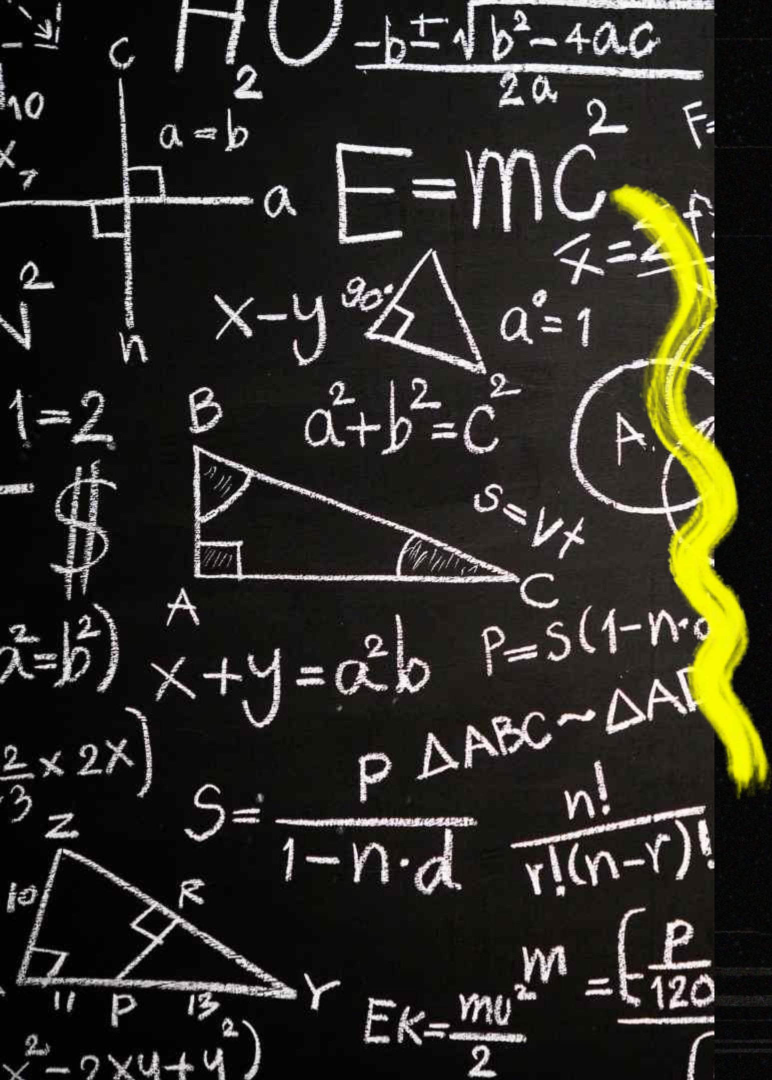
HACK A BOSS



Introducción básica a la Computación Cuántica ICC01

Alejandro Mata Ali

Introducción matemática

Haremos una breve introducción a la matemática necesaria para iniciarse en la computación cuántica

Hay mucho más, pero esto es lo más básico para empezar:

- Números complejos
- Vectores
- Matrices
- Tensores

Números complejos

Unidad Imaginaria

$$i = \sqrt{-1}$$

Vídeo explicativo de todo
https://youtu.be/aOgGyHPcgvY?si=vakEtpPjIoPHOjhY

Número imaginario

$$y = \sqrt{-x} = \sqrt{-1}\sqrt{x} = i\sqrt{x}$$

Producto de dos números imaginarios

$$(ix) \cdot (iy) = -xy$$

Números complejos

$$\frac{1}{2}(z+z^*) = \frac{1}{2}(x+iy+x-iy) = x = Re(z)$$
$$\frac{1}{2i}(z+z^*) = \frac{1}{2i}(x+iy-x+iy) = y = Im(z)$$

Número complejo

$$z = x + iy$$

Complejo conjugado

$$z^* = x - iy$$

Módulo

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2+y^2}$$

Forma polar

$$z = |z|e^{i\theta}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Fórmula de Euler

Ángulo o fase

$$\theta = \mathrm{Arg}(z) = \arctan 2(y,x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si} \quad x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si} \quad y \geq 0, x < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{si} \quad y < 0, x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad y > 0, x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si} \quad y < 0, x = 0 \\ \text{indefinido} & \text{si} \quad y = 0, x = 0 \end{cases}$$

Vectores

Vector

$$\vec{v} = (1.2, 3, 2.1)$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_N)$$

$$\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \hat{v}$$

Norma

$$|\vec{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |v_i|^2} = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2 + \cdots + |v_N|^2}$$

Dirección

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Vectores

Componentes

Vector

$$\vec{v} = v_1\hat{x} + v_2\hat{y} + v_3\hat{z}$$

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{N} v_i\vec{b_i}$$

Vectores base

Todo vector del espacio puede describirse mediante sus vectores base

Todos los vectores de la base son linealmente independientes

Cambio de base

$$\vec{b_1} = 1\hat{x} + 0.5\hat{y} \quad \hat{x} = 0.5\vec{b_1} - 0.25\vec{b_2}$$

$$\vec{b_2} = -2\hat{x} + 1\hat{y} \quad \hat{y} = 1\vec{b_1} + 0.5\vec{b_2}$$

$$\vec{v} = (1, 2)$$

$$\vec{v} = 1\hat{x} + 2\hat{y} =$$
$$= 0.5\vec{b_1} - 0.25\vec{b_2} + 2(\vec{b_1} + 0.5\vec{b_2}) =$$
$$= 2.5\vec{b_1} + 0.75\vec{b_2}$$

