TEC | Tecnológico de Costa Rica

Probabilidad: Distribución de objetos indistinguibles

Escuela de Matemática

Semana 5

1. Distribución de objetos indistinguibles

El problema de distribuir r objetos indistinguibles en n celdas, $r \leq n$, con a lo sumo un objeto en cada celda es básicamente directo, puede reducirse al problema de escoger r entre las n celdas, es decir:

$$\binom{n}{r}$$

El problema de poner r objetos en n celdas donde no hay restricción en el número de objetos en cada celda es ligeramente diferente. Suponga que son que se tienen r bolillas blancas las cuales se desean colocar en n celdas. Para esto se colocan en una bolsa las r bolillas blancas y se agregan $n-1$ bolillas de otro color, por ejemplo azules y se procede como sigue:

- Se van sacando una a una las bolillas y se colocan en fila.
- Luego se van contando de izquierda a derecha las primeras n_1 bolillas blancas antes de la primer bolilla azul, son las que irán a la celda 1.
- Las que estén después de la primer bolilla azul, serán las bolillas correspondientes a la celda 2 y así sucesivamente

Así las r bolillas blancas, junto con las $n-1$ bolillas azules se colocarán en $n+r-1$ campos y el problema se reduce a elegir de esos $n+r-1$ campos $n-1$ para ubicar las bolillas azules

$$\binom{n+r-1}{n-1}. \tag{1}$$

Usando adecuadamente esta última forma se obtiene el siguiente teorema:

Teorema 1.

El número de $r-$combinaciones con repetición sobre un conjunto con n elementos es

$$\binom{n+r-1}{n-1}.$$

Analicemos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.

Si n personas se colocan aleatoriamente en n oficinas. ¿Cuál es la probabilidad de que quede exactamente una oficina vacía.?

Solución

El total de posibles ubicaciones de las n personas en las n oficinas es n^n, pero para que exactamente una oficina quede vacía el análisis debe ser cuidadoso. Se debe elegir una oficina para que quede vacía lo cual puede hacerse de n formas. Luego debe elegirse otra para que quede con dos personas, esta puede elegirse de $n-1$ maneras. Una vez hecho esto se eligen dos personas para la segunda oficina y las restantes se ubican una en cada una de las $n-2$ oficinas restantes. Así la probabilidad pedida es:

$$\frac{n(n-1)\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n} = \frac{\binom{n}{2}n!}{n^n}.$$

Ejemplo 2.

Si un arreglo binario de doce elementos contiene 8 unos y 4 ceros, ¿cuál es la probabilidad de que los cuatro ceros queden? juntos.

Solución

Solo hay 9 arreglos en los cuales los cuatro ceros quedan juntos, así la probabilidad pedida es:

$$\frac{9}{\frac{12!}{4!8!}} = \frac{9}{\binom{12}{8}} = \frac{1}{55}$$

Ejemplo 3.

En un grupo de probabilidad hay inscritas n parejas (hombre, mujer) para hacer una tarea. El profesor decide separarlas todas y formar n parejas en forma totalmente aleatoria. ¿Cuál es la probabilidad de que se formen las mismas parejas originales? y ¿cuál es la probabilidad de que se formen sólo parejas hombre - mujer?

Solución:

Para que se formen las mismas parejas originales solo se necesita calcular el número total de parejas que se pueden formar. Si se calcula este total de parejas como el número de permutaciones de las $2n$ personas se tiene un conteo redundante en los dos sentidos siguientes:

- Este conteo está tomando en cuenta el orden en que las n parejas quedan agrupadas.
- Este conteo está tomando en cuenta el orden en que se ubica cada pareja.

Por lo tanto, la forma correcta de calcular el número de posibles parejas es

$$\frac{(2n)!}{2^n n!}$$

La probabilidad solicitada en la primera parte es el inverso de este número.

La segunda probabilidad pedida puede resolverse usando el mismo esquema anterior, y se puede razonar así. Si los hombres están fijos en las posiciones $1,3,5,\ldots,$ las mujeres se pueden ubicar en $n!$ formas lo cual da todas las posibles maneras de hacer parejas. Por lo tanto, la probabilidad pedida es:

$$\frac{n!}{(2n)!/2^n n!} = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}.$$

2. Propiedades Importantes

En esta sección se trata de rescatar algunas propiedades importantes acerca de conteo, algunas de las cosas que se expondrán resultarán reiterativas respecto a lo enunciado antes, cosa que no necesariamente es inconveniente.

Este primer teorema es importante pues permite diferentes opciones para abordar el mismo tipo de problema

Teorema 2.

Los siguientes valores:

1. El número de soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$, donde $x_i \geq 0 \ \forall \ (1 \leq i \leq n)$,
2. El número de $r-$combinaciones con repetición sobre un conjunto de tamaño n,
3. El número de maneras de distribuir r objetos indistinguibles en n contenedores indistinguibles,

son iguales.

Teorema 3.

Los coeficientes binomiales cumplen las siguientes propiedades

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$
$$\binom{n}{r} = \frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1}.$$
$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}.$$
$$\binom{n}{r}\binom{n}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}.$$

Las demostraciones de estos resultados son un ejercicio interesante.

