Otras distribuciones de probabilidad continuas

Escuela de Matemática

Semana 13

Giovanni Sanabria Brenes

Luis Ernesto Carrera Retana

Erick Chacón Vargas

Mario Marín Sánchez

Rebeca Solís Ortega

Distribución de Probabilidad Uniforme

Definición 1 (Función de distribución continua uniforme)**.**

Una variable aleatoria X es continua uniforme en un itervalo $[a,b]$ si tiene una distribución de la forma

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{Si} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Se escribe $X \sim U[a,b]$.

El siguiente teorema brinda las principales carácterísticas de la distribución uniforme. Es un buen ejercicio demmostrar estas propiedades con base en la teoría básica de variables aleatorias continuas, estudiada.

Teorema 1.

Dada una función de distribución continua uniforme en un itervalo $[a,b]$ se tiene que:

- La media corresponde a:
$$\mu_X = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$
- La varianza corresponde a:
$$\sigma_X^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 dx = \frac{(b-a)^2}{12}$$
- La función generadora de momentos corresponde a:
$$M_X(t) = \int_a^b \frac{1}{b-a} e^{tx} dx = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}$$

Ejemplo 1.

Entre las ciudades A y B existe una autopista de 20km. Un experto asegura que un accidente puede ocurrir en cualquier punto de la pista con igual probabilidad. ¿En qué parte de la autopista colocaría un puesto con una ambulancia para atender una eventual emergencia de forma rápida?

Solución. Sea X el kilómetro de A hacia B donde ocurre el próximo accidente. De acuerdo a lo indicado por el experto, se tiene que $X \sim U[0,20]$. Note que

$$f_X(x) = \frac{1}{20} \text{ si } 0 \leq x \leq 20.$$

Lo mejor sería colocar la ambulancia en el lugar donde se esperaría que ocurra el próximo accidente, es decir en $E(X)$. Si bien esta esperanza se puede calcular utilizando la función de distribución, es más sencillo por el teorema anterior, se tiene que $E(X) = 10$.

Por lo tanto, el puesto con la ambulancia se debe colocar en el kilómetro 10, lo cual tiene sentido pues en el punto medio es donde más cerca se está, en promedio, de los demás puntos.

El teorema siguiente nos permite calcular la función de distribución de una variable continua a partr de la distribución acumulada.

Teorema 2.

Si $F_X(x)$ corresponde a una funciónn de la distribución de probabilidad acumulada para una variable X, es decir $F_X(x) = P[X \leq x]$ entonces $F'_X(x) = f_X(x)$ es la densidad de probabilidad para X.

La demostración del teorema anterior se puede realizar utilizando el teorema fundamental del cálculo.

Distribución de Probabilidad Exponencial

Definición 2.

Si una variable aleatoria continua X tiene una distribución de probabilidad de la forma

$$f_X(x) = f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & : \text{ Para } \lambda > 0 \\ 0 & : \text{ En cualquier otro caso} \end{cases},$$

se dice que la variable X sigue una distribución de tipo exponencial. Se escribe $X \sim Exp(\lambda)$.

En realidad la distribución exponencial es un caso especial de la distribución gamma que se verá más adelante. Ya se ha abordado antes algunos aspectos relativos a la distribución exponencial. Como ejercicio, el estudiante puede demostrar los dos teoremas siguientes.

Teorema 3.

Si una variable aleatoria continua X, sigue una distribución de tipo exponencial, se cumple que su probabilidad acumulada tiene la forma

$$F_X(x) = F(x;\lambda) = \begin{cases} 0 & : \text{ Para } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & : \text{ Para } x \geq 0 \end{cases}, \tag{1}$$

Teorema 4.

Si X sigue una distribución exponencial de parámetro λ se cumple que:

- $E[X] = \dfrac{1}{\lambda}$
- $Var[X] = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Ejemplo 2.

