TEC Tecnológico de Costa Rica

Probabilidad: Combinatoria elemental

Escuela de Matemática

Semana 4

Esta es una semana estudiaremos algunos conceptos básicos de combinatoria. Aprenderemos a resolver problemas que involucran *combinaciones y permutaciones.* Si bien los principios que se estudian son bastante simples, la aplicación de éstos al planteo y solución de problemas requiere de una buena cuota de trabajo. En especial requieren una comprensión adecuada del problema y una definición de la estrategia de solución. Debe prestarse mucha atención para decidir sobre posibles descomposiciones del problema en casos, ya sea por la imposibilidad de resolverlo en un solo caso, o para lograr una simplificación.

1. Reglas básicas

Cada vez que debamos realizar una tarea o labor, en la cual existen diversas posibilidades y debemos de elegir una de ellas, podemos aplicar el principio de la suma para contar las posibles alternativas.

Principio 1 (Regla de la Suma)**.**

Si una operación puede realizarse en n formas y otra operación, independiente de la primera, puede realizarse en m formas, hay $n+m$ formas en las que pueden realizarse una de las dos operaciones.

En terminología de teoría de conjuntos:

$$\text{Si } \ (\forall i \,|\, 0 \leq i < j \leq n : A_i \cap A_j = \emptyset) \Longrightarrow \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|. \tag{1}$$

Ejemplo 1.

Se tiene una mesa con 3 tipos de helado y otra con 5 tipos de pastel. ¿De cuántas manera puede una persona elegir un sólo postre?

Solución:
Note que la persona desea escoger un sólo postre independientemente de su tipo, por lo que tiene

$$3+5=8 \text{ posibilidades para escoger un postre}$$

Complementariamente cuando una tarea esta formada por varias etapas y cada etapa tiene distintas posibilidades de ejecutarse podemos aplicar el principio del producto.

Principio 2 (Regla del producto)**.**

Si una operación puede realizarse en n formas y otra operación, independiente de la primera, puede realizarse en m formas, hay nm formas en las que pueden realizarse las dos operaciones.

En terminología de teoría de conjuntos:

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|. \tag{2}$$

Ejemplo 2.

Se tiene una mesa con 3 tipos de helado y otra con 5 tipos de pastel. ¿De cuántas manera puede una persona elegir un postre de cada mesa?

Solución:

Note que en este caso la persona debe escoger un postre de cada una de las mesas, por lo que pueden ocurrir varias combinaciones posibles. En general se tienen:

$$\underbrace{3}_{1^\circ \text{ mesa}} \cdot \underbrace{5}_{2^\circ \text{ mesa}} = 15 \text{ posibilidades para escoger un postre de cada mesa}$$

2. Permutaciones de un conjunto

Una permutación sobre un conjunto es un ordenamiento lineal de sus elementos, por ejemplo si $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ entonces las permutaciones de A son las siguientes:

$$\begin{array}{cc} a_1,a_2,a_3 & a_1,a_3,a_2 \\ a_2,a_1,a_3 & a_2,a_3,a_1 \\ a_3,a_1,a_2 & a_3,a_2,a_1 \end{array}$$

De manera similar una $r-$permutación sobre un conjunto es un ordenamiento de r de los elementos del conjunto, por ejemplo si $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ entonces las 2-permutaciones de A son:

$$\begin{array}{cccc} a_1,a_2 & a_2,a_1 & a_1,a_3 & a_3,a_1 \\ a_1,a_4 & a_4,a_1 & a_2,a_3 & a_3,a_2 \\ a_2,a_4 & a_4,a_2 & a_3,a_4 & a_4,a_3 \end{array}$$

Para determinar el número de $r-$permutaciones de los elementos en un conjunto con n elementos se puede recurrir a la regla del producto. Esto pues el proceso de elegir r elementos en un orden específico puede reducirse a elegir un primer elemento entre n, luego elegir un segundo elemento entre los $n-1$ que quedan y así sucesivamente hasta elegir el $r-$ésimo elemento entre los $n-r+1$ restantes. Luego por el principio del producto, hay $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$ maneras de elegir r elementos en forma ordenada, de un conjunto con n elementos. Esto nos permite establecer el siguiente teorema:

Teorema 1.

