TEC Tecnológico de Costa Rica

Probabilidad:

Reglas básicas de probabilidad, Probabilidad condicional, total y Regla de Bayes

Escuela de Matemática

Luis Ernesto Carrera Retana

Erick Chacón Vargas

Mario Marín Sánchez

Rebeca Solís Ortega

Giovanni Sanabria Brenes

1. Resultados sobre probabilidades

Cuando en un experimento aleatorio se conocen las probabilidades de los eventos simples, es decir las probabilidades de cada uno de los elementos de espacio muestral, se puede calcular las probabilidades de eventos compuestos y de algunos eventos relacionados utilizando una serie de reglas básicas.

Así, dada una experiencia aleatoria, la probabilidad toma evento de un conjunto de eventos y le asigna un número real. Formalmente, este conjunto de eventos no puede ser cualquiera, debe cumplir una serie de requisitos como: contener al evento seguro, contener al evento imposible, contener el complemento respecto a Ω de cada uno de sus elementos y contener la unión de cualquier colección numerable de sus elementos. Este conjunto de eventos con esas características es llamado una *sigma álgebra* ($\sigma-$álgebra).

En nuestro caso, para este curso es suficiente utilizar como *sigma álgebra* el conjunto potencia de $\Omega : \mathscr{P}(\Omega)$. Note que este conjunto cumple los requisitos anteriores.

Definición 1.

Una medida de probabilidad es una función: $P : \mathscr{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ que cumple:

- $0 \leq P[A]$ para todo evento A.
- $P[\Omega] = 1$.
- Si A y B son eventos mutuamente excluyentes entonces
$$P[A \cup B] = P[A] + P[B].$$
- Si los eventos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ son eventos mutuamente excluyentes ($A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$), entonces
$$P[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n] = \sum_{n=1}^{\infty} P[A_n].$$

El concepto de medida de probabilidad o función de probabilidad juega un rol básico al momento de estudiar las probabilidades, de hecho cuando tenemos un experimento aleatorio y queremos estudiarlo probabilísticamente lo que necesitamos es definir una de tales medidas.

El cálculo de probabilidades se basa principalmente en la aplicación de estas reglas básicas. El siguiente teorema, define una serie de propiedades que cumple una medida de probabilidad.

Teorema 1.

Si P es una medida de probabilidad definida sobre una familia de eventos $\mathscr{F}$ sobre un espacio muestral Ω. Entonces

1. $P[\emptyset] = 0$.
2. $P[A] = 1 - P[\,\overline{A}\,]$.
3. Para cualesquiera eventos A, B $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$.
4. Para cualesquiera eventos A, B. Si $A \subset B$ implica $P[A] < P[B]$.

Demostración y discusión de algunos casos.

1. Esta propiedad se obtiene en forma inmediata pues, si asumimos por contradicción que $P[\emptyset] = r > 0$ se tiene que:

$$P[\Omega] = P[\Omega \cup \emptyset] = P[\Omega] + P[\emptyset] = 1 + r > 1,$$

lo cual es una contradicción, por lo que se concluye $P[\emptyset] = 0$.

2. Esta propiedad también se obtiene en forma sencilla de:

$$1 = P[\Omega] = P[A \cup \overline{A}] = P[A] + P[\overline{A}].$$

Recuerde que si A es un evento sobre un espacio muestral Ω entonces el evento *no ocurre* A se denota por $\overline{A}$.

3. Esta propiedad se demuestra usando un poco de teoría de conjuntos. Lo primero es notar que $A \cup B$ es una unión de eventos excluyentes:

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}),$$

por lo tanto,

$$P[A \cup B] = P[(A \cap B)] + P[(\overline{A} \cap B)] + P[(A \cap \overline{B})], \tag{1}$$

por otro lado los eventos $A \cap \overline{B}$ y $A \cap B$ son excluyentes y su unión es A, así:

$$P[A] = P[(A \cap B)] + P[(A \cap \overline{B})], \tag{2}$$

similarmente:

$$P[B] = P[(A \cap B)] + P[(\overline{A} \cap B)], \tag{3}$$

sumando término a término (2) y (3) se obtiene:

$$P[A]+[P[B]=2\,P[(A\cap B)]+P[(A\cap\overline{B})]+P[(\overline{A}\cap B)]. \tag{4}$$

Restando (4) y (1) se obtiene el resultado.

4. Esta propiedad se deja como ejercicio para el lector.

2. Probabilidad Condicional

En esta sección estudiaremos que pasa cuando se tienen eventos no independientes, donde la ocurrencia de uno afecta directamente al otro.

Si A y B son eventos entonces en algunos casos podríamos estar interesados en analizar un evento restringido del tipo:

"La probabilidad de que ocurra A dado que sabemos que B ocurre."

Así en general, cuando los eventos no son independientes y ocurren en forma sucesiva la ocurrencia de uno de ellos puede influir en la del otro. Este tipo de probabilidad se llama *probabilidad condicional*
Considere el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.

En una reunión hay 10 personas: 6 mujeres (2 son extranjeras) y 4 hombres (3 son extranjeros). Se eligen una persona al azar. Analicemos los eventos:

- B la persona elegida es mujer.
- A la persona elegida es extranjera.

Note que la probabilidad de B depende de A, pues:

- Si se sabe que A ocurre entonces la probabilidad de B es 2/6.
- Si se sabe que A no ocurre entonces la probabilidad de B es 3/4.

Así, la ocurrencia o no de A influye sobre la probabilidad de B. Del mismo modo, la probabilidad de A depende de B.
Por lo tanto, A y B son eventos dependientes
En general, las siguientes defenciones nos permite interpretar mejor cuando nos eventos son independientes.

