

Probabilidad: Teoría de conjuntos

Escuela de Matemática

Luis Ernesto Carrera
Retana

Erick Chacón
Vargas

Mario Marín
Sánchez

Rebeca Solís
Ortega

1. Teoría de Conjuntos

1.1. Conceptos preliminares

En teoría de conjuntos los términos *elemento*, *conjunto* y *pertenencia* no se definen, se asume que de una u otra manera el lector tiene una idea al respecto. De hecho, cualquier intento por definir alguno de estos conceptos nos llevaría a definiciones circulares, es decir definiciones que reducen el concepto a un término que no es más que un sinónimo del mismo.

Es usual que los conjuntos se representen por letras mayúsculas A, B, C, \dots y los elementos por letras minúsculas, a, b, c, \dots . Se usa la notación $x \in A$ para indicar que el elemento x pertenece al conjunto A , es decir x es uno de los elementos de A , y la notación $x \notin A$ para indicar que el elemento x no pertenece al conjunto A .

Si bien no existe un conjunto universal [2], usaremos el concepto de conjunto universal o universo restringiéndolo a dominios específicos. Por ejemplo, si hablamos de conjuntos de números enteros entonces el conjunto universo es el conjunto de los enteros. Esta simple aclaración nos facilitará la discusión de algunos de los conceptos que abordaremos posteriormente.

Iniciaremos recordando el **Principio de comprensión**, sumamente importante en el estudio de conjuntos.

Si tenemos un conjunto universo, podemos pensar que cada uno de los elementos de este conjunto debe cumplir o satisfacer alguna condición para estar en ese conjunto y es usual que a los elementos que cumplan con esta condición que los caracteriza les digamos que son de cierto tipo. Por ejemplo si se tiran dos dados D_1, D_2 de distinto color, se anotan las caras que caen en cada uno de ellos, el conjunto de posibles resultados está formado por 36 pares ordenados, ese conjunto, el universo para el experimento de tirar dos dados y registrar las caras que caen, tiene un tipo especial digamos tipo *resultado*.

D_2						
D_1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Por ejemplo si los dados fueran indistinguibles las configuraciones para los posibles resultados serían solamente:

{1,1}	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,5}	{1,6}
{2,2}	{2,3}	{2,4}	{2,5}	{2,6}	
{3,3}	{3,4}	{3,5}	{3,6}		
{4,4}	{4,5}	{4,6}			
{5,5}	{5,6}				
{6,6}					

Principio 1.

Si R es cualquier predicado y t es un tipo que caracteriza un universo Ω hay un conjunto $\{x : t \mid Rx\}$.

Este principio nos permite garantizar que para todo tipo de elemento y para todo predicado siempre hay un subconjunto que cumple el predicado, este conjunto puede ser vacío.

Otro principio importante es el *Principio de extensión* que permite establecer la igualdad entre conjuntos.

Principio 2.

$$A = B \iff (\forall x : t \ x \in A \iff x \in B).$$

1.1.1. Algunas definiciones y propiedades**Definición 1.**

Decimos que un conjunto A es subconjunto del conjunto B si

$$\forall x \in A \implies x \in B.$$

Denotamos esta condición por

$$A \subset B$$

Note que acorde con esta definición se cumple que un conjunto sin elementos, \emptyset es subconjunto de todo conjunto.

Definición 2.

Si A y B son conjuntos se define el conjunto unión de A con B por:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Definición 3.

Si A y B son conjuntos se define el conjunto intersección de A con B por:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Definición 4.

Si A y B son conjuntos se define el conjunto diferencia de A con B por:

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Definición 5.

Si Ω es un conjunto y $A \subset \Omega$ se define el conjunto complemento de A respecto a Ω por

$$\sim A = \Omega \setminus A.$$

Las siguientes propiedades se enuncian sin demostración y resumen algunas de las más importantes acerca de las operaciones definidas previamente.

Propiedades de la Unión

- Conmutatividad $A \cup B = B \cup A$.
- Asociatividad $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
- Identidad $A \cup \emptyset = A$.
- Medio Excluido $\Omega = A \cup \sim A$.
- Otras $A \subseteq A \cup B$.

Propiedades de la Intersección

- Conmutatividad $A \cap B = B \cap A$.
- Asociatividad $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- Identidad $A \cap \Omega = A$.
- Contradicción $A \cap \sim A = \emptyset$.
- Otras $A \cap B \subseteq A$.

