Tecnológico de Costa Rica

Probabilidad: Variables aleatorias continuas: conceptos básicos

Escuela de Matemática

Semana 10

Giovanni Sanabria Brenes | Luis Ernesto Carrera Retana | Erick Chacón Vargas | Mario Marín Sánchez | Rebeca Solís Ortega

1. Variables aleatorias continuas

En general una variable aleatoria es continua si cumple que al poder alcanzar cualquier par de valores $a < b$ reales entonces puede alcanzar cualquier valor que esté en el intervalo $[a,b]$. En el caso de variables aleatorias continuas se tienen las siguientes definiciones:

Definición 1.

Si X es una variable aleatoria continua una distribución de probabilidad para X es una función f_X que cumple las siguientes propiedades:

1. $f_X(x) \geq 0 \ \forall x$.

2. Si $a < b$ se tiene $P[a \leq X \leq b] = \displaystyle\int_a^b f_X(x)\,dx$.

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$.

Además se define la función de distribución acumulada por:

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt.$$

Teorema 1.

Se cumple que

$$\begin{aligned} P[a \leq X \leq b] &= F(b) - F(a), \\ P[X = b] = 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.

Sea X una variable aleatoria continua cuya distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} (1+k)\,e^{-3x+2} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

1. Determine el valor de k.

2. Pruebe que $F_X(y) = (k+1)\left(\frac{1}{3}e^2 - \frac{1}{3}e^{2-3y}\right)$ para $y \in \mathbb{R}^+$.

3. Calcule $P(3 < X < 5)$ (este valor puede expresarlo en términos de k.

Solución

1. Determine el valor de k.

$$\begin{aligned} (1+k)\int_0^{\infty} e^{-3x+2}\,dx &= \frac{1}{3}e^2\,(k+1) = 1 \\ k &= -\frac{1}{e^2}\left(e^2 - 3\right) = -0{,}593\,994 \end{aligned}$$

2. Pruebe que $F_X(y) = (k+1)\left(\frac{1}{3}e^2 - \frac{1}{3}e^{2-3y}\right)$ para $y \in \mathbb{R}^+$.

$$F_X(y) = (1+k)\int_0^y e^{-3x+2}\,dx = (k+1)\left(\frac{1}{3}e^2 - \frac{1}{3}e^{2-3y}\right)$$

3. Calcule $P(3 < X < 5)$ (este valor puede expresarlo en términos de k)

$$\begin{aligned} & P(3 < X < 5) = F_X(5) - F_X(3) \\ = \quad & (k+1)\left(\frac{1}{3}e^2 - \frac{1}{3}e^{2-15}\right) - (k+1)\left(\frac{1}{3}e^2 - \frac{1}{3}e^{2-9}\right) \\ = \quad & \frac{1}{3}(k+1)\left(e^{-7} - e^{-13}\right) = 3.03207 \times 10^{-4}(k+1) \end{aligned}$$

2. Parámetros en una Distribución Continua

Al igual que las distribuciones discretas, para una distribución continua se pueden definir la *media* y la *varianza.*

Las definiciones y teoremas son prácticamente los mismos que los vistos para variables discretas con la distinción de que esta sección se usa integrales en lugar de sumas.

Definición 2.

Si X es una variable aleatoria continua se denota la media o esperanza de X

$$\mu_X \quad \text{o bien por} \quad E(X)$$

Y se define por

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx, \tag{1}$$

con la condición de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\,dx < \infty.$$

Ejemplo 2.

Determine la esperanza de una variable aleatoria continua X con distribución de probabilidad de la forma

$$f_X(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & : \quad \text{Para } x > 0 \\ 0 & : \quad \text{En cualquier otro caso} \end{cases},$$

Solución Usando integración por partes, se tiene que:

$$\begin{aligned}\mu_X &= \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx \\ &= \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x}\,dx \\ &= \left(-xe^{-\lambda x}\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx \\ &= -xe^{-\lambda x} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Bigg|_0^\infty \\ &= \frac{1}{\lambda}.\end{aligned}$$

Definición 3.

