Tecnológico de Costa Rica

Probabilidad:
Práctica para el Primer Examen Parcial
Solucionario

Escuela de Matemática

Erick Chacón Vargas

Mario Marín Sánchez

1. Se eligen al azar dos bolitas en forma consecutiva (y sin reposición) de una caja que contiene 3 rojas y 4 azules.

   a) Determine el espacio muestral asociado con el experimento anterior.

      Solución
      El espacio muestral solicitado puede representarse de la siguiente forma $\Omega = \{RR, RA, AR, AA\}$

   b) Use la regla de Laplace para determinar la probabilidad de que la segunda bolita sea azul.

      Solución
      Dado que hay una diferente cantidad de bolitas rojas y azules, es válido suponer que los eventos del espacio muestral Ω no son equiprobables; no obstante, si empleamos una representación más apropiada del espacio muestral (enumerando cada una de las bolitas) será más fácil calcular las probabilidades asociadas a cada uno de los eventos del espacio muestral.

$$\begin{aligned}\Omega = \{&R_1R_2,\ R_2R_1,\ R_1R_3,\ R_3R_1,\ R_2R_3,\ R_3R_2,\\ &R_1A_1,\ A_1R_1,\ R_1A_2,\ A_2R_1,\ R_1A_3,\ A_3R_1,\ R_1A_4,\ A_4R_1,\\ &R_2A_1,\ A_1R_2,\ R_2A_2,\ A_2R_2,\ R_2A_3,\ A_3R_2,\ R_2A_4,\ A_4R_2,\\ &R_3A_1,\ A_1R_3,\ R_3A_2,\ A_2R_3,\ R_3A_3,\ A_3R_3,\ R_3A_4,\ A_4R_3,\\ &A_1A_2,\ A_2A_1,\ A_1A_3,\ A_3A_1,\ A_1A_4,\ A_4A_1,\\ &A_2A_3,\ A_3A_2,\ A_2A_4,\ A_4A_2,\ A_3A_4,\ A_4A_3\}\end{aligned}$$

      Según la regla de Laplace la probabilidad solicitada corresponde a $\frac{24}{42} = \frac{4}{7}$

   c) Emplee probabilidad total para resolver el ítem anterior.

      Solución
      El evento **La segunda bolita es azul** puede verse como uno de dos posibles eventos, a saber:

      i) La primera bolita seleccionada es roja y la segunda azul.
      ii) La primera bolita seleccionada es azul y la segunda es azul.

      La probabiliad solicitada (empleando **Probabilidad Total**) es $p = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{24}{42}$

   d) Si la segunda bolita seleccionada fue azul, qué tan probable es que la primera haya sido roja.

      Solución
      Considere los siguientes eventos:
      A_1 : **la primera bolita seleccionada es roja**
      A_2 : **la primera bolita seleccionada es azul**
      B : **la segunda bolita seleccionada es azul**

      Si usamos la regla de Bayes tenemos que $P[A_1 \setminus B] = \dfrac{P[B \setminus A_1] \cdot P[A_1]}{P[B]} = \dfrac{\frac{12}{18} \cdot \frac{3}{7}}{\frac{4}{7}} = \frac{1}{2}$

2. Un arreglo binario se va a construir con 10 unos y 8 ceros.

   a) Determine la cantidad total de arreglos distintos que pueden formarse usando esos 18 caracteres.

      Solución
      El problema es equivalente a contar la cantidad de anagramas de 18 caracteres (con 10 unos y 8 ceros). La cantidad de estos viene dada por $\dfrac{18!}{10!\cdot 8!} = \binom{18}{10}$

   b) Si el arreglo se hace en forma completamente aleatoria cuál es la probabilidad de que los ceros queden separados, es decir, que no hayan dos o más ceros juntos.

      Solución
      Observe el siguiente arreglo con 11 ceros y 10 unos.

$$0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0$$

      Resolver el problema planteado es equivalente a remover 3 ceros del arreglo anterior. Así, la probabilidad solicitada es $\dfrac{\binom{11}{3}}{\binom{18}{10}}$

3. En una sala hay 7 miembros del partido PAK, 8 del partido PNL y 9 del partido PUC. Se desea formar una comisión con 9 de los miembros presentes en la sala.

   a) ¿Cuántas formas hay para seleccionar esta comisión con exactamente 3 miembros de cada partido?