3. Ejercicios Propuestos

1. Siete bolitas idénticas se van a ubicar en 4 celdas ¿de cuántas maneras puede hacerse esta ubicación.?

   Solución: Esto se resuelve por una aplicación inmediata del criterio para distribuir objetos idénticos en celdas, la respuesta es:

   $$\binom{7+4-1}{4-1}$$

2. Se van a ubicar 7 bolas en 7 celdas, ¿cuál es la probabilidad de que queden tres celdas con 1 bolilla, 2 con dos y dos desocupadas?

   Solución: En total hay 7^7 formas de colocar las bolillas en las celdas. Por otro lado, el arreglo 2,2,1,1,1,0,0 puede ocurrir de muchas maneras, de hecho puede asociarse con permutaciones de la tira 2211100, lo cual da $\frac{7!}{2!\cdot 3!\cdot 2!}$ posibilidades.

   Una vez decidido el arreglo a utilizar, las 7 bolillas pueden ubicarse en $\frac{7!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!}$ lo cual conduce a que la probabilidad solicitada sea:

   $$\frac{\frac{7!}{2!\cdot 3!\cdot 2!}\cdot\frac{7!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!}}{7^7}$$

3. Se tiran 7 dados, ¿cuántos resultados pueden ocurrir?

   Solución: este es un problema muy simple pues cada dado puede ocupar una de 6 posibilidades, en total $\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ posibilidades.

4. Se tienen que ubicar a 10 personas en 9 autobuses de forma totalmente aleatoria. Determine la probabilidad de que los nueve buses queden con pasajeros.

   Solución

$$\frac{\binom{9}{1}\binom{10}{2}8!}{9^{10}}$$

5. Se tienen que ubicar 10 bolillas idénticas en 9 celdas, determine la probabilidad de que todas las celdas queden ocupadas.

   Solución

$$\frac{\binom{1+8}{8}}{\binom{10+8}{8}}$$

6. En la escuela *mentirillas* solo hay siete niños, entre ellos los gemelos *Cháves* que son indistinguibles. Todas las mañanas son sometidos a una rutina de tareas, usted debe responder las siguientes preguntas.

   a) Si deben hacer la fila para entrar a la escuela, ¿de cuántas maneras pueden ubicarse, si los gemelos no pueden quedar juntos?

   Solución:
   El total de posibilidades sería $\frac{7!}{2!}$, mientras que la cantidad de veces que los gemelos estarían juntos sería $6!$. Así, la cantidad de maneras en que pueden ubicarse sin que los gemelos queden juntos es $\frac{7!}{2!} - 6!$.

b) La maestra tiene 12 confites y quiere darle al menos uno a cada niño, ¿de cuántas maneras puede repartir estos confites si además los dos gemelos deben recibir igual cantidad de confites?.

Solución:
Como al menos le debe corresponder un confite a cada niño y los confites son indistinguibles, se le da uno a cada uno (esto puede ocurrir de una manera) y quedan 5 confites por repartir, dado que a los gemelos se les debe dar la misma cantidad, se deben analizar los siguientes casos:

1) A los gemelos NO les corresponde más confites: Se distribuyen los 5 confites restantes entre los 5 niños restantes $\binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4}$.
2) A los gemelos les corresponde un confite más a cada uno: Quedaría por distribuir 3 confites entre 5 niños $\binom{5+3-1}{5-1} = \binom{7}{4}$.
3) A los gemelos les corresponden dos confite más a cada uno: Quedaría por distribuir 1 confite entre 5 niños $\binom{5+1-1}{5-1} = \binom{5}{4}$.

En total sería

$$\binom{9}{4} + \binom{7}{4} + \binom{5}{4}$$

Note que esta solución es equivalente a

$$\binom{9}{5} + \binom{7}{3} + \binom{5}{1}$$

c) La maestra decide formar la directiva de la escuela, (Presidente, Secretario, y Tesorero.) ¿De cuántas maneras puede hacerlo? (Recuerde que los gemelos son indistinguibles.)

Solución:
En este caso debemos analizar tres posibilidades:

- No hay gemelos en la directiva: Se tendría entonces $5 \cdot 4 \cdot 3 = P(5,3)$ maneras.
- Hay un sólo gemelo en la directiva: Se tendrían $\binom{5}{2} \cdot 3!$ maneras.
- Están los dos gemelos en la directiva: Se tendrían $\binom{5}{1} \frac{3!}{2!}$ maneras.

Así el total de maneras corresponde a:

$$P(5,3) + \binom{5}{2} \cdot 3! + \binom{5}{1} \frac{3!}{2!} = 135 \text{ maneras posibles}$$

7. Se van a distribuir 40 estudiantes indistinguibles en 6 aulas, ¿de cuántas maneras puede hacerse la distribución si las dos primeras aulas no pueden quedar vacías, la tercer aula debe tener al menos 3 estudiantes y el aula 4 a lo sumo un estudiante?

