

**Probabilidad:**  
**Variables aleatorias discretas: conceptos básicos**

Escuela de Matemática

Semana 7

## 1. Distribuciones de probabilidad

El estudio sistemático de las probabilidades para aplicarlas a la estadística tiene que ver principalmente con la organización y análisis de datos. Con el análisis de esos datos, probablemente experimentales, se busca la toma de decisiones razonables, basadas en gran medida en las conclusiones que se hayan obtenido de esos datos.

Para poder analizar los datos es necesario entenderlos y conocer sus características. La mayor parte de las veces estas características están reflejadas por lo que llamaremos la distribución de probabilidad, ésta puede ser un modelo teórico o empírico. En esta sección estudiaremos los conceptos de distribuciones de probabilidad teóricos que son modelos matemáticos que caracterizan comportamientos teóricos de datos. Aunque los datos de la vida real no tienen porqué apegarse a uno de estos modelos teóricos, lo cierto es que en general las aproximaciones que pueden hacerse con estos modelos matemáticos resultan suficientes.

## 2. Preliminares

Es importante, antes de hablar sobre los tipos de distribución recordar que: Llamamos *espacio muestral* al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento.

Seguidamente se define el concepto de variable aleatoria.

### Definición 1.

Si  $\Omega$  es el espacio muestral para un experimento aleatorio entonces una variable aleatoria  $X$  es una función del espacio muestral al conjunto de los reales. Es decir,  $X$  es una regla que asigna un único valor real a cada evento del espacio muestral.

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Así, una variable aleatoria es una función. Al ser una función, tiene rango: conjunto de números reales que se les asigno un elemento del espacio muestral. El rango de una variable aleatoria  $X$  se denota  $R_X$ .

El rango de una variable aleatoria puede ser finito, infinito numerable o continuo.

Si el rango es finito o numerable entonces la variable se llama *variable aleatoria discreta* y si es continuo se llama *variable aleatoria continua*.

### Ejemplo 1.

Se lanza un dado 5 veces, sea  $X$  el número de veces que se obtuvo un seis. Note que  $X$  es una función de los posibles resultados al lanzar un dado 5 veces, a el número de resultados en los cuales salio seis, por ejemplo:  $X(1, 2, 6, 5, 6) = 2$ . Además, el rango de  $X$  es

$$R_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Dado que el rango es finito, se dice que  $X$  es una variable aleatoria discreta. ¿Cómo analizar el comportamiento de  $X$ ?

Una distribución de probabilidad para  $X$  es una función que permite asignar un valor de probabilidad a cada elemento de  $R_X$ .

Las distribuciones de probabilidad se dividen en dos casos acorde con las características de la variable aleatoria, discretas o continuas.

### 3. Variables aleatorias discretas

#### Definición 2.

Si  $X$  es una variable aleatoria discreta con rango  $R_X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  una distribución de probabilidad para  $X$  es una función,  $f_X$ , del  $Rango(X)$  a los reales.

$f_X : Rango(X) \rightarrow \mathfrak{R}$ , que cumple:

1.  $f_X(x_i) \geq 0, \forall x_i \in Rango(X),$

2.  $\sum_{x \in Rango(X)} f_X(x) = 1.$

En general se aceptan ciertas convenciones de notación. Si  $X$  es una variable aleatoria y  $x$  es un número real se escribe:

$$X = x,$$

para referirse al evento

$$\{\varepsilon : \varepsilon \in \Omega \wedge X(\varepsilon) = x\},$$

similarmente se usa la notación

$$X \leq x,$$

para referirse al evento

$$\{\varepsilon : \varepsilon \in \Omega \wedge X(\varepsilon) \leq x\},$$

Si  $X$  es una variable aleatoria discreta se puede definir su función de distribución de probabilidad por:

$$f_X(x) = P[X = x]. \quad (1)$$

#### Ejemplo 2.

Se tiene una caja que contiene cuatro bolillas rojas y tres verdes y se empiezan a extraer bolillas, sin reemplazo, hasta obtener una bolilla roja. Realice la distribución de probabilidad de la variable aleatoria el número de bolillas que se extraen.

**Solución:**

Sea  $X$  la variable aleatoria que indica el número de bolillas que se extraen. El espacio muestral para el experimento es:

$$\Omega = \{roja, verde - roja, verde - verde - roja, verde - verde - verde - roja\}$$

Los valores que toma  $X$  son

$$\begin{cases} X(roja) & = 1 \\ X(verde - roja) & = 2 \\ X(verde - verde - roja) & = 3 \\ X(verde - verde - verde - roja) & = 4 \end{cases}$$

Una distribución de probabilidad, en este ejemplo, fundamentada en asumir que toda bolilla tiene la misma probabilidad de ser tomada, es:

$$\begin{cases} f_X(1) & = \frac{4}{7} \\ f_X(2) & = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \\ f_X(3) & = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \\ f_X(4) & = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} \end{cases}$$

Además note que  $f_X(1) + f_X(2) + f_X(3) + f_X(4) = 1$ .