Propiedades Conjuntas

■ Distributividad

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

■ Leyes de De Morgan

- $\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B$.
- $\sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$.

■ Absorción

- $A \cup (A \cap B) = A$.
- $A \cap (A \cup B) = A$.

■ Otras

- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
- $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

1.1.2. Conjunto Potencia

Un concepto importante asociado con todo conjunto es el de conjunto *potencia* o *partes de*.

Definición 6.

Si Ω es un conjunto se define el conjunto partes de Ω por

$$P(\Omega) = \{A | A \subset \Omega\}.$$

Así $P(\Omega)$ es un conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de Ω .

1.1.3. Conjunto Producto

Si x y y son elementos, es posible unirlos en una estructura que se llama par ordenado. Un par ordenado puede verse como un conjunto en cuya definición se refleja de manera clara la idea de dos elementos agrupados en un orden definido. La siguiente definición permite lograrlo.

Definición 7.

Si x , y son elementos se define el par ordenado xy por

$$(x, y) = \{\{x, \{x, y\}\}\}.$$

Definición 8.

Si A y B son conjuntos, se define el conjunto producto de A y B por

$$A \times B = \{(x, y), |x \in A \wedge y \in B\}.$$

1.1.4. Cardinalidad

Un concepto de vital importancia al estudiar probabilidad radica en la posibilidad de que dado un conjunto A , dentro de un universo Ω , se pueda asignar a este conjunto alguna medida relativa al universo en el cual está inmerso. Existen teorías completas al respecto y si bien podrían ser bastante útiles en el desarrollo que haremos no profundizaremos en ninguna de ellas.

Los conjuntos con los que trataremos se dividen en dos grandes grupos: discretos y continuos.

Definición 9.

Un conjunto A se dice finito, con cardinalidad $|A| = n$ si existe alguna función biyectiva $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow A$. En otro caso se dice infinito.

Definición 10.

Un conjunto A es contable si es finito o bien infinito pero existe una biyección entre él y el conjunto de los naturales.

En términos simples un conjunto contable (discreto) es aquel en el cual exista una manera de contar sus elementos, puede tener una cantidad finita o infinita de elementos, pero de alguna manera puede encontrarse una estrategia para contarlos.

Por ejemplo los naturales son un conjunto discreto, de hecho son el conjunto que se utiliza para poder contar otros. Todo conjunto finito es contable, los enteros son un conjunto contable y los racionales también.

Para conjuntos discretos finitos la cardinalidad es una manera de asignarles una medida. A continuación listamos un conjunto de propiedades de la cardinalidad.

Propiedades de Cardinalidad

- Si $A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$
- Si $A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$
- Si $|A| = n \Rightarrow |P(A)| = 2^n$
- Si $|A| = n, |B| = m \Rightarrow |A \times B| = mn$

(1)

Cuando los conjuntos no son discretos el concepto de cardinalidad carece de sentido y se sustituye por el término de *medibilidad*, un concepto fuera de los objetivos de estas notas, no obstante hablaremos levemente de algunos términos necesarios en probabilidades.

1.2. Ejercicios Resueltos

1. Dados los conjuntos A y B exprese $A \cup B$ primero como unión de tres conjuntos disjuntos y segundo como unión de dos conjuntos disjuntos.

Solución

Usando diagramas de Venn se puede ver que $A \cup B = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) \cup (A \cap B)$. La demostración de que son disjuntos es bastante directa, por ejemplo si $x \in A \cap B$ entonces $x \notin A \setminus B$ y $x \notin B \setminus A$ los otros casos son bastante similares. Para demostrar que la igualdad se procede como sigue, note que se puede simplificar un poco y que se está recurriendo a elementos básicos del álgebra de operadores lógicos.

$$\begin{aligned}
 x \in A \cup B &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \\
 &\Leftrightarrow (x \in A \wedge \text{Verdadero}) \vee (x \in B \wedge \text{Verdadero}) \\
 &\Leftrightarrow (x \in A \wedge (x \in B \vee x \notin B)) \vee (x \in B \wedge (x \in A \vee x \notin A)) \\
 &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B \vee x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B) \\
 &\Leftrightarrow (x \in A \setminus B) \cup (x \in B \setminus A) \cup (x \in A \cap B)
 \end{aligned}$$

Para verlo como unión de dos conjuntos disjuntos también es importante el uso de diagramas de Venn. $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ o bien $A \cup B = (B \setminus A) \cup A$, un ejercicio simple es comprobar estas igualdades.