Definición 2 (probabilidad condicional)**.**

La probabilidad de que un evento A ocurra dado que un evento B ha ocurrido se llamará probabilidad condicional de A dado B, y se denotará por

$$P[A|B]$$

Definición 3 (Eventos independientes)**.**

Dos eventos A y B son independientes si se cumple:

$$P[B|A] = P[B] \text{ y } P[A|B] = P[A].$$

Teorema 2 (Probabilidad Condicional)**.**

Sea A y B eventos, se tiene que:

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \tag{5}$$

Una manera informal de darle alguna justificación a esta regla es la siguiente: Si en un espacio muestral conocemos de previo que ha ocurrido un evento, B, y queremos calcular la probabilidad de que ocurra otro evento A entonces, simplificando el cálculo de la probabilidad a la razón:

$$\frac{\text{total de casos que verifican el evento}}{\text{total de casos}}$$

se tiene que como ya ha ocurrido B el espacio muestral ahora puede reducirse a B y los casos que verifican el evento ya no son los elementos de A sino los elementos de $A \cap B$ es decir:

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}. \tag{6}$$

Si A y B son eventos no necesariamente independientes se tiene:

$$P[A \cap B] = P[B]\, P[A|B]. \tag{7}$$

Esta regla se generaliza en el siguiente sentido. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son eventos entonces la probabilidad de la ocurrencia del evento compuesto A_1 y A_2 y $\ldots$ y A_n, es decir todos los eventos, cumple :

$$\begin{aligned} P[A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n] &= \\ P[A_1]\, P[A_2|A_1]\, P[A_3|(A_1 \cap A_2)] &\ldots \\ P[A_n|(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})]&. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.

Suponga que se lanzan un par de dados y se tienen los eventos A : el primero de los dados cae impar, B : el segundo cae impar y C la suma de ambas caras es impar. Determine:

1. La probabilidad del evento A.
2. La probabilidad del evento A dado el evento B.
3. La probabilidad del evento B.
4. La probabilidad del evento B dado el evento A.
5. La probabilidad del evento C.
6. La probabilidad del evento C dado el evento A.
7. La probabilidad del evento C dado el evento B.
8. La probabilidad de que ocurran los tres eventos al mismo tiempo.

Soluciï¿½n:

1. $P[A] = \frac{1}{2}$.
2. $P[A|B] = \frac{1}{2}$.
3. $P[B] = \frac{1}{2}$.
4. $P[B|A] = \frac{1}{2}$.
5. $P[C] = \frac{1}{2}$.
6. $P[C|A] = \frac{1}{2}$.
7. $P[C|B] = \frac{1}{2}$
8. $P[A \cap B \cap C] = 0$

Note que en general se tiene que los pares de eventos A, C y B, C son independientes, pero A, B y C no lo son.

3. Regla de Producto

El evento que indica la ocurrencia conjunta de los eventos A y B se denota por $A \cap B$. Informalmente dos eventos se dicen independientes si la ocurrencia de uno de ellos no influye ni se ve influida por la ocurrencia del otro.

Es frecuente que se confunda el concepto de independencia con la idea de exclusión mutua o intersección vacía, por lo que tenemos la siguiente definición:

Definición 4 (Eventos independientes y excluyentes)**.**

- Dos eventos son independientes si la ocurrencia de uno de ellos no incide en la probabilidad de ocurrencia del otro.
- Dos eventos son excluyentes si la ocurrencia de uno de ellos excluye la ocurrencia del otro.

Así tenemos la siguiente propiedad:

Teorema 3 (Regla del Producto)**.**

Los eventos A y B son eventos independientes si y solo si se cumple

$$P[(A \cap B)] = P[A]\,P[B].$$

Por inducción se puede demostrar que si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son eventos independientes con probabilidades $P[A_1], P[A_2], \ldots, P[A_n]$ respectivamente, entonces la probabilidad de la ocurrencia del evento compuesto A_1 y A_2 y $\ldots$ y A_n, es decir todos los eventos, cumple:

$$P[A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n] = P[A_1]\,P[A_2] \ldots P[A_n]. \tag{8}$$

Con un ejemplo podemos ayudarnos a entender mejor este concepto.

Ejemplo 3.

En una urna hay 7 bolillas, tres rojas y cuatro negras, y se extraen dos bolitas. Sea A el evento la primera bolilla es roja y B el evento la segunda bolilla es negra. Si el procedimiento es sacar la bolilla, ver el color y devolverla a la urna entonces la ocurrencia o no ocurrencia del evento A deja exactamente igual la probabilidad del evento B, en este caso decimos que son **independientes**. No obstante si el procedimiento es extraer la primera bolilla y no devolverla a la urna entonces la probabilidad del evento B depende de lo que pasó con el evento A y los eventos no son independientes.

Note que para el primer caso la probabilidad del evento *La primera bolilla es roja y la segunda es negra* es

$$P[A \cap B] = P[A]\,P[B] = \frac{3}{7}\frac{4}{7}$$

mientras esa probabilidad para el segundo caso es

$$P[A \cap B] = P[A]\,P[B|A] = \frac{3}{7}\frac{4}{6}$$

Ejemplo 4.

Suponga que una máquina fabrica un tipo específico de componente, y que la probabilidad de que un componente salga defectuoso es constante p e independiente de los resultados en los componentes tanto anteriores como posteriores.

1. Estime la probabilidad de que el primer componente defectuoso salga inmediatamente después de los primeros N componentes.

2. Â¿Cu'antos componentes deben producirse para tener una probabilidad del 90% de obtener al menos un componente defectuoso?

