домножим обе части равенства (1) на  $e^{-im\omega_0 t}$  и проинтегрируем по времени  $t$  за период (Например, от 0 до  $T$ ). Получим

$$\int_0^T f(t) e^{-im\omega_0 t} dt \sum_n c_n \int_0^T e^{i(n-m)\omega_0 t} dt$$

Вычислим интеграл в правой части:

$$\int_0^T e^{i(n-m)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq m \\ T & \text{if } n = m \end{cases}$$

Таким образом получаем

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega_0 t} dt. \quad (2)$$

### 1.3.2 Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

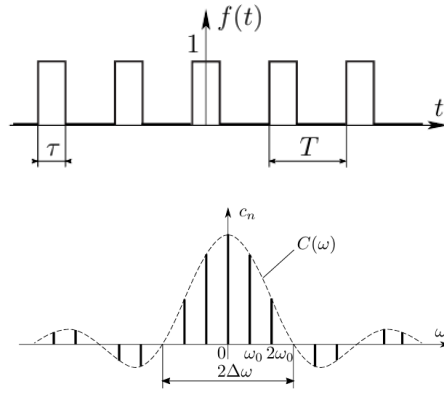


Рис. 1: Периодическая последовательность прямоугольных импульсов и её спектр (Для  $\tau = \frac{T}{3}$ ).

Рассмотрим сигнал на рис 1 и найдём его спектр. Используя (2) на интервале интегрирования  $-T/2 \leq t \leq T/2$ , с учётом того, что функция  $f(t)$  отлична от нуля только лишь в области  $|t| < \tau/2$  находим

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2} = \frac{\sin(\pi n\tau/T)}{\pi n} \quad (3)$$

Пунктиром изображена огибающая кривая

$$C(\omega) = \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2}$$

Полуширина  $\Delta\omega$  главного максимума этой функции определяется условием  $\sin \omega\tau/2 = 0$ :

$$\Delta\omega \cdot \tau = 2\pi$$

### 1.3.3 Периодическая последовательность цугов гармонических колебаний

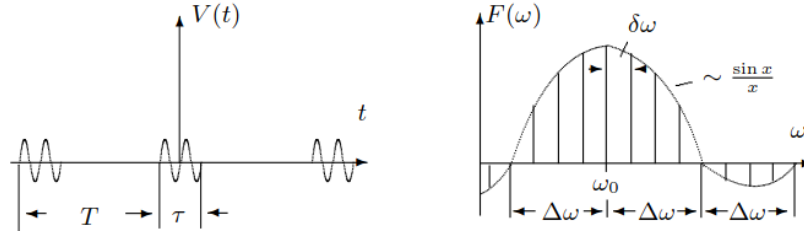


Рис. 2: Периодическая последовательность синусоидальных цугов и её спектр. (Здесь  $T/\tau = 4$ )

Рассмотрим сигнал на рис 2. Это - цуги колебания  $V_0 \sin \omega_0 t$ . Из (2) найдём  $c_n$  и для них:

$$c_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1 t) dt =$$

$$= V_0 \frac{\tau}{T} \left( \frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} \right) \quad (4)$$

Тогда Спектры последовательности идентичны прямоугольным импульсам, но сдвинуты на  $\omega_0$ .

### 1.3.4 Амплитудно-модулированные колебания

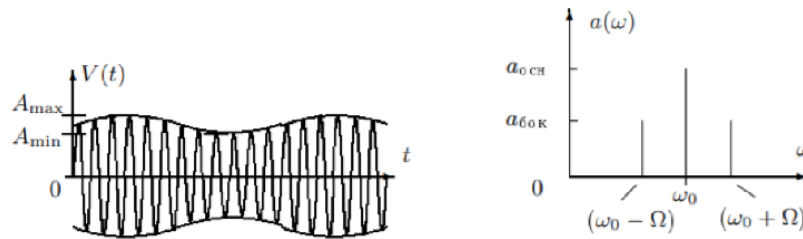


Рис. 3: Амплитудно-модулированный сигнал и его спектр.