El número de r-permutaciones de elementos tomados de un conjunto de cardinalidad n es

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Este teorema merece una explicación especial en el caso de que $r = 0$. El número de 0-permutaciones, es decir arreglos ordenados con ningún elemento se toma como 1. Sólo hay una forma de elegir 0-permutaciones, no eligiendo ningún elemento.

Ejemplo 3.

Un autobús tiene 10 asientos, 5 a la derecha y 5 a la izquierda. De 10 pasajeros que desean abordar el autobús 4 prefieren sentarse a la derecha, 3 a la izquierda y a los otros 3 no les importa donde queden ubicados. Si los asientos se distribuyen al azar ¿cuál es la probabilidad de que todos queden ubicados acorde a su preferencia?

Solución:
Analicemos cada preferencia:

- Se toma a las 4 personas que prefieren sentarse a la derecha y se les asigna uno de los 5 espacios:

$$P(5,4)$$

- Se toma a las 3 personas que prefieren sentarse a la izquierda y se les asigna uno de los 5 espacios:

$$P(5,3)$$

- Note que quedan 3 personas que no tienen ninguna preferencia, por lo que se les asigna un especio:

$$3!$$

Así en total tenemos $P(5,4) \cdot P(5,3) \cdot 3!$ maneras en las cuales las personas quedan ubicadas acorde su preferencia.

Ahora para calcular la probabilidad debemos dividir entre la cantidad total de manera en que se pueden ubicar los pasajeros, la cual corresponde a 10! formas, por lo que tenemos que la probabilidad solicitada corresponde a:

$$\frac{P(5,4) \cdot P(5,3) \cdot 3!}{10!} = \frac{1}{84}$$

Este problema de las permutaciones tiene algunas variantes, como cuando se debe hacer una $r-$permutación de elementos dentro de una estructura que no necesariamente es un conjunto. Por ejemplo una estructura que contenga elementos pero se admite que los elementos pueden aparecer más de una vez, analicemos el siguiente caso:

Ejemplo 4.

¿Cuántos *anagramas* (reordenamientos de la letras que forman una palabra), se pueden obtener de la palabra *ama*?.

Solución:

Para resolver este tipo de problemas lo más práctico es asumir que en realidad todos los elementos son distintos y realizar el conteo según el teorema, una vez hecho esto eliminar los casos que se hayan contado de más.

Inicialmente *ama* tiene tres letras pero una es repetida. En principio podemos asumir que tenemos el conjunto de letras $\{a_1, m, a_2\}$ y en este casos los posibles anagramas son 6:

$$\begin{array}{cc} a_1ma_2 & a_1a_2m \\ a_2a_1m & a_2ma_1 \\ ma_1a_2 & ma_1a_2, \end{array}$$

no obstante, dado que a_1 y a_2 son en realidad la misma letra, todo anagrama está dos veces, así que el total posible debe dividirse por dos, quedando así tres anagramas.

En general la solución de este tipo de problema se analiza de la siguiente forma: Si una estructura contiene r elementos repetidos, $k_1, k_2, \ldots, k_r$ veces, respectivamente entonces para calcular el tipo de permutaciones distintas que se pueden construir primero se calcula el número de permutaciones asumiendo que todos los elementos son distintos, es decir $(k_1 + k_2 + \cdots + k_r)!$ permutaciones. Luego se procede a analizar y excluir los casos repetidos. Un elemento que aparezca k_j veces ocupa k_j posiciones dentro de la permutación, como se consideró que los k_j elementos son diferentes entonces hay $k_j!$ posibles acomodos de esos elementos que se contaron como diferentes pero que en realidad corresponden con una única permutación; por lo tanto para eliminar las elementos contados de más, producidos por este elemento el número total debe dividirse entre $k_j!$, y así para cada uno de los elementos. En general tenemos:

Teorema 2.

El número de permutaciones que se pueden obtener con r elementos, repetidos $k_1, k_2, \ldots, k_r$ veces, respectivamente es:

$$\frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_r)!}{k_1!k_2!\ldots!k_r!}.$$

Ejemplo 5.

Se van a repartir 3 rosas, 5 dalias y 2 margaritas entre 10 señoras, determine el número de maneras en las que se puede hacer esta distribución si cada señora debe recibir al menos una flor.

Solución:

Como hay igual número de flores que de señoras cada una recibe una flor, y el problema se reduce a calcular el número de permutaciones posibles. El número de maneras de distribuir estas flores corresponde a:

$$\frac{10!}{5!3!2!} = 2520$$

Analicemos ahora un ejemplo un poco más complejo:

Ejemplo 6.

