TEC Tecnológico de Costa Rica

Distribuciones de Probabilidad Discretas: Hipergeométrica y Poisson.

Escuela de Matemática

Semana 9

Giovanni Sanabria Brenes | Luis Ernesto Carrera Retana | Erick Chacón Vargas | Mario Marín Sánchez | Rebeca Solís Ortega

1. Distribución de Probabilidad Hipergeométrica

Cuando una población se divide en 2 grupos, digamos éxitos y fracasos y se elige un subconjunto de esta población, es natural que en esta muestra queden representados los dos grupos. En los experimentos hipergeométricos interesa el número de representantes de alguno de los grupos en la muestra.

Definición 1.

Un experimento se clasifica como Hipergeométrico si cumple las siguientes propiedades:

- La población o conjunto donde debe llevarse a cabo el muestreo consta de N objetos.
- Cada objeto puede caracterizarse éxito E o fracaso F. Hay M éxitos en la población.
- Se saca una muestra de n objetos de forma tal que sea igualmente probable que se obtenga cada muestra. Las extracciones se realizan sin reposición.
- La variable aleatoria observada Y es el número de éxitos obtenidos en la muestra.

Los tipos de aplicaciones en los cuales la distribución es hipergeométrica son similares a aquellos donde se aplica la binomial. Una manera de entender la diferencia entre ambas es analizando el esquema con que se lleva a cabo el muestreo. Mientras que en la distribución binomial el muestreo se realiza con reemplazo de cada artículo, después de observarse se reintegra a la muestra, en la hipergeométrica el muestreo se lleva a cabo sin reemplazo.

Por ejemplo de un naipe se desea extraer una muestra de 5 cartas y calcular la probabilidad de obtener 3 cartas rojas. En este caso se deben muestrear 5 objetos, para cada objeto se considera como éxito el hecho que la carta sea roja y como fracaso que sea negra, hay 26 éxitos en la población. Considere la variable: número de cartas rojas obtenidas en la muestra. Si las cartas se eligen con reposición, es decir, se devuelve la carta al maso antes de elegir al azar la siguiente, la variables sigue una distribución binomial. Si las cartas se toman sin reposición, la variable sigue una distribución binomial.

Si x es una variable aleatoria en un experimento hipergeométrico, su rango va del $\min\{n, M\}$ al valor $\max\{0, n-(N-M)\}$ éxitos.

La distribución de probabilidad se denota por $h(x; n, M, N)$ depende de:

- el tamaño de la muestra n.
- el tamaño del conjunto sobre el cual se toman los objetos N. Es decir, N es el tamaño de la población.
- el número de éxitos, M, en el conjunto sobre el que se hace el muestreo.

El cálculo de la distribución de probabilidad para un valor x de una variable X hipergeométrica se puede hacer de manera simple por la Ley de Laplace. En efecto, note que el evento $X = x$ significa que se quiere x éxitos y $n-x$ fracasos de la muestra de tamaño n tomada de ubna población de tamaño N. Así:

1. CASOS TOTALES. Se eligen n individuos de N. Hay $C(N, n)$ maneras.

2. CASOS FAVORABLES. De los n individuos a elegir, se quiere elegir x de los M éxitos y por lo tanto, se eligen $n-x$ de los $N-M$ fracasos. Hay $C(M,x)C(N-M,n-x)$.

Esto conduce a la expresión:

$$P(X=x)=h(x;n,M,N)=\frac{\begin{pmatrix} M \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-M \\ n-x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}. \tag{1}$$

Teorema 1.

Si X sigue una distribución hipergeométrica, con las condiciones descritas se cumplen:

(a.) $h(x;n,M,N)=\dfrac{\begin{pmatrix} M \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-M \\ n-x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}.$

(b.) Si el rango de X es $0,1,2,\ldots,n$ entonces

$$E[X]=n\frac{M}{N}$$

$$VAR[X]=n\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right).$$

Ejemplo 1.

Un equipo de trabajo de 5 personas se va a seleccionar de entre cinco hombres y tres mujeres. ¿cuál es número esperado de hombres en el equipo?