Solución

1. Sea D_i el componente i es defectuoso y $\overline{D}_i$ el complemento de D_i. La probabilidad pedida es:

$$P[(\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap \cdots \cap \overline{D_N}) \cap D_{N+1}] = (1-p)^N p.$$

2. La probabilidad de ningún componente defectuoso en los primeros k componentes es $(1-p)^k$ entonces la probabilidad de al menos un componente defectuoso es $1-(1-p)^k$. El valor k buscado debe cumplir con

$$\begin{aligned} 1-(1-p)^k &> 0{,}9 \\ (1-p)^k &< 0{,}1 \\ k &> \frac{\ln 0{,}1}{\ln(1-p)}. \end{aligned}$$

Por ejemplo si la probabilidad de que un componente sea defectuoso es de 0,02 deberían producirse alrededor de 114 componentes para tener una probabilidad del 90 % de que haya al menos uno defectuoso.

Ejemplo 5.

Una caja A contiene tres bolas blancas y cuatro negras. Otra caja, B, contiene dos bolas blancas y tres negras. Se extraen bolas, una a una, en forma aleatoria y sin reemplazo.

1. Si las dos bolas son elegidas de A, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean negras?
2. Si se eligen dos bolas, una de cada caja, ¿ cuál es la probabilidad de que no sean del mismo color?
3. Si se elige una caja al azar y se extraen dos bolas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

Solución

1. Si se saca la primer bola de la caja A y la segunda de la misma caja la probabilidad de que ambas sean negras es:

$$\frac{4}{7}\frac{3}{6}.$$

2. Una manera de hacerlo es por complemento, extraer dos bolas de distinto color es el complemento de extraerlas del mismo color. La probabilidad de extraerlas del mismo color es sacar la primera negra y la segunda negra o la primera blanca y la segunda blanca, por lo tanto la probabilidad pedida es:

$$1-\left(\frac{4}{7}\frac{3}{5}+\frac{3}{7}\frac{2}{5}\right).$$

De seguro también puede hacerse sin usar complementos.

3. El evento se descompone en elegir la caja A y extraer dos blancas o dos negras o bien elegir la caja B y extraer dos blancas o dos negras. Suponiendo que cada caja tiene la misma probabilidad de ser elegida se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{7}\frac{2}{6}+\frac{4}{7}\frac{3}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\frac{2}{4}\right) &= \\ \frac{1}{2}\left(\frac{6}{42}+\frac{12}{42}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{20}+\frac{6}{20}\right) &= \frac{29}{70}.\end{aligned}$$

Ejemplo 6.

Un carpintero tiene tornillos en dos cajas una azul y otra roja. Él toma al azar tornillos de cualquiera de las dos cajas. La caja azul contiene cuatro tornillos de 15 mm y cinco de 20 mm y la caja roja contiene seis de 15 mm y dos de 20 mm.

1. Si en las dos siguientes búsquedas de tornillo el carpintero toma un tornillo de cada caja, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean del mismo tipo?
2. Suponga que la caja azul está un poco más cerca por lo que toma tornillos de ella dos de cada tres veces. Si el carpintero necesita dos tornillos y toma ambos de alguna de las cajas en forma sucesiva, ¿cuál es la probabilidad de que los dos sean del mismo tipo?

Solución:

1. Sea A el evento: toma un tornillo de 15 mm de cada caja y B el evento: toma un tornillo de 20 mm de cada caja.

   El evento A no es simple de hecho, es el evento compuesto $A_1 \cap A_2$ donde A_1 es toma un tornillo de 15 mm de la caja 1 y A_2 es toma un tornillo de 15 mm de la caja 2, eventos independientes.

   $$P[A] = P[A_1 \cap A_2] = P[A_1]\,P[A_2] = \frac{4}{9}\frac{6}{8} = \frac{1}{3}.$$

   Similarmente.

   $$P[B] = \frac{5}{9}\frac{2}{8} = \frac{5}{36}$$

   Como A yB son excluyentes la probabilidad pedida es:

   $$P[A \cup B] = P[A] + P[B] = \frac{1}{3} + \frac{5}{36} = \frac{17}{36}.$$

2. En este caso el evento pedido puede descomponerse como sigue. Sea M el evento toma los tornillos de la caja azul y N toma los tornillos de la caja roja. Sean P_1 el primer tornillo es de 15 mm, P_2 el segundo tornillo es de 15 mm, Q_1 el primer tornillo es de 20 mm y Q_2 el segundo tornillo es de 20

mm. La probabilidad buscada es: *elegir de la caja azul y tomar 2 tornillos iguales o elegir de la caja roja y tomar 2 tornillos iguales*

$$P[\{(P1\cap P_2)\cup(Q_1\cap Q_2)\}\cap M\}\cup\{(P1\cap P_2)\cup(Q_1\cap Q_2)\}\cap N\}] =$$
$$P[M]\,P[\{(P1\cap P_2)\cup Q_1\cap Q_2\}\setminus M]+P[N]\,P[\{(P1\cap P_2)\cup Q_1\cap Q_2\}\setminus N] =$$
$$\frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}\frac{3}{8}+\frac{5}{9}\frac{4}{8}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{6}{8}\frac{5}{7}+\frac{2}{8}\frac{1}{7}\right)=\frac{92}{189}.$$

4. Probabilidad Total y Reglas de Bayes

Si revisamos de nuevo el ejemplo del carpintero y los tornillos podemos notar como característica importante en ese experimento que está constituido de dos estados: Primero se debe elegir una caja y una vez hecho esto se debe sacar un tornillo de la misma. Hay algunas preguntas que plantearse respecto a este experimento que podrían resultar diferentes a lo que hemos explorado hasta ahora.

Por ejemplo ¿Cuál es la probabilidad S de sacar un tornillo de 20 mm? o ¿Si se sacó un tornillo de 20 mm cuál es la probabilidad de que se haya escogido de la caja azul? El esquema para abordar este par de preguntas nos permitirá iniciar el estudio de los temas *probabilidad total* y *Teorema de Bayes* .

