TEC | Tecnológico de Costa Rica

Probabilidad: Espacios Muestrales y Regla de Laplace

Escuela de Matemática

Luis Ernesto Carrera Retana

Erick Chacón Vargas

Mario Marín Sánchez

Rebeca Solís Ortega

El concepto de probabilidad

Es usual usar en nuestro lenguaje cotidiano la palabra probable como una medición de un grado de certeza de que ocurra un evento. Por ejemplo podemos decir *'es muy probable que llueva hoy'* o *'es poco probable que el profesor pueda llegar a tiempo'*. En ambos casos estamos asociando una valoración a la ocurrencia de una situación. Este tipo de afirmaciones son muy imprecisas como para ser correctas matemáticamente, por ejemplo los términos *muy* o *poco* no significan lo mismo para todas las personas, y la palabra *hoy* tiene un significado cuyo contexto puede variar cada día.

La probabilidad es una teoría matemática que nos permite plantear este tipo de afirmaciones de una manera sistemática recurriendo a la formalización de conceptos. En su forma más general, la probabilidad es la rama de la matemática que estudia aquellos experimentos cuyos resultados son aleatorios. Por esto entendemos experimentos en los cuales se conocen los posibles resultados pero es imposible predecir cuál de ellos ocurrirá.

Siendo un poco circulares en la definición podríamos decir también, que la probabilidad de un evento es una medida de las posibilidades de ocurrencia del mismo ante una repetición del experimento.

Ejemplo 1.

Algunos ejemplos de probabilidades son:

- La probabilidad de sacar un 6 al lanzar un dado sobre una mesa.
- La probabilidad de sacar tres cartas de un maso de naipes y que tengamos tres cartas del mismo número.
- La probabilidad de que al elegir aleaoriamente un número entre 1 y 100 este resulte primo

En general, para que un experimento sea aleatorio debe presentar dos características importantes:

1. Se debe poder determinar un conjunto, *espacio muestral,* que reúna todos los posibles resultados que se pueden tener.
2. Es imposible que los resultados de repeticiones tengan un comportamiento igual o predecible.

Ejemplo 2.

Algunos ejemplos de experimentos aleatorios son:

1. Lanzar un dado de seis cara, pues sabemos que de seguro una de las caras quedará hacia arriba pero no sabemos cuál de ellas será
2. Realizar una encuesta aleatoria entre 10 estudiantes del TEC para saber el promedio de peso entre ellos, en esa muestra sabemos a ciencia cierta que el resultado será un número real positivo pero no tenemos idea de qué valor nos dará esa muestra.

Si tenemos un experimento aleatorio con espacio muestral Ω un evento es algún subconjunto de Ω y uno de los los problemas más básicos en las probabilidades es cómo asignar probabilidad a ese evento.

Ejemplo 3.

Suponga el siguiente experimento: se tira un dado hasta que haya salido dos veces, no necesariamente consecutivas, el cinco. Determine el espacio muestral de dicho evento.

Solución:

En este caso podemos denotar por E la salida de un 5 y por F la salida de cualquier otro valor. Note que en cada lanzamiento del dado no se puede predecir que valor va a salir, pero si sabemos que es un número entre 1 y 6, cada lanzamiento es un experimento aleatorio y el total de lanzamientos para lograr los dos éxitos también es aleatorio.

Así la distribución de resultados entre E y F, el espacio muestral, el cual denotamos por Ω tiene la forma:

$$\Omega = \{\{EE\}, \{FEE, EFE\}, \{FFEE, EFFE, FEFE\}, \dots\}$$

Si nos interesa observar el total de repeticiones del experimento hasta que se cumpla la condición entonces el espacio muestral es

$$\Omega = \{2, 3, \dots\}$$

Definición 1.

Si tenemos un experimento con espacio de muestra Ω entonces

- $A = \Omega$ se llama evento seguro
- $A = \emptyset$ se llama evento imposible
- Si A, B son eventos tales que la ocurrencia de cualquiera de ellos imposibilita la ocurrenica del otro, se dice que son excluyentes $A \cap B = \emptyset$
- Si A es un evento entonces el evento no ocurre A se denota por $\Omega \setminus A = A^c$

Si en un experimento podemos tener certeza de que cada elemento del espacio muestral tiene la misma probabilidad de ocurrir decimos que es un experimento aleatorio equiprobable. Es un tema delicado al definir probabilidades y es frecuente que las personas novatas cometan el error de no considerar esta condición al trabajar con probabilidades.

Ejemplo 4.

Al lanzar un dado sobre una mesa para ver la cara que cae hacia arriba, excepto que se nos diga lo contrario, lo normal es asumir que el espacio muestral $\Omega = 1,2,3,4,5,6$ es equiprobable, es decir, que cada cara tiene la misma probabilidad de ocurrir. Pero si lanzamos una moneda tantas veces como sea necesario hasta obtener dos veces consecutivas escudo, el espacio muestral es

$$\Omega = \{\{EE\},\{CEE\},\{CCEE,ECEE\},\{CCCEE,CECEE,ECCEE\}\dots\}$$

y no es equiprobable.