Solución Note que se quiere la esperanza de la variable X: aleatoria es el número de hombres en el equipo. Para ello, se debe hallar la distribución de X. Los posibles valores de esta variable aleatoria son $2,3,4$ y 5, entonces:

$$f_X(x)=h(x;5,5,8)=\begin{cases} 10/56 & : \quad \text{Para } x=2 \\ 30/56 & : \quad \text{Para } x=3 \\ 15/56 & : \quad \text{Para } x=4 \\ 1/56 & : \quad \text{Para } x=5 \end{cases},$$

El lector puede verificar los cálculos por medio de la fórmula de la hipergeométrica. Note que la media para esta distribución es

$$E(X)=2\cdot\frac{10}{56}+3\cdot\frac{30}{56}+4\cdot\frac{15}{56}+5\cdot\frac{1}{56}=\frac{176}{56}.$$

Ejemplo 2.

De una población de 500 animales se capturan 200, se marcan y se sueltan para que vuelvan a mezclarse con el resto de la población. Cul es la probabilidad de que:

1. en una muestra de 20 animales capturados o recapturados haya 4 o menos marcados?
2. aparezcan al menos 3 animales marcados en una captura o recaptura de 20 animales?

1. La probabilidad de que en una muestra de 20 animales capturados o recapturados haya 4 o menos marcados se puede calcular por

$$P[X \leq 4] = H(4; 20, 200, 500) = \sum_{i=0}^{4} \frac{\binom{200}{i}\binom{300}{20-i}}{\binom{500}{20}}$$

$$= \frac{\binom{200}{0}\binom{300}{20} + \binom{200}{1}\binom{300}{19} + \binom{200}{2}\binom{300}{18} + \binom{200}{3}\binom{300}{17} + \binom{200}{4}\binom{300}{16}}{\binom{500}{20}}.$$

2. Mientras tanto la probabilidad de que aparezcan 3 o más animales marcados en una captura o recaptura de 20 es:

$$P[X \geq 3] = 1 - P[X \leq 2] = 1 - H(2; 20, 200, 500) = \sum_{i=0}^{2} \frac{\binom{200}{i}\binom{300}{20-i}}{\binom{500}{20}}$$

$$1 - \frac{\binom{200}{0}\binom{300}{20} + \binom{200}{1}\binom{300}{19} + \binom{200}{2}\binom{300}{18}}{\binom{500}{20}}.$$

2. Distribución de Probabilidad de Poisson

Definición 2.

Una variable aleatoria X se dice que sigue una distribución de Poisson con parámetro $\lambda > 0$ si su rango es el conjunto $0, 1, 2, \ldots$, y la distribución de probabilidad está dada por:

$$P[X = x] = p(x; \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad \text{para} \quad x = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Se escribe $X \sim P(\lambda)$.

En general la descripción de un proceso de Poisson no es necesariamente sencilla.
Dado que $p(x; \lambda) \geq 0$ y recurriendo a la expresión:

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!},$$

se obtiene que

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i; \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1,$$

con lo cual $p(x; \lambda)$ cumple con las propiedades para ser una distribución.

Al igual que para el caso de binomial se dispone de una tabla que facilita los cálculos que involucran a la distribución de Poisson.

Ejemplo 3.

Las consultas arriban a un servidor siguiendo una distribución de Poisson con un promedio de 12 consultas por minuto.

1. Cuál es la probabilidad de que en un minuto lleguen al menos 3 consultas?
2. Cuál es la probabilidad de que en dos minutos lleguen 20 consultas?
3. Cuál es la probabilidad de que el intervalo de tiempo entre las dos próximas consultas sea menor o igual a 7.5 segundos?

Solución

1. Se X el número de consultas por minuto. Se sabe que X sigue una distribución de Poisson $X \sim P(12)$. Entonces

$$P(X \geq 3) = 1 - \sum_{i=0}^{2} p(i; 12)$$

Utilizando la tabla de distribución de Poisson, este probabidad da $1 - 0.0023 = 0.9977$.

2. Si en 60 seg. arriban en promedio 12 consultas entonces en 2 minutos arriban 24 consultas en promedio, por lo tanto el número de consultas, Y, que llegan en dos minutos sigue una distribución de Poisson $Y \sim P(24)$.

   La probabilidad de que reciba 20 consultas en dos minutos es

$$P(Y=20) = \frac{e^{-24}(24)^{20}}{20!}$$

3. Si en 60 seg. arriban en promedio 12 consultas entonces en 7.5 segundos arriban 1.5 consultas en promedio, por lo tanto el número de llamadas, Z, que llegan en 7.5 segundos sigue una distribución de Poisson $Z \sim P(1.5)$.