Para resolver el primero de los dos problemas propuestos es importante tener en cuenta que hay dos alternativas para obtener un tornillo de 20 mm. Elegir en el primer estado la caja azul y sacar un tornillo de 20 mm o bien elegir en el primer estado la caja roja y sacar un tornillo de 20 mm. Si M es el evento toma el tornillo de la caja azul y N toma el tornillo de la caja roja. Y S es el tornillo es de 20 mm se tiene

$$\begin{aligned} P[S] &= P[(M\cap S)\cup(N\cap S)] \\ &= P[M\cap S]+P[N\cap S] \\ &= P[M]\,P[S\setminus M]+P[N]\,P[S\setminus N] \\ &= \frac{2}{3}\frac{5}{9}+\frac{1}{3}\frac{2}{8} \\ &= \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

En general, para resolver este tipo de problemas necesitamos establecer algunas definiciones y resultados importantes.

Definición 5.

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son eventos tales que:

- La intersección de dos eventos cualesquiera de ellos es nula: $A_i \cap A_j = \emptyset$ siempre que $i \neq j$.
- Los eventos son no nulos: $P[A_i] > 0, i = 1,2,\ldots,n$.
- La unión de estos eventos dael espacio muestral: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Se dice que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forman una partición del espacio Ω.

Cuando un experimento consiste de la realización de dos etapas y es tal que la primera puede descomponerse en $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos, entonces la ocurrencia de cualquier evento B en la segunda etapa sólo puede darse en forma conjunta con alguno de los eventos de la primera etapa. Es decir el evento B se descompone en la forma $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots (B \cap A_n)$. Si se tiene además que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forman una partición del espacio muestral en la primera etapa entonces los eventos en la descomposición anterior son independientes y obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forman una partición del espacio Ω y si B es cualquier evento entonces:

$$
\begin{aligned}
P[B] &= P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots (B \cap A_n)] \\
&= P[B \cap A_1] + P[B \cap A_2] + \cdots + P[B \cap A_n] \\
&= P[A_1]\,P[B|A_1] + P[A_2]\,P[B|A_2] + \cdots + P[A_n]\,P[B|A_n] \\
&= \sum_{i=1}^{n} P[A_i]\,P[B|A_i].
\end{aligned}
$$

El segundo de los problemas planteados se resuelve haciendo uso de probabilidades condicionales, interesa conocer la probabilidad condicional siguiente: si el resultado final de la elección es un tornillo de 20 mm, ¿cuál es la probabilidad de que se haya extraído de la caja azul?

Utilizando la representación de eventos del primer ejemplo y utilizando la fórmula 5 y el teorema 4 obtenemos:

$$
\begin{aligned}
P[M|S] &= \frac{P[M \cap S]}{P[S]} \\
&= \frac{P[M \cap S]}{P[M]\,P[S|M] + P[N]\,P[S|N]} \\
&= \frac{5}{6}.
\end{aligned}
$$

Este tipo de deducciones propias de experimentos con dos estados y que implica el cálculo de la probabilidad de que ocurra algún conjunto de condiciones o circunstancias del primer estado dado que ocurre un evento del segundo estado se resuelven recurriendo al siguiente teorema, conocido como ***fórmula de Bayes***.

Teorema 5 (Fórmula de Bayes)**.**

Si un experimento consiste de dos estados tal que la secuencia de eventos $A_1, A_2, \ldots A_n$ forman una partición del espacio muestral del primer evento. Si B es un evento del segundo estado del experimento entonces, la probabilidad de que ocurra cualquiera de los eventos A_k dado que ocurre el evento B es

$$
\begin{aligned}
P[A_k \setminus B] &= \frac{P[(A_k \cap B)]}{P[B]} \qquad (9) \\
&= \frac{P[A_k]\,P[B|A_k]}{\sum_{i=1}^{n} P[A_i]\,P[B|A_i]}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 7.

Una caja A contiene tres bolas blancas y cuatro negras. Otra caja, B, contiene dos bolas blancas y tres negras. Se extraen bolas, una a una, en forma aleatoria y sin reemplazo.

1. Si las dos bolas son elegidas de A, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean negras?
2. Si se eligen dos bolas, una de cada caja, ¿ cuál es la probabilidad de que no sean del mismo color?
3. Si se elige una caja al azar y se extraen dos bolas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?
4. Si se elige una de las cajas al azar se extraen dos bolas y son de colores distintos, ¿cuál es la probabilidad de que se hayan extraído de la caja B?

Solución

1. Si se saca la primer bola de la caja A y la segunda de la misma caja la probabilidad de que ambas sean negras es:
$$\frac{4}{7}\frac{3}{6}.$$
2. Una manera de hacerlo es por complemento, extraer dos bolas de distinto color es el complemento de extraerlas del mismo color. La probabilidad de extraerlas del mismo color es sacar la primera negra y la segunda negra o la primera blanca y la segunda blanca, por lo tanto la probabilidad pedida es:
$$1-\left(\frac{4}{7}\frac{3}{5}+\frac{3}{7}\frac{2}{5}\right).$$
De seguro también puede hacerse sin usar complementos.
3. El evento se descompone en elegir la caja A y extraer dos blancas o dos negras o bien elegir la caja B y extraer dos blancas o dos negras. Suponiendo que cada caja tiene la misma probabilidad de ser elegida se tiene:
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{7}\frac{2}{6}+\frac{4}{7}\frac{3}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\frac{2}{4}\right) &= \\ \frac{1}{2}\left(\frac{6}{42}+\frac{12}{42}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{20}+\frac{6}{20}\right) &= \frac{29}{70}.\end{aligned}$$
4. La probabilidad C de extraer las dos bolas de igual color esta calculada para el caso anterior.
$$\begin{aligned}P[B|C] &= \frac{P[B\cap C]}{P[C]}\\ &= \frac{1/5}{29/70}\\ &= \frac{14}{29}.\end{aligned}$$

Una aplicación interesante de la fórmula de Bayes tiene que ver con el análisis de confiabilidad de ciertos test realizados para detectar la presencia de enfermedades. El problema es básicamente el siguiente:

Definición 6.