El tiempo que tarda un persona en localizar un archivo en su escritorio sigue una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 2$ minutos. Determine :

1. La probabilidad de que en la próxima búsqueda dure menos de 3.
2. La probabilidad de que tarde entre 1.5 y 2.5 minutos .

Solución:
Sea X: tiempo que tarda la persona en localizar un archivo. Note que

$$X \sim Exp(2)$$

La probabilidad de que en la próxima búsqueda dure menos de 3 minutos es $P(X < 3) = F_X(3) = 1 - e^{-6} = 0.997$.

Mientras tanto, la probabilidad de que tarde entre 1.5 y 2.5 minutos es de $P(1.5 < X < 2.5) = F_X(2.5) - F_X(1.5) = 0.043$.

Teorema 5.

Tanto la distribución geométrica como la exponencial comparten una propiedad que establece que éstas no tienen memoria. Esto es, en el caso exponencial, que si T es una variable aleatoria que sigue esta distribución se tiene:

$$P[T > r+s | T > r] = P[T > s]$$

La prueba es muy sencilla en ambos casos se deja para el estudiante.

El siguiente teorema establece una relación importante entre las distribuciones Exponencial y Poisson.

Teorema 6.

Si X (el número de ocurrencias por unidad) sigue una distribución de Poisson con promedio λ, entonces el tiempo entre ocurrencias sucesivas del evento sigue una distribuciónn exponencial con parámetro λ.

Demostremos el teorema anterior. Suponga que el número de ocurrencias por unidad de tiempo sigue una distribución de Poisson con parámetro λ. Y sea T el tiempo que transcurre entre dos ocurrencias sucesivas. Note que T es una variable aleatoria contínua, además Z (el número de ocurrencias en un intervalo de longitud t unidades) sigue una distribución de Poisson con parámetro λt. Note que:

$$F_T(t) = P[T \leq t] = 1 - P[T > t] = 1 - P[Z = 0] = 1 - \frac{\lambda^0 e^{-\lambda t}}{0!}$$

Note que $T > t$ equivale a que el tiempo entre ocurrencias sucesivas es mayor que t, lo cual equivale a que hubo ninguna ocurrencia en un de longitud t unidades, es decir, equivale a que $Z = 0$.

Derivando se obtiene que $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ que es exponencial, por lo que se concluye el teorema.

Ejemplo 3.

Suponga que en promedio a una central de llamadas de emergencia entran 2 llamadas por minuto. Determine la probabiliad de que en el tiempo entre dos llamadas consecutivas sea superior a 45 segundos.

Solución:

Dado que el total de ocurrencias sigue una distribución de Poisson con 2 llamadas por minuto, y que se solicita el tiempo entre dos llamadas consecutivas, se puede deducir que el tiempo entre llamadas T es exponencial con parámetro $\lambda = 2$. Así la probabilidad pedida es:

$$P\left[T \leq \frac{3}{4}\right] = 1 - e^{-\frac{3}{2}}$$

Distribución de Probabilidad Gamma

Muchas veces, aún cuando una variable aleatoria no siga una distribución normal es posible que su comportamiento pueda ser modelado con distribuciones que siguen comportamientos similares a una normal pero sesgados.

Antes de poder estudiar este tipo de distribuciones se hace necesario definir una función sumamente importante en el estudio de diversos problemas en matemática.

Definición 3.

Se denota la función Gamma como $\Gamma(\alpha)$ y se define por:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx.$$

Así, por ejemplo tenemos:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = \lim_{M \longrightarrow \infty} -e^{-x}\Big|_0^M = 1.$$

Teorema 7.