Una distribución de probabilidad asigna probabilidades a cada uno de los eventos simples del espacio muestral. Existe otro concepto importante que tiene que ver con el siguiente problema:

*“Dado un espacio muestral  $\Omega$ , una variable aleatoria discreta definida sobre  $\Omega$  y un valor  $x$ , tiene sentido el calcular la probabilidad de que ocurra alguno de los valores que son menores o iguales a  $x$ ”*

En el ejemplo anterior podrá resultar importante responder a la pregunta: **¿cuál es la probabilidad de que haya que hacer dos o menos extracciones para obtener una bolilla roja?**

En este caso el valor solicitado es la probabilidad de que haya que hacer una o dos extracciones para obtener una bolilla roja. Aplicando el principio de la suma se obtiene que:

$$P[X \leq 2] = P[X = 1] + P[X = 2] = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{6}{7}.$$

**Definición 3.**

Si  $X$  es una variable aleatoria discreta con rango  $R = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$  entonces se define la función de distribución de masa o distribución acumulada para  $X$  por:

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_0 \\ \sum_{i=0}^r f_X(x_i) & \text{si } x_r \leq x < x_{r+1}. \end{cases}$$

Por ejemplo para el caso anterior se tiene que  $F_X(x)$  cumple

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 4/7 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 6/7 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 34/45 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

**Ejemplo 3.**

Se tira un dado que no está cargado, hasta que se obtenga un número uno. Determine la función de probabilidad asociada a dicho evento, además indique la función de densidad de masa respectiva.

**Solución:**

Si denotamos por  $Z$  la ocurrencia de que al tirar el dado se obtenga una cara con un número uno y por  $W$  la no ocurrencia, el espacio muestral tiene la forma

$$\Omega = \{Z, WZ, WWZ, WWWZ, \dots\}$$

Si  $X$  es el número de lanzamientos, los posibles valores para  $X$  son  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$  y para hallar la función de probabilidad para  $X$  note que:

$$f_X(k) = P(X = k)$$

El evento  $X = k$  se da cuando el número de lanzamientos para que se obtenga 1, es decir

$$(X = k) = \underbrace{WW \dots W}_{k-1} Z$$

Por lo tanto,

$$f_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \left(\frac{1}{6}\right) & \text{si } x = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Para el cálculo de de la función de densidad de masa debe calcularse el valor de:

$$P[X \leq x] = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \sum_{i=1}^n \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \left(\frac{1}{6}\right) & \text{si } n \leq x < n+1. \end{cases}$$

Utilizando adecuadamente el hecho de que:

$$1 + r + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Se obtiene que:

$$P[X \leq x] = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{5^n}{6^n} & \text{si } n \leq x < n+1. \end{cases}$$

De acuerdo a esta última función se tiene que la probabilidad de que se deban hacer 1, 2 o 3 lanzamientos antes de obtener un 1 es de aproximadamente 0.4211, es decir

$$P[X \leq 3] = 1 - \frac{5^3}{6^3} = \frac{91}{216} \approx 0,4211$$

#### Teorema 1.

Se tiene que

$$P[a < X \leq b] = F(b) - F(a).$$

El teorema anterior se debe a que los eventos  $([a < X \leq b])$  y  $(X \leq a)$  son disjuntos entonces

$$P[a < X \leq b] + P[X \leq a] = P[(a < X \leq b) \cup (X \leq a)] = P[X \leq b]$$

Por lo tanto,

$$P[a < X \leq b] + F(a) = F(b)$$

De donde se obtiene el resultado.

#### Ejemplo 4.

Sea  $X$  una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = k \left(\frac{2}{5}\right)^{2x+3} \quad \text{si } x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

1. Determine el valor de  $k$
2. Sea  $m \in \mathbb{N}^*$ , determine la función de distribución acumulada evaluada en  $m$
3. Determine la probabilidad de que  $X$  sea menor a tres.

**Solución:**

1. Determine el valor de  $k$

$$\begin{aligned} f_X(x) &\geq 0 \Rightarrow k > 0. \\ \sum_{x=0}^{\infty} k \left(\frac{2}{5}\right)^{2x+3} &= \frac{8}{105}k = 1 \Rightarrow k = \frac{105}{8} \end{aligned}$$

2. Sea  $m \in \mathbb{N}^*$ , determine la función de distribución acumulada evaluada en  $m$ .

$$F_X(m) = \frac{105}{8} \sum_{x=0}^m \left(\frac{2}{5}\right)^{2x+3} = \frac{609}{625} \frac{1 - \left(\frac{16}{625}\right)^{m+1}}{1 - \frac{16}{625}} = 1 - \left(\frac{4}{25}\right)^{m+1}$$

3. Determine la probabilidad de que  $X$  sea menor a tres.

$$P(X \leq 2) = 1 - \left(\frac{4}{25}\right)^{2+1} = \frac{15561}{15625}$$

## 4. Parámetros en una Distribución Discreta

Cada vez que se logre determinar una distribución de probabilidad existen dos mediciones asociadas con ella que son sumamente importantes la *media* y la *varianza*.