   La probabilidad de que después del arribo de una consulta pasen menos de 7.5 segundos antes del arribo de la siguiente debe verse como la probabilidad de que en 7.5 segundos llegue al menos una consulta.

$$P([Z \geq 1]) = 1 - P([Z=0]) = 1 - \frac{e^{-1.5}(1.5)^0}{0!}$$

2.1. Esperanza y Varianza de la distribución de Poisson

Para una distribución de Poisson se tiene que la esperanza es

$$\begin{aligned}
\mu_X &= \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{i+1}}{(i)!} \\
&= e^{-\lambda} \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i)!} \\
&= e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} \\
&= \lambda.
\end{aligned}$$

Para calcular la varianza de una distribución de Poisson es mejor utilizar la función generadora de momentos.

La función generadora de momentos para una Poisson de parámetro λ se calcula recurriendo a la expresión:

$$m_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} e^{tk} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

Derivando dos veces y evaluando en cero, se obtiene que $E[X^2] = \lambda^2 + \lambda$, esto unido con el resultado anterior permite obtener que la varianza de una Poisson de parámetro λ es λ.

Teorema 2.

Para una variable aleatoria Poisson se cumple $\mu_X = \lambda$ y $\sigma_X^2 = \lambda$

3. Otras distribuciones y ejemplos

Ejemplo 4.

La escuela Sonrisa todos los años toma los mejores promedios por sexo (dos hombres y dos mujeres) de cada nivel (de 1° a 6°). De estos 24 estudiantes, elige al azar seis para que salgan en el desfile del 15 de setiembre.

1. ¿Cual es la probabilidad de que próximo año desfilen solamente mujeres?
2. En 10 años, ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos en dos de ellos desfilen solo mujeres?

Solución

1. ¿Cual es la probabilidad de que próximo año desfilen solamente mujeres?
   Considere la variable
   $$X : \text{\# de mujeres escogidas}$$
   Note que $X \sim H(6,24,12)$, por lo tanto:
   $$P(X=6) = \frac{C(12,6)\cdot C(12,0)}{C(24,6)} = \frac{3}{437}$$

2. En 10 años, ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos en dos de ellos desfilen solo mujeres?
   Considere la variable
   $$Y : \text{\# de desfiles con solo mujeres de 10}$$
   Note que $Y \sim B\left(10, \frac{3}{437}\right)$, por lo tanto:
   $$P(Y \geq 2) = 1 - \sum_{x=0}^{1} C(10,x)\left(\frac{3}{437}\right)^x \left(\frac{434}{437}\right)^{10-x} = 0.0020445$$

Por otra lado, en los libros de texto existen dos maneras de definir la variable aleatoria Geométrica y esto influye en la forma de la distribución de X, aunque al final los resultados son los mismos:

Teorema 3.

Sea p la probabilidad de obtener un éxito en extracciones que se realizan con reposición, entonces:

X : # de extracciones **hasta** obtener un éxito	Y : # de extracciones **antes** de obtener el primer un éxito
$X \sim G(p)$ con $R_x = \{1,2,3,\ldots\}$	$Y \sim G(p)$ con $R_x = \{0,1,2,3,\ldots\}$
$f_X(k) = P(X=k) = q^{k-1}p$	$f_Y(k) = P(Y=k) = q^k p$
Si $m \in \mathbb{N}^*$: $F_X(m) = 1-q^m$	Si $m \in \mathbb{N}$: $F_Y(m) = 1-q^{m+1}$

Ejemplo 5.

Un restaurante ofrece servicio express de 2:00 p.m. a 10:00 p.m. de lunes a viernes. Se ha estimado que el número de llamadas recibidas para solicitar un pedido express sigue una distribución de Poisson con un promedio de 12 llamadas por día. El restaurante puede atender un máximo de 15 pedidos por día.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el restaurante no pueda atender todos los pedidos de un día?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana dada, el jueves sea el primer día que no pueda atender todos sus pedidos?

Solución

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el restaurante no pueda atender todos los pedidos de un día?
   Considere la variable
   $$X : \# \text{ de llamadas por día}$$
   Note que $X \sim P(12)$, por lo tanto:
   $$P(X > 15) = 1 - P(12; 15) = 1 - 0.8444 = 0.1556$$
2. ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana dada, el jueves sea el primer día que no pueda atender todos sus pedidos?
   Considere la variable
   $$Y : \# \text{ de días, } \textbf{antes} \text{ del día que no se atiendan todos los pedidos}$$
   Note que $Y \sim G(0.1556)$, por lo tanto:
   $$P(Y = 3) = 0.8444^3 0.1556 = 0.0936816$$

Ejemplo 6.