Sea la función gamma $\Gamma(\alpha)$, se cumple:

$$\Gamma(\alpha+1) = (\alpha)\Gamma(\alpha)$$

Y si n es entero se tiene:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

La demostración de la primera parte del teorema anterior se obtiene al resolver por el método de integración por partes la integral correspondiente, así:

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty x^{\alpha} e^{-x}\, dx = \lim_{M \longrightarrow \infty} -\alpha x^{\alpha-1} e^{-x}|_0^M + \int_0^\infty \alpha x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$$

Luego con un poco de paciencia, y aplicando la regla de L'Hopital y algunos acotamientos se puede demostrar que el primer límite en la última expresión es 0, así:

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty \alpha x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx = \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx = \alpha\Gamma(\alpha).$$

También, usando algunos argumentos de cálculo en varias variables se puede calcular que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Aparte de un reducido número de argumentos el cálculo de valores de la función gamma debe hacerse utilizando métodos numéricos. Por eso se utiliza una tabla de valores para poder realizar las aproximaciones necesarias.

Definición 4.

Si X es una variable aleatoria continua entonces diremos que X sigue una distribución Gamma con parámetros α y β ambos mayores que cero si

$$f_X(x) = f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} & \text{Para } x \geq 0 \\ \\ 0 & \text{En cualquier otro caso} \end{cases}.$$

Se escribe

$$X \sim Gamma(\alpha,\beta).$$

El parámetro α puede verse como un parámetro de forma pues su modificación altera la forma de la distribución mientras que β funciona como un parámetro de escala.

Si en una distribución gamma $\beta = 1$ se dice que es una **distribución gamma estándar**.

Para una variable aleatoria continua, X, con distribución de probabilidad gamma de parámetros α y β, aplicando un cambio de variable $u = y/\beta$ se tiene que la función de distribución de probabilidad para X cumple:

$$\begin{aligned} P([X \leq x]) &= \int_0^x \frac{y^{\alpha-1}e^{-y/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\,dy \\ &= \int_0^{x/\beta} \frac{u^{\alpha-1}e^{-u}}{\Gamma(\alpha)}\,du \\ &= F\left(\frac{x}{\beta};\alpha\right) \end{aligned}$$

Esta última función se conoce como la función *gamma incompleta*, y sus valores suelen aparecer tabulados en libros de estadística. La tabla que corresponde a dicha funcin puede ser consultada en el Anexo # 1.

Teorema 8.

Si X es una variable aleatoria Gamma con parámetros α,β, se cumple que:

- $E(X) = \alpha\beta$
- $Var(X) = \alpha\beta^2$
- $m_X(t) = \dfrac{1}{(1-\beta\cdot t)^{\alpha}} \quad \text{si} \quad t < \dfrac{1}{\beta}$
- $P([X \leq x]) = F\left(\dfrac{x}{\beta};\alpha\right)$

Ejemplo 4.

Suponga que el tiempo de reacción para iniciar el frenado ante una emergencia, en la población de cierta edad sigue una distribución Gamma con media de 0.5 segundos y varianza de 0.1 segundos al cuadrado. Determine la probabilidad de que la respuesta de frenado en una situación de emergencia sea inferior 0.72 segundos.

Solución

Dado que la esperanza es 0.5 y la varianza 0.1 se tiene que:

$E(X) = \alpha\beta = 0.5$

$Var(X) = \alpha\beta^2 = 0.1$

De donde se obtiene que:

$\beta = \dfrac{\alpha\beta^2}{\alpha\beta} = \dfrac{0.1}{0.5} = \dfrac{1}{5}$ y $\alpha = \dfrac{\alpha\beta}{\beta} = \dfrac{5}{2}$.

En ese caso, si quisiéramos calcular la probabilidad de que la respuesta de frenado en una situación de emergencia sea inferior a 0.72 segundos, se tendrá que:

$$P[X \leq 0.72] = F\left(\frac{0.72}{0.2}, 2.5\right) = F(3.6, 2.5) \approx 0.7938$$

Ejemplo 5.

Suponga que el tiempo utilizado por una persona preparando un tipo particular de informe sigue una distribución gamma con media de 20 minutos y varianza 80 minutos cuadrados. Determine la probabilidad de que una persona elegida al azar tarde menos de 24 minutos preparando el informe.

