Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
TAREA SEMANA 1
Entrega Lunes 7 de setiembre II-2020

1. Suponga que $U = \{n : 0 < n \leq 100\}$ subconjunto de los enteros positivos. Sea P en conjunto de los primos en U, E el conjunto de los pares en U y $F = \{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89\}$. Describa ya sea por extensión o por comprensión

   a) E^c

   b) $P \cap F$

   c) $P \cap E$

   d) $P \cap E \cup F \cap E^c$

2. Dibuje diagramas de Venn para los siguientes conjuntos

   - $A \setminus B$
   - $A^c \cap B$
   - $(A^c \cup B^c)^c$

   Es un ejercicio simple y se hace más simple si se dan cuenta, por propiedades, que $A^c \cap B = B \setminus A$ y que $(A^c \cup B^c)^c = A \cap B$

3. Pruebe que $A \setminus B = A \cap B^c$

$$\begin{aligned} x \in A \setminus B &\iff x \in A \wedge x \notin B \\ &\iff x \in A \wedge x \in B^c \\ &\iff x \in A \cap B^c \end{aligned}$$

4. Pruebe que $(B \setminus A) \cup (C \setminus A) = ((B \cup C) \setminus A)$

$$\begin{aligned} x \in (B \setminus A) \cup (C \setminus A) &\iff (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \notin A) \\ &\iff x \notin A \wedge x \in (B \cup C) \\ &\iff x \in ((B \cup C) \setminus A) \end{aligned}$$

5. Demuestre las ley de De Morgan $(S \cup T)^c = S^c \cap T^c$

   Se puede hacer de manera verbal usando las reglas descritas en la guía para demostrar igualdad de conjuntos. O bien usar reglas de la lógica para escribirlo mas matemático.

   Suponga que $x \in (S \cup T)^c$ entonces x no es elemento de S ni es elemento de T, como no es elemento de S es elemento de S^c de igual forma como no es elemento de T entonces es elemento de T^c y, al ser elemento de ambos $x \in S^c \cap T^c$, es decir $x \in (S \cup T)^c \subset S^c \cap T^c$. La otra dirección de la prueba sigue una argumentación similar.

   O bien

$$\begin{aligned} x \in (S \cup T)^c &\iff x \notin (S \cup T) \\ &\iff x \notin S \wedge x \notin T) \\ &\iff x \in S^c \wedge x \in T^c \\ &\iff x \in S \cap T \end{aligned}$$

6. Escriba la demostración de $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

   La demostración se basa en el hecho de que la cardinalidad de una unión de conjuntos disjuntos es a suma de las cardinalidades de cada uno de ellos, entonces todo se resume a representar la unión de distintas formas.

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) \Longrightarrow |A \cup B| = |A| + |(B \setminus A)|$$

$$A \cup B = B \cup (A \setminus B) \Longrightarrow |A \cup B| = |B| + |(A \setminus B)|$$

$$A \cup B = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) \cup (A \cap B) \Longrightarrow |A \cup B| = |(B \setminus A)| + |(A \setminus B)| + |A \cap B|$$

   El despeje del principio de inclusión y exclusión usando estas tres ecuaciones, es simple.

7. Determine la cardinalidad del conjunto formado por los enteros positivos de dos dígitos, que son primos y tales que la suma de sus dígitos es 10. Es sencillo, basta chequear. 19 si, 28 no, 37 si, 46 no, 55 no, 64 no, 73 si, 82 no, 91 no. En total 3