Vectores

Producto escalar

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{N} v_i w_i$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}| \cos\theta$$

Norma/Módulo

$$\vec{v} \cdot \vec{v^*} = \vec{v^*} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{N} |v_i|^2 = |\vec{v}|^2$$

Base ortonormal

$$|\vec{b}_i| = 1$$

$$\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = 0, \forall i \neq j \in [1, N]$$

Matrices

Matriz

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 1.2 & -3.1 \\ -2 & -.3 & 2.1 \\ 0 & 1.1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} A_{ij} \hat{b}_i \hat{b}_j$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1M} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NM} \end{pmatrix}$$

Matrices

Matriz traspuesta

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{M1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{M2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1N} & A_{2N} & \cdots & A_{MN} \end{pmatrix}$$

Hermítica conjugada

$$\begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* & \cdots & A_{M1}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & \cdots & A_{M2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1N}^* & A_{2N}^* & \cdots & A_{MN}^* \end{pmatrix}$$

$$A^\dagger = (A^*)^T = (A^T)^* \qquad (A^\dagger)^\dagger = A$$

Matrices

Producto matriz-vector

$$A\vec{v} = \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} A_{ij}\hat{b}_i\hat{b}_j\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{M} v_k\hat{b}_k\right) \qquad A\vec{v} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left(A_{ij}v_j\hat{b}_i\right)$$

$$\vec{w} = A\vec{v} = \sum_{i=1}^{N} w_i\hat{b}_i \quad \Big| \quad w_i = \sum_{j=1}^{M} A_{ij}v_j$$

Producto matriz-matriz

$$AB = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{q=1}^{P}\left(A_{ij}B_{jq}\hat{b}_i\hat{b}_q\right) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{q=1}^{P}\left(\sum_{j=1}^{M} A_{ij}B_{jq}\right)\hat{b}_i\hat{b}_q$$

$$C = AB = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{P} C_{ik}\hat{b}_i\hat{b}_k \quad \Big| \quad C_{ik} = \sum_{j=1}^{M} A_{ij}B_{jk}$$

Matrices

Conmutador

$$[A, B] = AB - BA$$

Anticonmutador

$$AB = \frac{1}{2}\left([A, B] + \{A, B\}\right)$$

$$\{A, B\} = AB + BA.$$

$$[B, A] = -[A, B]$$

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

Matrices

Producto tensorial

$$\vec{v} = (2, 3, -1.5)$$
$$\vec{w} = (-2.1, 0, 4)$$

$$A = \vec{v} \otimes \vec{w} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 8 \\ -6.3 & 0 & 12 \\ 3.15 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A = \vec{v} \otimes \vec{w} = \sum_{i}^{N} \sum_{j}^{M} v_i w_j \hat{b}_i \hat{b}_j$$

$$C = A \otimes B = \sum_{i}^{N} \sum_{j}^{M} \sum_{k}^{P} \sum_{l}^{Q} A_{ij} B_{kl} \hat{b}_i \hat{b}_j \hat{b}_k \hat{b}_l$$

Matrices

Autovalores y autovectores

$$A = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \hat{\lambda}_i \hat{\lambda}_i$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{pmatrix}$$

Traza

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{N} A_{ii}$$

Norma de Frobenius

$$||A||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} |A_{ij}|^2} = \sqrt{Tr(A^\dagger A)}$$

Matrices

Matriz inversa

$$A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{I}$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Matriz Unitaria

$$UU^{\dagger} = U^{\dagger}U = \mathbb{I}$$

Matrices de Pauli

$$\sigma_X = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_Y = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$
$$\sigma_Z = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{I}$$
$$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma_Z^2 = \mathbb{I}$$

Matriz Hermítica

$$A = A^{\dagger}$$

$$A = \sum_{i=1}^{3} c_i\sigma_i + c_0\mathbb{I}, \qquad c_i \in \mathbb{R}$$

Tensores

3-tensor

$$T = \sum_{i,j,k} T_{ijk}\hat{b}_i\hat{b}_j\hat{b}_k$$

n-tensor

$$T = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} T_{i_1 i_2 \ldots i_n}\hat{b}_{i_1}\hat{b}_{i_2}\ldots\hat{b}_{i_n}$$

Contracción de dos tensores

$$E = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_{n-q}, j_1 j_2 \ldots j_{m-q}} E_{i_1 i_2 \ldots i_{n-q}, j_1 j_2 \ldots j_{m-q}}\hat{b}_{i_1}\hat{b}_{i_2}\ldots\hat{b}_{i_{n-q}}\hat{b}_{j_1}\hat{b}_{j_2}\ldots\hat{b}_{j_{m-q}}$$

$$E_{i_1 i_2 \ldots i_{n-q}, j_1 j_2 \ldots j_{m-q}} = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_q} T_{i_1 i_2 \ldots i_{n-q}, k_1 k_2 \ldots k_q} R_{j_1 j_2 \ldots j_{m-q}, k_1 k_2 \ldots k_q}$$

#>/<>
HACK
A BOSS

¡Gracias!

¿Alguna pregunta?
alejandro.mata.ali@gmail.com
hackaboss.com

SÍGUENOS EN REDES SOCIALES
@HACKABOSS_