Una persona puede sufrir de una enfermedad y se practica un test para saber si tiene o no la enfermedad. La exactitud del test se mide a través de dos valores probabilísticos.

El primero de ellos se llama la ***sensibilidad,*** que es la probabilidad de que una persona que este enferma de positivo en el test.

$$\rho = P[\text{TestPositivo}|\text{EstaEnfermo}].$$

El otro valor se llama ***especificidad*** y es la probabilidad de que una persona no enferma tenga un diagnóstico correcto.

$$\theta = P[\text{TestNegativo}|\text{NoEstaEnfermo}].$$

Lo normal es que ambos valores sean muy cercanos a la unidad.

Conociendo la incidencia de la enfermedad sobre alguna población, se puede calcular la probabilidad de que una persona que haya dado positivo en el diagnóstico no sufra de la enfermedad. Si se sabe que en la población la probabilidad de que una persona elegida al azar esté enferma es τ entonces usando las fórmulas de Bayes se tiene

$$\begin{aligned}
& P[\text{NoEstaEnfermo}|\ \text{TestPositivo}] \\
= & \frac{P[\text{NoEstaEnfermo} \cap \text{TestPositivo}]}{P[\text{TestPositivo}]} \\
= & \frac{P[\text{NoEstaEnfermo}]P[\text{TestPositivo}|\text{NoEstaEnfermo}]}{P[\text{NoEstaEnfermo}]P[\text{TestPositivo}|\text{NoEstaEnfermo}] + P[\text{EstaEnfermo}]P[\text{TestPositivo}|\text{EstaEnfermo}]} \\
= & \frac{(1-\tau)(1-\theta)}{\tau\rho + (1-\tau)(1-\theta)}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.

Existe un test llamado ELISA que se utiliza para verificar sangre donada en una problación en la cual la probabilidad de que un individuo tenga los anticuerpos de SIDA es de 0.0001. Suponga que este test tiene una sensibilidad $\rho = 0{,}977$ y una especificidad $\theta = 0{,}926$. Determine la probabilidad de que una muestra que contenga los anticuerpos de SIDA dé un diagnóstico de que sí tiene los anticuerpos.

Solución:

En este caso bucamos:

$$P[\text{EstaEnfermo}|\ \text{TestPositivo}]$$

$$\frac{(0{,}0001)(0{,}977)}{(0{,}0001)(0{,}977) + (0{,}9999)(0{,}074)} = 0{,}001319$$

Este resultado indica que este no es un buen test.

5. Ejercicios propuestos

1. En cierta comunidad, la probabilidad de que una persona de 70 años llegue a los 80 años es $2/3$.Â¿CuÃ¡l es la probabilidad de que una persona que tiene 70 años y es miembro de esta comunidad muera dentro de los próximos 10 años?

   Solución:

   $$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

2. Determine la probabilidad de que al lanzar un dado estándar, se obtenga un número menor que tres.

   Solución:

   Si se lanza un dado estándar (cuyas 6 caras tienen la misma probabilidad de ocurrir), y A es el evento que salga menos una cara con un número menor que 3, entonces $A=\{1,2\}$ y $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, así la probabilidad que se le asigna a A es:

   $$P[A]=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

3. Una juego consiste en lanzar un dado varias veces. Se gana si se obtienen 2 veces consecutivas un número mayor a 4. Determine:

   a) La probabilidad de obtener, en un lanzamiento, un número mayor que 4.

   Solución: $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

   b) La probabilidad de ganar en dos lanzamientos.

   Solución: $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

   c) La probabilidad de ganar en tres lanzamientos.

   Solución: Note que para que se tengan que realizar tres lanzamientos, el primero de ellos se obtuvo un número menor o igual a 4, así tenemos que la probabilidad buscada corresponde a:

   $$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$$

   d) La probabilidad de ganar en cuatro lanzamientos.

   Solución: En este caso tenemos dos posibles escenarios:

- Caso #1: Se obtiene un número mayor que 4, luego uno menor o igual que 4 y finalmente dos números mayores que 4; en este caso tenemos:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{81}$$

- Caso #2: Se obtienen primero dos números mayores o iguales que 4 y luego dos números menores; en este caso tenemos:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{81}$$

La probabilidad final solicitada corresponde a la suma de estos dos casos, osea:

$$\frac{2}{81}+\frac{4}{81}=\frac{2}{27}$$

4. Se van a formar números de 3 dígitos, es decir entre 100 y 999, con los dígitos $0,1,2\ldots,9$ sin repetir dígitos. ¿Cuántos números hay? y ¿cuál es la probabilidad de que al tomar un número de estos al azar sea par?

Solución:

Note que para formar un número de tres dígitos el que corresponde al de las centenas debe ser distintos de 0, por lo que por facilidad se empieza eligiendo dicho valor, así tenemos:

$$\underbrace{9}_{centenas}\cdot\underbrace{9}_{decenas}\cdot\underbrace{8}_{unidades}=648$$

Ahora para saber la posibilidad de que un número sea par, debe realizarse una análisis de casos:

- **Termine en 0**: En este caso se comienza seleccionando el dígito de las unidades (1 manera), luego el de las decenas y finalmente el de las centenas sin ninguna restricción.

$$\underbrace{8}_{centenas}\cdot\underbrace{9}_{decenas}\cdot\underbrace{1}_{unidades}=72$$

- **Termine en 2, 4, 6, 8**: En este caso se comienza seleccionando el dígito de las unidades (4 maneras), luego de las centenas tomando en cuenta que NO puede ser el dígito 0 y finalmente el de las decenas.

$$\underbrace{8}_{centenas}\cdot\underbrace{8}_{decenas}\cdot\underbrace{4}_{unidades}=256$$

Finalmente debemos sumar dichos casos y dividir entre el total de posibles números para obtener la probabilidad deseada:

$$\frac{72+256}{648}=\frac{41}{81}$$

5. Sea un círculo de radio 2, si se selecciona un punto aleatorio sobre él, determine la probabilidad de que la distancia del centro del círculo a dicho punto sea mayor a 1.