Si $h(x)$ es una función real y X es una variable aleatoria continua se tiene que

$$E(h(X)) = \mu_{h(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x)\,dx, \tag{2}$$

con la condición de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x_i)| f_X(x_i)\,dx < \infty.$$

Definición 4.

Si X es una variable aleatoria con distribución de probabilidad f_X, y media μ_X se denota la varianza de X como

$$\sigma_X^2 \quad \text{o bien} \quad VAR(X)$$

y se define como $E((X-\mu_X)^2)$.

Note que la varianza de una variable aleatoria es

$$\sigma_X^2 = \mu_{(X-\mu_X)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 f_X(x)\,dx. \tag{3}$$

Similarmente a variables discretas, se puede demostrar el siguiente teorema.

Teorema 2.

Si X es una variable aleatoria continua cuya media y varianza existen se tiene que $VAR(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Ejemplo 3.

Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x^2} & \text{si } 1 \leq x \leq 15 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

1. Determine el valor de k.
2. Calcule $P([-2 < X \leq 5])$.
3. Calcule $VAR(X)$.

Solución

1. Dado que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{x^2}\,dx = \frac{-k}{x}\Big|_1^{15} = \frac{-k}{15} - \frac{-k}{1} = \frac{14k}{15}$, k debe ser $\frac{15}{14}$.
2. $\displaystyle P([-2 < X \leq 5]) = \int_1^5 \frac{15}{14x^2}\,dx = \frac{15}{4}\left(-\frac{1}{5}+1\right) = \frac{6}{7}$.
3. $\displaystyle E(X) = \int_1^{15} x\frac{15}{14x^2}\,dx = \int_1^{15} \frac{15}{14x}\,dx = \frac{15}{14}(\ln(15)-\ln(1)) = \frac{15}{14}\ln(15)$,

$$E(X^2) = \int_1^{15} x^2\frac{15}{14x^2}\,dx = \int_1^{15} \frac{15}{14}\,dx = 15,$$

$$VAR(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 15 - \left(\frac{15}{14}\ln(15)\right)^2.$$

Las propiedades fundamentales de la esperanza y variancia son las mismas que las vistas para variables discretas.

Teorema 3.

Si X y Y son variables aleatorias continuas y c es una constante, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. El valor esperado de una variable aleatoria constante es la misma constante.

$$\mu_c = c.$$

2. El valor esperado de una variable aleatoria multiplicada por una constante es la constante por el valor esperado de la variable.

$$\mu_{(cX)} = c\mu_X.$$

3. El valor esperado de una suma de dos variables aleatorias es la suma de los valores esperados de las variables.

$$\mu_{X+Y} = \mu_X + \mu_Y.$$

Teorema 4.

Si X y Y son variables aleatorias continuas independientes cuyas varianzas existen y c es una constante, se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. La varianza de una variable aleatoria constante es cero.

$$VAR(c) = 0.$$

2. La varianza de una variable aleatoria multiplicada por una constante es la constante al cuadrado por la varianza de la variable.

$$VAR(cX) = cVAR(X).$$

3. La varianza de una suma de dos variables aleatorias es la suma de las varianzas de las variables.

$$VAR(X+Y) = VAR(X) + VAR(Y).$$

Definición 5.

Si X es una variable aleatoria continua se llama función generadora de momentos a la esperanza de e^{tX} y se denota por $m_X(t)$, es decir:

$$m_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f_X(x)\, dx. \tag{4}$$

Teorema 5.

Si X es una variable aleatoria con función generadora de momentos $m_X(t)$ se tiene que

$$m_X^{(n)}(0) = E(X^n). \tag{5}$$

Ejemplo 4.

Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-5}} & si \quad 0 < x < 5 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

1. Determine la función generadora de momentos de X : $m_X(t)$ para $t < 1$.
2. Utilice lo anterior para determinar $E(X)$.
3. Determine $E\left(e^{-3x}\right)$.