La media o esperanza, como se llama a veces, en alguna forma es una medida que representa a los datos, es como el centro de gravedad de los datos, mientras la varianza es una medida de dispersión de los datos. En las distribuciones teóricas, este par de medidas las caracterizan en forma absoluta y en el caso de las distribuciones que no se ajusten a un patrón conocido constituyen el punto de partida para poder estudiarlas en forma adecuada.

### Definición 4.

Si  $X$  es una variable aleatoria discreta se denota la media o esperanza de  $X$

$$\mu_X \quad \text{o bien por} \quad E(X)$$

Y se define por

$$\mu_X = \sum_{x_i \in R_X} x_i f_X(x_i), \quad (2)$$

con la condición de que

$$\sum_{x_i \in R_X} |x_i| f_X(x_i) < \infty.$$

La condición que se impone se conoce como convergencia absoluta y se hace necesaria para evitar que el reordenamiento de las sumas pueda producir valores diferentes para la esperanza. De hecho en cada una

de las definiciones que sea necesario se indicará.

Note que la media, es una generalización del concepto de promedio aritmético. Por ejemplo si  $X$  es una variable aleatoria discreta tal que todos los valores en su rango tienen la misma probabilidad entonces:

$$\mu_X = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

En realidad la media o esperanza es un promedio ponderado y cuantifica el *valor esperado* para una variable aleatoria.

### Ejemplo 5.

Sea  $X$  la variable aleatoria del ejemplo 2. En ese caso el valor de la esperanza es:

$$\mu_X = 1 \left( \frac{4}{7} \right) + 2 \left( \frac{2}{7} \right) + 3 \left( \frac{4}{35} \right) + 4 \left( \frac{1}{35} \right) = \frac{56}{35},$$

significa que en promedio deberán hacerse 2.27 intentos antes de obtener la bolilla roja. Es decir, si se repite varias veces la experiencia aleatoria, y en cada experiencia se anota los número de bolas extraídas. El promedio de los números anotados debe ser cercano a 2.27

Existen ejemplos de variables aleatorias con distribuciones de probabilidad bien definidas y que no tienen media. Se invita al lector a verificar que si  $X$  es una variable aleatoria tal que

$$f_X(2^k) = P[X = 2^k] = 1/2^k, k = 0, 1, \dots$$

entonces la distribución de probabilidad está bien definida pero no existe la esperanza.

También es posible calcular la esperanza sobre de una función aplicada a los valores de la variable aleatoria.

### Definición 5.

Si  $h(x)$  es una función real y  $X$  es una variable aleatoria discreta se tiene que

$$\mu_{h(X)} = \sum_{x_i \in R_X} h(x_i) f_X(x_i), \quad (3)$$

con la condición de que

$$\sum_{x_i \in R_X} |h(x_i)| f_X(x_i) < \infty.$$

### Definición 6.

Si  $X$  es una variable aleatoria con distribución de probabilidad  $f_X$ , y media  $\mu_X$  se denota la varianza de  $X$  como

$$\sigma_X^2 \quad \text{o bien} \quad \text{VAR}(X)$$

y se define como  $E[(X - \mu_X)^2]$ .



Para calcular la varianza de una variable aleatoria discreta  $X$  note que:

$$\begin{aligned}
 \sigma_X^2 &= \mu_{(X-\mu_X)^2} \\
 &= \sum_{x_i \in R_X} (x_i - \mu_X)^2 f_X(x_i) \\
 &= \sum_{x_i \in R_X} (x_i^2 - 2x_i\mu_X + \mu_X^2) f_X(x_i) \\
 &= \sum_{x_i \in R_X} x_i^2 f_X(x_i) - \sum_{x_i \in R_X} 2x_i\mu_X f_X(x_i) + \sum_{x_i \in R_X} (\mu_X)^2 f_X(x_i) \\
 &= \sum_{x_i \in R_X} x_i^2 f_X(x_i) - 2\mu_X \sum_{x_i \in R_X} x_i f_X(x_i) + \mu_X^2 \sum_{x_i \in R_X} f_X(x_i) \\
 &= \mu_{X^2} - 2\mu_X \mu_X + \mu_X^2 = \mu_{X^2} - (\mu_X)^2.
 \end{aligned}$$

### Teorema 2.

Si  $X$  es una variable aleatoria discreta cuya media y varianza existen se tiene que  $VAR(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ .

Seguidamente el siguiente teorema resume las propiedades fundamentales de la esperanza.

### Teorema 3.

Si  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias discretas y  $c$  es una constante, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. El valor esperado de una variable aleatoria constante es la misma constante.

$$E(c) = \mu_c = c.$$

2. El valor esperado de una variable aleatoria multiplicada por una constante es la constante por el valor esperado de la variable.

$$E(cX) = \mu_{(cX)} = c\mu_X.$$

3. El valor esperado de una suma de dos variables aleatorias es la suma de los valores esperados de las variables.

$$E(X + Y) = \mu_{X+Y} = \mu_X + \mu_Y.$$

Demostremos la segunda propiedad, note que:

$$\mu_{cX} = \sum_{x_i \in R_X} cx_i f_X(x_i) = c \cdot \sum_{x_i \in R_X} x_i f_X(x_i) = c \cdot \mu_X,$$

La prueba de la primera es sencilla y la puede realizar de ejercicio. Para demostrar la tercera se requiere estudiar algunos conceptos que no se han explorado hasta ahora.

El siguiente teorema indica las propiedades de la varianza

**Teorema 4.**

Si  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias independientes cuyas varianzas existen y  $c$  es una constante, se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. La varianza de una variable aleatoria constante es cero.

$$\text{VAR}(c) = 0.$$

2. La varianza de una variable aleatoria multiplicada por una constante es la constante al cuadrado por la varianza de la variable.

$$\text{VAR}(cX) = c^2 \text{VAR}(X).$$

3. La varianza de una suma de dos variables aleatorias es la suma de las varianzas de las variables.

$$\text{VAR}(X + Y) = \text{VAR}(X) + \text{VAR}(Y).$$

Nuevamente la demostración de los apartados (1.) y (2.) es bastante directa a partir de la definición y la demostración de (3.) es un poco más delicada.

**Ejemplo 6.**

Sean  $X$  y  $Y$  variables aleatorias discretas tales que  $E(X) = 4$ ,  $\text{Var}(X) = \frac{16}{5}$  y  $Y = X^2 - 3X + 2$ . Determine la esperanza de  $Y$ .

**Solución** Utilizando las propiedades vistas se tiene que:

$$E(X^2) = \text{Var}(X) + (\mu_X)^2 = \frac{16}{5} + 16 = \frac{96}{5}$$

$$E(Y) = E(X^2) - 3E(X) + 2 = \frac{96}{5} - 3 \cdot 4 + 2 = \frac{46}{5}$$

**Definición 7.**

Se llamará momento de orden  $k$  a la esperanza de  $X^k$ . Es decir el momento de orden  $k$  para la variable aleatoria discreta  $X$  es

$$E(X^k) = \sum_{x_i \in R_X} x_i^k f_X(x_i),$$

**Definición 8.**

Si  $X$  es una variable aleatoria se llama función generadora de momentos a la esperanza de  $e^{tX}$  y se denota por  $m_X(t)$ , es decir:

$$m_X(t) = E(e^{tX}). \quad (4)$$

Las siguientes líneas ayudarán a entender el porqué de este nombre. Supongamos que  $X$  es una variable aleatoria que toma valores  $0, 1, 2, \dots$ , entonces

$$\begin{aligned}
 m_X(t) &= E(e^{tX}) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} e^{tx_i} f_X(x_i) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (tx_i)^k / k! \right\} f_X(x_i) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} t^k x_i^k / k! \right\} f_X(x_i) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} x_i^k f_X(x_i) \right\} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E(X^k).
 \end{aligned}$$

Esta deducción utiliza una propiedad importante de las sumatorias que en general no es válida y es el intercambio de las sumatorias que se hace. Si el lector es paciente puede expandir cada una de las sumas y verificar que es posible el reordenamiento practicado.

Como notará esta última serie tiene como parte de sus coeficientes los momentos de orden  $k$ , de hecho es bastante sencillo demostrar el siguiente lema

#### Teorema 5.

Si  $X$  es una variable aleatoria con función generadora de momentos  $m_X(t)$  se tiene que

$$m_X^{(n)}(0) = E(X^n). \quad (5)$$

Es decir si tenemos la función generadora de momentos basta con derivarla  $n$  veces y evaluar en 0 para obtener el momento de orden  $n$ .

#### Ejemplo 7.

Sea  $X$  una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} \quad \text{si } x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

1. Sea  $n \in \mathbb{N}$ , determine la fórmula de  $F_X(n)$ .
2. Pruebe que la función generadora de momentos de  $X$  es  $m_X(t) = \frac{1}{4-2e^t} + \frac{1}{3-e^t}$  si  $e^t < 2$ .
3. Determine la esperanza de  $X$ .