Sean X y Y variables aletorias discretas tales que $E(X) = 4$, $Var(X) = \dfrac{16}{5}$ y $Y = X^2 - 3X + 2$. Determine la esperanza de Y.

Solución
Como $Var(X) = E(X^2) - (\mu_X)^2$ despejando se obtiene que
$$E(X^2) = \frac{16}{5} + 16 = \frac{96}{5}$$
Por lo tanto,
$$E(Y) = E(X^2) - 3E(X) + 2 = \frac{96}{5} - 3 \cdot 4 + 2 = \frac{46}{5}$$

Ejemplo 7.

En una caja inicialmente hay 1 bola blanca y 4 bolas rojas. Un experimento consiste en sacar bolas sin reposición hasta extraer una bola blanca. Sea X el número de bolas rojas extraidas antes de sacar la bola blanca. Determine al rango de la variable X y la función de distribución de probabilidad de X.

Solución

Note que

$$R_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Además, el lector puede comprobar facilmente que

1. *a*) $f_X(0) = \dfrac{1}{5}$

   b) $f_X(1) = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{5}$

   c) $f_X(2) = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{5}$

   d) $f_X(3) = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{5}$

   e) $f_X(4) = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{5}$

Por lo tanto,

$$f_X(k) = \frac{1}{5} \text{ para } k = 0.1, 2, 3, 4.$$

4. Ejercicios Propuestos

1. Una fraternidad femenina tiene 12 integrantes de las cuales 6 aceptan la unión libre. Se eligen 7 personas de esa fraternidad y se denota por X el número de ellas que aceptan el unión libre. Determine la distribución de probabilidad para X.

   Solucin:

   X puede tomar valores desde 1 hasta 6 y $f_X(x) = \dfrac{\binom{6}{x}\binom{6}{7-x}}{\binom{12}{7}}$

2. La cervecería Costa Rica recibe envases de vidrio de un centro de reciclaje ubicado en Alajuela en lotes de 50 envases. Su proveedor garantiza que no más de 3 envases están defectuosos en cada uno de los lotes. La cervecería para poder aceptar un lote toma el mismo y selecciona una muestra de 10 envases y rechaza el lote en caso de determinar más de un envase defectuoso.

a) Determine la probabilidad de aceptar un lote determinado.

Solucin:
Para resolver este ejercicio de manera simple, asuma que exactamente 3 envases están defectuosos en cada lote. Si X es el número de envases defectuosos, entonces la probabilidad de rechazar un lote está determinada por:

$$P[X \geq 2] = 1 - P[X < 2] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1] = 1 - \frac{\binom{47}{3}\binom{3}{0}}{\binom{50}{3}} - \frac{\binom{47}{1}\binom{3}{1}}{\binom{50}{3}}$$

b) Si durante un día determinado se inspeccionan un total de 300 lotes, ¿cuántos lotes se espera que sean rechazados?

Solucin:
El número de lotes rechazados sigue una binomial $b(x;300,\lambda)$ y el promedio es 300λ.

3. Una estación de superservicio brinda varios servicios a sus clientes. Los clientes que requieren servicio llegan a esta estación a razón de 2 clientes cada 5 minutos y siguen una distribución de Poisson.

a) Determine la probabilidad de que en un minuto cualquiera lleguen más de 2 clientes.

Solucin:
Como llegan 2 clientes cada 5 minutos, entonces el valor de λ es 2/5. Si X es el número de clientes por minuto, entonces:

$$\begin{aligned} P[X > 2] &= 1 - P[X = 0] - P[X = 1] - P[X = 2] \\ &= 1 - \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^0 e^{\frac{-2}{5}}}{0!} - \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^1 e^{\frac{-2}{5}}}{1!} - \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^2 e^{\frac{-2}{5}}}{2!} \end{aligned}$$

b) Determine la probabilidad de que no más de tres clientes lleguen en un intervalo de 20 minutos.

Solucin:
Para este caso tenemos, $\lambda = 8$.

$$P[X \leq 3] = \frac{8^0 e^{-8}}{0!} + \frac{8^1 e^{-8}}{1!} + \frac{8^2 e^{-8}}{2!} + \frac{8^3 e^{-8}}{3!}$$

4. El número de accidentes por semana en la ciudad de San José, sigue una distribución de Poisson N con media 100 accidentes. El número de veces que ocurren lesiones importantes en esos accidentes sigue una distribución binomial de parámetros N y $p = 0.2$. ¿Cuál es la distribución de probabilidad para Y, el número de personas por semana que sufren lesiones importantes en accidentes de tránsito

en San José? ¿Cuál es la esperanza de Y?