Рассмотрим рис. 3 гармонические колебания высокой частоты  $\omega_0$ , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой  $\Omega \ll \omega$ .

$$s(t) = A_0 [1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_0 t$$

Коэффициент  $m$  называется *глубиной модуляции*. При  $m < 1$  амплитуда меняется от минимальной  $A_{min} = A_0(1 - m)$  до максимальной  $A_{max} = A_0(1 + m)$ . Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}.$$

Легко переписать уравнение сигнала как:

$$f(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{A_0 m}{2} \cos (\omega_0 + \Omega) t + \frac{A_0 m}{2} \cos (\omega_0 - \Omega) t. \quad (5)$$

Спектр таких колебаний содержит 3 составляющие. Основная компонента представляет собой исходное немодулированное с несущей частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $A_{cen} = A_0$  – первое слагаемое в (5); Боковые компоненты спектра соответствуют гармоническим колебания с частотами  $(\omega_0 + \Omega)$  и  $(\omega_0 - \Omega)$  – второе и третье слагаемые (5). Амплитуды этих колебаний одинаковы и составляют  $m/2$  от амплитуды немодулированного колебания  $A_{side} = A_0 m/2$

### 1.3.5 Соотношения неопределённости

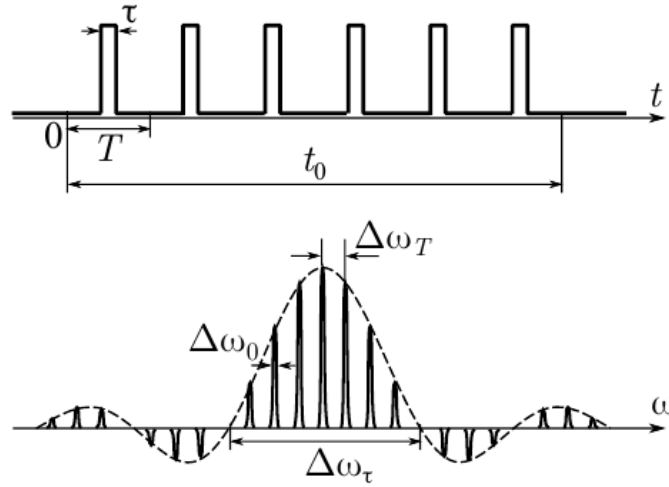


Рис. 4: Связь характерных масштабов спектра с характерными временами сигнала.

При рассмотрении примеров мы получили соотношение, связывающее между собой длительность  $\Delta t$  сигнала с шириной  $\Delta\omega$  его спектра:

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \sim 2\pi \quad (6)$$

Оказывается, это соотношение имеет весьма универсальный характер. Оно остаётся справедливым по порядку величины для произвольного сигнала  $f(t)$ . Например, рассмотрим ограниченную последовательность периодических импульсов с полной длительностью  $t_0$ , периодом  $T \ll t_0$  и длительностью каждого импульса  $\tau \ll T$ . Сигнал и его спектр представлены на рис. 4. На спектре видно три характерных масштаба частоты: масштаб  $\Delta\omega\tau = 2\pi/\tau$  – это характерная ширина спектра, масштаб  $\Delta\omega T = 2\pi/T$  – расстояние между соседними спектральными пиками, и наконец наименьший масштаб частоты, соответствующий наибольшему характерному времени  $t_0$ , определяет ширину каждого пика  $\Delta\omega_0 = 2\pi/t_0$ .

## 2 Работа

### 2.1 А. Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

Устанавливаем на генераторе прямоугольные импульсы с  $\nu_{rep} = 1kHz$  и длительностью импульса  $\tau = 100\mu S$ . Получаем на экране спектр сигнала и, изменяя поочереди  $\tau$  и  $\nu_{rep}$  будем наблюдать как изменяется спектр.