   Solución:

   Las aulas 1,2 reciben al menos un estudiante y la tres 3 estudiantes así que quedan 35 estudiantes para repartir entre las 6 aulas, donde en el aula 4 sólo puede haber 0 o 1 estudiante, así anlizamos dichos casos:

   - Si recibe 0 más hay $\binom{39}{4}$ formas de hacer la distribución solicitada.
   - Si recibe una mas hay $\binom{38}{4}$ formas de hacer la distribución solicitada.

   Así en total hay $\binom{39}{4}+\binom{38}{4}$.

8. Se tienen 10 personas se van a ubicar en 6 oficinas, si ninguna oficina debe quedar vacía. ¿De cúantas maneras se puede dar la ocupación si las personas son indistinguibles? Y si las personas son distinguibles, ¿cuál sería una estrategia de hacer el conteo?.

   Solución:

   Si las personas se consideran **indistiguibles** en se separan 6 personas (una por oficina) y luego se reparten las cuatro restantes entre las 6 oficinas, por lo que se tiene: $\binom{6+4-1}{6-1}$.

   Si las personas son **distinguibles** el problema se hace largo, pues se deben determinar todos los arreglos x_1,x_2,x_2,x_4,x_5,x_6 tales que $x_i>0$ y $x_1+x_2+x_2+x_4+x_5+x_6=10$ y para cada una de esas séxtuplas calcular los posibles acomodos de las personas. Por ejemplo un arreglo es $(2,2,3,1,1,1)$, este arreglo aparece $\frac{6!}{2!3!}$ veces con otros órdenes. Además los acomodos de las personas para cada uno de estos arreglos son

$$\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{3}3!$$

   Se calcula cada uno de ellos, se suman y se divide entre 6^{10}.

9. Un ascensor puede detenerse en 10 pisos. Si parte con 11 pasajeros ¿cuál es la probabilidad de que en ningún piso bajen más de dos pasajeros?

Solución:

Este problema obliga a que en cada piso bajen a lo sumo 2 pasajeros, su solución es ligeramente larga.

Las opciones para que las personas bajen, son arreglos $(n_1, n_2, \ldots, N_{10})$ donde n_i es el total de personas que bajan en el piso i, esos arreglos son, sin contar el orden, (2222210000), (2222111000) , (2221111100) , (2211111110). Luego se debe calcular las maneras en que se puede dar cada uno de esos arreglos, así la probabilidad pedida es:

$$\frac{\frac{10!}{5!4!}\binom{11}{2}\binom{9}{2}\binom{7}{2}\binom{5}{2}+\frac{10!}{4!3!3!}\binom{11}{2}\binom{9}{2}\binom{7}{2}\binom{5}{2}3!+\frac{10!}{3!5!2!}\binom{11}{2}\binom{9}{2}\binom{7}{2}5!+\frac{10!}{2!7!}\binom{11}{2}\binom{9}{2}7!}{10^{11}}$$

Este problema también se puede resolver por el principio de inclusión exclusión.

10. Un ascensor puede detenerse en 10 pisos. Si parte con 7 pasajeros ¿Cuál es la probabilidad de que en ningún piso bajen más de dos pasajeros?

Solución:

Para resolver este problema puede echarse mano al principio del producto. Cada pasajero tiene 10 opciones para decidir dónde bajarse del ascensor así que hay 7^{10} formas en las cuales los pasajeros se bajan. Para que no se bajen dos en el mismo piso, los 7 deben bajar en pisos distintos, así que el primer pasajero tiene 10 opciones para bajar, el segundo 8 a así sucesivamente. La probabilidad pedida es:

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot 4}{10^7}$$

Esta solución es correcta para el evento en ningún piso bajan dos o más pasajeros; Pero: Si uno deseara el evento *no bajan más de dos pasajeros* la cosa cambia un poco. Les propongo esta posibilidad para que la analicen.

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ las cantidades de pasajeros que se bajan en cada piso, es evidente que para el problema en cuestión debe cumplirse que:

- $0 \leq X_i \leq 2$
- $X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$

  Pero estas soluciones no son tantas, de hecho salvo reordenamientos son estas

$$2+2+2+1+0+0+0+0+0+0=7$$

$$2+2+1+1+1+0+0+0+0+0=7$$

$$2+1+1+1+1+1+0+0+0+0=7$$

$$1+1+1+1+1+1+1+0+0+0=7$$

Para el primer caso hay $\binom{10}{3}\binom{7}{1}$ posibles soluciones y entonces hay $\binom{10}{3}\binom{7}{1}\frac{7!}{2!^3}$ formas de que las personas bajen en ese caso. Los demás funcionan parecido y creo que la probabilidad pedida es:

$$\frac{\binom{10}{3}\binom{7}{1}\frac{7!}{2!^3}+\binom{10}{2}\binom{8}{3}\frac{7!}{2!^2}+\binom{10}{1}\binom{9}{5}\frac{7!}{2!}+\binom{10}{7}7!}{7^{10}}$$

11. Considere el problema de correspondencia de n urnas y n bolas numeradas. Muestre que la probabilidad de que al menos haya una correspondencia está dada por

$$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}\approx 1-e^{-1}=0,632120559.$$