Solucin:

Este es un ejercicio un poco largo y elaborado, requiere un par de simplificaciones para que se pueda realizar, Y es el número de accidentes y M el número de accidentes importantes con $Y \leq N$.

La variable aleatoria Y toma valores $0,1,2,3,\ldots$ es decir puede haber 0 o más lesionados.

Para que Y alcance el valor k de debe darse:

$$[(N=k)\wedge(M=k)]\vee[(N=k+1)\wedge(M=k)]\vee\cdots\vee[(N=k+r)\wedge(M=k)]$$

Es decir:

$$P[N=k]=\frac{100^k e^{-100}}{k!}\binom{k}{k}\left(\frac{2}{10}\right)^k\left(\frac{8}{10}\right)^0+\frac{100^{k+1}e^{-100}}{(k+1)!}\binom{k+1}{k}\left(\frac{2}{10}\right)^k\left(\frac{8}{10}\right)^1+$$

$$\cdots\frac{100^{k+r}e^{-100}}{(k+r)!}\binom{k+r}{k}\left(\frac{2}{10}\right)^k\left(\frac{8}{10}\right)^r=$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{100^{k+r}e^{-100}}{(k+r)!}\binom{k+r}{k}\left(\frac{2}{10}\right)^k\left(\frac{8}{10}\right)^r=$$

Haciendo algunas manipulaciones algebraicas obtenemos

$$P[N=k]=\frac{100^k e^{-100}}{k!}\left(\frac{2}{10}\right)^k\sum_{r=0}^{\infty}\frac{80^r}{(r)!}=\frac{100^k e^{-100}}{k!}\left(\frac{2}{10}\right)^k e^{80}=\frac{20^k e^{-20}}{k!}$$

Una Poisson de parámetro $\lambda=20$

5. Un detallista determina que el número de órdenes para cierto artículo en un periodo dado sigue una distribución de Poisson con parámetro 20. Él desea determinar el nivel de almacenamiento K para el inicio de periodo, de modo que exista una probabilidad de al menos .95 de satisfacer a todos los clientes que solicitan el artículo durante ese periodo. ¿Cuál es el valor de K?

Solucin

Es un problema distinto, lo que se requiere es determinar un valor K tal que la probabilidad de que la variable X sea menor o igual a ese valor k sea mayor a 0.95. Como X sigue una Poisson de parámetro 20 lo que se debe resolver es

$$P(k;20)>0.95$$

con un poco de inspección se obtiene que si $k=28$ entonces $P[X<29]>0.95$ es decir si hay 28 artículos hay un 95% o más de probabilidad de que todos los clientes estén satisfechos.

6. En una urna hay 20 bolillas azules y 10 blancas, determine la distribución de probabilidad de cada uno de los siguientes experimentos, incluya posibles valores y distribución.

a) Se extraen una a una bolillas de la caja se ve su color se registra y se retorna a la urna, si se sacan 20 bolillas y la variable aleatoria de interés y el total de bolillas blancas que se extraen.

Solucin
Binomial $b(x.20, 1/3)$

b) Se extraen una a una bolillas de la caja se ve su color y se retorna a la urna, si se sacan bolillas hasta completar 3 blancas. La variable de interés es el número de bolillas que se necesita extraer para completar el experimento.

Solucin
Binomial negativa $bn(x;3,1/3)$

c) Se extraen 25 bolillas sin reposición y la variable de interés es número de bolillas azules en la muestra.

Solucin Hipergeomtrica $h(x,25,20,10)$, $x = 5,\ldots 20$

7. Un sistema de emergencias recibe llamadas en forma aleatoria de acuerdo a una distribución Poisson con promedio dos llamadas por hora. Cuál es la probabilidad de que en un periodo de 4 horas haya mas 11 llamadas?, cuál es la probabilidad de 25 o más llamadas en un periodo de 8 horas?

Solucin

En 4 horas $\lambda = 8$ y $1 - \sum_{i=1}^{11} \frac{8^i e^{-8}}{i!}$, el otro es casi igual.