2. Dada la siguiente lista de relaciones establezca si son verdaderas y dé una explicación al respecto.

- Dados los eventos A y B siempre es posible representar a A como la unión de los eventos disjuntos $A \cap B$ y $A \cap \bar{B}$

Solución:

Verdadera.

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x \in A \wedge x \in \Omega \\ &\Rightarrow x \in A \cap (x \in B \cup \bar{B}) \\ &\Rightarrow (x \in A \cap x \in B) \cup (x \in A \cap x \in \bar{B}) \\ &\Rightarrow (x \in (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) \end{aligned}$$

- Si A , B y C son eventos entonces el evento E : la ocurrencia de exclusivamente dos de ellos, se puede representar por $E = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Solución:

Falso, un elemento en los tres no es exclusivo a dos de ellos, y está representado en

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

- $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \cup C)$

Solución

Falso, de hecho si x está en C , está en $(A \setminus B) \cup C$ pero no en $(A \cup C) \setminus (B \cup C)$

- $A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup B$

Solución

Verdadero. Es un juego de aplicación de leyes de distributividad, solo se presenta una dirección.

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus (A \cap B)) \cup B &\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin (A \cap B)) \vee x \in B \\ &\Rightarrow (x \in A \wedge (x \notin A \vee x \notin B)) \vee x \in B \\ &\Rightarrow ((x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \notin B)) \vee x \in B \\ &\Rightarrow (\text{Falso} \vee (x \in A \wedge x \notin B)) \vee x \in B \\ &\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in B \\ &\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \in B) \\ &\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge \text{Verdadero} \\ &\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \end{aligned}$$

- $\overline{(A \cup B)} \cap C = C \setminus C \cap (A \cup B)$

Solución

Verdadero.

$$\begin{aligned}
 x \in C \setminus C \cap (A \cup B) &\implies x \in C \wedge x \notin (A \cup B) \\
 &\implies x \in C \wedge x \notin C \cap (A \cup B) \\
 &\implies x \in C \wedge x \in \overline{A \cup B} \\
 &\implies x \in C \cap \overline{A \cup B} \\
 &\implies C \setminus C \cap (A \cup B) \subset C \cap \overline{A \cup B}
 \end{aligned}$$

Faltaría demostrar que $C \cap \overline{A \cup B} \subset C \setminus C \cap (A \cup B)$ lo cual se deja como ejercicio.

$$\blacksquare \overline{(A \cup B)} \cap C = \bar{A} \cap C \cup \bar{B} \cap C$$

Solución:

Falso, tome $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{2, 3, 4\}$

$$\blacksquare (A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$$

Solución:

Es falsa. Por ejemplo si un x está en A, B y C , de seguro está en $A \cup (B \setminus C)$ pero no en $(A \cup B) \setminus C$

$$\blacksquare (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Solución: Verdadero, pues se aplica la propiedad distributiva.

3. Si A, B y C representan eventos arbitrarios encuentre expresiones en términos de A, B y C

- Solamente ocurre A .

$$\textbf{Solución: } A \wedge \neg(B \vee C)$$

- Ocurren al menos dos de ellos.

$$\textbf{Solución: } (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

- Ocurren únicamente dos de ellos.

$$\textbf{Solución: } (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$$

- Ocurre uno de ellos y no más.

Solución: $(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$

- No ocurren los tres.

Solución: $\neg(A \wedge B \wedge C) = \neg A \vee \neg B \vee \neg C$

- Ocurren A y B pero no C .

Solución: $A \wedge B \wedge \neg C$

- Ocurren dos de ellos.

Solución: $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

4. Si A, B y C son eventos explique cada uno de los eventos siguientes:

- $A \cap B \cap C$.

Solución: Ocurren simultáneamente los tres eventos.

- $A \setminus A \cap B$.

Solución: Ocurren los casos de A que no coinciden con casos de B .

- $A \cap \overline{B} \cap C$.

Solución: Ocurren A y C pero no B .

- $(A \cap B) \setminus C$.

Solución: Ocurren A y B pero no C .

- $A \setminus \overline{B \cap C}$

Solución: Son las ocurrencias de A que o no son ocurrencias de B o no son ocurrencias de C

5. Explique los conceptos de conjunto discreto, conjunto enumerable y conjunto continuo.

Solución:

- Un conjunto A es discreto cuando sus elementos se pueden contar ya sea por ser finito, es decir sus elementos están en relación uno a uno con los elementos del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ o bien infinito pero en relación uno a uno con el conjunto de los naturales que es lo mismo que decir que hay una manera o estrategia de contar sus elementos que asegure que todos se pueden contar.