   Solución:

   Este problema se puede resolver de manera sencilla si se utiliza el concepto de área de un círculo. Note que el área total de un círculo de radio 2 es 4π.

   Ahora sea A el evento de que la distancia del centro del círculo al punto es mayor a 1, note que el área del círculo asociada a este evento se puede calcular de manera sencilla utilizando *conteo por complemento* (en este caso el complemento corresponde a que se forme un círculo de radio menor o igual a 1), así tenemos:

$$\underbrace{4\pi}_{universo} - \underbrace{\pi}_{complemento} = 3\pi$$

   Asumiendo que todos los puntos tienen igual probabilidad de ser elegidos entonces la probabilidad del evento corresponde a

$$P[A] = \frac{3\pi}{4\pi} = \frac{3}{4}$$

6. En una canasta hay 8 bolillas blancas y 2 negras.

   a) Si se extraen dos bolillas con reposición, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?

   Solución: $\frac{8}{10} \cdot \frac{8}{10} = \frac{16}{25}$

   b) Si se extraen dos bolillas sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas.?

   Solución: $\frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{45}$

7. Use el *principio de inclusión y exclusión* para resolver el siguiente problema:

   Cien personas fueron entrevistadas para determinar sus gustos por los dulces. Se encontró que 20 de ellos eran adictos al chocolate, 10 al caramelo y 5 al dulce de leche. Seis eran adictos a ambos el chocolate y el caramelo, tres al chocolate y al dulce de leche, 2 al caramelo y al dulce de leche y solo una persona era adicta a los tres tipos de dulce.

   Una de estas personas se elige al azar:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea adicto al chocolate o al caramelo?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea adicto a alguno de los tres tipos de dulce?

c) ¿Puede determinar la probabilidad de que sea adicto al chocolate pero no al caramelo?

d) ¿Puede determinar la probabilidad de que sea adicto exclusivamente a dos tipos de dulce?

Solución:

Son cuatro preguntas; usemos una notación para los eventos:

- A es adicto al chocolate
- B es adicto al dulce de leche
- C es adicto al caramelo.

- *Adicto al chocolate o al caramelo:* Necesitamos la cardinalidad de $A \cup B$ que por principio de inclusión exclusión es: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 20 + 10 - 6 = 24$. Luego:

$$P[A \cup B] = \frac{24}{100}$$

- *Adicto al chocolate o al caramelo o al dulce de leche:* Es la misma idea, necesitamos la cardinalidad de $A \cup B \cup C$ que por principio de inclusión exclusión es: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 20 + 10 + 5 - 6 - 3 - 2 + 1 = 25$. Luego:

$$P[A \cup B] = \frac{25}{100}.$$

- *Adicto al chocolate pero no al caramelo:* Puede usarse esta relación $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ que ve a A como unión de disjuntos, así $|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|$. Luego:

$$P[A \setminus B] = \frac{14}{100}.$$

- *Adicto exclusivamente a dos:* Nuevamente puede usarse la relación $X = (X \cap \neg C) \cup (X \cap C)$ que ve a X como unión de disjuntos y permite obtener la cardinalidad de $X \cap \neg C$. Así $|(A \cap B) \cap \neg C| = |A \cap B| - |A \cap B \cap C|$. Luego:

$$P[(A \cap B) \cap \neg C) \cup (A \ \cap C) \cap \neg B) \cup (B \cap C) \cap \neg A)] = \frac{5+2+1}{100}.$$

8. Sean A y B eventos, demuestre que:

- $P[A \cap B] \geq P[A] + P[B] - 1$

  Solución:

  Sale directo de la relación $1 \geq P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

- $P[A \cap \overline{B}] \geq P[A] - P[A \cap B]$

  Solución:
  $P[A] = P[A \cap \overline{B} \cup A \cap B] \leq P[A \cap B] + P[A \cap \overline{B}]$

9. Dos jugadores *Pedro* y *Luis* juegan tablero. Cada vez que hacen una partida Pedro tiene una probabilidad de ganar p y Luis una probabilidad de ganar $1-p$, hay independencia entre partidas. El juego se detiene cuando alguno de los dos aventaje al contrincante en 2 partidas, y el jugador ganador es el que logre esa ventaja.

   Determine

   a) La probabilidad de que el juego acabe en cuatro partidas.

   Solución:
   Para que haya ganador en 4 partidas debe ocurrir alguno de los eventos$LPLL \wedge PLPP$ y la probabilidad pedida es $(1-p)^3 p + p^3(1-p)$

   b) La probabilidad de que Pedro gane.

   Solución:
   Este problema es ligeramente mas complejo. Para que Pedro sea ganador debe ocurrir una cantidad par de eventos, pues en una cantidad impar $2k+1$ de jugadas Pedro debe ganar la última y debe llevar una ventaja de 1 en los otros $2k$ juegos previos. Es decir Pedro ha ganado $n+1$ y Luis n pero eso es imposible pues $n+n+1$ es impar y $2k$ es par, luego el juego no termina en una cantidad par de partidas.

   Así las cosas, el juego termina en $2k$ partidas y Pedro resulta ganador si gana la última y lleva una ventaja de 1 en las $2k-1$ jugadas previas. También la partida $2k-1$ debe ser ganada por Pedro, pues de no serlo en las $2k-2$ jugadas previas Luis. Esto quiere decir que Luis lleva k ganadas y Pedro lleva $k+1$ ganadas.