#### Solución

1. Sea  $n \in \mathbb{N}$ , determine la fórmula de  $F_X(n)$ .

$$F_X(n) = \sum_{x=0}^n \left( \left( \frac{1}{2} \right)^{x+2} + \left( \frac{1}{3} \right)^{x+1} \right) = 1 - \frac{1}{6} \left( \frac{1}{3} \right)^n - \left( \frac{1}{2} \right)^{n+2}$$

2. Pruebe que la función generadora de momentos de  $X$  es  $m_X(t) = \frac{1}{4-2e^t} + \frac{1}{3-e^t}$  si  $e^t < 2$ .

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\infty} \left( \left( \frac{1}{2} \right)^{x+2} + \left( \frac{1}{3} \right)^{x+1} \right) e^{xt} &= \frac{1}{4} \sum_{x=0}^{\infty} \left( \frac{e^t}{2} \right)^x + \frac{1}{3} \sum_{x=0}^{\infty} \left( \frac{e^t}{3} \right)^x \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{e^t}{2}} + \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{e^t}{3}} = \frac{1}{4-2e^t} + \frac{1}{3-e^t} \end{aligned}$$

3. Determine la esperanza de  $X$ .

$$\begin{aligned} m'_X(t) &= -(4-2e^t)^{-2} \cdot -2e^t + -(3-e^t)^{-2} \cdot -e^t \\ E(X) &= -2^{-2} \cdot -2 + -2^{-2} \cdot -1 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

## 5. Ejercicios propuestos

1. Se tiene un grupo de personas, si se saca una persona al azar de ese grupo entonces hay dos posibles resultados, que sea *hombre* con probabilidad  $p$  o que sea *mujer* con probabilidad  $q$ . Se acepta que entre repeticiones sucesivas del experimento las probabilidades de *hombre* y de *mujer* se mantienen constantes en las diferentes ejecuciones del experimento y que estas ejecuciones son independientes cada una de las otras. Determine la función de probabilidad de la variable aleatoria el número de veces en que se eligió al azar un *hombre*.

### Solucin:

Si este experimento se repite  $n$  veces y se toma como variable aleatoria el número de veces en que el experimento de elegir una persona al azar dio como resultado *hombre*, entonces esta variable aleatoria  $X$  tiene como posibles resultados  $0, 1, 2, 3, \dots, n$  y la distribución de probabilidad asociada puede calcularse fácilmente. Como  $f_X(k) = P[X = k]$  este evento ocurre cuando cualesquiera  $k$  de los  $n$  ensayos den por resultado *hombre* y el resto den por resultado *mujer*, de hecho un posible evento que caracteriza este resultado es

$$\overbrace{HH \dots HHH}^{k \text{ veces}} \overbrace{MM \dots MMM}^{n-k \text{ veces}}$$

cuya probabilidad es  $p^k q^{n-k}$ , si tomamos en cuenta que hay  $\binom{n}{k}$  posibles órdenes que incluyen  $k$  ocurrencias de  $H$  y  $n - k$  de  $M$ , obtenemos que:

$$f_X(k) = P[X = k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

2. Un dado se tira y se tiene el evento  $E$  : sale una cara mayor que 4. El experimento se repite hasta obtener dos veces consecutivas el evento  $E$ . ¿Cuál es la distribución de probabilidad?

### Solucin:

En este caso el espacio muestral es bastante amplio, digamos que el evento complemento de  $E$  es  $F$ .

$$\Omega = \{(EE), (FEE), (EFEE, FFEE), (FFFEE, FEFEE, EFFEE), \dots, \}$$

El cálculo de la distribución de probabilidad es un poco elaborado pero muy interesante, pues la manera más simple de hacerlo es usando recursividad. Para que los dos  $E$  consecutivos ocurran en  $k$  intentos es necesario que  $E$  ocurra en los  $k$  y  $k - 1$  intentos y en el  $k - 2$  ocurra  $F$  y que antes del  $k - 3$  no ocurran los dos  $E$  consecutivos. Si la probabilidad de  $E$  es  $p$  y la de  $F$  es  $1 - p$  entonces puede verse que

$$F_X(2) = P[EE] = p^2$$

$$F_X(3) = P[FEE] = (1-p)p^2$$

$$F_X(4) = P[EFEE \vee FFEE] = (1-p)p^3 + (1-p)^2p^2 = p^2(1-p)$$

$$F_X(k) = P[\text{no ocurre en}(k-3) \wedge FEE] = (1-p)p^2(1-F_X(k-3))$$

3. Una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución uniforme discreta dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } x = 1, 2, \dots, k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Haciendo uso de sumas, determine una forma simplificada (sin sumatorias) de la función generadora de momentos de la variable aleatoria  $X$ , y a partir de la generadora de momentos determine la esperanza de  $X$ .