Solución

Aplicando el teorema (8) se obtiene que $\alpha = 5$ y $\beta = 4$. Luego para determinar la probabilidad de que una persona elegida al azar tarde menos de 24 minutos preparando el informe debe resolverse

$$P[X \leq 24] = F\left(\frac{24}{4}, 5\right) = F(6, 5) = 0.715$$

Seguidamente se establece una relación entre las distribuciones de Poisson y Gamma.

Suponga que un evento A ocurre siguiendo una distribución de Poisson de parámetro λ, es decir $X \sim P(\lambda)$ en alguna unidad de tiempo, si T denota el tiempo que transcurre hasta que se den k ocurrrencias del evento A, nuevamene T es una variable aleatoria continua y la variable Z, total de ocurrencias del evento en el intervalo de tiempo t, es Poisson con parámetro λt, entonces su distribución acumulada de T se calcula de acuerdo a

$$F_T(t) = P[T \leq t] = 1 - P[T > t] = 1 - P[Z < k] = 1 - P[Z \leq k - 1]$$

Dicho de manera simple la probabilidad de que haya que esperar un tiempo inferior a t para observar el k-esimo evento es igual a la probabilidad de que se observen menos de k eventos desde el momento de inicio hasta el tiempo t.

Como $Z \sim P(\lambda t)$se tiene que:

$$
\begin{aligned}
F_T(t) &= 1 - P[Z \leq k-1] & (2)\\
&= 1 - \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} & (3)\\
&= 1 - e^{-\lambda t} \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^x}{x!} & (4)
\end{aligned}
$$

Derivando esta expresión, respeto a t obtenemos la fución de distribución de densidad de probabiliad, dado que es un producto que nos lleva a

$$
\begin{aligned}
f_T(t) &= \lambda e^{-\lambda t} \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^x}{x!} - e^{-\lambda t} \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\lambda)^x x t^{x-1}}{x!} & (5)\\
&= e^{-\lambda t} \left(\lambda \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^x}{x!} - \sum_{x=1}^{k-1} \frac{(\lambda)^x t^{x-1}}{(x-1)!} \right) & (6)\\
&= e^{-\lambda t} \left(\lambda \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^x}{x!} - \sum_{x=0}^{k-2} \lambda \frac{(\lambda t)^x}{(x-1)!} \right) & (7)\\
&= e^{-\lambda t} \lambda \left(\sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^x}{x!} - \sum_{x=0}^{k-2} \frac{(\lambda t)^x}{(x-1)!} \right) & (8)\\
& & (9)
\end{aligned}
$$

Simplificando, se van casi todos los terminos en la última resta, se obtiene

$$
f_T(t) = e^{-\lambda t} \lambda \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{t^{k-1} \lambda^k e^{-\lambda t}}{(k-1)!}
$$

y con un poco trabajo vemos que esta se trata de una Gamma de parámetros $\alpha = k$ y $\beta = \dfrac{1}{\lambda}$.

En resumen, si T denota el tiempo que transcurre hasta que se den k ocurrrencias del evento A, se tiene que

$$
T \sim Gamma(k, \frac{1}{\lambda}).
$$

Ejemplo 6.

En cierta ciudad el consumo de energía eléctrica, en millones de kilovatios por hora, sigue una distribución Gamma, con promedio 2 millones de kilovatios y desviación estándar $\sqrt{2}$ millones de kilovatios. Si el consumo de energía es superior a los 4 millones de kilovatios en una hora, la ciudad entra en crisis y se dice que ocurrió una hora crítica.

1. Determine la probabilidad de que el consumo de energía supere los 4 millones.de kilovatios en una hora.

2. En un día, ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos horas sean críticas?

Solución.