   Algunos ejemplos del espacio muestral son:

   $$PP \wedge (LPPP \wedge PLPP) \wedge (LPLPPP, PLLPPP, PLPLPP, LPPLPP)$$

10. En una reunión hay 100 personas distribuidas en 25 guanacastecos, 30 alajuelenses, 40 josefinos y 5 puntarenenses. Por estadísticas anteriores se sabe que el 50 % de los josefinos son fumadores, mientras que en las otras provincias: Alajuela, Guanacaste y Puntarenas estos porcentajes son 20 %, 25 % y 60 % respectivamente. Se elige una persona al azar en la reunión, ¿cuál es la probabilidad de que sea fumadora?

    Solución:

Este es un caso de probabilidad condicional, pues al elegir una persona inicialmente esta puede estar en alguno de los eventos 'E_1: Es josefino', 'E_2: Es alajuelense,' 'E_3: Es guanacasteco' o 'E_4: Es puntarenense' y dependiendo de dónde sea así es la probabilidad de que sea fumador.

En este caso si A es el evento *ser fumador* entonces A como evento es una combinación de alguna de las opciones:

$$(A \setminus E_1) \cup (A \setminus E_2) \cup (A \setminus E_3) \cup (A \setminus E_4)$$

Y la probabilidad

$$\begin{aligned} P[A] = P[A \setminus E_1] + \cdots + P[A \setminus E_4] &= P[E_1]\,P[A \cap E_1] + \cdots + P[E_4]\,P[A \cap E_4] \\ &= (0{,}4)(0{,}5) + (0{,}3)(0{,}2) + (0{,}25)(0{,}25) + (0{,}05)(0{,}60) \\ &= 0{,}3525 \end{aligned}$$

11. En la clase hay 40 personas de las cuales 30 son menores de 20 años. Se eligen tres personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que los tres sean menores de 20 años?

    Solución:

    Solución: Puede resolverse de varias maneras equivalentes. Una de ellas es la siguiente: sea A_1 el evento de que la primer persona sea menor de 20 años, A_2 el evento de que al segunda persona sea menor de 20 de años y A_3 el evento de que la tercera sea menor de 20 años. Lo que interesa es:

    $$P[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = P[A_1]\,P[(A_2 \setminus A_1)]\,P[A_3 \setminus (A_1 \cap A_2)] = \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} \cdot \frac{28}{38} = \frac{203}{494}$$

12. Suponga que una empresa tiene tres camiones para reparto de su mercadería: uno de una tonelada, uno de media tonelada y uno pequeño de 1/4 de tonelada. El camión de una tonelada tiene un conductor exclusivo mientras que los dos pequeños comparten el mismo conductor, por lo que solo se puede usar uno de ellos a la vez. Por experiencia se sabe que el camión grande se usa el 50 % del tiempo, el mediano el 25 % del tiempo y el pequeño el 15 % del tiempo.

    Suponiendo que la probabilidad de uso de los carros es independiente, estime la probabilidad de que en algún tiempo del día haya un vehículo en uso.

    Solución: Este problema es simple, bastaría con calcular:

    $$P[A \cup (B \cup C)] = P[A] + P[(B \cup C)] - P[A \cap (B \cup C),]$$

Como el uso de los carros es independiente, entonces los eventos A y $B \cup C$ son independientes y $P[A \cap (B \cup C)] = P[A]\, P[B \cup C]$

Y la probabilidad solicitada es

$$P[A \cup (B \cup C)] = 0{,}5 + 0{,}45 - (0{,}5)(0{,}45)$$

13. Suponiendo que la probabilidad de uso de los carros no es independiente y que la probabilidad de que el mediano esté en uso dado que el grande está en uso es de 0.2 y que la probabilidad de que el pequeño esté en uso dado que el grande lo está es de 0.12, determine la probabilidad de que haya algún carro en uso.

    Solución:

    Inicialmente el problema es el mismo, es decir, hay que calcular:

    $$P[A \cup (B \cup C)] = P[A] + P[(B \cup C)] - P[A \cap (B \cup C)],$$

    no obstante, para calcular $P[A \cap (A \cup B)]$ no funciona el procedimiento previo pues los eventos no son independientes, de hecho sabemos que $P[A \setminus B] = 0{,}2$ y $P[A \setminus C] = 0{,}12$

    Como $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ y además $A \cap B$ y $A \cap C$ si son independientes se tiene que

    $$P[A \cap (B \cup C) = P[(A \cap B)] + P[(A \cap C)] = P[A \setminus B]\, P[B] + P[A \setminus C]\, P[C],$$

    y la respuesta solicitada es:

    $$P[A \cup (B \cup C)] = 0{,}5 + 0{,}45 - ((0{,}2)(0{,}5) + (0{,}13)(0{,}45))$$

14. Si Enrique repara una computadora la probabilidad de que vuelva al taller en el período de garantía de la reparación es de .02, mientras que cuando la reparación la hace Luis esta probabilidad aumenta a un 0.2.

    a) Si ambos reciben el 50 % de los computadores que llegan a reparación, cuál es la probabilidad de que un computador reparado vuelva al taller en garantía.

    Solución: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{100} = \frac{11}{100}$

    b) Si el administrador del taller desea que, en promedio, no más del 5 % de los computadores vuelvan al taller en periodo de garantía; determine qué porcentaje de las computadoras debe entregar a Enrique para que repare y que porcentaje a Luis.

    Solución: Basta con resolver la desigualdad

    $$p\frac{2}{100} + (1-p)\frac{20}{100} \leq \frac{5}{100}$$

15. Una gran fábrica emplea 500 obreros, 300 hombres y 200 mujeres. Los hombres se incapacitan con una probabilidad del 25 % mientras que las mujeres lo hacen con una probabilidad del 20 %. Si se toma una incapacidad al azar ¿cuál es la probabilidad de que esa persona sea hombre?.