Las Parejas de esposos Solís, Martínez y Sandí van al cine y se ubican en 6 sillas consecutivas. ¿De cuántas maneras pueden ubicarse:

1. si no hay restricciones?
2. si la pareja Sandí se peleó a la entrada y no quieren sentarse juntos?
3. si las tres parejas quieren quedar juntas?
4. si las tres quieren quedar separadas?

Solución:

1. *Sin retricciones*: $6!$
2. Los Sandí separados: Usando complementos, los Sandí juntos puede verse como si se sentaran en sillas unidas, entonces solo se pueden permutar 5, con la posibilidad de que entre ellos se permuten en las sillas juntas. Hay $5!2!$ maneras de que queden juntos y la solución a la pregunta de las maneras de que queden separados es:
$$6! - 5!2!$$
3. Las tres juntas: Es la misma idea del anterior:
$$3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!$$
4. *Las tres separadas:* Este es el problema más difícil de la tarea; para empezar no es el complemento del anterior. Uno podría hacerlo a pata con lágrimas pero la idea es darle un buen uso al principio de inclusión y exclusión, veamos esta solución. Sean los eventos A los Solís quedan juntos, B los Sandí quedan juntos y C los Martínez quedan juntos.

   El evento $A \cup B \cup C$ es *Alguna de las parejas queda junta.* Mientras que el evento complemento, $\overline{A \cup B \cup C}$ es *Ninguna de las parejas queda junta.* Lo que se necesita es la cardinalidad de $\overline{A \cup B \cup C} = 6! - |A \cup B \cup C|$:
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$
   Ahora, $|A \cap B|$ significa los Solís juntos y los Sandí juntos, aplicando la misma idea anterior esto ocurre en $4!2^2$ maneras. Lo demás es similar. Total de formas:
$$\overline{A \cup B \cup C} = 6! - (3(5! \cdot 2!) - 3(4! \cdot 2! \cdot 2!) + (3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!)) = 240$$

Otro tipo de problema de distribución relacionado con permutaciones tiene que ver con los posibles ordenamientos de r elementos que se pueden hacer en un conjunto de n elementos si se admite la repetición, en este caso el asunto se resuelve recurriendo a la regla del producto. En general este problema se reduce a elegir un elemento para la primera posición, otro elemento para la segunda posición y así sucesivamente, hasta llegar a la posición r. Como cada una de estas escogencias puede hacerse de n formas, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.

El número de $r-$permutaciones con repetición, sobre un conjunto con n elementos es n^r.

Ejemplo 7.

Una estructura especial tiene 7 campos que pueden ser rellenados con 0 o 1, ¿cuál es el máximo de estructuras de este tipo se pueden tener.?

Solución:
Se resuelve por una aplicación directa de la fórmula y da 2^7 estructuras .

Este mismo esquema permite resolver la distribución de k objetos distintos en n celdas, donde cada celda puede contener cualquier número de objetos. Esto pues al final de cuentas este problema se reduce a elegir una celda para poner el primer objeto, y luego elegir con posibilidad de repetición otra celda para el segundo y así hasta colocar todos los objetos. Note que los objetos, en este caso no llevan un orden particular en las celdas. Si el orden en el cual se distribuyen los objetos dentro de las celdas debe tenerse en cuenta entonces el total de maneras cambia.

3. Combinaciones de un conjunto

A diferencia de una permutación, en la cual el orden es importante, en una combinación el orden de los elementos no lo es. Así una $r-$combinación sobre un conjunto A con n elementos es un subconjunto de A con r elementos.

Existe un relación directa entre permutaciones y combinaciones, de hecho cada $r-$combinación da lugar a $r!$ $r-$permutaciones. Como conocemos el número de r-permutaciones, teorema 1, entonces se tiene el siguiente teorema.

Teorema 4.

El número de r-combinaciones sobre un conjunto de r elementos es

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Este último valor se conoce cono coeficiente binomial pues con alguna cantidad de esfuerzo es posible demostrar que:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i. \tag{3}$$

Muchos problemas de conteo, aunque en principio parezcan distintos, pueden resolverse recurriendo a la misma idea.