8. Determine las medias de la binomial y la Poisson usando la definición.

Solucin:

- De la poisson tenemos:

$$\mu_X = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

- La binomial es algo mas complicada (si se desea se puede usar la generadora de momentos):

$$\mu_X = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$
$$np \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

La suma en la última expresión correponde con $(1-p+p)^{n-1} = 1$ por lo que la media es np

9. En promedio una pulpería vende 5 litros de leche cada día. Como el carro repartidor llega cada 3 días el dueño de la pulpería desea determinar la menor cantidad de litros que debe almacenar para cumplir con la demanda el al menos el 90 % de los casos. Cuántos litros debe almacenar?

   Solucin:

   Es un problema directo de uso de tablas la pregunta se puede replantear como sigue, si X es la variable aleatoria que indica el total de litros vendidos entocnes interesa encontrar un X tal que $P[X \leq k] = 0.9$ Uno se va a la tabla de Poisson con $\lambda = 15$ que es el promedio para tres días y buscas el k ninimo que da una acumulada menor que 0.9.

10. Una Caja contiene 3 monedas de 500 y 4 de 100. Una persona extrae sin reposición 4 monedas. Determine la distribución de probabilidad para el total de dinero que saca de la caja. Si esta persona cada vez que juega paga 700 colones y lo que saca es su premio le conviene jugar muchas veces.

    Solucin:

    En el fondo se trata de una hipergeomtrica, pero una tabla puede ayudar dado que es simple de hacer

Valor	Casos	Probabilidad
400	100,100,100,100	$\frac{\binom{4}{4}\binom{3}{0}}{\binom{7}{4}}$
800	100,100,100,500 y permutaciones	$\frac{\binom{4}{3}\binom{3}{1}}{\binom{7}{4}}$
1200	100,100,500,500 y permutaciones	$\frac{\binom{4}{2}\binom{3}{2}}{\binom{7}{4}}$
1600	100,500,500,500 y permutaciones	$\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{3}}{\binom{7}{4}}$

    Para calcular media el proceso es natural

$$400\frac{\binom{4}{4}\binom{3}{0}}{\binom{7}{4}} + 800\frac{\binom{4}{3}\binom{3}{1}}{\binom{7}{4}} + \ldots$$

11. El total de personas que atienden un anuncio sobre una lotería por internet sigue una distribución Poisson con promedio 5 personas por semana. Determine la probabilidad de que en un periodo de dos días haya dos o más personas que atienden el anuncio.

    Solucin: Se tiene $\lambda = 10/7$, as

$$1 - p(0, \lambda) - p(1, \lambda)$$

12. Se sabe que de 30 árbitros de fútbol en una comisión, 20 cometen errores graves con frecuencia. Si cada jornada deben elegirse 12 árbitros, determine la probabilidad de que:

- En una jornada haya más de 5 que cometen errores graves con frecuencia.

  Solucin:
  Hipergeomŕica
  $$p = 1 - H(5, 12, 20, 10)$$

- Deban darse la próximas 7 jornadas para acumular 2 jornadas en las que haya habido más de 5 árbitros que cometen errores graves con frecuencia.

  Solucin:
  Binomial negativa
  $$bn(7, 2, p)$$

13. Hay 15 cartas 4 de ellas están señaladas con un premio de 50 colones y las demás con premios de 100 colones. Si una persona puede elegir al azar 6 de esas cartas cuál es la probabilidad de que gane más de 400 colones.

    Solucin:

    Se trata de un ejercicio directo o bien una distribución de probabilidad Lo más natural es darse cuenta de que se trata de una hipergeométrica y la probabilidad pedida es

    $$1 - \frac{\binom{4}{4}\binom{11}{2}}{\binom{15}{6}}$$

14. Suponga que un sistema se ajusta para que en promedio la policía vigile una ubicación una vez durante cada periodo de media hora, y que el número de veces que la policía vigila esa ubicación sigue una distribución de Poisson.

    a) Determine la probabilidad de que durante un periodo de media hora la policia no pase a vigilar ninguna vez.

    Solucin:

    $$p(0, 1) = \frac{1^0 e^{-1}}{0!} = e^{-1}$$

    b) Determine la probabilidad que que la policia pase al menos una vez durante un periodo de media hora.

    Solucin:
    Es el complemento del ejercicio anterior

    $$1 - e^{-1}$$

c) Detemine la probabilidad de que la policia pase a entre 12 y 25 veces por una ubicación durante un periodo de 8 horas.

Solucin:

$$\sum_{I=12}^{25} \frac{16^i e^{-16}}{i!}$$