      Solución
      Aplicando el principio del producto y combinaciones, el total de formas es $\binom{7}{3}\binom{8}{3}\binom{9}{3}$

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el PAK tenga a lo sumo 2 representantes.

      Solución
      Existen tres casos, a saber, que el PAK tenga 0, 1 o 2 representantes.Usando el principio de suma y combinaciones, la solución es $\binom{17}{9}+\binom{7}{1}\binom{17}{8}+\binom{7}{2}\binom{17}{7}$

4. A una reunión asisten 5 personas de cada una de las 7 provincias de Costa Rica. Se desea seleccionar aleatoriamente a cinco de estas personas para obsequiarles un presente.

   a) Determine la probabilidad de que se seleccione a lo sumo a una persona de cada provincia.

      Solución
      La solución consiste el elegir 5 de las 7 provincias y de cada una de ellas elegir un representante. En este caso el total de maneras de hacer la comisión, acorde con las restricciones, es $\binom{7}{5}\binom{5}{1}^5$ y

la probabilidad pedida es $\frac{\binom{7}{5}\binom{5}{1}^5}{\binom{35}{5}}$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se escojan personas de únicamente dos provincias?

Solución
Primero se seleccionan las 2 provincias que estarán representadas, para lo que hay $\binom{7}{2}$ maneras. Una vez seleccionadas las dos provincias, se tienen varios casos (4 personas de la primera provincia y 1 de la segunda; 3 personas de la primera provincia y 2 de la segunda; etc.).
La probabilidad buscada es $\binom{7}{2}\cdot\frac{\binom{5}{4}\cdot\binom{5}{1}+\binom{5}{3}\cdot\binom{5}{2}+\binom{5}{2}\cdot\binom{5}{3}+\binom{5}{1}\cdot\binom{5}{4}}{\binom{35}{5}}$

5. Una empresa tiene 7 sucursales, cada una con 5 empleados. La empresa quiere repartir entre sus empleados, 15 certificados de compra por 150 000 colones.

a) De cuántas maneras puede hacerse la distribución de tal forma que ninguna de las sucursales reciba 5 certificados.

Solución
Este problema puede resolverse usando complementos. Si A_i representa el evento: **La sucursal** i **recibe 5 certificados** entonces el evento $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_7$ representa el hecho de que alguna de las 7 sucursales (podrían ser varias) reciba 5 certificados. Su complemento equivale a que ninguna de las sucursales reciba 5 certificados.
Usando inclusión

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_7| = \binom{7}{1}\cdot\binom{30}{10} - \binom{7}{2}\binom{25}{5} + \binom{7}{3}$$

Note que es imposible repartir certificados a todos los empleados de más de tres sucursales, por lo que la respuesta a la pregunta planteada es:

$$\binom{35}{15} - \binom{7}{1}\cdot\binom{30}{10} + \binom{7}{2}\binom{25}{5} - \binom{7}{3}$$

b) Calcule la probabilidad de que ninguna sucursal quede sin premios

Solución
Si B_i representa el evento **La sucursal** i **no recibe ningún certificado** entonces el evento $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_7$ representa el hecho de que alguna de las 7 sucursales (podrían ser varias) no reciba certificados. Su complemento equivale a que ninguna de las sucursales se quede sin certificados. Luego la respuesta a la pregunta planteada es

$$\binom{35}{15} - \left(\binom{7}{1}\cdot\binom{30}{15} - \binom{7}{2}\binom{25}{15} + \binom{7}{3}\binom{20}{15} + \binom{7}{4}\binom{15}{15}\right)$$

6. Suponga que el 80 % de las mujeres de una población llegan a los 60 años mientras que solo el 65 % llega a los 80 años. Cuál es la probabilidad de que una mujer que llegó a los 60 llegue a los 80.

   Solución

   Este problema se resuelve empleando probabilidades condicionales. Si A es el conjunto de mujeres que llegan a los 60 años y B el de las que llegan a los 80 años, entonces es fácil ver que $B \subset A$ y $P[B \setminus A] = \frac{P[A \cap B]}{P[A]} = \frac{0{,}65}{0{,}8}$

7. Suponga que se lanza una moneda no recargada dos veces y llamamos con A al evento la primera vez cae corona y con B al evento ambas veces cae la misma cara. Determine si A y B son eventos independientes.

   Solución

   Observe que $P[B \setminus A] = \frac{P[B \cap A]}{P[A]} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = P[B]$ por lo que los eventos son idependientes.