1. Determine la probabilidad de que el consumo de energía supere los 4 millones.de kilovatios en una hora.

$$\begin{aligned} & E(X) = \alpha\beta = 2, Var(X) = \alpha\beta^2 = 2 \\ \Longrightarrow \; & \beta = 1, \alpha = 2 \end{aligned}$$

   Entonces $X \sim Gamma(2,1)$. Utilizando la tabla de la Gamma Incompleta se tiene que

$$\begin{aligned} P(X > 4) &= 1 - P(X \leq 4) = 1 - F\left(\frac{2}{\beta}, \alpha\right) \\ &= 1 - F(2,2) = 1 - 0.594 = 0.406 \end{aligned}$$

2. En un día, ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos horas sean críticas?

$$Y : \text{Número de horas en que la ciudad entra en crisis, de 24.}$$
$$Y \sim B(24, 0.406)$$
$$P(Y > 2) = 1 - \sum_{k=0}^{2} C(24,k) 0.406^k 0.994^{24-k} = 0.9993$$

Ejercicios propuestos

1. El tiempo que tarda una persona en reaccionar a un estímulo sigue una distribución Gamma con media 2 minutos y varianza 2 minutos cuadrados, sabiendo esto:

   a) Plantee, no resuelva, la integral que permite calcular la probabilidad de que una persona al azar reaccione en menos de 3 minutos.

   Solución:
   Dado que la esperanza es 2 y la varianza es 2 se tiene que:

   $$\alpha\beta = 2 \quad \text{y} \quad \alpha\beta^2 = 2$$

   De donde se obtiene que $\beta = 1$ y $\alpha = 2$. Así la probabilidad solicitada corresponde a:

   $$\int_0^3 \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(2)} y^{\alpha-1} e^{-y}\, dy = \int_0^3 \frac{1}{\Gamma(2)} y e^{-y}\, dy$$

   b) Determine, usando la Gamma incompleta, la probabilidad de que una persona al azar reaccione en menos de 3 minutos.

   Solución:

   $$P[X \leq 3] = F\left(\frac{3}{1}, 2\right) = F(3,2) \approx 0.8009$$

2. Supóngase que el tiempo en horas que toma reparar una bomba es una variable aleatoria X, que tiene una distribución Gamma con parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = 1/2$. ¿Cuál es la probabilidad de que en el siguiente servicio:

   a) tome cuando mucho 1 hora reparar la bomba?

   Solución:

$$P[X \leq 1] = \frac{1}{(\frac{1}{2})^2\Gamma(2)} \int_0^1 x^{2-1}e^{-2x} \approx 0.5940$$

   o bien se puede utilizar la tabla de la gamma incompleta:

$$P[X \leq 1] = F\left(\frac{1}{1/2}, 2\right) = F(2,2) \approx 0.5940$$

   b) al menos se requieran 2 horas para reparar la bomba?

   Solución:

   Utilizando la gamma incompleta se tiene:

$$\begin{aligned} P[X \geq 2] = 1 - P[X < 2] &= 1 - F\left(\frac{2}{1/2}, 2\right) \\ &= 1 - F(4,2) \approx 0.0916 \end{aligned}$$

3. Cuando un vehículo viaja a 70 k/h la distancia que toma frenar, ante una emergencia, es una variable aleatoria X, que tiene una distribución Gamma con media $\mu = 20$ y desviación $\sigma = 5$. Al llegar a una curva un conductor que viaja a 70 k/h ve una vaca y frena para evitar golpearla. Si la vaca esta a 19 metros cuando el conductor frena determine la probabilidad de que el conductor atropelle a la vaca.

   Solución:

   Dado que la esperanza es 20 y la varianza 35 se tiene que:

$$\alpha\beta = 20 \quad \text{y} \quad \alpha\beta^2 = 25$$

   De donde se obtiene que $\beta = \frac{5}{4}$ y $\alpha = 16$. Luego la probabilidad de que el carro atropella a la vaca es:

$$P[X \geq 19] = 1 - \frac{1}{\Gamma(16)(\frac{5}{4})^{16}} \int_0^{20} x^{15}e^{-x}\,dx$$

   Aplicando 15 veces partes a la integral se obtiene:

$$\int_0^{20} x^{15}e^{-x}\,dx = (-x^{15} - 15x^{14} - 15 * 14x^{13} - 15 * 14 * 13x^{12} \cdots - 15!)e^{-x}|_0^{20}$$

   También se puede realizar con la gamma incompleta.