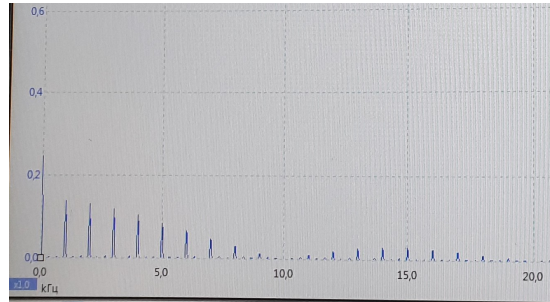


Рис. 5: Спектр при  $\nu_{rep} = 1kHz$ ,  $\tau = 100\mu S$

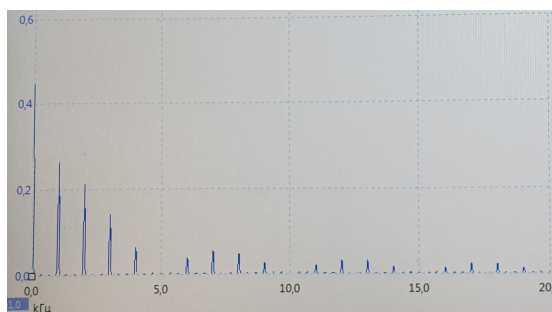


Рис. 6: Спектр при  $\nu_{rep} = 1kHz$ ,  $\tau = 200uS$

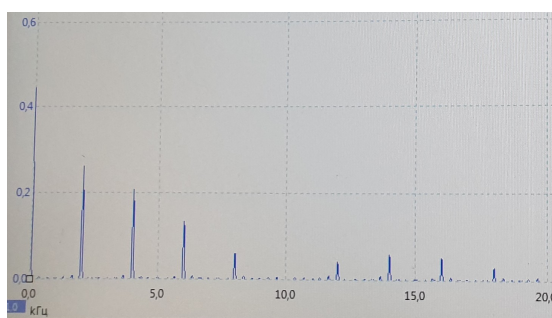


Рис. 7: Спектр при  $\nu_{rep} = 2kHz$ ,  $\tau = 100uS$

Проведём изерения зависимости ширины спектра от длительности импульса при частоте повторения  $\nu_{rep} = 1kHz$

$\tau$ , uS	$\Delta\nu$ , kHz
40	25
60	16
80	13
100	10
120	8
140	7
160	6
180	5.5
200	5

Получим отсюда таблицу  $\Delta\nu(1/\tau)$ :

$1/\tau$ , kHz	$\Delta\nu$ , kHz
25	25
16.67	16
12.5	13
10	10
8.33	8
7.14	7
6.25	6
5.56	5.50
5	5

Построим график получившейся зависимости:

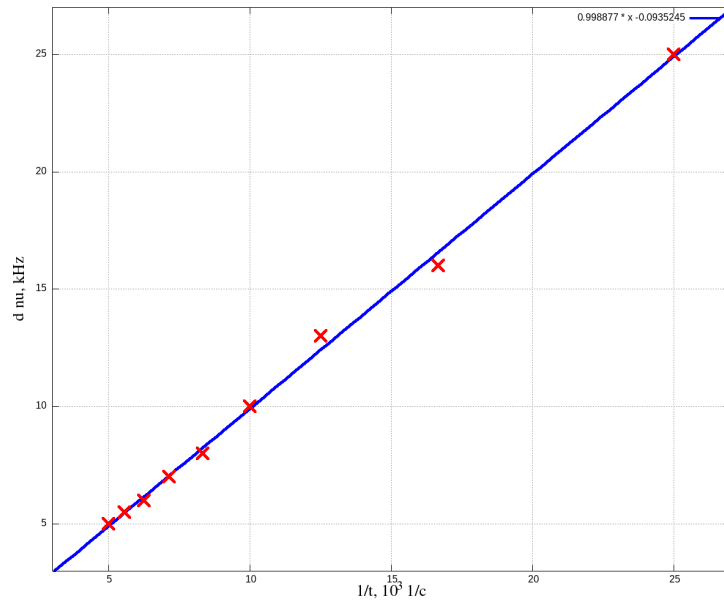


Рис. 8: График  $\Delta\nu(1/\tau)$  для прямоугольных импульсов с  $\nu_{rep} = 1\text{kHz}$

Зависимость:

$$\Delta\nu = k \cdot \frac{1}{\tau} + b$$

$$k = (0.998 \pm 0.016)$$

$$b = (0.094 \pm 0.098)\text{kHz}$$

Мы видим, что действительно выполняется соотношение определённости:

$$\Delta\nu \cdot \tau \simeq 1$$

## 2.2 В. Исследование спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний

Установим частоту несущей  $\nu_0 = 25\text{kHz}$  и получим на экране осциллографа устойчивую картину цугов.