Solución

1. Determine la función generadora de momentos de X : $m_X(t)$ para $t < 1$.

$$\int_0^5 \frac{e^{-x}}{1-e^{-5}} dx = 1$$

$$\begin{aligned} m_x(t) &= E\left(e^{xt}\right) = \int_0^5 \frac{e^{-x}e^{xt}}{1-e^{-5}} dx = \frac{1}{1-e^{-5}} \int_0^5 e^{(t-1)x} dx \\ &= \frac{1}{1-e^{-5}} \left. \frac{e^{(t-1)x}}{t-1} \right|_0^5 = \frac{1}{1-e^{-5}} \left(\frac{e^{5(t-1)}-1}{t-1} \right) \end{aligned}$$

2. Utilice lo anterior para determinar $E(X)$.

$$m'(t) = \frac{1}{1-e^{-5}} \frac{\left(5e^{5(t-1)}\right)(t-1) - \left(e^{5(t-1)}-1\right)}{(t-1)^2},$$

$$E(X) = m'(0) = \frac{1}{1-e^{-5}} \frac{-5e^{-5} - \left(e^{-5}-1\right)}{1} = \frac{-6e^{-5}+1}{-e^{-5}+1} \approx 0{,}966\,082$$

3. Determine $E\left(e^{-3x}\right)$.

$$E\left(e^{-3x}\right) = m_x(-3) = \frac{1}{1-e^{-5}} \left(\frac{e^{5(-3-1)}-1}{-3-1} \right) = \frac{e^{-20}-1}{4\left(e^{-5}-1\right)} \approx 0{,}251\,696$$

3. Ejercicios propuestos

1. Una variable X es tal que distribuye de acuerdo a:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{15} & \text{si } 1 < x < 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a) Determine la función generadora de momentos.

   Solución:

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{2}{15} x e^{tx}\, dx &= \frac{2}{15}\left[\frac{x e^{tx}}{t} - \frac{1}{t^2} e^{tx}\right]_1^4 \\ &= \frac{2}{15}\left[\frac{4e^{4t}}{t} - \frac{e^{4t}}{t^2} - \frac{e^t}{t} + \frac{e^t}{t^2}\right] \end{aligned}$$

   b) Use la definición de media para calcular μ_X.

   Solución:

$$\int_1^4 \frac{2}{15} x^2\, dx = \frac{2}{15} \frac{x^3}{3}\bigg|_1^4 = \frac{2}{15}\left[\frac{64}{3} - \frac{1}{3}\right] = \frac{42}{15}$$

2. Suponga que una variable aleatoria X se distribuye de acuerdo a la distribución de probabilidad siguiente:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x^3} & \text{si } 4 < x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a) Determine el valor de k

   Solución:

$$\int_4^\infty \frac{k}{x^3}\, dx = \frac{kx^{-2}}{-2}\bigg|_4^\infty = \frac{k}{32}$$

   Por lo que $k = 32$.

b) Determine la distribución de probabilidad acumulada para X, $F_X(x)$.

Solución:

$$P[x \leq w] = \int_4^w \frac{32}{x^3}\,dx = \left.\frac{-32}{2x^2}\right|_4^w = \frac{-16}{w^2} + 1$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 4 \\ 1 - \dfrac{16}{x^2} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

3. Sea X una variable aleatoria cuya función de densidad se da por la fórmula:

$$f(x) = \begin{cases} \beta \cdot x & \text{si } 0 < x < 4 \\ \dfrac{4}{3} \cdot x^{-2} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

a) Determine el valor de β para que $f(x)$ sea una función de distribución de probabilidad.