4. Los clientes llegan a una ventanilla de banco para pedir información sobre crédito siguiendo una distribución de probabilidad Poisson con promedio un cliente cada dos horas. Una persona decide esperarse el tiempo necesario hasta que llegue el quinto cliente. Detemine la probablidad de que esa persona deba esperar por mas de 4 horas.

   Solución:

   Dado que los clientes llegan a la ventanilla siguiendo una distribución de Poisson con promedio 1 cliente cada dos horas, y que se solicita el tiempo que debe esperar una persona hasta que llegue el quinto cliente, se puede deducir que dicho tiempo T sigue una distribución Gamma.

   Se tiene que $\lambda = 1$ si se tienen dos horas, por lo que $\lambda = 0.5$ si se hace cada hora. Así tenemos que los parámetros de la Gamma son $\alpha = 5$, $\beta = 2$. Así la probabilidad pedida es:

$$
\begin{aligned}
P[T > 4] &= 1 - P[T \leq 4] \\
&= 1 - F\left(\frac{4}{2}, 5\right) \\
&= 1 - 0.0527 \\
&= 0.9473
\end{aligned}
$$

Anexo: Tabla de distribución acumulada de la función gamma $\Gamma(x, \alpha)$

$x \setminus \alpha$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5
1	0.8427	0.6321	0.4276	0.2642	0.1509	0.0803	0.0402	0.0190	0.0085	0.0037	0.0015
1.5	0.9167	0.7769	0.6084	0.4422	0.3000	0.1912	0.1150	0.0656	0.0357	0.0186	0.0093
2	0.9545	0.8647	0.7385	0.5940	0.4506	0.3233	0.2202	0.1429	0.0886	0.0527	0.0301
2.5	0.9747	0.9179	0.8282	0.7127	0.5841	0.4562	0.3400	0.2424	0.1657	0.1088	0.0688
3	0.9857	0.9502	0.8884	0.8009	0.6938	0.5768	0.4603	0.3528	0.2601	0.1847	0.1266
3.5	0.9918	0.9698	0.9281	0.8641	0.7794	0.6792	0.5711	0.4634	0.3629	0.2746	0.2009
4	0.9953	0.9817	0.9540	0.9084	0.8438	0.7619	0.6674	0.5665	0.4659	0.3712	0.2867
4.5	0.9973	0.9889	0.9707	0.9389	0.8909	0.8264	0.7473	0.6577	0.5627	0.4679	0.3781
5	0.9984	0.9933	0.9814	0.9596	0.9248	0.8753	0.8114	0.7350	0.6495	0.5595	0.4696
5.5	0.9991	0.9959	0.9883	0.9734	0.9486	0.9116	0.8614	0.7983	0.7243	0.6425	0.5567
6	0.9995	0.9975	0.9926	0.9826	0.9652	0.9380	0.8994	0.8488	0.7867	0.7149	0.6364
6.5	0.9997	0.9985	0.9954	0.9887	0.9766	0.9570	0.9279	0.8882	0.8374	0.7763	0.7067
7	0.9998	0.9991	0.9971	0.9927	0.9844	0.9704	0.9488	0.9182	0.8777	0.8270	0.7670
7.5	0.9999	0.9994	0.9982	0.9953	0.9896	0.9797	0.9640	0.9409	0.9091	0.8679	0.8175
8	0.9999	0.9997	0.9989	0.9970	0.9932	0.9862	0.9749	0.9576	0.9331	0.9004	0.8589
8.5	1	0.9998	0.9993	0.9981	0.9955	0.9907	0.9826	0.9699	0.9513	0.9256	0.8921
9	1	0.9999	0.9996	0.9988	0.9971	0.9938	0.9880	0.9788	0.9648	0.9450	0.9184
9.5	1	0.9999	0.9997	0.9992	0.9981	0.9958	0.9918	0.9851	0.9748	0.9597	0.9389
10	1	1	0.9998	0.9995	0.9988	0.9972	0.9944	0.9897	0.9821	0.9707	0.9547
10.5	1	1	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9962	0.9929	0.9873	0.9789	0.9666
11	1	1	0.9999	0.9998	0.9995	0.9988	0.9975	0.9951	0.9911	0.9849	0.9756
11.5	1	1	1	0.9999	0.9997	0.9992	0.9983	0.9966	0.9938	0.9893	0.9823
12	1	1	1	0.9999	0.9998	0.9995	0.9989	0.9977	0.9957	0.9924	0.9873
12.5	1	1	1	0.9999	0.9999	0.9997	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9909
13	1	1	1	1	0.9999	0.9998	0.9995	0.9989	0.9980	0.9963	0.9935
13.5	1	1	1	1	0.9999	0.9999	0.9997	0.9993	0.9986	0.9974	0.9954
14	1	1	1	1	1	0.9999	0.9998	0.9995	0.9990	0.9982	0.9968
14.5	1	1	1	1	1	0.9999	0.9999	0.9997	0.9994	0.9988	0.9977
15	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991	0.9984
15.5	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9999	0.9997	0.9994	0.9989
16	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992
16.5	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9999	0.9997	0.9995
17	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9998	0.9996
17.5	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9999	0.9998
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9998
18.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9999
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999
19.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
20.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
22.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
23.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
24.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Anexo: Tabla de distribución acumulada de la función gamma $\Gamma(x,\alpha)$ (Continuación)