Ante la equiprobabilidad de un espacio muestral la regla de Laplace es una manera apropiada de asingnar probabilidades.

Teorema 1.

Si A es un evento y Ω es espacio muestral, con Ω finito. Se define la probabilidad del evento A como:

$$P[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

A continuación estudiaremos algunos ejemplos de probabilidad que pueden resolverse estudiando la regla de Laplace:

Ejemplo 5.

Si Marta, Eva y Raquel se sientan aleatoriamente en tres bancas consecutivas, ¿Cuál es la probabilidad de que Eva y Raquel queden juntas?

Solución:

En este caso podemos representar el espacio muestral como:

$$\Omega = MER, MRE, REM, RME, ERM, EMR$$

y si el acomodo es aleatorio las 6 opciones tienen la misma probabilidad de ocurrir, así que si A es el evento Eva y Raquel quedan juntas se tiene:

$$P[A] = \frac{|\{MER, MRE, REM, ERM\}|}{|\{MER, MRE, REM, RME, ERM, EMR\}|} = \frac{4}{6}$$

Ejemplo 6.

Se lanza un par de dados que no están cargados y se registra la suma de las caras. Determine la probabilidad del evento T : la suma de los números en ambas caras es 6.

Solución

En este caso, hay 36 posibles resultados de los cuales $(3,3)$, $(1,5)$, $(5,1)$, $(2,4)$ y $(4,2)$ suman 6 así:

$$P[T] = \frac{5}{36}.$$

Ejemplo 7.

En una caja hay 4 libros de Inglés y 3 de Ruso. Se escoge al azar un libro de la caja. ¿Cuál es la probabilidad de que el libro escogido sea de Ruso?

Solución
Sea R el evento se escoge un libro de Ruso. Hay 3 casos en los cuales al escoger el libro resulta ser de Ruso y un total de 7 escogencias por lo tanto:

$$P[R] = \frac{3}{7}.$$

Ejemplo 8.

Tres palomas indistinguibles vuelan hacia dos nidos. Se ubican de manera absolutamente aleatoria, es decir cualquier combinación de palomas en el primer y segundo nido puede ocurrir. Determine la probabilidad de que le segundo nido no quede vacío.

Solución

El espacio muestral de los posibles resultados esta formado por los pares (x,y) donde x es el total de palomas en el nido 1 y y el total de palomas en el nido 2, $\Omega = \{(3,0)(2,1)(1,2)(0,3)\}$. Como el total de resultados que cumplen en predicado es 3 entonces la probabilidad del evento es $3/4$

Ejercicios resueltos

1. Diga, en cada uno de los casos, si el experimento es deteminista o aleatorio

   - El tiempo de espera desde que llegas a la parada del bus hasta que pasa el bus.
     Solución: Aleatorio.

   - El total de pesonas que hacen fila en una ventanilla municipal cuando vas a pagar el agua.
     Solución: Aleatorio.

- El peso de un aguacate que tomas de una cesta
  Solución: Aleatorio.

- El resultado de gastar todo tu dinero
  Solución: Determininistico.

2. Se lanzan dos dados, uno rojo y uno azul. Un evento es "la suma de ambas caras es 3", otro evento es "la suma de ambas caras es 12". ¿Cuál de los dos eventos es más probable?. Explique por qué.

   Solución: Sea A : el evento "la suma de ambas caras es 3" y B : el evento "la suma de ambas caras es 12". Además tenemos que el espacio muestral del resultado de tirar dos dados es:

	D_2					
	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
D_1	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

   Así, aplicando la regla de Laplace, tenemos:

   $$P[A] = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \quad \text{y} \quad P[B] = \frac{1}{36}$$

   Claramente se ve que $P[A] > P[B]$, por lo que se concluye que A es más probable que B.

3. Si se lanzan dos dados perfectamente distinguibles entre sí escriba el espacio muestral para el conjunto de posibles resultados. Si esos dados fueran indistinguibles entre sí que cosas cambiarían.

   Solución: Como vimos al inicio del folleto tenemos que el espacio muestral de lanzar dos dados distinguibles corresponde a

D_2						
D_1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Mientras que si los dados fueran indistinguibles las configuraciones para los posibles resultados serían solamente:

{1,1}	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,5}	{1,6}
{2,2}	{2,3}	{2,4}	{2,5}	{2,6}	
{3,3}	{3,4}	{3,5}	{3,6}		
{4,4}	{4,5}	{4,6}			
{5,5}	{5,6}				
{6,6}					

4. En una caja hay dos bolas rojas y dos negras. Se extraen aleatoriamente 2 bolas sin reponerlas a la caja. Determine la probabilidad de que las bolas sean de ambos colores.