Будем наблюдать, как изменяется вид спектра:

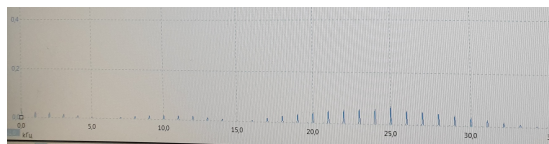


Рис. 9: Спектр при  $\nu_{rep} = 1\text{kHz}$ ,  $\nu_0 = 25\text{kHz}$ ,  $\tau = 100\mu\text{S}$

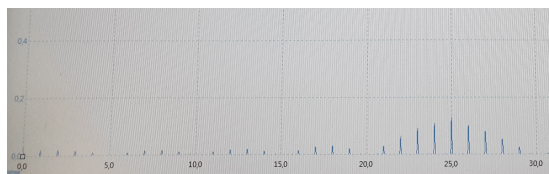


Рис. 10: Спектр при  $\nu_{rep} = 1\text{kHz}$ ,  $\nu_0 = 25\text{kHz}$ ,  $\tau = 200\mu\text{S}$

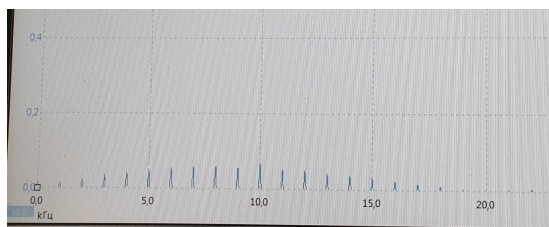


Рис. 11: Спектр при  $\nu_{rep} = 1\text{kHz}$ ,  $\nu_0 = 10\text{kHz}$ ,  $\tau = 100\mu\text{S}$

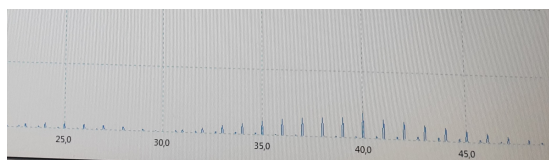


Рис. 12: Спектр при  $\nu_{rep} = 1\text{kHz}$ ,  $\nu_0 = 40\text{kHz}$ ,  $\tau = 100\mu\text{S}$



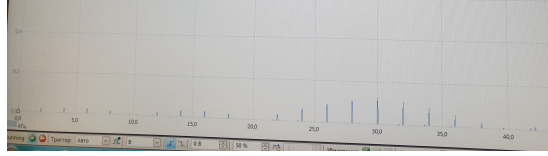


Рис. 13: Спектр при  $\nu_{rep} = 2\text{kHz}$ ,  $\nu_0 = 30\text{kHz}$ ,  $\tau = 100\text{uS}$

Исследуем зависимость  $\delta\nu(\nu_{rep})$  при  $\tau = 100\text{ uS}$  и  $\nu_0 = 25\text{ kHz}$ :

$\delta\nu$ , kHz	$\nu_{rep}$ , kHz
0.5	0.5
1	1
2	2
4	4
5	5

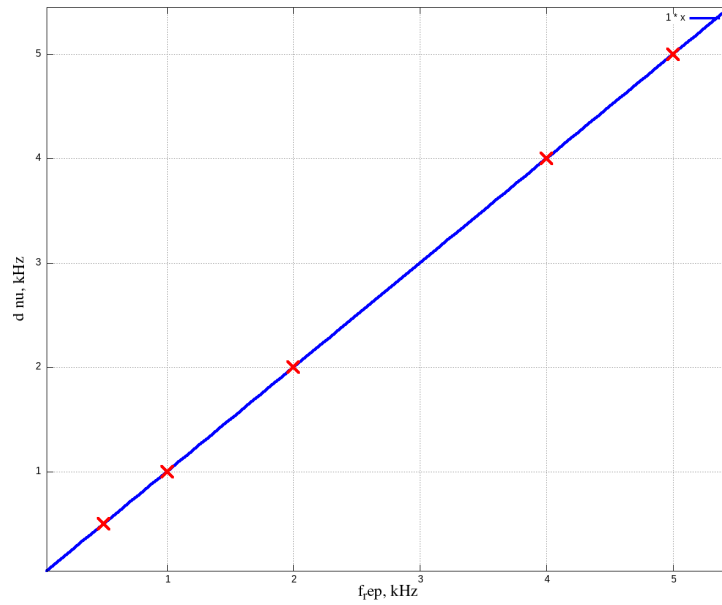


Рис. 14: График  $\delta\nu(\nu_{rep})$  для прямоугольных импульсов с  $\nu_0 = 25\text{ kHz}$  и  $\tau = 100\text{ uS}$