**Solucin:**

La función generadora de momentos  $M_x(t)$  está dada por:

$$\begin{aligned} M_x(t) &= E(e^{tx}) = \sum_{n=1}^k \frac{1}{k} e^{tn} \\ &= \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k (e^t)^n \\ &= \frac{1}{k} \left[ \frac{1 - e^{t(k+1)}}{1 - e^t} - 1 \right] \\ &= \frac{1}{k} \left[ \frac{e^t - e^{(k+1)t}}{1 - e^t} \right] \\ \Rightarrow M'_x(t) &= \frac{e^t - (k+1)e^{(k+1)t} + ke^{(k+2)t}}{k(1 - e^t)^2} \end{aligned}$$

Para evaluar  $M'_x(t)$  es necesario usar regla de L'Hopital, que lleva finalmente a:

$$\frac{k+1}{2}$$

4. Sea  $\mathcal{E}$  un experimento de Bernoulli con probabilidad de éxito  $p$ . Sea  $Y$  la variable aleatoria que mide el número de veces que debe realizarse el experimento  $\mathcal{E}$  hasta llegar a obtener el primer fracaso. Determine la función de distribución de  $Y$  y la función de distribución acumulada para  $Y$  de una manera simplificada.

Por una fórmula desarrollada entendemos que las sumas correspondientes en el caso de existir sumas deben ser desarrolladas.

**Solucin:**

$$\begin{aligned}
 f_y(x) &= P[(n-1)\text{éxitos consecutivos seguidos de un fracaso}] \\
 &= p^{n-1}(1-p) \\
 F_y(n) &= \sum_{k=1}^n f_y(k) \\
 &= \sum_{k=1}^n p^{k-1}(1-p) \\
 &= (1-p) \left[ \frac{1-p^n}{1-p} \right] \\
 &= 1-p^n \\
 F_y(n) &= \begin{cases} 1-p^n & \text{si } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } k \notin \mathbb{N} \end{cases}
 \end{aligned}$$

5. En una lotería realizada para beneficio de los bomberos se venden ocho mil boletos a 100 colones cada uno. El premio es un artefacto eléctrico con un valor de 300 000 colones. Si compra un total de 10 boletos determine cuál es su ganancia esperada y cuál es el momento de orden 2 para la ganancia.

**Solucin:**

$$\begin{aligned}
 P[\text{ganar}] &= \frac{10}{8000} \\
 P[\text{no ganar}] &= \frac{7990}{8000} \\
 \mu_x &= [-1000] \frac{799}{800} + 299000 \cdot \frac{1}{800} \\
 \mu_{x^2} &= [-1000]^2 \frac{799}{800} + (299000)^2 \frac{799}{800}
 \end{aligned}$$

6. Siete terminales de un sistema están conectadas por una línea de comunicación a un centro de cómputo. En un tiempo específico, exactamente cuatro de las siete terminales están listas para transmitir un mensaje. Asuma que cada terminal tiene la misma probabilidad de ser consultada y tome  $X$ , la variable aleatoria que indica el número de terminales que deben ser consultadas hasta obtener una terminal lista para transmitir.

a) Determine los posibles valores para  $X$  y la distribución de probabilidad para  $X$ .

### Solución

Los posibles valores para  $X$  y la distribución de probabilidad para  $X$ , son:

$x$	$f_X(x)$
1	$\frac{4}{7}$
2	$\frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 6}$
3	$\frac{3 \cdot 2 \cdot 4}{7 \cdot 6 \cdot 5}$
4	$\frac{3 \cdot 2 \cdot 4}{7 \cdot 6 \cdot 5}$

- b) Si en el problema se tienen  $m$  terminales de las cuales hay  $n$  listas, ¿cuál es la distribución de probabilidad para  $X$ , el número de terminales que deben ser consultadas hasta obtener una terminal lista para transmitir?

**Solución** Los posibles valores  $1, 2, \dots, (n+1)$

$$F_X(x) = P[X = x] = \frac{(m-n)(m-n-1)(m-n-2) \cdots (m-n-x+2)(n)}{(m)(m-1)(m-2) \cdots (m-n+x-2)(m-x+1)}$$

7. Suponga que  $X$  es una variable aleatoria discreta que sigue una distribución uniforme con posibles valores  $x_1 = C + L, x_2 = C + 2L, \dots, x_n = C + nL$ , donde  $L$  y  $C$  son constantes positivas. Determine la esperanza de  $X$ .

### Solución

Al decir que es uniforme entonces como son  $n$  posibles valores las probabilidades son todas iguales y  $1/n$ . La esperanza es:

$$\mu_X = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} (C + iL) = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n C + L \sum_{i=1}^n i \right)$$

El resultado de esta suma lleva a:



$$\mu_X = \frac{1}{n} \left( nC + L \frac{n(n+1)}{2} \right) = C + \frac{n+1}{2} L$$

8. Una compañía aseguradora, estima que en sus seguros ocurre una pérdida total con una probabilidad de 0.002; un 50 % de pérdida con probabilidad de 0.01; y un 25 % de pérdida con probabilidad de 0.1. Ignorando todos los otros tipos de pérdida, si una persona desea asegurar su vehículo por una suma de 500 000 colones, ¿qué prima deberá cobrar la aseguradora para tener una utilidad promedio de 10 000 colones.