Por ejemplo el conjunto de los enteros $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ es contable, una estrategia es contar así

...	6	4	2	1	3	5	...
...	-3	-2	-1	0	1	2	...

De manera similar se puede establecer una estrategia de conteo para los racionales. El concepto de conjunto discreto es un poco más complejo y en el contexto de probabilidades se usa para clasificar experimentos aleatorios en los que el conjunto de posibles resultados es finito o contable.

- El concepto de conjunto continuo es aún más complejo, para nuestros intereses un conjunto será continuo si puede establecerse una biyección entre él y algún intervalo de números reales.

6. Enuncie el principio de exclusión e inclusión.

Solución: Este principio tiene que ver con cardinalidad, y se puede enunciar así: Si A_1, A_2, \dots, A_n son conjuntos entonces la cardinalidad de la unión de ellos se obtiene por:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \dots (-1)^{n+1} \bigcap_{i=1}^n A_i$$

7. Suponga que 100 de los 120 estudiantes de un colegio estudian al menos uno de los idiomas Inglés, Francés y Alemán. Supongamos también que 65 estudian Inglés, 45 estudian Francés, 42 estudian Alemán, 20 Inglés y Francés, 25 Inglés y Alemán y 15 Francés y Alemán. Determine:

- ¿Cuántos estudian los tres idiomas?

Solución:

Este problema se puede resolver utilizando los diagramas de Venn, veamos si se toman los eventos I : Habla inglés, F : Habla Francés y A : Habla Alemán. Analizando las condiciones del problema, se tiene que:

- $|I| = 65$
- $|F| = 45$
- $|A| = 42$
- $|I \cap F| = 20$
- $|I \cap A| = 25$
- $|F \cap A| = 15$

Con estos datos se tiene:

$$100 = |I \cup F \cup A| = |I| + |F| + |A| - |I \cap F| - |I \cap A| - |F \cap A| + |I \cap F \cap A|$$

De esto el despeje de $|I \cap F \cap A|$ es directo y equivale con los que hablan los tres idiomas. En total 8.

- ¿Cuántos estudian Inglés y Francés pero no Alemán?

Solución:

En este caso se busca la cardinalidad de $|I \cap F \cap \neg A|$.

En total hay 20 personas que hablan Inglés y Francés y 8 que hablan los tres idiomas, esto deja 12 que hablan inglés y Francés pero no Alemán.

- ¿Cuántos estudian solo Inglés?

Solución:

Es muy parecido al caso anterior, y el resultado es 3.

- ¿Cuántos no estudian ningún idioma?

Solución:

En este caso buscamos la cardinalidad de $|\overline{I \cup F \cup A}| = 120 - |I \cup F \cup A|$, la cual corresponde a 20.

8. Suponga que cierto departamento tiene tres terminales sin buffer, que pueden ser conectadas a un computador por medio de dos líneas de comunicación. La Terminal 1 tiene su propia línea de uso, mientras que las Terminales 2 y 3 comparten una línea de comunicación, de manera que a lo sumo una de ellas puede estar usando la línea en un momento determinado. Use notación de conjuntos para expresar y simplificar el siguiente evento, ¿Por lo menos una terminal esté en operación en un momento aleatorio, durante el día de trabajo?

Solución:

Si tomamos los eventos A : La terminal uno está en uso, B : La terminal dos está en uso y C : La terminal tres está en uso. Entonces se sabe que los eventos B, C son excluyentes y de allí el la posible simplificación.

Así el evento de interés es $A \cup (B \cup C)$, y los eventos $A \cap B$ y $A \cap B \cap C$ son excluyentes.

9. Sean A, B, C conjuntos cualesquiera. Probar:

$$\blacksquare A \cup (A \cap B) = A$$

Solución:

La prueba se hace en dos partes. Si $x \in A \cup (A \cap B) \implies x \in A \vee x \in (A \cap B)$

$\implies x \in A \vee x \in A$ es decir $A \cup (A \cap B) \subset A$

Por otro lado $A \subset A \cup (A \cap B)$ pues todo $x \in A$ está en la unión de A con cualquier otro conjunto.

Con esto se demuestra la igualdad pedida

$$\blacksquare A \cap (A \cup B) = A$$

Solución:

Se prueba se puede hacer similar al caso anterior.