$x \setminus \alpha$	$\cdots$	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5	10
1	$\cdots$	06	02	01	0	0	0	0	0	0
1.5	$\cdots$	0.0045	0.0021	09	04	02	01	0	0	0
2	$\cdots$	0.0166	0.0088	0.0045	0.0023	0.0011	05	02	01	0
2.5	$\cdots$	0.0420	0.0248	0.0142	0.0079	0.0042	0.0022	0.0011	06	03
3	$\cdots$	0.0839	0.0538	0.0335	0.0203	0.0119	0.0068	0.0038	0.0021	0.0011
3.5	$\cdots$	0.1424	0.0978	0.0653	0.0424	0.0267	0.0165	0.0099	0.0058	0.0033
4	$\cdots$	0.2149	0.1564	0.1107	0.0762	0.0511	0.0335	0.0214	0.0133	0.0081
4.5	$\cdots$	0.2971	0.2271	0.1689	0.1225	0.0866	0.0597	0.0403	0.0265	0.0171
5	$\cdots$	0.3840	0.3061	0.2378	0.1803	0.1334	0.0964	0.0681	0.0471	0.0318
5.5	$\cdots$	0.4711	0.3892	0.3140	0.2474	0.1905	0.1434	0.1056	0.0762	0.0538
6	$\cdots$	0.5543	0.4724	0.3937	0.3210	0.2560	0.1999	0.1528	0.1144	0.0839
6.5	$\cdots$	0.6310	0.5522	0.4735	0.3977	0.3272	0.2638	0.2084	0.1614	0.1226
7	$\cdots$	0.6993	0.6262	0.5503	0.4745	0.4013	0.3329	0.2709	0.2163	0.1695
7.5	$\cdots$	0.7586	0.6926	0.6218	0.5486	0.4754	0.4045	0.3380	0.2774	0.2236
8	$\cdots$	0.8088	0.7509	0.6866	0.6179	0.5470	0.4762	0.4075	0.3427	0.2834
8.5	$\cdots$	0.8504	0.8007	0.7438	0.6811	0.6144	0.5456	0.4769	0.4101	0.3470
9	$\cdots$	0.8843	0.8425	0.7932	0.7373	0.6761	0.6112	0.5443	0.4776	0.4126
9.5	$\cdots$	0.9115	0.8769	0.8351	0.7863	0.7313	0.6715	0.6082	0.5432	0.4782
10	$\cdots$	0.9329	0.9048	0.8699	0.8281	0.7798	0.7258	0.6672	0.6054	0.5421
10.5	$\cdots$	0.9496	0.9271	0.8984	0.8632	0.8215	0.7737	0.7206	0.6632	0.6029
11	$\cdots$	0.9625	0.9446	0.9214	0.8922	0.8568	0.8153	0.7680	0.7157	0.6595
11.5	$\cdots$	0.9723	0.9583	0.9397	0.9159	0.8863	0.8507	0.8094	0.7627	0.7112
12	$\cdots$	0.9797	0.9689	0.9542	0.9349	0.9105	0.8806	0.8450	0.8038	0.7576
12.5	$\cdots$	0.9852	0.9769	0.9654	0.9501	0.9302	0.9053	0.8751	0.8395	0.7986
13	$\cdots$	0.9893	0.9830	0.9741	0.9620	0.9460	0.9255	0.9002	0.8698	0.8342