Solución:
Para determinar el valor de β para que $f(x)$ sea una función de distribución de probabilidad debe resolverse la identidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

Dadas las condiciones del problema esto equivale a:

$$\int_0^4 \beta x\,dx + \int_4^\infty \frac{4}{3} \cdot x^{-2}\,dx = 1 \Rightarrow \beta \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^4 + \lim_{M\to\infty} \left.\frac{4x^{-3}}{-9}\right|_4^M = 1$$

Esto conduce a la ecuación $8\beta + \frac{1}{144} = 1$ de donde sale β.

b) Determine la distribución acumulada de X.

Solución:
Se calcula de acuerdo a la definición:

$$F(x) = \begin{cases} \beta \dfrac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x < 4 \\ 8\beta + \left(\dfrac{4x^{-3}}{-9} + \dfrac{1}{144}\right) & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

c) Calcule $P(3 \leq X \leq 7)$.

Solución:
Calcule $F(7) - F(3)$

4. Determine la función generadora de momentos para una distribución continua uniforme en el intervalo $[a, b]$.

Solución:

$$M_X(t) = \int_a^b \frac{1}{b-a} e^{tx}\, dx = \frac{e^b - e^a}{t(b-a)}$$

Puede usted obtener la media usando la generadora de momentos.

5. El tiempo de reacción en segundos a cierto estímulo es una variable aleatoria continua con distribución

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2} & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Obtenga la probabilidad de que el tiempo de reacción sea inferior a 2,5 segundos.

Solución:

$$\int_1^{2,5} \frac{1}{x^2}\, dx$$

b) Obtenga la probabilidad de que el tiempo de reacción esté entre 1,5 y 2,5 segundos.

Solución:

$$\int_{1,5}^{2,5} \frac{1}{x^2}\, dx$$

c) ¿Cuál es el tiempo esperado de reacción?

Solución:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$$

6. Suponga que una variable aleatoria discreta X se distribuye de acuerdo a la distribución de probabilidad siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} kn^2 & \text{si } 0 \leq n \leq 20 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Determine el valor de k

  Solucin:
  Tenemos $1 = k(1+4+9+\cdots+n^2)$ y esa suma da $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ y despeja k

- Determine la probabilidad de que X sea superior a 6

  Solucin:

$$1-(k)(1+4+9+16+25+36)$$

7. Una persona recibe un tratamiento, una pastilla por ejemplo. Por muchos años de estudio y estadísticas se sabe que el tiempo que tarda un persona en reaccionar es una variable aleatoria, en minutos, cuya distribución de probabilidad de de la forma $f_X(x) = \frac{1}{x^2}$ si $x > 2$ y 0 en cualquier otro caso.

   a) ¿Es correcta la distribución de probabilidad enunciada anteriormente?

   Solución:
   Para estar seguros de que esto es en realidad un distribución de probabilidad, pues bien bastaría con chequear que

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1$$

   lo cual es cierto pues

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{M\longrightarrow\infty} \int_1^M \frac{dx}{x^2} = \lim_{M\longrightarrow\infty} (\frac{-1}{M} - \frac{-1}{1}) = 1$$

   b) Determine la probabilidad de que una persona elegida al azar reaccione antes de dos horas.

   Solución:
   Tenemos:

$$P[X < 120] = \int_1^{120} \frac{dx}{x^2} = (\frac{-1}{120} - \frac{-1}{1}) = \frac{119}{120}$$

8. Una función $f_X(x)$ tiene la forma.

$$f_X(n) = \begin{cases} ke^{-2x} & \text{Si} \quad x \in [0,6] \\ 0 & \text{Otros Casos} \end{cases}$$

Determine el valor de k para que f_X sea distribución de probabilidad y determine la probabilidad de que X sea mayor que 3.

Solución:

La condición necesaria es que

$$1 = \int_0^6 ke^{-2x} = k\left(\frac{e^{-12}}{-2} - \frac{1}{-2}\right)$$

de allí $k = \frac{2}{1-e^{-12}}$

El segundo ejercicio es similar y da

$$\frac{2}{1-e^{-12}}\left(\frac{e^{-12}}{-2} - \frac{e^{-6}}{-2}\right)$$