### Solución

$$\mu_X = 500\,000 * 0,002 + 250\,000 * 0,01 + 125\,000 * 0,1 = 16\,000$$

Debe cobrar una suma de 26 000 colones.

9. Sea  $X$  una variable aleatoria que puede tomar únicamente los valores  $x_0$ ,  $x_1$  y 3 con probabilidades de  $1/3$ ,  $1/2$  y  $1/6$  respectivamente. Si  $E(X) = 1/3$  y  $VAR(X) = 29/9$  determine los valores  $x_0$  y  $x_1$ .

### Solución

De las condiciones del problema se obtienen 2 ecuaciones con dos incógnitas. La solución de este sistema de las valores solicitados  $x_0$  y  $y_0$ :

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & \frac{x_0}{3} + \frac{x_1}{2} + \frac{3}{6} = \frac{1}{3} \\ \blacksquare \quad & \frac{(x_0 - \frac{1}{3})^2}{3} + \frac{(x_1 - \frac{1}{3})^2}{2} + \frac{(3 - \frac{1}{3})^2}{6} = \frac{29}{9} \end{aligned}$$

10. Si  $X$  es discreta y uniforme con valores  $c, c + L, c + 2L, \dots, c + nL$ , determine la esperanza de  $X$ , la esperanza de  $X^2$  y la varianza de  $X$ .

### Solución

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & \mu_X = c + \frac{n}{2} L \\ \blacksquare \quad & \mu_{X^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} (c + iL)^2 = \frac{1}{n+1} \left( \sum_{i=0}^n c^2 + \sum_{i=0}^n 2cLi + L^2 \sum_{i=0}^n i^2 \right) \end{aligned}$$

El resultado de esta suma lleva a:

$$\mu_X = \frac{1}{n+1} \left( (n+1)C^2 + 2cL \frac{n(n+1)}{2} + L^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) = C^2 + ncL + \frac{n(2n+1)}{6} L^2$$

La última pregunta se obtiene combinando las dos anteriores:

$$VAR[X] = c^2 + ncL + \frac{n(2n+1)}{6}L^2 - (c + \frac{n}{2}L)^2 = \frac{n^2 + 2n}{12}L^2$$

11. Enuncie las propiedades que debe cumplir una función para ser distribución de probabilidad para una variable aleatoria  $X$  y úselas para determinar el valor de  $r$  de manera que

$$\begin{cases} r \left(\frac{1}{2}\right)^k & \text{si } k = 1, 2, 3, \dots, n \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

sea una distribución de probabilidad.

**Solucin:**

Como

$$\sum_{k=1}^n r \left(\frac{1}{2}\right)^k = r \left\{ \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - (1/2)} - 1 \right\} = 1$$

de allí sale  $r$ .

12. Un experimento se repite hasta obtener un éxito. Cada vez que se repite la probabilidad de fracaso disminuye en un factor  $q$ , es decir si en el intento  $n$  la probabilidad de fracaso es  $R$  en el intento  $n + 1$  la probabilidad de fracaso es  $qR$ .

Si la variable aleatoria es el total de intentos que deben hacerse y la probabilidad de fracaso inicial es  $q$ . Determinen

- a) El espacio muestral .

**Solucin:**

$$\Omega = \{E, FE, FFE, FFFE, FFFFE, \dots, \}$$

- b) La Función de distribución de probabilidad para esa variable aleatoria.

**Solucin:**

$$f_x(n) = qq^2q^3 \dots q^{n-1}(1 - q^n) = q^{\frac{(n-1)n}{2}}(1 - q^n)$$

A efectos de que organicen la información pueden usar una tabla

Ensayo	Prob Exito	Prob Fracaso
1	$1 - q$	$q$
2	$1 - q^2$	$q^2$
3	$1 - q^3$	$q^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$1 - q^n$	$q^n$

c) La función de distribución de probabilidad acumulada.

