# Instituto Tecnológico de Costa Rica

## Escuela de Matemática

## Tarea semana 9-10-11

Entrega: Lunes 23 noviembre II-2020

**1.** Considere una variable $X$ cuya distribución de probabilidad tiene la forma:

$$g(x) = \begin{cases} cx(1-x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

a) Calcule el valor de $c$.

b) Determine la distribución acumulada para $X$.

c) Si se sabe que $P[X < \omega] = 1/2$, determine el valor de $\omega$.

**2.** Suponga que el tiempo (en horas) que toma atender una solicitud de cotización sigue una distribución normal con media dos horas. ¿Cuál es la probabilidad de que un tiempo de respuesta supere las 4 horas? Si el tiempo de respuesta ha superado las 4 horas, ¿cuál es la probabilidad de que supere las 8 horas?

**3.** Si $X$ sigue una distribución normal con parámetros $\mu = 70$ y $\sigma = 10$:

a) determine $P[X > 90]$

b) encontrar $\omega$ tal que $P[X < \omega] = 0.1$

c) encontrar intervalos para los cuales $P[|X - 70| < \omega] = 0.05$

**4.** Una universidad realiza una prueba que se distribuye normal con media $\mu$ y varianza $\sigma^2$. Los estudiantes se agrupan de acuerdo con las siguientes reglas:

**Grupo 1:** aquellos cuya nota $x$ cumpla $x > \mu + \sigma$;

**Grupo 2:** aquellos cuya nota $x$ cumpla $\mu < x < \mu + \sigma$;

**Grupo 3:** aquellos cuya nota $x$ cumpla $\mu - \sigma < x < \mu$;

**Grupo 4:** aquellos cuya nota $x$ cumpla $\mu - 2\sigma < x < \mu - \sigma$; y finalmente

**Grupo 5:** aquellos cuya nota $x$ cumpla $x < \mu - 2\sigma$.

Determine los porcentajes que representan cada grupo.

**5.** Una máquina produce esferas para roles cuyos diámetros están distribuidos normalmente con parámetros $\mu = 1$ y $\sigma = 0.002$. Las especificaciones establecen como aceptables los roles cuyo diámetros estén entre $1.000 \pm 0.003$ cm. ¿Qué porcentaje de las esferas son rechazadas?

**6.** El tiempo de vida en horas de cierta batería para linterna sigue la distribución $f_X(t) = \lambda^2 te^{-\lambda t}$ Deterimine la media y la varianza para $X$.

**7.** Sea $X$ una variable aleatoria continua definida en $[-1, 1]$ cuya densidad de probabilidad tiene la forma $f_X(x) = ax^2 + bx + c$

a) Demuestre que $2a/3 + 2c = 1$

b) Calcule $\mu_X$

c) Calcule $\sigma_X^2$

d) Encuentre $a, b$ y $c$ tales que $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1/15$

**8.** Al tomar un pez que pertenece a cierta población, su peso sigue una distribución normal con media 500 gramos y varianza 400 gramos al cuadrado. Una caja de almacenamiento debe contener entre 9950 y 10 500 gramos. Para tener una probabilidad de que el 95 % de las cajas cumplen esta condición, se requiere saber el mínimo de peces en la caja.

a) Determine el mínimo de peces a colocar en la caja.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que al colocar dicha cantidad de peces, la caja exceda el peso de 10 500 gramos?

**9.** La política de la empresa establece que el peso promedio de los peces en una caja (problema previo) debe estar entre 495 y 505 gramos con una probabilidad del 90 %. Un cliente quiere que le entreguen cajas con 8 peces. Si los peces en la caja se eligen de manera aleatoria, ¿es posible satisfacer la demanda del cliente? ¿Porqué? ¿Cuál la cantidad mínima de peces que se deberían empacar por caja para lograr esta demanda?

**10.** Un persona piensa que los panes que produce tienen un peso promedio de 500 gramos con una desviación de 10 gramos. El toma una muestra de 5 panes y promedia sus pesos y descubre un peso promedio de 497 gramos. Si esta persona está en lo cierto con respecto al peso promedio de los panes, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido ese promedio?

**11.** Sea $X$ una variable aleatoria con función de densidad $f_X$. Para cada caso calcule lo que se indica

a) $f_X(t) = ae^{-3t}$, $x \in [3, \infty[$. Calcule $a$, $\mu_X$ y $M_X(t)$.

b) $f_X(t) = \dfrac{3}{(1+t)^4}$, $x \in [0, \infty[$. Calcule $\mu_X$ y $\sigma_X^2$.

**12.** El tiempo de efecto de un fenómeno específico es una variable aleatoria Gamma con promedio 6 horas y varianza 12 horas. Determine la probabilidad de que este efecto dure:

a) más de 3.5 horas;

b) entre 2.5 y 3.5 horas.

**13.** Suponga que el tiempo de viaje desde su casa hasta su oficina se distribuye normalmente con una media de 40 minutos y una desviación estándar de 7 minutos. Si desea estar 95 % seguro de que no llegará tarde a una cita en el consultorio a la 1 p.m., ¿cuál es la última hora a la que debe salir de casa?

**14.** En un determinado banco, la cantidad de tiempo que un cliente pasa siendo atendido por un cajero es una variable aleatoria exponencial con una media de 5 minutos. Si hay un cliente en servicio cuando ingresa al banco, ¿cuál es la probabilidad de que aún esté con el cajero después de 4 minutos adicionales?

**15.** La cantidad de clientes que llegan a una cajero en un banco sigue una distribución de Poisson con media 12 clientes por hora, determine la probabilidad de que el tiempo que trascurre hasta la llegada de próximo cliente supere los 6 minutos. Se desea estimar el tiempo que transcurre hasta que hallan llegado 8 clientes a la fila, determine la probabilidad de que ese tiempo sea inferior a 45 minutos.