Solución:

En este ejercicio nos podríamos ver tentados a asumir que el espacio muestral corresponde a $\Omega = \{RR, RN, NR, NN\}$ por lo que la probabilidad de extraer aleatoriamente dos bolas sin reposición sería de $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Sin embargo, es este caso estaríamos incurriendo en un error y es asumir que con el espacio muestral $\Omega = \{RR, RN, NR, NN\}$ cada elemento tiene la misma probilidad de suceder, lo cual es FALSO. Por lo que para realizarlo de manera correcta aplicando la regla de Laplace, debemos generar una representación del espacio muestral donde cada elemento tengo la misma probabilidad de ocurrir.

Para lograr esta equiprobabilidad, llamemos $R1, R2$ y $N1, N2$ a las cuatro bolas, de esta manera el espacio muestral sería

$$\Omega = \{R1R2,\ R1N1,\ R1N2,\ R2R1,\ R2N1,\ R2N2,\ N1R1,\ N1R2,\ N1N2,\ N2R1,\ N2R2,\ N2N1\}$$

De donde se nota que existe una probabilidad de $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ de obtener dos bolas de ambos colores.

5. Determine la probabilidad de que al lanzar un dado estándar, se obtenga un número menor que tres.

   Solución:

   Si se lanza un dado estándar (cuyas 6 caras tienen la misma probabilidad de ocurrir), y A es el evento que salga menos una cara con un número menor que 3, entonces $A = \{1,2\}$ y $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, así la probabilidad que se le asigna a A es:

$$P[A] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

6. Se va a formar un arreglo de 8 posiciones cada una de ellas puede ser 0 o 1. Si se elige un arreglo al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga *unos* seguidos?

   Solución

   Se analizan los posibles casos dependiendo de cuantos 1 haya en el arreglo.

Numero de unos	ejemplo de caso	total
0	00000000	1
1	00000100	8
2	01000010	21
3	10100001	20
4	10010101	4

   En total 54 casos de un total de 256 es decir $\frac{54}{256}$.

7. Suponga que se tienen 4 mujeres y 2 hombres en una sala. Se eligen 3 personas de entre ellos para entregarles 1000 colones. Determine el espacio muestral que corresponde con la conformación del grupo elegido. Deternine el subconjunto que corresponde con el evento *"ningun hombre recibió 1000 colones"*

   Solución

   Es un problema muy simple pero hay detalles que es importante tener en cuenta, veamos: Si las mujeres y los hombres se consideran indistinguibles entonces el espacio muestral es

$$\Omega := \{\{HHM\},\{HMM\},\{MMM\}\}$$

   Pero si las personas se consideran distinguibles entonces hay cambios en el espacio muetral, si M_1, M_2, M_3, M_4 representa a las distintas mujeres y H_1, H_2 a los distintos hombres entonces el espacio muestral Ω' cambia un poco, por ejemplo: el elemento $\{HHM\} \in \Omega$ del caso indistinguible se convertiría en 4 elementos en Ω' a saber

$$\{H_1, H_2, M_1\}, \{H_1, H_2, M_2\}\{H_1, H_2, M_3\}, \{H_1, H_2, M_1\}$$

"ningun hombre recibió 1000 colones" depende de la representación y es cuando en la muestra hay solamente mujeres. Es importante que usted note que esta posibilidad de de tener dos representaciones no debe afectar para nada las probabilidades.

Ejercicios propuestos

1. Una juego consiste en lanzar un dado varias veces. Se gana si se obtienen 2 veces consecutivas un número mayor a 4. Determine:

   - La probabilidad de obtener más que 4.
   - La probabilidad de ganar en dos lanzamientos.
   - La probabilidad de ganar en tres.
   - La probabilidad de ganar en cuatro lanzamientos.

2. En una caja hay tres bolas rojas y dos negras. Se extraen aleatoriamente 2 bolas sin reponerlas a la caja. Determine la probabilidad de que ambas bolas sean rojas.

3. 10 hombres y 5 mujeres están de acuerdo con un nuevo proyecto de desarrollo, 5 hombre y 5 mujeres en contra, y hay solamente 5 hombres indecisos. Se elige una persona al azar determine la probabilidad de que: (a) Sea mujer, (b) esté a favor del proyecto, (c) Sea mujer en contra del proyecto.

4. En un parqueo hay doce lugares en hilera. Un hombre observó que había ocho coches estacionados y que los cuatro lugares vacíos eran adyacentes uno al otro (de manera que formaban una secuencia). Dado que hay cuatro lugares vacíos, ¿es sorprendente este arreglo (es decir, indica que no hay aleatoriedad)?

5. Se le dan n llaves a un hombre, de las cuales sólo una le queda a su puerta y prueba sucesivamente (muestreo sin reemplazo). Este procedimiento puede requerir 1, 2, ..., n ensayos. Demostrar que cada uno de esos n resultados tiene una probabilidad de n^{-1}.

6. Suponga que se tienen 4 mujeres y 3 hombres en una sala. Se eligen 3 personas de entre ellos. Determine el espacio muestral que corresponde con la conformación del grupo elegido. Además describa el subconjunto que corresponde con el evento *"se elige al menos un hombre "*