    Solución:

    Es una regla de Bayes. Sea H el hombre, M la mujer e I la incapacidad. Así:

    $$P[H] = \frac{3}{5};\ P[M] = \frac{2}{5};\ P[I \setminus H] = \frac{1}{4};\ P[I \setminus M] = \frac{1}{5}$$

    $$\begin{aligned} P[I] &= P[H]P[I \setminus H] + P[M]P[I \setminus M] \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{3}{20} + \frac{2}{25} = \frac{23}{100} \\ P[H \setminus I] &= \frac{P[H \cap I]}{P[I]} = \frac{P[I \setminus H]}{P[I]} = \frac{P[I \setminus H]P[H]}{P[I]} \\ &= \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{23}{100}} = \frac{15}{23} \end{aligned}$$

16. Una empresa industrial utiliza tres hoteles, A, B y C para proporcionar hospedaje a los clientes. De experiencias previas se sabe que el 20 % de los clientes se hospedan en el hotel A; el 50 % de los clientes se hospedan en el hotel B y el 30 % restante hospedan en el hotel C. Si hay fallas de plomería en un 5 % de las habitaciones del hotel A, en un 4 % de las habitaciones del hotel B y el el 8 % de las habitaciones del hotel C determine:

    a) La probabilidad de que a un cliente al azar se le asigne un cuarto con problemas de plomería.

    Solución:
    Esto es una bayesiana simple y si P es el evento le correspondió una habitación con problemas de plomería entonces

    $$P[P] = (0{,}2)(0{,}05) + (0{,}5)(0{,}04) + (0{,}3)(0{,}08)$$

    b) La probabilidad de que dado que a un cliente le correspondió un cuarto con problemas de plomería, se le haya hospedado en el hotel C.

    Solución:
    Para esta parte de la pregunta se puede usar probabilidad condicional:

    $$P[C \setminus P] = \frac{(0{,}3)(0{,}08)}{(0{,}2)(0{,}05) + (0{,}5)(0{,}04) + (0{,}3)(0{,}08)}$$

17. Se tiene tres eventos A, B, C tales que A y B son independientes, B y C son excluyentes y la probabilidad del evento A dado que el evento C ha ocurrido es de 0.3. Si $P[A] = 0{,}4$ $P[B] = 0{,}5$ y $P[C] = 0{,}2$. Determine la probabilidad de que ocurra alguno de los eventos A, B o C, pero no todos.

Solución:

Dadas las condiciones pedidas se tiene:

- $P[A \cap B] = P[A]\,P[B] = (0{,}4)(0{,}5)$
- $P[A \cap C] = P[A \setminus C]\,P[C] = (0{,}3)(0{,}2)$
- $P[B \cap C] = 0$
- $P[A \cap B \cap C] = 0.$

Además la probabibilidad de que ocurran todos es cero luego la probabiliad pedida es la probabilidad de la unión.

Luego por inclusión y exclusión

$$P[A \cup B \cup C] = P[A] + P[B] + PC] - P[A \cap B] - P[A \cap C] - P[B \cap C] + P[A \cap B \cap C]$$
$$P[A \cup B \cup C] = 0{,}4 + 0{,}5 + 0{,}2 - (0{,}4)(0{,}5) - (0{,}3)(0{,}2) - 0 + 0 = 0{,}84$$

18. Cuando una moneda A es tirada la probabilidad que caiga corona es de $1/4$, mientras que cuando se tira una moneda B esta probabilidad es de $3/4$. Se elige una moneda de estas al azar, se tira dos veces y en ambas cae corona. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda elegida haya sido la B?

Solución:

Esto es una regla de Bayes, para la moneda A si C es corona y E escudo se tiene $P[CC] = 1/16$ y para B la probabilidad de CC es $P[CC] = 9/16$ Luego se tiene

$$P[CC] = \frac{1}{2}\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\frac{9}{16} \text{ y } P[B \setminus CC] = \frac{\frac{1}{2}\frac{9}{16}}{\frac{1}{2}\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\frac{9}{16}}$$

19. Suponga que tenemos una caja de bombillos que contiene 8 unidades, de las cuales 5 están defectuosos. Si se seleccionan 2 fusibles al azar y se separan de la caja, uno después del otro sin reemplazar el primero. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos bombillos estén defectuosos?

Solución: Sea D_i el bombillo i-ésimo es defectuoso. Así:

$$P(D_1 D_2) = P(D_1)P(D_2|D_1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7}$$

20. El Centro Académico de Limón del TEC, recibe sus computadoras de tres diferentes proveedores, 50 % del proveedor B_1, 30 % del proveedor B_2 y un 20 % del proveedor B_3. Si el 10 % de las computadoras provenientes del proveedor B_1, el 8 % de las computadoras provenientes del proveedor B_2 y

el 15 % de las computadoras provenientes del proveedor B_3 tienen defectos. Entonces si una computadora esta buena (sin defectos), determine la probabilidad de que venga del proveedor B_1.

Solución: Si se elige una computadora al azar del Centro Académico, considere los eventos:
A_i : la computadora elegida fue recibida del provedor B_i, para $i = 1, 2, 3$.
D : la computadora elegida es defectuosa.
Los datos brindados son:

$$P(A_1) = 0{,}5 \quad P(D|A_1) = 0{,}1$$

$$P(A_2) = 0{,}3 \quad P(D|A_2) = 0{,}08$$

$$P(A_3) = 0{,}2 \quad P(D|A_3) = 0{,}15$$

Y se solicita averiguar $P(A_1|\overline{D})$. Utilizando probabilidad total se tiene que
$P(D) = P(A_1)P(D|A_1) + P(A_2)P(D|A_2) + P(A_3)P(D|A_3) = \frac{13}{125}$
Por lo tanto,

$$P(A_1|\overline{D}) = \frac{P(\overline{D}|A_1)P(A_1)}{P(\overline{D})} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}9}{1 - \frac{13}{125}} = \frac{225}{448}.$$