Por ejemplo considere una estructura que solo tiene 2 elementos repetidos uno k veces y el otro $n-k$ veces. El número de permutaciones de los elementos en esta estructura es $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ que es exactamente $\binom{n}{k}$. Esto en realidad es lo esperado, pues hacer las permutaciones indicadas es equivalente al siguiente problema, dado el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ elegir subconjuntos de tamaño k que correspondan a las posiciones en donde se van a ubicar los k elementos.

Ejemplo 8.

¿Cuántos anagramas (ordenamientos) de 4 letras se pueden hacer de la palabra 'PALABRAS'?

Solución:

En este caso debemos usar el principio de la suma para poder resolverlo, en general tenemos cuatro casos:

- *Ninguna letra a*: se puede realizar de dos maneras:
  - Por medio de permutaciones o conteo simple: dado que no se tienen letras 'a' se cuenta con 5 letras para repartir en 4 espacios, osea $P(5,4) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$.
  - Por medio de combinaciones, en este caso elegimos 4 elementos posibles de un grupo de 5 y los permutamos de manera simple: $\binom{5}{4} \cdot 4!$. Este es el método más sencillo para este tipo de problemas, por lo cual lo usaremos en los siguientes tres casos.
- *Una letra 'a'*: en este caso tenemos 6 elementos distintos, pero debemos elegir **siempre** una letra 'a' por lo que nos quedan 3 espacios libres, así que elegimos 3 elementos de un grupo de 5 y luego permutamos de manera simple y obtenemos: $\binom{5}{3} \cdot 4!$
- *Dos letras 'a's*: en este caso tenemos 7 elementos donde hay uno que se repite dos veces, como debemos elegir **siempre** dos letras 'a', nos quedan 2 espacios libres, así que elegimos 2 elementos de un grupo de 5 y luego permutamos las cuatro letras dividiendo entre 2! debido a la cantidad de veces que se repite la letra 'a', así obtenemos: $\binom{5}{2} \cdot \frac{4!}{2!}$

- *Tres letras 'a's*: en este caso tenemos 8 elementos donde hay uno que se repite tres veces, como debemos elegir **siempre** tres letras 'a', nos queda 1 espacio libre, así que elegimos 1 elemento de un grupo de 5 y luego permutamos las cuatro letras dividiendo entre 3! debido a la cantidad de veces que se repite la letra 'a', así obtenemos: $\binom{5}{1} \cdot \frac{4!}{3!}$

Finalmente por el principio de la suma, se suman cada uno de los resultados de los casos anteriores.

$$\binom{5}{4} \cdot 4! + \binom{5}{3} \cdot 4! + \binom{5}{2} \cdot \frac{4!}{2!} + \binom{5}{1} \cdot \frac{4!}{3!} = 500$$

4. Ejercicios Propuestos

1. Se tienen las cifras $\{0,1,2,3,4,5\}$ y se van a formar números de exactamente 3 dígitos distintos. Determine la probabilidad que alguno de esos números sea par.

   Solución:

   Sea A el evento de que al elegir aleatoriamente un número de tres dígitos distintos formado con las cifras {0, 1, 2, 3, 4, 5}, este sea par. Para averiguar dicha probabilidad, primero realizaremos el caso de formar un número de tres dígitos con las cifras $\{0,1,2,3,4,5\}$.

   Para esto debe asegurase que el dígito de las centenas no es cero, así que disponemos de 5 opciones para este número, para el siguiente número también hay 5 opciones pues el cero se incluye y para el último hay 4 opciones. Para facilidad del cálculo podemos utilizar el prinicipio del producto, así tenemos:

$$\underbrace{5}_{centenas} \cdot \underbrace{5}_{decenas} \cdot \underbrace{4}_{unidades}$$

   Por lo tanto existen 100 maneras de formar dicho número.

   Para contar la cantidad de números pares debemos analizar el dígito de las unidades, el cual tenemos tres opciones:

   - *Termine en cero:* en este caso sólo existe una manera de elegir el número de las unidades, 5 opciones para un segundo dígito (ya sea decenas o centenas) y 4 para el último, por lo que obtenemos 20 posibles casos que terminan con cero.
   - *Termina en 2:* al igual que el caso anterior sólo existe una manera de elegir el número de las unidades, pero sólo existen 4 opciones para el dígito de las centenas (pues este debe ser distinto a 0), lo que nos deja 4 posibilidades para el de las decenas; esto produce 16 posibles casos.
   - *Termina en 4:* es similar al caso anterior, por lo que se tienen 16 posibles casos.