Завивисимость:

$$\delta\nu = k \cdot \nu_{rep} + b$$

$$k = (1.0 \pm 0.1)$$

$$b = (0.0 \pm 0.1) \text{ kHz}$$

Отсюда видно, что в данном случае тоже выполняется соотношение неопределённости

$$\delta\nu \cdot T \simeq 1$$

### 2.3 С. Исследование спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде

Установим частоту несущей  $\nu_0 = 25 \text{ kHz}$ , частоту модуляции  $\nu_{mod} = 1 \text{ kHz}$ . Получим спектр исследуемого сигнала.

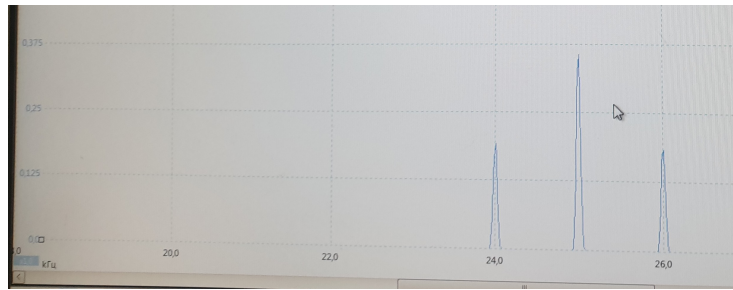


Рис. 15: Спектр модулированного сигнала при  $m = 1$ .

Будем изучать зависимость отношения амплитуд  $k = A_s/A_m$  боковой и основной частоты от параметра  $m = (A_{max} - A_{min}) / (A_{max} + A_{min})$ .

$A_m, \text{ mV}$	$A_s, \text{ mV}$	$m$	$k$
322	16	0.1	0.050
322	47	0.3	0.146
322	75	0.5	0.233
322	107	0.7	0.332
322	139	0.9	0.431
322	153	1.0	0.475

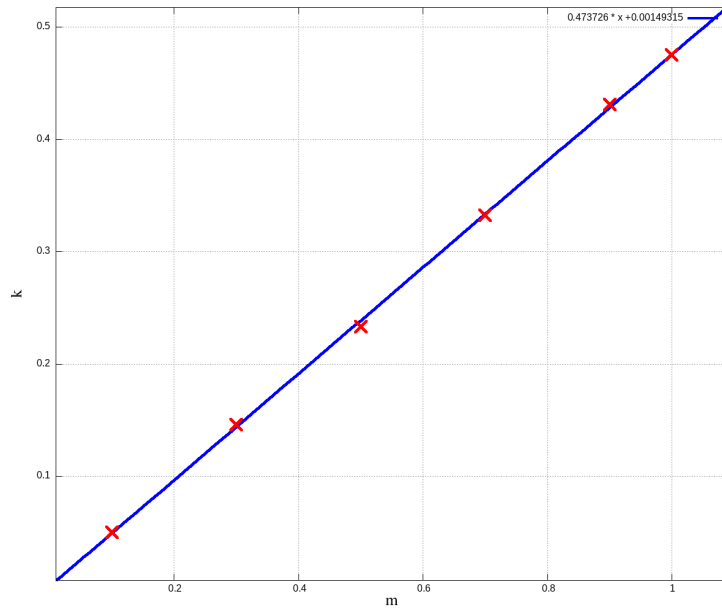


Рис. 16: График  $k(m)$  для модулированного сигнала с  $\nu_0 = 25$  kHz,  $\nu_{mod} = 1$  kHz

Полученная зависимость:

$$k = a \cdot m + b$$

$$a = (0.474 \pm 0.004)$$

$$b = (0.001 \pm 0.001)$$

Получаем, что

$$\frac{k}{m} = 0.474 \pm 0.004$$

Что сходится с теоретическим значением 0.5

### 3 Выводы

В этой работе

1. Были изучены спектры и их зависимость от параметров для различных периодических сигналов: Прямоугольных сигналов, гармонических цугов и амплитудно модулированного гармонического сигнала.
2. Были экспериментально проверены соотношения неопределённости для различных видов сигналов.

3. Была проверена справедливость разложения сигналов в ряд Фурье. Все сигналы и их спектры получились именно такими, как показывали предварительные теоретические расчёты.