13.5	$\cdots$	0.9923	0.9876	0.9807	0.9713	0.9585	0.9419	0.9210	0.8953	0.8647
14	$\cdots$	0.9945	0.9910	0.9858	0.9784	0.9684	0.9551	0.9379	0.9166	0.8906
14.5	$\cdots$	0.9961	0.9935	0.9895	0.9839	0.9761	0.9655	0.9516	0.9340	0.9122
15	$\cdots$	0.9972	0.9953	0.9924	0.9881	0.9820	0.9737	0.9626	0.9482	0.9301
15.5	$\cdots$	0.9980	0.9966	0.9945	0.9912	0.9865	0.9800	0.9712	0.9596	0.9448
16	$\cdots$	0.9986	0.9976	0.9960	0.9936	0.9900	0.9850	0.9780	0.9687	0.9567
16.5	$\cdots$	0.9990	0.9983	0.9971	0.9953	0.9926	0.9887	0.9833	0.9760	0.9663
17	$\cdots$	0.9993	0.9988	0.9979	0.9966	0.9946	0.9916	0.9874	0.9816	0.9739
17.5	$\cdots$	0.9995	0.9992	0.9985	0.9975	0.9960	0.9938	0.9905	0.9860	0.9799
18	$\cdots$	0.9997	0.9994	0.9990	0.9982	0.9971	0.9954	0.9929	0.9894	0.9846
18.5	$\cdots$	0.9998	0.9996	0.9993	0.9987	0.9979	0.9966	0.9948	0.9921	0.9883
19	$\cdots$	0.9998	0.9997	0.9995	0.9991	0.9985	0.9975	0.9961	0.9941	0.9911
19.5	$\cdots$	0.9999	0.9998	0.9996	0.9994	0.9989	0.9982	0.9972	0.9956	0.9933
20	$\cdots$	0.9999	0.9999	0.9997	0.9995	0.9992	0.9987	0.9979	0.9967	0.9950
20.5	$\cdots$	1	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994	0.9991	0.9985	0.9976	0.9963
21	$\cdots$	1	0.9999	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9989	0.9982	0.9972
21.5	$\cdots$	1	1	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9992	0.9987	0.9980
22	$\cdots$	1	1	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994	0.9991	0.9985
22.5	$\cdots$	1	1	1	0.9999	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9989
23	$\cdots$	1	1	1	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9992
23.5	$\cdots$	1	1	1	1	0.9999	0.9999	0.9998	0.9996	0.9994
24	$\cdots$	1	1	1	1	1	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996
24.5	$\cdots$	1	1	1	1	1	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997
25	$\cdots$	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9999	0.9998