También se puede hacer usando la propiedad demostrada en el ítem anterior.

$$\begin{aligned} A \cap (A \cup B) &= (A \cap A) \cup (A \cap B) && \text{distributividad} \\ &= A \cup (A \cap B) && \text{absorción} \\ &= A \end{aligned}$$

$$\blacksquare A \cup B = B \cup (A \setminus B) \text{ y } B \cap (A \setminus B) = \emptyset$$

Solución:

Este tipo de prueba tiene dos partes primero probar la igualdad y luego probar que los conjuntos son disjuntos.

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\implies x \in B \vee (x \in A \wedge x \notin B) \\ &\implies x \in A \vee (A \setminus B) \\ &\implies x \in B \cup (A \setminus B) \end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned} x \in B \cup (A \setminus B) &\implies x \in B \vee (x \in A \wedge x \notin B) \\ &\implies x \in B \vee x \in A \\ &\implies x \in A \cup B \end{aligned}$$

Para demostrar la segunda parte podemos usar el método de contradicción.

Suponga $x \in B \cap (A \setminus B) \implies x \in B \wedge (x \in A \wedge x \notin B)$ lo cual es una contradicción por lo cual la hipótesis $x \in B \cap (A \setminus B)$ es falsa, es decir no existe tal x de donde la intersección $B \cap (A \setminus B)$ es vacía.

$$\blacksquare A = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \text{ y } (A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

Solución:

Es bastante similar al ejercicio anterior:

$$\begin{aligned} x \in A &\iff x \in A \wedge (x \in B \vee x \notin B) \\ &\iff x \in A \wedge x \in B \vee x \in A \wedge x \notin B \\ &\iff x \in A \cap B \vee x \in A \setminus B \\ &\iff x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B) \end{aligned}$$

La prueba de que los conjuntos son disjuntos es muy similar al caso anterior.

$$\blacksquare A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) \text{ y esos tres conjuntos son disjuntos.}$$

Solución:

Usando la primera de las observaciones obtenemos

$$m(A) = m(A \setminus B) + m(A \cap B)$$

, también

$$m(B) = m(B \setminus A) + m(B \cap A)$$

, usando la segunda propiedad se tiene que

$$m(A \cup B) = m(A \setminus B) + m(B \setminus A) + m(A \cap B)$$

Si despejamos $m(A \setminus B)$ y $m(B \setminus A)$ en las dos primeras ecuaciones y lo sustituimos en la segunda se completa la prueba.

10. Use inducción matemática para demostrar que si $m(A) = k$ entonces $m(P(A)) = 2^k$.

Solución:

- La prueba empieza por analizar el caso base, digamos $A = \emptyset$ en ese caso:

$$P(A) = \{\emptyset\} \text{ y } |P(A)| = 2^0 = 1$$

- Se asume que la proposición es cierta para $|A| = k$ y hay que demostrarlo para $|A| = k + 1$. Así tenemos:

$$\text{H.I.: } A_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \text{ entonces } |P(A_k)| = 2^k.$$

H.q.d: $A_{k+1} = \{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ entonces $|P(A_{k+1})| = 2^{k+1}$.

Suponga que $X \in P(A_{k+1})$ entonces hay dos posibilidades para X respecto a a_{k+1} que son $a_{k+1} \in X$ o bien $a_{k+1} \notin X$.

En el segundo caso, $a_{k+1} \notin X$, entonces $X \in P(A_k)$ y por hipótesis de inducción hay 2^k valores de posibles para X . En el primer paso, $a_{k+1} \in X$ entonces es bastante natural ver que $X = X' \cup a_{k+1}$ y $x' \in P(A_k)$, y nuevamente por hipótesis hay 2^k posibles X' , en total hay $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ posibilidades para X , es decir $|P(A_{k+1})| = 2^{k+1}$

1.3. Ejercicios Propuestos

1. Sean A , B y C tres eventos arbitrarios. Encontrar expresiones de los eventos en que de A , B , C :
 - a) Ocurren tanto A como B , pero no C .
 - b) Los tres eventos ocurren.
 - c) Ocurre por lo menos uno.
 - d) No ocurre ninguno.
 - e) No ocurren más de dos.
2. Suponga que A y B son eventos independientes. Pruebe que \bar{A} y \bar{B} son independientes.

Referencias

- [1] Marin M., Mora W., "Probabilidades Curso Virtual" 2007.
- [2] Gries D., Schneider F., "A Logical Approach to Discrete Math", 1a ed. Springer-Verlag, New York, 1994. Mexico, 1978.