Así, y por el principio de la suma, se tienen $20+16+16=52$ formas de obtener un número par. Finalmente utilizamos la regla de Bayes para obtener la probabilidad de que al elegir al azar un número de tres dígitos distintos con las cifras $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, este sea par:

$$P[A] = \frac{52}{100} = \frac{13}{25}.$$

2. Determine de cuántas maneras se pueden reordenar las letras de las palabras:

   a) ‘RASGUÑO’
   Solución: Este caso se trata de una permutación simple (note que los reordenamientos no necesariamente representas palabras), por lo que se tiene:

   $$7! = 5040 \text{ maneras}$$

   b) ‘PALABRA’
   Solución: En este caso se tienen en total 7 letras, pero la letra “a” se repite 3 veces, por lo que dicha palabra se puede reordenar de:

   $$\frac{7!}{3!} = 840 \text{ maneras}$$

   c) ‘BORRACHERA’
   Solución: En este caso se tienen en total 10 letras, pero la letra “a” se repite 2 veces y la letra “r” se repite 3 veces, por lo que dicha palabra se puede reordenar de:

   $$\frac{10!}{3!2!} = 302400 \text{ maneras}$$

   d) ‘EUTANASIA’
   Solución: Dada la repetición de la ‘a’ el total de permutaciones es $\frac{9!}{2!}$

3. Considere la palabra PELUDO, respecto a esta palabra use principios de conteo y propiedades de cardinalidad para que determine el número de palabras en los siguientes conjuntos:

   - El conjunto de todos las (palabras) arreglos de 6 letras tomadas de esa palabra.
     Solución: 6!

   - Para el conjunto de las palabras que tengan la sílaba LU.
     Solución: Se cuenta como si LU fuera una una letra 5!.

- Para el conjunto de todas las palabras que no contengan ninguna de las sílabas PE LU o DO.

  Solución:

  Se usa el principio de inclusión y exclusión. Sean A : palabras con LU, B : palabras con PE y C : palabras con DO. $A \cup B \cup C$ palabras con alguna de las tres sílabas.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 3(5!) - 3(4!) + 3!.$$

  El resto sale por complementos.

4. Dada la palabra DESEO determine:

   a) La cantidad de secuencias de cuatro letras que se pueden formar si estas secuencias deben incluir a la letra E, y no se admite repetición.

   Solución: Dado que la E debe estar presente deben analizarse varios casos:

   - Si van las dos E, en ese caso hay $\binom{3}{2}(\frac{4!}{2!})$ casos.
   - Si solo va una E hay 4! casos.

   Así en total hay 60 casos.

   b) La cantidad de secuencias de cuatro letras que se pueden formar si estas secuencias deben incluir a la letra E, y se admite repetición.

   Solución: Si admitimos repetición tenemos:

   - Arreglos con una E: $\binom{4}{1}(3^3)$ maneras.
   - Arreglos con dos E's: $\binom{4}{2}(3^2)$ maneras:
   - Arreglos con tres E's: $\binom{4}{3}(3)$ maneras.
   - Arreglos con cuatro E's: 1 manera.

   Así la suma de esos casos es la respuesta.

   Una forma más simple es todas las posibilidades son 4^4 y las que no tienen E son 3^3 para un total de $4^4 - 3^4$ palabras que tienen E.

5. Cuatro damas llegan a un baile con su respectiva pareja, 4 caballeros. Un apagón produce una confusión y cada una de ellas toma al azar un caballero, determine la probabilidad de que al menos una de ellas quede con la pareja que traía.

Solución:

Se pueden hacer 4! parejas hombre, mujer. Para ver cuántas tienen al menos una de las parejas originales se puede usar principio de inclusón y exclusión. Sea A_1, A_2, A_3, A_4 los eventos la pareja 1, la 2, la 3 y la 4 respectivamente queda junta.

