Eksamen 2020
MATH112

Oppgave 1

$r = 2\sin\theta + 4\cos\theta \Rightarrow r^2 = 2r\sin\theta + 4r\cos\theta$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 2y + 4x \Rightarrow (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) = 5$

$\Rightarrow \underline{(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5}$

Oppgave 2

$f_x = 3x^2 - 3y, \quad f_y = 3y^2 - 3x$

$f_x = 0 \Rightarrow y = x^2$ innsatt i $f_y = 0$ gir $x^4 = x$

$\Rightarrow x = 0$ og $x = 1$. Derfor har f 2 kritiske pkt: $(0,0)$ og $(1,1)$.

$\Delta(0,0) = f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0,0) - [f_{xy}(0,0)]^2 = -9 < 0$

$\Rightarrow (0,0)$ er <u>et sadelpunkt</u>

$\Delta(1,1) = 27 > 0$ og $f_{xx}(1,1) > 0$

$\Rightarrow (1,1)$ er <u>et lokalt minimumspunkt</u>

<u>Svar:</u> 1 sadelpunkt og 1 lokalt minimumspunkt

Oppgave 3

$g_x = 2x - 2$ og $g_y = 4y - 8 \Rightarrow \underline{(1,2)}$ er det eneste kritiske punktet som ligger innenfor R

Randen: 1) $x = 0 \Rightarrow g(0,y) = 2y^2 - 8y + 5 \Rightarrow g' = 4y - 8 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \underline{(0,2)}$

2) $y = 0 \Rightarrow g(x,0) = x^2 - 2x + 5 \Rightarrow g' = 2x - 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \underline{(1,0)}$

3) $y = 4 - x \Rightarrow g(x, 4-x) = 3x^2 - 10x + 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}, y = \frac{7}{3} \Rightarrow \underline{\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)}$

Dermed har vi 3 kritiske punkter på randen og 3 hjørnepunkter: $\underline{(0,0)}$, $\underline{(0,4)}$ og $\underline{(4,0)}$.

De respektive g-verdiene blir

$-4;\ -3;\ 4;\ -\frac{10}{3};\ 5;\ 5;\ 13$.

Derfor er maksimumsverdien $\underline{13}$ og minimumsverdien $\underline{-4}$

Oppgave 4

$\nabla f = \langle 2xy, x^2 - 12y^2 \rangle$, $(\nabla f)(P) = \langle 4, -8 \rangle$.

$\overrightarrow{PQ} = \langle 4-2, 0-1 \rangle = \langle 2, -1 \rangle$

$\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \left\langle \dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \right\rangle$

$\Rightarrow (D_{\vec{u}} f)(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u} = \langle 4, -8 \rangle \cdot \left\langle \dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \right\rangle$

$= \dfrac{8}{\sqrt{5}} + \dfrac{8}{\sqrt{5}} = \dfrac{16}{\sqrt{5}}$

Oppgave 5.

La rektangelets sider ha lengdene $2x$ og $2y$. Vi skal maksimere arealet $A = 2x \cdot 2y = 4xy$ når $g(x,y) = \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Lagranges metoden gir $\nabla A = \lambda \nabla g \Leftrightarrow$

$\langle 4y, 4x \rangle = \lambda \left\langle \dfrac{x}{8}, \dfrac{2y}{9} \right\rangle \Rightarrow 4y = \dfrac{\lambda x}{8}$ og $4x = \dfrac{2\lambda y}{9}$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{32y}{x}$ og $4x = \left(\dfrac{2y}{9}\right) \cdot \left(\dfrac{32y}{x}\right)$ slik at $y^2 = \dfrac{9x^2}{16}$.

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{9x^2}{16 \cdot 9} = 1 \Rightarrow x^2 = 8$ og $x = \pm 2\sqrt{2}$. Ettersom $x \geq 0$, så er $x = 2\sqrt{2} \Rightarrow y = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ og

$A = 2x \cdot 2y = 24$. I endepunktene $x = 0$ og $x = 4$ $(\Leftrightarrow y = 0)$ er arealet lik 0 $\Rightarrow$ 24 er maksimumsverdien

Oppgave 6

$I = \int_0^1 \left(\int_0^y 2e^{y^2} dx \right) dy = \int_0^1 \left[2e^{y^2} x \right]_{x=0}^{x=y} dy$

$= \int_0^1 2y e^{y^2} dy = \left[e^{y^2} \right]_0^1 = e - 1$

$0 \leq x \leq y$

$0 \leq y \leq 1$

Oppgave 7.

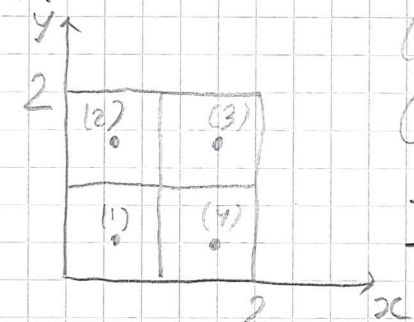
R kan beskrives som $0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Ved å bruke polarkoordinatene får vi

$$\iint_R (1-x^2-y^2)\,dA = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (1-r^2) r\,d\theta\right) dr$$

$$= 2\pi \int_0^1 (r-r^3)\,dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Oppgave 8



(1): $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ | (3): $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

(2): $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ | (4): $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$I = \iint_R xy^2\,dA \approx \left[f\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) + f\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}\right) + f\left(\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\right) + f\left(\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\right)\right] \Delta A$$

der $f(x,y) = xy^2$ og $\Delta A = 1 \Rightarrow I \approx 5$

Oppgave 9

La $x(t) = a\sin t$, $y(t) = b\cos t$, $M(x,y) = -y$, $N(x,y) = x$

Da er $\vec{F} = \langle M, N\rangle$ og $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t)\rangle$ og

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} [M(x(t),y(t))x'(t) + N(x(t),y(t))y'(t)]\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} [-b\cos t \cdot a\cos t + a\sin t \cdot (-b\sin t)]\,dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = -\int_0^{2\pi} ab\,dt = -2ab\pi$$

Oppgave 10

Gauss' sats gir $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dv$

$$= \iiint_D 1\,dv = \int_{-3}^{3}\left(\int_{-2}^{2}\left(\int_{-1}^{1} dz\right) dy\right) dx = 6\cdot 4\cdot 2 = 48$$

$\left(\vec{F} = \langle M, N, P\rangle \Rightarrow \operatorname{div}\vec{F} = M_x + N_y + P_z\right.$

$\left.\vec{F} = \langle z, y, x\rangle \Rightarrow \operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial z} = 1\right)$