**Solucin:**

$$F_X(n) = \sum_{i=1}^n q^{\frac{(i-1)i}{2}} (1 - q^i)$$

13. Demuestre las siguientes afirmaciones:

$$\blacksquare \sum_{i=0}^n r^i = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

**Solucin:**

Es bastante directo. Llame con  $S = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} + r^n$  y haga el producto  $rS = r + r^2 + \dots + r^n + r^{n+1}$ . Si restamos término a término obtenemos  $S - rS = 1 - r^{n+1}$  de donde con un despeje elemental se obtiene  $S = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$ .

$$\blacksquare \sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1 - r} \quad |r| < 1$$

**Solucin:**

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n r^i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

El resultado se concluye del hecho que  $|r| < 1$  por lo que  $r^{n+1}$  tiende a cero cuando el  $n$  tiende a infinito<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>En realidad ese paso al límite requiere mayor explicación, se puede consultar libro de análisis matemático de Apostol

$$\blacksquare \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} r^i s^{n-i} = (r+s)^n$$

**Solucin:**

Se hace por iducción, el caso  $n = 2$  por ejemplo es muy conocido, es una frmula notable  $(r+s)^2 = \binom{2}{2}r^2 + \binom{2}{1}rs + \binom{2}{2}s^2 = r^2 + 2rs + s^2$  Se asume la hipó tesis para  $k = n$  y se prueba para  $k = n + 1$

Lo primero es verificar la igualdad siguiente:

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}$$

lo cual es cierto pues

$$\begin{aligned} \binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} &= \frac{n!}{i!(n-i)!} + \frac{n!}{(i+1)!(n-(i+1))!} \\ &= \frac{n!}{i!(n-i-1)!} \left( \frac{1}{n-i} + \frac{1}{i+1} \right) \\ &= \frac{n!}{i!(n-i-1)!} \frac{n+1}{(i+1)(n-i)} \\ &= \frac{(n+1)!}{(i+1)!(n+1-(i+1))!} \\ &= \binom{n+1}{i+1} \end{aligned}$$

Despues de allí viene el acomodo

$$\begin{aligned} (r+s)^n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} r^i s^{n-i} = \\ &= \binom{n}{0} s^n + \binom{n}{1} s^{n-1} r + \binom{n}{2} s^{n-2} r^2 + \binom{n}{3} s^{n-3} r^3 + \dots + \binom{n}{n-1} s r^{n-1} + \binom{n}{n} r^n \\ (r+s)^{n+1} &= (r+s)(r+s)^n = \\ &= r \left( \binom{n}{0} s^n + \binom{n}{1} s^{n-1} r + \binom{n}{2} s^{n-2} r^2 + \dots + \binom{n}{n-1} s r^{n-1} + \binom{n}{n} r^n \right) + \\ &+ s \left( \binom{n}{0} s^n + \binom{n}{1} s^{n-1} r + \binom{n}{2} s^{n-2} r^2 + \dots + \binom{n}{n-1} s r^{n-1} + \binom{n}{n} r^n \right) = \\ &= \binom{n}{0} s^n r + \binom{n}{1} s^{n-1} r^2 + \binom{n}{2} s^{n-2} r^3 + \dots + \binom{n}{n-1} s r^n + \binom{n}{n} r^{n+1} + \\ &+ \binom{n}{0} s^{n+1} + \binom{n}{1} s^n r + \binom{n}{2} s^{n-1} r^2 + \dots + \binom{n}{n-1} s^2 r^{n-1} + \binom{n}{n} s r^n = \end{aligned}$$

Agrupando esta última suma toma la forma:

$$\binom{n}{0}s^{n+1} + \sum_{i=1}^n \left( \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right) s^{n+1-i} r^i + \binom{n}{n} r^{n+1} =$$

$$\binom{n}{0}s^{n+1} + \sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} s^{n+1-i} r^i + \binom{n}{n} r^{n+1}$$

Si se tiene en cuenta que  $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$  y  $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$  se obtiene

$$(r+s)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} s^{n+1-i} r^i$$

$$\blacksquare \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} r^i s^{n-i} = nr, \quad r+s=1$$

**Solucin:**

Es bastante similar a la anterior

Note que  $i \binom{n}{i} = i \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} = n \frac{(n-1)!}{(i-1)!((n-1)-(i-1))!}$  y que el primer sumando efectivo empieza en  $i=1$

$$\sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} r^i s^{n-i} = \sum_{i=1}^n n \binom{n-1}{i-1} r^i s^{n-i} = nr \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} r^i s^{n-1-i}$$

La suma en la parte final es  $(r+s)^{n+1} = 1$

$$\blacksquare \sum_{i=0}^{\infty} i(1-r)^{i-1} r = \frac{1}{r}$$

**Solucin:**

Note primero es que  $\frac{d(1-r)^i}{dr} = -i(1-r)^{i-1}$  y que el primer término efectivo es el  $i=1$  así las cosas y usando como referencia el primer ejercicio de esta parte

$$\sum_{i=0}^{\infty} i(1-r)^{i-1} r = -r \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(1-r)^i}{ds} = -r \frac{d}{dr} \left( \sum_{i=1}^{\infty} (1-r)^i \right) =$$

$$\blacksquare \text{ Es bastante conocida la expansión en serie de potencias } \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x$$

**Solucin:**

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i)!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda$$