La unión de estos eventos es lo que se pide y

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 4(3!) - 6(2!) + 4(1!) - 1 = 15$$

Entonces la probabilidad pedida es $15/24$

6. Cuatro matrimonios tradicionales (*Hombre-Mujer)* van al cine y se sientan en butacas consecutivas de forma aleatoria.

   a) ¿De cuántas maneras se pueden sentar si no hay ninguna restricción?
   Solución: $8!$

   b) ¿De cuántas maneras si se sientan como parejas, es decir los matrimonios van juntos?
   Solución: $4! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!$

   c) ¿De cuántas maneras si los hombres se sientan todos juntos y las mujeres también?
   Solución: $2! \cdot 4! \cdot 4!$

   d) ¿De cuántas maneras puede una pareja específica debe quedar junta? ¿Qué tal si fueran dos parejas?
   Solución: $7! \cdot 2!,\ \ 6! \cdot 2! \cdot 2!$ respectivamente

   e) Tres de ellos van a ir a comprar palomitas, si se eligen en forma totalmente aleatoria ¿de cuántas maneras se puede formar la delegación?
   Solución: $\binom{8}{3}$

   f) Volviendo sobre la pregunta anterior, si en la delegación debe ir al menos una mujer, ¿de cuántas maneras se puede formar la delegación.?

   Solución: Equivocadamente se puede pensar que la solución se es $4\binom{7}{2}$ pero lo correcto es $\binom{4}{1}\binom{4}{2} + \binom{4}{2}\binom{4}{1} + \binom{4}{3}\binom{4}{0}$

   g) Use el *principio de inclusión y exclusión* y úselo para determinar la probabilidad de que si las parejas se sientan en forma aleatoria alguna de ellas quede junta.
   Solución Lo mas simple es usar la siguiente notación, asuma que las parejas se llaman 1,2,3 y 4 y llame A_i al evento la pareja i se sienta junta. Lo que se pide es $P[A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4]$ lo cual lleva a:

$$
\begin{aligned}
&P[A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4] = \\
&P[A_1] + P[A_2] + P[A_3] + P[A_4] \\
&- P[A_1 \cap A_2] - P[A_1 \cap A_3] - P[A_1 \cap A_4] - P[A_2 \cap A_3] - P[A_2 \cap A_4] - P[A_3 \cap A_4] \\
&+ P[A_1 \cap A_2 \cap A_3] + P[A_1 \cap A_2 \cap A_4] + P[A_2 \cap A_3 \cap A_4] \\
&- P[A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4] = 4(7!2) - \binom{4}{2} 6!2!^2 + \binom{4}{3} 5!2!^3 - 4!2!^4
\end{aligned}
$$

7. Seis muchachas y 8 muchachos hacen una fila para el banco. Determine:

   a) La probabilidad de que Carmen y Luis, dos de los que hacen fila, queden separados.
   Solución:

   $$1 - \frac{14! - 13!2!}{14!}$$

   b) La probabilidad de que las mujeres queden juntas.
   Solución:

   $$\frac{9!6!}{14!}$$

8. Se forman números con 6 cifras, pueden ser repetidas, ¿ Cuál es la probabilidad de que en un número al azar las cifras queden tres pares y tres impares?

   Solución:

   Hay en total $9 * 10^5$ números de 6 cifras. Para saber cuales de ellos tienen tres dígitos pares es importante saber si inician con impar o con par. Si empiezan con impar hay $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} 5^6$ casos, si empiezan con par hay $4 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} 5^5$ en total opciones. La suma de los valores anteriores es la solución.

9. Se van a formar números de 3 dígitos, es decir entre 100 y 999, con los dígitos $0, 1, 2 \ldots, 9$ sin repetir dígitos. ¿Cuántos números hay, cuál es la probabilidad de que al tomar un número de estos al azar sea par?

   Solución:

   Los impares para las unidades 5 opciones para las centenas 8 y para las decenas 8. En total$9 \cdot 9 \cdot 8 - 5 \cdot 8 \cdot 8$

Si se sigue el otro esquema hay $9 \cdot 8$ que terminan con cero y $4 \cdot 8 \cdot 8$ que terminan con 2,4,6,8 en total $9 \cdot 8 + 4 \cdot 8 \cdot 8$

10. Una baraja está compuesta de 52 cartas divididas en 4 grupos de 13 cartas numeradas de 2 a 14.

    - Si se van a elegir 5 cartas determine la probabilidad de sean de distinto número.
      Solución:

    $$\frac{\binom{13}{5} \cdot 4^5}{\binom{52}{5}}$$

    - Si se van a elegir 4 cartas al azar ¿cuál es la probabilidad de que sean todas de un mismo grupo?
      Solución:

    $$\frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{13}{4}}{\binom{52}{4}}$$

    - Se van a tomar 13 cartas, determine la probabilidad de que no hayan dos cartas de igual número.
      Solución:

    $$\frac{4^{13}}{\binom{52}{13}}$$